Caracteres de los grupos simétricos

Juan Carlos Graus Laporta
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Dirigido por: **Concepción María Martínez Pérez**

Junio de 2024

Resumen

La *teoría de representaciones* es una herramienta muy útil que nos ayuda a entender de manera muy intuitiva cómo puede actuar un grupo sobre un espacio vectorial. Se trata básicamente de asignarle a cada elemento del grupo una matriz a través de un homomorfismo al que llamamos *representación del grupo* y ver cómo estas matrices actúan sobre un espacio vectorial al que llamamos *módulo de la representación*.
En el primer capítulo, revisitamos algunos conceptos de álgebra lineal, desde los más sencillos hasta otros más abstractos. También vamos a introducir un concepto muy relevante para el resto del trabajo: los módulos irreducibles, que son las piezas con las que más adelante podremos construir cualquier módulo. Probaremos que cualquier módulo está compuesto por módulos irreducibles de manera única (salvo isomorfismo). Para grupos abelianos, veremos que los módulos irreducibles tienen todos dimensión 1. Después, nos centramos en el grupo no abeliano más pequeño que hay: S_3. Además, este ejemplo nos servirá como excusa para presentar algunas de las representaciones más relevantes de los grupos simétricos, como la *representación trivial*, *la alternada* o la *representación por permutaciones*. Después, armados únicamente con estos conocimientos, descomponemos un módulo de una representación arbitraria de S_3 y ponemos un ejemplo práctico, la *representación regular*.
Como podremos ver, necesitaremos una teoría un poco más sofisticada para poder analizar las componentes irreducibles de una representación dada. Para ello, en el segundo capítulo, introducimos el concepto de *carácter de una representación*; que es básicamente la traza de las matrices asociadas a la representación. No solo porque nos interesa mucho conocer los valores propios de estas matrices, sino que, por ejemplo, en el caso de las matrices que representan permutaciones, conocer la traza equivale a conocer cuántos elementos deja fijos un elemento del grupo en cuestión. Además, el carácter tiene muchas propiedades que están muy relacionadas con las representaciones irreducibles y que de cierta manera nos garantizan cierta ortonormalidad. Esta propiedad nos será muy útil cuando construyamos la *tabla de caracteres*, en nuestro caso de los grupos simétricos S_3 y S_4. En este tipo de tablas se recoge mucha información de manera muy resumida sobre las representaciones irreducibles, las clases de conjugación del grupo y qué papel juegan los caracteres realmente. El resultado más relevante de este capítulo es que hay tantas representaciones irreducibles como clases de conjugación.
En el tercer y último capítulo, nos centramos en las representaciones de grupos simétricos S_d. En este caso, el número de clases de conjugación es exactamente el número de particiones de d. Para representar las particiones, utilizamos lo que se conoce como 'diagramas de Young', que es una manera de visualizar las particiones de manera más clara y directa. Aunque no lo parezca, estas representaciones gráficas nos van a ayudar a definir una serie de elementos de la correspondiente álgebra grupo mediante las cuales podremos obtener las representaciones irreducibles directamente.
El principal objetivo de este trabajo es acercar la teoría de las representaciones a un público general dentro del ámbito matemático no especializado en el tema. Por ello se ven muchos ejemplos y se demuestran la mayor parte de fórmulas y otros resultados de manera muy explícita. La estructura de este trabajo está ampliamente basada en los capítulos 2, 3 y 4 del libro 'Representation Theory', de W. Fulton y J. Harris. [3]

Abstract

Representation theory is a very useful tool that helps us understand how a group can act on a vector space in a very intuitive way. It basically involves assigning to each element of the group a matrix through a homomorphism that we call a *group representation* and observing how these matrices act on a vector space that we call the *representation module*.

In the first chapter, we revisit some linear algebra concepts, from the simplest to the more abstract ones. We will also introduce a very relevant concept for the rest of the essay: the notion of irreducible modules, which are the pieces with which we can later construct any module. We will prove that any module is uniquely composed of irreducible modules (up to isomorphism). For abelian groups, we will show that irreducible modules are 1-dimensional. Therefore, we focus on the smallest non-abelian group: the symmetric group S_3. Additionally, this example will serve as an excuse to present some of the most relevant representations of symmetric group, such as the *trivial representation*, the *alternating representation*, or the *permutation representation*. Then, armed with nothing but this knowledge, we decompose a module of an arbitrary representation of S_3 and provide a practical example, the *regular representation*.

As we will see, we will need a slightly more sophisticated theory to be able to analyze the irreducible components of a given representation. To do this, in the second chapter, we introduce the concept of the *character of a representation*; which is basically the trace of the matrices associated with the representation. Not only because we are very interested in knowing the eigenvalues of these matrices, but also, for example, in the case of matrices representing permutations, knowing the trace is equivalent to knowing how many elements a group element fixes. Moreover, the character has many properties that are closely related to irreducible representations and, in a way, guarantee a certain orthonormality. This property will be very useful when we construct the *character table*, in our case for the symmetric groups S_3 and S_4. In this type of table, a lot of information is summarized about irreducible representations, the conjugacy classes of the group, and what role the characters actually play. The most relevant result of this chapter is that there are as many irreducible representations as conjugacy classes.

In the third and final chapter, we focus on the representations of symmetric groups S_d, as we know that the number of conjugacy classes is exactly the number of partitions of d. For those groups, we use what are known as *Young diagrams*, which is a way to visualize the partitions more clearly and directly. Although it may not seem so, these graphical representations will help us devise a series of constructions, closely related to the concept of group algebra, from which we can directly obtain the irreducible representations.

The main objective of this work is to bring the theory of representations closer to a general audience within the mathematical field who are not specialized in the subject. Therefore, many examples are shown, and most formulas and other results are proven very explicitly. The structure of this essay is widely based on the chapters 2, 3 and 4 from the book 'Representation Theory'by W. Fulton and J. Harris [3]

Índice general

Capítulo 1

Representación de grupos finitos

1.1. Definición y propiedades

Definición 1.1. Sea G un grupo finito y V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. Una representación de G es un homomorfismo
$$\rho : G \to GL(V)$$
siendo $GL(V)$ el grupo lineal general de V entendido como el conjunto de las matrices invertibles nxn con $n = dimV$ y con el producto habitual. Es decir, ρ asigna a cada elemento de G una matriz invertible. Además, dada una representación como antes, si fijamos una base de V podemos identificar cada $v \in V$ con sus coordenadas (en columna) y entonces, dado $g \in G$, podemos multiplicar $\rho(g)(v)$ y obtenemos de nuevo un elemento de V. Esto define una acción de G en V y decimos que V es el módulo asociado (o G-módulo). Se tiene, $\forall v_1, v_2 \in V$ y $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$,

$$\rho(g)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \rho(g)(v_1) + \lambda_2 \rho(g)(v_2)$$

y
$$\rho(gh)(v) = \rho(g)(\rho(h)v)$$

En este trabajo escribiremos en la mayoría de los casos

$$gv := \rho(g)(v)$$

reservando el uso de ρ para cuando queramos hacer hincapié en la naturaleza de matriz de $\rho(g)$ o, sobretodo en esta primera parte, para cuando haya mucha ambigüedad y estemos trabajando con módulos diferentes (y diferentes representaciones). De forma equivalente, si V es un G-módulo, es decir, un espacio vectorial con una acción de G tal que

$$g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 g v_1 + \lambda_2 g v_2$$

y
$$(gh)(v) = g(hv),$$

fijando una base de V se tiene una representación.

Definición 1.2. Sea G un grupo finito y $\rho_1 : G \to GL(V)$ y $\rho_2 : G \to GL(W)$ dos representaciones de G. Llamamos aplicación G-lineal o simplemente G-aplicación entre módulos V y W a una aplicación $\phi : V \to W$ que cumple que

$$\phi(\rho_1(g)(v)) = \rho_2(g)(\phi(v)) \quad \forall g \in G, v \in V$$

Aunque sea muy ambiguo, en ocasiones ρ_1 y ρ_2 se sobreentienden. Por tanto, podemos reescribir la propiedad anterior como:
$$\phi(gv) = g\phi(v)$$

Ejemplo 1.3. Para el grupo cíclico de orden n, $C_n =< g >$, tenemos que $g^n = 1$. Eso implica que $\rho(g)^n = 1$ para cualquier representación. Entonces si $v \in V$ es un vector propio de la matriz $\rho(g)$ valor poropio λ, siendo V el módulo de la representación, se tiene:

$$\rho(g^n)(v) = \lambda^n \cdot v = v$$

Con lo cual los valores propios de la matriz asociada por la representación a cualquier elemento son raíces n-ésimas de la unidad.

1. Consideramos la siguiente representación ρ_1 con módulo el espacio vectorial $\mathbb{C}$:

$$\rho_1 : C_n \to GL(\mathbb{C})$$

$$g \mapsto \zeta$$

donde ζ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad. Entonces $\rho_1(g)(v_1) = gv_1 = \zeta v_1$ para cualquier $v_1 \in \mathbb{C}$.

2. La siguiente es una representación ρ_2 para el grupo C_4 con el espacio $\mathbb{C}^2$ como módulo

$$\rho_2 : C_4 \to GL(\mathbb{C}^2)$$

$$g \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

así, $\rho_2(g)(v_2) = gv_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_2$ con $v_2 \in \mathbb{C}^2$.

Vamos a ver que se pueden obtener módulos a partir de otros, para eso, primero vamos a definir y ver algunas construcciones de álgebra lineal.

Definición 1.4. Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo K.

1. [7] Llamamos producto tensorial $V \otimes_K W$ sobre K al espacio vectorial que tiene por base vectores de la forma $e_i \otimes_K f_j$ con $e_i \in V$ y $f_j \in W$ vectores de una base de V y W respectivamente. Además, $\forall v_1, v_2 \in V$, $\forall w_1, w_2 \in W$ y $\forall c \in K$ se cumplen las siguientes propiedades:

   a) $(v_1 + v_2) \otimes_K w_1 = v_1 \otimes_K w_1 + v_2 \otimes_K w_1$

   b) $v_1 \otimes_K (w_1 + w_2) = v_1 \otimes_K w_1 + v_1 \otimes_K w_2$

   c) $c(v_1 \otimes_K w_1) = cv_1 \otimes_K w_1 = v_1 \otimes_K cw_1$

   A lo largo de este trabajo, como todos los son espacios vectoriales son complejos y de dimensión finita, usaremos la notación $V \otimes W := V \otimes_{\mathbb{C}} W$ y tendremos que $dim(V \otimes W) = dimV \cdot dimW$

2. La potencia exterior n-ésima de V, denotada $\wedge^n V$, corresponde al cociente de $V^{\otimes n}$ con el subespacio generado por los elementos de la forma $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ con v_i=v_j para algún $i \neq j$. Para $n = 2$, el cuadrado exterior $\wedge^2 V$ tiene como base $\{e_i \wedge e_j | i < j\}$ con $\{e_i\}$ base de V

3. Llamamos $Hom(V,W)$ al espacio vectorial de las aplicaciones lineales que van de V en W, sobre $K = \mathbb{C}$ en nuestro caso. Es espacio vectorial con la suma $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ y producto por escalar $(cf)(v) = c(f(v))$ para $f, g \in Hom(V,W)$, $v \in V$ y $c \in \mathbb{C}$.

4. El espacio dual de V es $V^* = Hom(V,\mathbb{C})$. Como en nuestro caso V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita, podemos denotar los elementos $v^* \in V^*$ mediante matrices fila.

Definición 1.5. [8] El producto de Kronecker de dos matrices A n_1 x m_1 y B n_2 x $m_2$se define como:

$$A \otimes B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11}B & A_{12}B & \dots & A_{1m_1}B \\ \hline A_{21}B & A_{22}B & \dots & A_{2m_1}B \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline A_{n_11}B & A_{n_12}B & \dots & A_{nm_1}B \end{array} \right)$$

De hecho, si llamamos V al espacio formado por las matrices n_1 x m_1 y W al de las matrices n_2 x $m_2$mediante el producto de Kronecker, podemos identificar el espacio de las matrices n_1n_2 x m_1m_2 con $V \otimes W$.

Proposición 1.6. *Sean V y W espacios vectoriales complejos de dimensión finita $dimV = n$ y $dimW = m$. Entonces, $Hom(V,W) \cong V^* \otimes W$.*

Demostración. Sea $\{v_i\}$ una base de V y $\{v_i^*\}$ la base del dual de V^* (es decir, $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ con δ_{ij} la delta de Kronecker y $\{w_j\}$ una base de W. Construimos el homomorfismo

$$\Phi : V^* \otimes W \to Hom(V,W)$$

tal que para cada $u \in V$ se tiene que $\Phi(v^* \otimes w)(u) = w[v^*(u)]$ [1]. Extendemos por linealidad, de forma que para un elemento de $V^* \otimes W$ de la forma $\sum_{i,j} c_{ij}(v_i^* \otimes w_j)$

$$\Phi(\sum_{i,j} c_{ij}(v_i^* \otimes w_j))(u) = (\sum_{i,j} c_{ij}w_j(v_i^* u).$$

Primero, veamos que es inyectivo. Supongamos que $\sum_{i,j} c_{ij}(v_i^* \otimes w_j) \in Ker\Phi$ y supongamos que no todos los c_{ij} son 0. Tenemos que

$$(\sum_{i,j} c_{ij}w_j(v_i^* v)) = 0 \quad \forall v \in V \implies (\sum_{i,j} c_{ij}w_j(v_i^* v)) = \sum_j w_j(\sum_i c_{ij}v_i^* v) = 0.$$

Si para algún v no todos los $\sum_i c_{ij}v_i^* v$ son 0, entonces significaría que los $\{w_j\}$ son linealmente dependientes, que es una contradicción por hipótesis. Entonces son cero para todo v, es decir,

$$(\sum_i c_{ij}v_i^*) \equiv 0 \quad \forall j = 1,...,m$$

lo cual es una contradicción porque los $\{v_i^*\}$ son linealmente independientes. Por lo tanto $Ker\Phi = 0$. Para la suprayectividad, cogemos un $g \in Hom(V,W)$, construimos $\sum_i v_i^* \otimes g(v_i)$ y vemos que

$$\Phi(\sum_i v_i^* \otimes g(v_i))(v) = \sum_i g(v_i)(v_i^* v) = g(\sum_i v_i(v_i^* v))$$

Como v_i es base de V, se tiene que para cualquier v, $v = \sum_{i=1} \alpha_i v_i$ y $v_i^* v = \alpha_i$, luego

$$\sum_i v_i(v_i^* v) = \sum_{i=1} \alpha_i v_i = v,$$

es decir,

$$\Phi(\sum_i v_i^* \otimes g(v_i))(v) = g(v).$$

Por tanto, es un isomorfismo.

□

Definición 1.7. Un submódulo de V es un subespacio vectorial $W \subset V$ que es invariante bajo la acción de G.

Proposición 1.8. *Sean V y W G-módulos con $\rho_1 : G \to GL(V)$ y $\rho_2 : G \to GL(W)$ sus respectivas representaciones. Entonces los siguientes espacios tienen estructura de G-módulo:*

i) $V \oplus W$ *con* $\rho_{V\oplus W}(g)(v,w) = (\rho_1(g)(v), \rho_2(g)(w))$ *y y* $V \otimes W$ *con y* $\rho_{V\otimes W}(g)(v\otimes w) = \rho_1(g)(v) \otimes \rho_2(g)(w)$.

ii) Si U *es un submódulo de* V*, entonces el espacio cociente* V/U *es también un G-módulo con* $\rho_{V/U}(g)([v]) = [\rho_1(g)(v)]$.

iii) $\bigwedge^2 V$ *es un G-módulo.*

iv) El espacio dual $V^* = Hom(V,\mathbb{C})$ *con* $\rho^*(g) = \rho_1(g^{-1})^T$.

v) El espacio de homomorfismos de V *en* W $Hom(V,W)$ *es un G-módulo.*

Demostración. (i) Hay que probar que $\rho_{V\oplus W}$ y $\rho_{V\otimes W}$ son homomorfismos de grupos, esto se deduce fácilmente teniendo en cuenta que ρ_1 y ρ_2 lo son. También es fácil comprobar que con el producto de Kronecker $\rho_{V\otimes W}(g) = \rho_1(g)\otimes\rho_2(g)$. (ii) Tenemos que en V/U los elementos son de la forma $[v] := \{v+u \in V | u \in U\}$. Primero hay que comprobar que $\rho_{V/U}$ está bien definido, es decir, que $\forall g \in G$ si $v_2 \in [v_1]$, entonces $\rho_{V/U}(g)(v_2) \in [\rho_1(g)(v_1)]$, esto es equivalente a

$$v_1 - v_2 \in U \implies \rho_1(g)(v_1 - v_2) = rho_1(g)(v_1) - rho_1(g)(v_2) \in U,$$

puesto que U es submódulo. Ahora solo faltaría ver que $\rho_{V/U}$ es un homomorfismo de grupos (lo cual es trivial). (iii) Recordamos que la Definición 1.4 dice que $\bigwedge^2 V = V^{\otimes 2}/U$, siendo $U =< v\oplus v | v \in V >$. Entonces con probar que U es submódulo podemos aplicar el anterior punto y esto es fácil de ver ya que, para cualquier $g \in G$, $\rho_{V\otimes V}(g)(v\otimes v) = \rho_1(g)(v)\otimes\rho_1(g)(v) \in U$.
(iv) Primero vemos que, para $v^* \in V^*$ y $g \in G$, $gv^* \in Hom(V,\mathbb{C})$ es el elemento dado por $(gv^*)u = v^*(g^{-1}u)$. El motivo por el que introducimos g^{-1} es que es necesario para que se cumpla $(hg)v^* = h(gv^*)$, ya que

$$h(gv^*)(u) = (gv^*)(h^{-1}u) = v^*(g^{-1}h^{-1}u) = v^*((hg)^{-1}(u) = ((hg)v^*)(u)$$

Para definir la representación asociada, tomamos $\{v_i\}$ base de V y $\{v_i^*\}$ la base dual. $\rho^*(g)$ tiene por columna j las coordenadas en $\{v_i^*\}$ del vector gv_i^*. La coordenada i-ésima es $(gv_j^*)(v_i) = v_j^*(g^{-1}v_i)$ que es igual a la columna i, fila j de $\rho^*(g^{-1})$. Esto significa que la entrada (i,j) de $\rho^*(g)$ es igual a la entrada (j,i) de $\rho(g^{-1})$, luego $\rho^*(g) = \rho(g^{-1})^T$.
(v) Hom(V,W) es un módulo porque, como hemos visto en la proposición anterior $Hom(V,W) \cong V^* \otimes W$. □

Definición 1.9. Un módulo es irreducible si no contiene submódulos no nulos. Análogamente, una representación es irreducible si lo es el módulo asociado.

Ejemplo 1.10. En el Ejemplo 1.3, sean w_1 y w_2 los vectores propios de $\rho_2(g)$, $W_1 =< w_1 >$ y $W_2 =< w_2 >$ son submódulos de $\mathbb{C}^2$ para $G = C_4$. Además son irreducibles trivialmente porque tienen $dimW_1 = dimW_2 = 1$.

1.2. Existencia y unicidad de la descomposición

Nos queremos centrar en los módulos irreducibles. Vamos a ir viendo distintos resultados para ver que las respresentaciones se pueden descomponer en submódulos irreducibles de manera única.

Proposición 1.11 (Teorema de Maschke)**.** *Si* G *es un grupo finito,* V *un G-módulo y* W *un submódulo de* V*, entonces* $\exists W'$ *un submódulo de* V *complementario a* W *tal que* $V = W \oplus W'$.

Demostración. Sea $\rho_V : G \to GL(V)$ la representación de G con módulo V. Tomamos $\pi_0 : V \to V$, tal que Im$\pi_0 = W$ y $\pi_0(w) = w \quad \forall w \in W$, es decir, una proyección sobre W. Hacemos el promedio sobre G:

$$\pi(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_V(g)(\pi_0(\rho_V(g^{-1})v))$$

Como W es submódulo, $\pi(v) \in W$ para todo $v \in V$. Además, si $v \in W$, $\rho_V(g^{-1})v \in W$ y $\pi_0(\rho_V(g^{-1})v)) = \rho_V(g^{-1})v$. Entonces,

$$\pi(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho_V(g)(\rho_V(g^{-1})v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} v = v,$$

es decir, es también una proyección. Ahora, tomando $h \in G$ (y obviando ρ_V):

$$\pi(hv) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\pi_0((g^{-1})hv) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} hh^{-1}g\pi_0((g^{-1})hv) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G} hf\pi_0((f^{-1}v) = h\pi(v).$$

Esto implica que π es G-lineal y como es fácil ver (y demostraremos en la Proposición 1.13), $Ker\pi = W'$ también es invariante por G y además $V = W \oplus W'$. Está demostración vale para cualquier cuerpo con característica que no divida a $|G|$, ya que eso es precisamente lo que hemos necesitado para construir π. □

Reiterando este proceso, podemos descomponer cualquier módulo en submódulos hasta llegar a módulos irreducibles. Para ver que esta descomposición es única, nos hará falta ver algunos resultados primero.

Lema 1.12. *Sea $\phi : V \to V$ un automorfismo donde V es un espacio vectorial finito sobre $\mathbb{C}$. Entonces:*

i) ϕ tiene algún valor propio, es decir, $\exists\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Ker(\phi - \lambda I) \neq 0$, con I la identidad en V.

ii) Si $\exists k$ con $\phi^k = I$, ϕ es diagonalizable, es decir, existe una base de V de vectores propios de ϕ.

Demostración. (i) Se sigue de que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, es decir, todo polinomio no constante con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$. Entonces, el polinomio característico de ϕ tiene al menos una raíz, por lo que $\exists\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $det(\phi - \lambda I) = 0$. Por tanto, $Ker(\phi - \lambda I) \neq 0$.
(ii) Si A es la matriz de ϕ, entonces A hace cero el polinomio $p(X) = X^k - 1$. Entonces, el polinomio mínimo de A, $\mu_A(X)$ necesariamente divide a $p(X)$. Como las raíces de $p(X)$ son las raíces k-ésimas de la unidad, podemos escribir $p(X) = (X-1)(X-\varepsilon)(X-\varepsilon^2)\dots(X-\varepsilon^{k-1})$ siendo ε una raíz k-ésima primitiva de la unidad. Como $\mu_A(X)$ divide a $p(X)$, las multiplicidades algebraicas de los valores propios en el polinomio mínimo también son 1. Consideramos la forma canónica de Jordan J de la matriz A,

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & & & 0 \\ & J_1 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & J_{k-1} \end{pmatrix}$$

con J_i el bloque de Jordan con ε^i en la diagonal. Como en el polinomio mínimo todas las raíces tienen multiplicidad 1, cada bloque J_i anula $X - \varepsilon^i$. Por tanto cada bloque de Jordan es de la forma $\varepsilon^i I_{n_i}$ con I_{n_i} la matriz identidad de dimensión n_i y $\sum_{i=1}^k n_i = n$. Entonces, la matriz J es completamente diagonal. Por tanto A es diagonalizable. □

Lema 1.13 (Lema de Schur)**.** *Sean V y W módulos irreducibles de G y $\phi : V \to W$ una aplicación G-lineal, entonces:*

i) Si $\phi \not\equiv 0$, ϕ es un isomorfismo.

ii) Si $V = W$, entonces $\phi \equiv \lambda \cdot I$ para un $\lambda \in \mathbb{C}$ con I la aplicación identidad.

Demostración. (i) Vemos primero que Imϕ es un subespacio de W invariante por G. Sea $w = \phi(v)$ con $v \in V$ y $g \in G$, como ϕ es G-lineal:

$$gw = g\phi(v) = \phi(gv) \in \mathrm{Im}\phi$$

Entonces $\mathrm{Im}\phi$ es un subespacio invariante de W, pero como W es irreducible, eso implica que o bien $\mathrm{Im}\phi = W$ ó $\mathrm{Im}\phi = 0$, es decir, o bien es suprayectiva o bien $\phi \equiv 0$.

En el caso de que no sea nula, vemos ahora que $\mathrm{Ker}\phi$ también es invariante. Sea $v \in \mathrm{Ker}\phi$:

$$\phi(gv) = g\phi(v) = 0 \implies gv \in \mathrm{Ker}\phi$$

Como V es irreducible y $\phi \not\equiv 0$, $\mathrm{Ker}\phi = 0$. Por tanto ϕ es un isomorfismo.
(ii) Por el Lema 1.13, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Ker}(\phi - \lambda I) \neq 0$. Por (i) tenemos que $\phi - \lambda I \equiv 0 \implies \phi = \lambda \cdot I$. □

Proposición 1.14. *Para cualquier G-módulo V con G un grupo finito, hay una descomposición:*

$$V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \ldots \oplus V_k^{\oplus a_k}$$

donde los V_i son irreducibles no isomorfos dos a dos, la descomposición es única salvo el orden y cada V_i tiene multiplicidad a_i.

Demostración. Primero, podemos descomponer en irreducibles iterando la Proposición 1.11. Si W es otro G-módulo que se puede descomponer en $W = \oplus W_j^{\oplus b_j}$ y $\phi : V \to W$ una aplicación entre módulos; entonces, utilizando el Lema de Schur (Lema 1.13), ϕ debe llevar cada factor $V_i^{\oplus a_i}$ al factor $W_j^{\oplus b_j}$ para el cual $V_i \cong W_j$. Cuando se aplica esto a la identidad de V en V, obtenemos la unicidad. □

1.3. Algunos ejemplos

Vamos a aplicar lo visto hasta ahora con unos ejemplos. Primero empezaremos con la representación de grupos abelianos, aunque antes necesitaremos demostrar un teorema sobre las matrices que conmutan.

Teorema 1.15. *[5] Sean A, B matrices cuadradas diagonalizables de dimensión n. Entonces A y B conmutan si y solo si $\exists S$ invertible tal que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ son diagonales.*

Demostración. Si A y B conmutan, consideramos la matriz invertible Q tal que $Q^{-1}AQ$ es diagonal con los valores propios ordenados por bloques, es decir, sean $\lambda_1, ..., \lambda_d$ los valores propios sin repetir y I_{n_i} matrices identidad de dimensión n_i, siendo n_i la multiplicidad de λ_i:

$$D_A = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & 0 \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \lambda_d I_{n_d} \end{pmatrix}$$

Entendemos D_A como una matriz por bloques $D_A = [D_{ij}]_{i,j=1}^d$ con $D_{ij} = 0$ si $i \neq j$; y $D_{ii} = \lambda_i I_{n_i}$. Particionamos $Q^{-1}BQ = [B_{ij}]_{i,j=1}^d$ conforme a la estructura de D_A

$$B_Q = Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} B_{11} & & & B_{1d} \\ & B_{22} & & \\ & & \dots & \\ B_{d1} & & & B_{dd} \end{pmatrix}.$$

Entonces, D_A y B_Q conmutan, ya que

$$D_A B_Q = Q^{-1}AQQ^{-1}BQ = Q^{-1}ABQ = Q^{-1}BAQ = Q^{-1}BQQ^{-1}AQ = B_Q D_A.$$

Esto ocurre si y solo si $\lambda_i B_{ij} = B_{ij}\lambda_j$ para cada $i, j = 1, \ldots, d$, es decir, $(\lambda_i - \lambda_j)B_{ij} = 0$ para cada $i, j = 1, \ldots, s$. Estas identidades se satisfacen si y solo si $B_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$. Así, D_A conmuta con B_Q si y solo si B_Q es diagonal por bloques conforme a D_A.

Como B y B_Q son matrices semejantes, B_Q es diagonalizable, y teniendo en cuanta la forma de B_Q deducimos que existe una matriz T de la siguiente forma:

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & & & 0 \\ & T_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & T_d \end{pmatrix}$$

tal que $T^{-1}B_QT$ es diagonal. Además, $T_i^{-1}\lambda_i I_{n_i} T_i = \lambda_i I_{n_i}$, entonces, $T^{-1}D_AT = D_A$ y $T^{-1}B_QT$ son ambas diagonales. Así que construimos $S = QT$ y tenemos que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ son diagonales.
El recíproco es sencillo ya que viene dado por que si $D_A = S^{-1}AS$ y $D_B = S^{-1}BS$ son diagonales, entonces:

$$AB = SD_AD_BS^{-1} = SD_BD_AS^{-1} = SD_BS^{-1}SD_AS^{-1} = BA.$$

Es decir, A y B conmutan. $\square$

Ejemplo 1.16. Si tomamos un grupo abeliano G, para $h, g \in G$ y $v \in V$ con una representación $\rho : G \to GL(V)$, se tiene que $\rho(hg)(v) = \rho(gh)(v)$. Entonces sucede que, obviando ρ en h,

$$h \cdot \rho(g)(v) = \rho(g)(hv),$$

es decir, ρ es una aplicación G-lineal. Si V es irreducible, por el Lema de Schur todo elemento de G actúa como el producto por un escalar. Por tanto, todo subespacio de V es invariante, lo que implica que V tiene que tener dimensión 1.
Por ejemplo, para un grupo cíclico $C_n =< g >$ con una representación $\rho_{C_n} : C_n \to V$ se tiene que $\rho_{C_n}(g)^n = I_v$ con I_V la identidad en V. Entonces los valores propios son raíces n-ésimas de la unidad y como vimos en el Lema 1.12, $\rho_{C_n}(g)$ es diagonalizable, luego si k es la dimensión de V existe una base de vectores propios $v_1, ..., v_k$ tal que $V = \oplus_{i=1}^k V_i$ con $V_i =< v_i >$. Concluímos que como $\rho_{C_n}(g)$ actúa como la multiplicación por un escalar, todos los $< v_i >$ son módulos irreducibles.
Ahora, de manera más general, consideramos un grupo abeliano finito A que sea isomorfo al producto directo de un numero r grupos cíclicos de orden $m_1, ..., m_r$ tales que $A \cong C_{m_1} \times \ldots \times C_{m_r} =< g_1 > \times \ldots \times < g_r >$ (se puede demostrar que sucede para todos los grupos abelianos [2]). Sea $\rho : A \to GL(V)$, esto quiere decir que, la imagen de la representación está generada por $\rho(g_1), ..., \rho(g_r)$ entonces para un $v \in V$ y un $g = g_1^{d_1} g_2^{d_2} \ldots g_r^{d_r}$:

$$\rho(g)(v) = \rho(g_1)^{d_1} ... \rho(g_r)^{d_r}(v)$$

Como las matrices $\rho(g_i)$ conmutan dos a dos, se puede reiterar el Teorema 1.15 que para deducir que existe una base común de vectores propios $s_1, ..., s_n \in V$ con valores propios $\lambda_{i,1}, ..., \lambda_{i,n}$ para cada $\rho(g_i)$. Así que $V =< s_1 > \oplus \ldots \oplus < s_r >$ y un vector cualquiera $v \in V$ puede ser descompuesto en $v = v_1 + ... + v_n$ con $v_j \in< s_j >$. Entonces

$$\rho(g)(v) = \rho(g_1)^{d_1} ... \rho(g_r)^{d_r}(v_1 + ... + v_n) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_{1,j}^{d_1} \ldots \lambda_{r,j}^{d_r}) v_j$$

Para el siguiente ejemplo, consideramos el grupo no abeliano más pequeño, es decir, el grupo simétrico de grado 3, S_3. Antes de adentrarnos en él, vamos a dar unas definiciones.

Definición 1.17. Sea G un grupo finito cualquiera y S_n el grupo simétrico de grado n:

a) La *representación trivial* $\rho_U : G \to GL(U)$ corresponde a $\rho_U(g) = 1 \quad \forall g \in G$, es decir $gv = v \quad \forall v \in U$. Por tanto, $\dim U = 1$.

b) Para S_n, recordemos que cada $g \in S_n$ se puede representar como un producto de trasposiciones, por ejemplo, el ciclo $(1234) \in S_4$ se puede poner como $(12)(23)(34)$ y aunque esta expresión no es única, se puede demostrar que su paridad sí que lo es. Si un elemento $g \in S_n$ es el producto de k trasposiciones, la signatura de g o $sgn(g)$ corresponde a $(-1)^{k+1}$. Entonces, la *representacion alternada* $\rho_{U'} : S_n \to GL(U')$ corresponde a $\rho'_U(g) = sgn(g)$, es decir, $gv = sgn(g)v \quad \forall g \in S_n$.

c) Dado un conjunto finito X donde G actúa por la izquierda, la *representación por permutaciones* asociada es una representación cuyo módulo es un espacio vectorial con base $\{e_x | x \in X\}$ donde $g \in G$ actúa en V como
$$g \cdot \sum_{x \in X} a_x e_x = \sum_{x \in X} a_x e_{g \cdot x}$$
Para $G = S_n$, la representación por permutaciones asociada a la acción en $X = \{1, 2, ..., n\}$ actúa en $\mathbb{C}^n$, con base $\{e_k| \quad k = 1, ..., n\}$, como
$$g \cdot \sum_{k=1}^{n} c_k e_k = \sum_{k=1}^{n} c_x e_{g \cdot x}$$
con $c_k \in \mathbb{C}$. Aquí podemos ver que el espacio U generado por $\sum_{k=1}^{n} e_k$ es invariante por S_n. Vamos a considerar el módulo siguiente, que es un complementario de U con $dimV = n - 1$
$$V = \{\sum_{k=1}^{n} c_k e_k \quad | \quad \sum_{k=1}^{n} c_k = 0\}.$$
Es fácil ver que V es un G-módulo. A la representación le llamamos *representación estándar*

d) Llamamos representación regular R_G a la dada por la acción por permutaciones de G en sí mismo, es decir, es una representación por permutaciones con $X = G$. Así, un elemento $h \in G$ actúa como
$$h \cdot \sum_{g \in G} a_g e_g = \sum_{g \in G} a_g h e_{hg}$$
con $a_g \in \mathbb{C}$.

La representación regular está estrechamente relacionada con el concepto de álgebra de grupo.

Definición 1.18. Un álgebra grupo, $\mathbb{C}G$, es una estructura algebraica cuyos elementos son de la forma $\sum_{g \in G} a_g g$ con $a_g \in \mathbb{C}$ y $g \in G$. Un álgebra de grupo es un espacio vectorial con suma y producto por escalar y con una operación producto entre los vectores, que se obtiene extendiendo por linealidad el producto de G, es decir:
$$(\sum_{g \in G} a_g g) \cdot (\sum_{g \in G} b_g g) = \sum_{x \in G} (\sum_{gh = x} a_g b_h) x$$

Dado un G-módulo W con representación asociada $\rho : G \to \mathrm{GL}(W)$, ρ se puede extender de manera natural por linealidad a una aplicación $\tilde{\rho} : \mathbb{C}G \to \mathrm{End}(W)$, en este caso también diremos qie W es un $\mathbb{C}G$-módulo.

Ejemplo 1.19. Veamos explícitamente como es la representación por permutaciones asociada a la acción del grupo S_3 en el conjunto $X = \{1, 2, 3\}$. Definimos una base $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Entonces, definimos para $g \in S_3$ $\rho(g)$ como las matrices que permutan los índices, es decir, por ejemplo:
$$\rho((1\,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \rho((3\,2\,1)) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Ejemplo 1.20. Consideramos ahora el módulo R_G asociado a la representación regular de S_3. A cada elemento g del grupo le asignamos un vector $e_g \in \mathbb{C}^6$, 6 en este caso porque es el número de elementos de S_3:
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_{(1\,2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_{(1\,3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_{(2\,3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_{(1\,2\,3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_{(3\,2\,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Habiendo definido así los vectores, podemos definir la representación ρ_R fijándonos en como actúa cada elemento del grupo en los demás. Por ejemplo, el elemento $g = (1\ 3)$ actúa por la izquierda sobre los elementos de esta base de la siguiente manera:

$$\begin{cases} e_1 \mapsto e_{(13)} \\ e_{(12)} \mapsto e_{(123)} \\ e_{(13)} \mapsto e_1 \\ e_{(23)} \mapsto e_{(321)} \\ e_{(123)} \mapsto e_{(12)} \\ e_{(321)} \mapsto e_{(23)} \end{cases}$$

Entonces:

$$\rho_R(1\ 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ya definidos estos conceptos, podemos pasar ya a sacar los módulos irreducibles de S_3. En el siguiente capítulo veremos un procedimiento más sencillo para hacerlo, pero ahora vamos a hacerlo de manera "manual"para poner en práctica todo lo que hemos visto hasta ahora.

Ejemplo 1.21. Para $G = S_3$ vamos a usar como notación $S_3 = \{1, \sigma, \sigma^2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ donde $\sigma = (1\ 2\ 3)$, $\tau_1 = (1\ 2)$, $\tau_2 = (2\ 3)$ y $\tau_3 = (3\ 1)$. Sea W un módulo de S_3 con representación $\rho : S_3 \to GL(W)$, primero queremos ver cómo $C_3 =< \sigma >\subset S_3$ actúa en W, ya que como vimos en el Ejemplo 1.16, para una representación de un grupo cíclico, en este caso C_3, podemos considerar una base de vectores propios v_i tales que $\sigma v_i = \omega^{a_i} v_i$ con $\omega = e^{2\pi i/3}$ raíz tercera de la unidad y $a_i = 1, 2$ o 3. Entonces,

$$W = \oplus V_i, \quad \text{donde } V_i =< v_i >$$

Tomamos la trasposición τ. A través de la relación $\sigma\tau = \tau\sigma^2$ se tiene que

$$\sigma(\tau(v_i)) = \tau(\sigma^2(v_i)) = \tau(\omega^{2a_i}(v_i)) = \omega^{2a_i}\tau(v_i)$$

Es decir, $\tau(v_i)$ es vector propio de σ con valor propio ω^{2a_i}.

- Si $\omega^{a_i} \neq 1$, entonces $\omega^{a_i} \neq \omega^{2a_i}$ por tanto v_i y $\tau(v_i)$ tienen respecto a σ valores propios distintos y generan un espacio vectorial de dimensión 2. Queremos ver que $V =< v_i, \tau(v_i) >$ es G-invariante. Como σ y τ generan G, es suficiente ver que es invariante para estos 2 elementos.

  $$\text{Para eso, sea } \lambda v_i + \mu\tau(v_i) \in V, \begin{cases} \sigma(\lambda v_i + \mu\tau(v_i)) = \omega^{a_i}\lambda v_i + \omega^{2a_i}\mu\tau(v_i) & \in V \\ \tau(\lambda v_i + \mu\tau(v_i)) = \lambda\tau(v_i) + \mu v_i & \in V \end{cases}$$

  Además,es fácil ver que V es G-isomorfo al módulo estándar definido en la Definición 1.17.

- Si $\omega^{a_i} = 1$, es decir, $\sigma(v) = v$ y $\sigma(\tau(v)) = \tau(v)$:

  - Puede suceder que $\tau(v) = v$, si nos fijamos $\rho(\sigma)(v) = \rho(\tau)(v) = v$, entonces v genera un submódulo U isomorfo al trivial. Tambien puede suceder que $\tau(v) = -v$, entonces $\rho(g) = sgn(g) \quad \forall g \in S_3$ lo que implica que v genera un módulo U' isomorfo al alternado.

- También puede suceder que $\tau(v)$ y v sean independientes, en ese caso:

$$\begin{cases} \sigma(v+\tau(v)) & = v+\tau(v) \\ \tau(v+\tau(v)) & = \tau(v)+v \end{cases} \implies < v+\tau(v) > \cong U \quad \text{(módulo trivial)}$$

$$\begin{cases} \sigma(v-\tau(v)) & = v-\tau(v) \\ \tau(v-\tau(v)) & = -(v-\tau(v)) \end{cases} \implies < v-\tau(v) > \cong U' \quad \text{(módulo alternado)}$$

Así, hemos visto que todo módulo tiene un submódulo isomorfo o bien al módulo trivial, o bien al alternado, o bien al estándar. Además, sabemos que estos tres módulos son irreducibles, así que de lo anterior es fácil deducir que estas tres son las únicas representaciones irreducibles de S_3 salvo isomorfismo. Para un módulo W de S_3, usando la Proposición 1.14

$$W = U^{\oplus a} \oplus U'^{\oplus b} \oplus V^{\oplus c}$$

Donde a, b y c son las respectivas multiplicidades.

Ejemplo 1.22. Cojamos el ejemplo del módulo regular R_G con $G = S_3$, es decir, R_G es el espacio vectorial que tiene de base los elementos de S_3. Recapitulando el proceso anterior:

- Los vectores propios de σ son: con valor propio 1, $v = 1+\sigma+\sigma^2$ y $v' = \tau_3+\tau_2+\tau_1$; con valor propio $\omega = e^{2\pi i}$, $v_1 = \omega^2+\omega\sigma+\sigma^2$ y $v_2' = \tau_1+\omega\tau_2+\omega^2\tau_3$; y con valor propio ω^2, $v_2 = \omega^2\sigma^2+\omega\sigma+1$ y $v_1' = \omega^2\tau_1+\omega\tau_2+\tau_3$.
  Finalmente,
  $$R_G = < v > \oplus < v' > \oplus < v_1 > \oplus < v_1' > \oplus < v_2 > \oplus < v_2' >$$
- v_1 y v_2 no tienen valor propio 1 y vemos que $v_1' = \tau(v_1)$ y $v_2' = \tau(v_2)$, entonces si ponemos $V_i = < v_i, v_i' >$ para $i = 1,2$, V_1 y V_2 son ambos isomorfos a la representación estándar.
- v y v' tienen valor propio 1, pero $\tau(v) = v' \neq v$. Entonces, $< v+v' > \cong U$ (trivial) y $< v-v' > \cong U'$ (alternada).

Entonces,
$$R_G = U \oplus U' \oplus V^{\oplus 2}$$

Capítulo 2

Teoría de caracteres

2.1. Caracter de una representación

Como hemos visto en el Ejemplo 1.21 y el Ejemplo 1.22, saber los valores propios de los elementos σ y $\tau \in S_3$ es crucial para describir cualquier representación de S_3. Para un grupo arbitrario G no es tan fácil saber qué subgrupos y/o elementos juegan el papel de C_3, σ y τ. Esto sugiere que saber todos los valores propios$\{\lambda_i\}$ de cada $g \in G$ basta para poder describir un módulo. Como para g^k los valores propios son $\{\lambda_i^k\}$, podemos ahorrarnos muchos cálculos, puesto que bastaría con saber la suma de los valores propios de los elementos de G. Aquí es donde introducimos el concepto de *carácter de un módulo*.

Definición 2.1. Sea V un módulo de un grupo finito G con representación asociada $\rho : G \to GL(V)$, definimos su carácter χ_V como la función:

$$\begin{aligned} \chi_V : \quad & G \to \mathbb{C} \\ & g \mapsto \mathrm{Tr}(\rho(g)) \end{aligned}$$

Es decir, a cada elemento g le asignamos la traza de $\rho_V(g)$, que corresponde a la suma de sus valores propios. Este valor está bien definido puesto que las matrices de una aplicación con distintas bases tienen la misma traza. Además, χ_V se mantiene constante en las clases de conjugación de G. Recordemos que la clase de conjugación de un elemento $g \in G$ es el conjunto $[g] = \{h \in G| \quad \exists f \in G \quad \text{tal que} \quad fhf^{-1} = g\}$. Sean $h, g \in G$, utilizando que ρ es un homorfismo y propiedades de la traza:

$$\chi_V(hgh^{-1}) = \mathrm{Tr}(\rho(hgh^{-1})) = \mathrm{Tr}(\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1}) = \mathrm{Tr}(\rho(g)) = \chi_V(g).$$

Las funciones que cumplen esta propiedad se denominan *funciones de clase*. Una característica interesante de esta función es que $\chi_V(1) = \mathrm{Tr}(I_V) = \dim V$, donde I_V es la idenidad en V.

Proposición 2.2. *Sean V y W G-módulos de las representaciones ρ_V y ρ_W, respectivamente.*

i) $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$

ii) $\chi_{V\otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$

iii) $\chi_{V^*} = \overline{\chi}_V$*, siendo este su conjugado complejo.*

iv) Para $g \in G$, $\chi_{\wedge^2 V}(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_V^2(g) - \chi_V(g^2)\right)$

Demostración. Fijamos un $g \in G$ tal que los valores propios de $\rho_V(g)$ son $\{\lambda_i\}$ y los de $\rho_W(g)$ son $\{\mu_j\}$ y sus respectivas bases de vectores propios son $\{v_i \in I\}$ de V y $\{w_j | j \in J\}$ de W.

(i) Consideramos $\rho_{V\oplus W}(g)$ definido en la Proposición 1.8, sus vectores propios son $(v_i, 0)$ y $(0, w_j)$, entonces sus valores propios son $\{\lambda_i\} \cup \{\mu_j\}$. Así que $\chi_{V\oplus W}(g) = \sum\{\lambda_i\} \cup \{\mu_j\} = \sum\{\lambda_i\} + \sum\{\mu_j\} = \chi_V(g) + \chi_W(g)$.

(ii) Para $\rho_{V\oplus W}(g)$ como está definido en la Definición 1.4, $\{v_i \otimes w_j\}$ es una base de vectores propios de $V \otimes W$. Entonces tenemos que $\rho_{V\otimes W}(g)(v_i \otimes w_j) = \rho_V(g)(v_i) \otimes \rho_W(g)(w_j) = \lambda_i v_i \otimes \mu_j w_j = \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j)$. Por tanto, $\chi_{V\otimes W}(g) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j = (\sum \lambda_i)(\sum \mu_j) = \chi_V(g) \cdot \chi_W(g)$.

(iii) Para el dual V^*, vimos en la Proposición 1.8. que el homomorfismo que definía a la representación era $\rho_{V^*} = \rho(g^{-1})^T$. Como los valores propios de $\rho(g)^{-1}$ son $\{\lambda_i^{-1}\}$ y los valores de $\rho_V(g)$ son raíces de la unidad, se tiene que $\{\lambda_i^{-1}\} = \{\overline{\lambda_i}\}$. Así que $\chi_{V^*}(g) = \sum \lambda_i^{-1} = \sum \overline{\lambda_i} = \overline{\sum \lambda_i} = \overline{\chi}_V(g)$.

(iv) Recordemos que $\wedge^2 V$ es el cociente de V por el subespacio generado por $\{u \otimes u | u \in V\}$. Esto, entre otras cosas, implica que si la base en $V \otimes V$ de vectores propios es $\{v_i \otimes v_k | i,k \in I\}$, entonces la base en el cociente se reduce a $\{v_i \otimes v_k | i < k\}$ y los vectores propios son $\{\lambda_i \cdot \lambda_k | i < k\}$ ya que

$$v_k \otimes v_i = (v_k + v_i) \otimes (v_k + v_i) - v_k \otimes v_k - v_i \otimes v_i - v_i \otimes v_k,$$

entonces, en el cociente $v_k \wedge v_i = -v_k \wedge v_i$. Por tanto:

$$\chi_{\wedge^2 V}(g) = \sum_{i<k} \lambda_i \lambda_k = \frac{1}{2}((\sum \lambda_i)^2 - \sum \lambda_i^2) = \frac{1}{2}(\chi_V^2(g) - \chi_V(g^2))$$

□

Como el carácter es una función de clase, podemos interpretarlo con una función en el conjunto de las clases de conjugación de G. Esto nos permite resumir la información básica sobre los caracteres en una tabla a la que llamaremos *tabla de caracteres*. Una tabla de caracteres tiene en la parte superior las clases de conjugación de G (normalmente representadas por un representante de la clase $[g]$), a la izquierda tiene las representaciones irreducibles V_i de G y en la celda $(V_i,[g])$ el correspondiente valor del carácter $\chi_{V_i}(g)$. También añadimos cuántos elementos hay en cada clase de conjugación encima de cada $[g]$. Vamos a explicarlo mejor con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3 (Tabla de carácteres de S_3)**.** Las clases de conjugación de S_3 vienen dadas por $[1],[\sigma],[\tau]$ (utilizando la notación del Ejemplo 1.21). Para las filas, recordamos que las representaciones irreducibles de S_3 son la trivial U, la alternada U' y la estándar V. Como se vio en la Definición 2.1, el carácter de cualquier representación en el elemento neutro corresponde a su dimensión, entonces:

$$\chi_U(1) = \chi_{U'}(1) = 1 \quad \text{y} \quad \chi_V(1) = 2$$

Como U tiene dimensión 1, $\mathrm{Tr}(\rho_U(g)) = \rho_U(g)$, lo mismo ocurre para U'. Entonces para $[1],[\tau = (12)],[\sigma = (123)]$, los caracteres de U y U' son

$$\chi_U([1]) = \chi_U([\sigma]) = \chi_U([\tau]) = 1$$

y

$$\chi_{U'}([1]) = \chi_{U'}([\sigma]) = 1; \quad \chi_{U'}([\tau]) = -1$$

Para resumir esto ponemos

$$\chi_U = (1,1,1) \quad \text{y} \quad \chi_U' = (1,-1,1)$$

Esta información correspondería a la primera y segunda fila de la tabla:

Clases de conjugación de S_3	[1]	[(1 2)]	[(1 2 3)]
representación trivial U	1	1	1
representación alternada U'	1	-1	1

Ahora falta computar los valores del carácter de V. Como vimos en la Definición 1.12, para $n = 3$

podemos utilizar la representación por permutaciones sobre una base de $\mathbb{C}^3$ y podemos descomponerlo en un submódulo isomorfo al trivial más el módulo estándar V que tiene dimensión 2, es decir, $\mathbb{C}^3 = U \oplus V$. Sabemos por la Proposición 2.2 que el carácter de la suma directa de dos representaciones es la suma de los caracteres, con esto vemos que $\chi_{\mathbb{C}^3} = \chi_U + \chi_V$. En $\mathbb{C}^3$, podemos utilizar la representación por permutaciones como hicimos en el Ejemplo 1.19. Es fácil ver, que la traza es básicamente el número de elementos fijos por la acción de cada $\rho(g)$, entonces sabemos que $\chi_{\mathbb{C}^3}([1]) = 3$, $\chi_{\mathbb{C}^3}([\sigma]) = 0$ y $\chi_{\mathbb{C}^3}([\sigma]) = 1$. Por lo tanto, $\chi_{\mathbb{C}^3} = (3,1,0)$. Con toda esta información deducimos que $\chi_V = \chi_{\mathbb{C}^3} - \chi_U = (3,1,0) - (1,1,1) = (2,0,-1)$, y lo colocamos en la última fila.

Clases de conjugación de S_3	[1]	[(1 2)]	[(1 2 3)]
representación trivial U	1	1	1
representación alternada U'	1	-1	1
representación estándar V	2	0	-1

Para acabar de sintetizar toda la información y para más adelante, colocamos el número de elementos de cada clase encima del representante. La tabla de caracteres de S_3 completa quedaría así:

(Número de elementos por clase)	1	3	2
Clases de conjugación de S_3	[1]	[(1 2)]	[(1 2 3)]
representación trivial U	1	1	1
representación alternada U'	1	-1	1
representación estándar V	2	0	-1

Como vimos en el Ejemplo 1.21, para un módulo arbitrario W de S_3 se tiene que $W \cong U^{\oplus a} \oplus U'^{\oplus b} \oplus V^{\oplus c}$, entonces $\chi_W = a\chi_U + b\chi_{U'} + c\chi_V$. Como podemos ver en la tabla anterior, entendiendo los caracteres como vectores, $\chi_U, \chi_{U'}$ y χ_V son linealmente independientes; entonces, cualquier representación W viene determinada por su carácter obteniendo a, b y c.

Ejemplo 2.4. Vamos a calcular la descomposición del módulo $V^{\otimes 3}$. Su caracter por la Proposición 2.2 viene dado por $\chi_{V^{\otimes 3}}(g) = (\chi_V)^3(g)$, es decir, es $(8,0,-1)$ y además $\chi_{V^{\otimes 3}} = a\chi_U + b\chi_{U'} + c\chi_V$. Podemos calcular a, b y c resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a+b+2c & = 8 \\ a-b & = 0 \\ a+b-c & = -1 \end{cases}$$

El resultado es $a = 1, b = 1, c = 3$, es decir, $V^{\otimes 3} = U \oplus U' \oplus V^{\oplus 3}$.

2.2. Ortogonalidad de los caracteres

Estos resultados nos inspiran a preguntarnos, ¿se puede seguir este razonamiento con todos los grupos?¿Cuántas representaciones irreducibles hay para un grupo arbitrario G? ¿Las tablas de caracteres de otros grupos se portan "igual de bien"que la de S_3? Para contestar a estas preguntas tenemos que introducir primero algunos resultados.

Para S_3, tenemos que los caracteres entendidos como vectores, es decir, en la tabla del Ejemplo 2.3, $\chi_U = (1,1,1)$, $\chi_U = (1,-1,1)$ y $\chi_V = (2,0,-1)$ son linealmente independientes. Después de demostrar una característica de las proyecciones que necesitaremos, vamos a ver un resultado que nos lo asegura para el caso general.

Lema 2.5. *Sea ψ una proyección de un espacio vectorial V de dimensión n a un subespacio W de dimensión m, es decir, un operador lineal $\psi : V \to V$ que cumple que $Im\psi = W$ y $\psi \circ \psi = \psi$. Entonces la traza de la matriz asociada a ψ en cualquier base es igual a la dimensión de W.*

Demostración. Sea A la matriz que define a ϕ, tenemos que cumple la ecuación $X^2 = X$, es decir, $X(X-1) = 0$. El polinomio mínimo de A divide a este polinomio, luego tiene 1 y 0 como raíces con multiplicidad 1. Por tanto, de manera similar a como vimos en el Lema 1.12, la forma canónica de Jordan es una matriz diagonal con ceros y unos en la diagonal. Por tanto, el rango es el número de componentes no nulas de la diagonal, que en este caso, coincide con la traza. Como el rango es igual a la dimensión de la imagen, $dimW = Tr(A)$ □

Proposición 2.6. *Sea G un grupo finito y sea $\mathbb{C}_{class}(G) = \{$funciones de clase complejas de $G\}$ definimos un producto Hermitiano en $\mathbb{C}_{class}(G)$ de la siguiente manera:*

$$< \alpha, \beta >_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g)\overline{\beta(g)}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_{class}(G)$. Entonces, en términos de este producto Hermitiano, los carácteres de las representaciones irreducibles de G son ortonormales.

Demostración. Primero, es fácil ver que $< \cdot, \cdot >_G$ es un producto interno Hermitiano. Para un módulo V consideramos el elemento,

$$\alpha = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$$

y el endomorfismo $\psi : V \to V$ dado por $\phi(v) = \alpha v$. Primero queremos ver que ϕ es una proyección de V sobre $V^G := \{v \in V | gv = v \quad \forall g \in G\}$, así que tomamos un $v = \phi(w) \in \mathrm{Im}\phi$ y vemos que para cualquier $h \in G$

$$hv = h\phi(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hgw = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gw = v \implies v \in V^G$$

De aquí obtenemos que $\mathrm{Im}\phi \subset V^G$. Recíprocamente, si $v \in V^G$

$$\phi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v = v \implies v \in \mathrm{Im}\phi$$

Además, también se ve que $\phi \circ \phi = \phi$. Como es una proyección, la dimensión de la imagen de ϕ es su traza, como vimos en el Lema 2.5. Es decir, $dimV^G = \mathrm{Tr}(\phi)$. Como la traza es lineal,

$$dimV^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(\rho_V(g)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)$$

Si la representación es la trivial, $U^G = U$ por tanto $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_U(g) = 1$. Para cualquier representación irreducible distinta de la trivial $V^G = \{0\}$, ya que V^G es un submódulo de V, entonces $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) = 0$.

La clave ahora es usar como representación $\mathrm{Hom}(V,W)$, para representaciones irreducibles V y W, que es un módulo según la Proposición 1.8. Consideramos $\mathrm{Hom}^G(V,W) := \{\psi \in \mathrm{Hom}(V,W) | g\psi(v) = \psi(gv) \quad \forall v \in V\}$. Como se vio en el Lema de Schur (Lema 1.13), si $V \cong W$, entonces, cualquier aplicación G-lineal es la identidad por un escalar. Por tanto, $\mathrm{Hom}(V,W)^G = \mathbb{C}$ con la acción trivial y entonces $dim[\mathrm{Hom}^G(V,W)] = 1$. También por el Lema de Schur, si $V \ncong W$, entonces $\mathrm{Hom}^G(V,W) = 0$ y $dim[\mathrm{Hom}^G(V,W)] = 0$. Resumiendo,

$$dim[\mathrm{Hom}^G(V,W)] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad V \ncong W \\ 1 & \text{si} \quad V \cong W \end{cases}$$

Como vimos en la Proposición 1.6, $\mathrm{Hom}(V,W) \cong V^* \otimes W$ y aplicando la Proposición 2.2

$$dim[\mathrm{Hom}^G(V,W)] = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V^*\otimes W}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V}\chi_W(g)$$

Es decir,

$$<\chi_V,\chi_W>_G \quad = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad V \ncong W \\ 1 & \text{si} \quad V \cong W \end{cases}$$

Con lo que concluimos que, bajo este producto hermitiano, los caracteres de las representaciones irreducibles de G son ortonormales. □

Ahora vamos a ver una serie de corolarios que derivan de este resultado.

Corolario 2.7. El número de representaciones irreducibles es menor o igual que el número de clases de conjugación.

Demostración. Un grupo finito G tiene un número finito m de clases de conjugación. Si entendemos los caracteres de las representaciones irreducibles V_i como vectores $\chi_{V_i} = (\chi_{V_i}([g_k]))_{k=1}^m$, al igual que en el Ejemplo 2.3, al ser ortogonales por la proposición anterior, son vectores linealmente independientes dentro de $\mathbb{C}^m$ y como mucho puede haber m vectores. □

Corolario 2.8. Cualquier representación viene determinada por su carácter.

Demostración. Por la Proposición 1.14, un módulo arbitrario V se puede descomponer de manera única en $V_1^{\oplus a_1}\oplus\ldots\oplus V_k^{\oplus a_k}$, con los V_i las representaciones irreducibles del grupo. Entonces $\chi_V = \chi_{V_1^{\oplus a_1}\oplus\ldots\oplus V_k^{\oplus a_k}} = \sum_{i=1}^k a_i\chi_{V_i}$. Como los caracteres son linealmente independientes y $k \leq m$ sabiendo χ_V podemos obtener los a_i. Además, por el Corolario 2.8 se deduce que $<\chi_V,\chi_{V_i}>_G = a_i$. □

Corolario 2.9. Un módulo es irreducible $\iff$ $<\chi_V,\chi_V>_G = 1$.

Demostración. Por la Proposición 1.14, un módulo arbitrario V se puede descomponer de manera única en $V_1^{\oplus a_1}\oplus\ldots\oplus V_k^{\oplus a_k}$. Entonces $\chi_V(g) = \sum_{i=1}^k a_i\chi_{V_i}(g) \quad \forall g\in G$. Así que,

$$<\chi_V,\chi_V>_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)\overline{\chi_V(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(\sum_{i=1}^k a_i\chi_{V_i}(g)\sum_{j=1}^k\overline{a_j\chi_{V_j}(g)}\right) =$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k(a_i)^2\chi_{V_i}(g)\overline{\chi_{V_j}(g)} = \sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k(a_i)^2 <\chi_{V_i},\chi_{V_j}>_G$$

y como $<\chi_{V_i},\chi_{V_j}>_G = 0$ cuando $i\neq j$, entonces

$$<\chi_V,\chi_V>_G = \sum_{i=1}^k(a_i)^2 <\chi_{V_i},\chi_{V_i}>_G$$

y como los V_i son irreducibles, por el Corolario 2.9, $<\chi_{V_i},\chi_{V_i}>_G = 1$, entonces $<\chi_V,\chi_V>_G = \sum_{i=1}^k(a_i)^2$. Por tanto, si $<\chi_V,\chi_V>_G = 1$, se tiene que $\sum_{i=1}^k(a_i)^2 = 1$ y como las a_i son números enteros, se tiene que $\exists a_l$ tal que $a_l = 1$ y $a_i = 0 \quad \forall i\neq l$. Así que $V\cong V_l$ y como V_l es irreducible, se tiene que V es irreducible. □

Corolario 2.10. Cualquier módulo irreducible V de G aparece en la representación regular R_G tantas veces como su dimensión.

Demostración. Sabemos que la representación regular R_G es una representación por permutaciones donde G actúa en sí mismo. Como vimos en el Ejemplo 1.20, para un $g \in G$, $\rho_R(g)$ corresponde a una matriz que lleva e_h a e_{gh}, por tanto:

$$\chi_R(g) = Tr(\rho_R(g)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad g \neq 1 \\ |G| & \text{si} \quad g = 1 \end{cases}$$

Entonces, si descomponemos R_G en módulos irreducibles $R_G = \oplus_{j=1}^{k} V_j^{\oplus a_j}$, podemos ver que, fijando un V_i irreducible:

$$< \chi_{V_i}, \chi_R >_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{V_i}(g) \overline{\chi}_R(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{V_i}(g) \sum_{j=1}^{k} a_j \overline{\chi}_{V_j}(g) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{V_i}(g) \overline{\chi}_{V_j}(g) = \sum_{j=1}^{k} a_j < \chi_{V_i}, \chi_{V_j} >_G = a_i$$

Entonces,

$$a_i = < \chi_{V_i}, \chi_R >_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{V_i}(g) \overline{\chi}_R(g) = \frac{1}{|G|} \chi_{V_i}(1)|G| = dimV_i$$

Además, como $dimR_G = |G|$, obtenemos como consecuencia que

$$|G| = \sum_{i=1}^{k} a_i dimV_i = \sum_{i=1}^{k} (dimV_i)^2$$

□

Nuestra misión ahora es demostrar que el número de clases de conjugación y el número de módulos irreducibles son, efectivamente, el mismo. Para ello necesitaremos primero ver este resultado.

Proposición 2.11. *Sea $\alpha : G \to \mathbb{C}$ cualquier aplicación y dada una representación ρ con módulo V de G consideramos*

$$\phi_{\alpha,V} = \sum_{g \in G} \alpha(g) \cdot \rho(g) : V \to V.$$

Entonces $\phi_{\alpha,V}$ es G-lineal para todo V si y solo si α es una función de clase.

Demostración. Para ver que $\phi_{\alpha,V}$ es G-lineal, para un $h \in G$ y $v \in V$ se tiene:

$$\phi_{\alpha,V}(hv) = \sum_{g \in G} \alpha(g) g(hv),$$

como g recorre todos los elementos de G, podemos poner

$$\phi_{\alpha,V}(hv) = \sum_{hgh^{-1} \in G} \alpha(hgh^{-1}) hgh^{-1}(hv) = h \cdot \sum_{hgh^{-1} \in G} \alpha(hgh^{-1}) gv$$

Si α es una función de clase esto es igual a

$$h \cdot \sum_{hgh^{-1} \in G} \alpha(g) gv = h\phi_{\alpha,V}(v).$$

Luego ϕ es G-lineal. Recíprocamente, si α no es una función de clase, consideramos la representación regular R_G, por ejemplo, en la que el módulo es $V = \mathbb{C}G$. Entonces para que $\phi_{\alpha,V}$ sea G-lineal tendría que suceder que, $\forall v \in V$ y $\forall h \in G$

$$\phi_{\alpha,V}(hv) = h\phi_{\alpha,V}(v),$$

en particular, $\phi_{\alpha,V}(h) = h\phi_{\alpha,V}(1)$. Es decir,

$$\sum_{g\in G} \alpha(g)gh = h\cdot \sum_{g\in G} \alpha(g)g = \sum_{g\in G} \alpha(g)hg$$

Hacemos la sustitución en la primera parte de la igualdad como hemos hecho antes,

$$\sum_{g\in G} \alpha(hgh^{-1})hgh^{-1}h = \sum_{g\in G} \alpha(hgh^{-1})hg = \sum_{g\in G} \alpha(g)hg$$

Ahora pasamos todo a un lado de la igualdad y agrupamos los sumandos:

$$\sum_{g\in G} (\alpha(hgh^{-1}) - \alpha(g))hg = 0$$

Pero fijando h, los elementos hg con $g \in G$ recorren todos los elementos de g que son base de $V = \mathbb{C}G$, es decir, forman una familia libre. Por tanto, tiene que ser cero todos los coeficientes de cada gh, entonces

$$(\alpha(hgh^{-1}) - \alpha(g)) = 0 \quad \forall g \in G.$$

Pero eso no ocurre puesto que hemos supuesto que α no es una función de clase.

$\square$

Proposición 2.12. *El número de módulos irreducibles de G es igual al número de clases de conjugación de G. Equivalentemente, sus caracteres $\{\chi_{V_i}\}$ forman una base ortonormal de $\mathbb{C}_{class}(G) = \{$funciones de clase complejas de G$\}$.*

Demostración. Supongamos que $\alpha : G \to \mathbb{C}$ es una función de clase que cumple que $<\alpha,\chi_V>_G= 0$ para todos los módulos V correspondientes a representaciones irreducibles de G. Consideramos un endomorfismo como el de la proposición anterior:

$$\phi_{\alpha,V} = \sum_{g\in G} \alpha(g)\cdot\rho(g) : V \to V.$$

Como vimos, como α es una función de clase, $\phi_{\alpha,V}$ es una aplicación G-lineal. Por el Lema de Schur, como va de una representación irreducible en sí misma, $\phi_{\alpha,V} = \lambda \cdot I_n$, con I_n la identidad en V y $n = dimV$, entonces:

$$Tr(\phi_{\alpha,V}) = Tr(\lambda\cdot I_n) = n\dot{\lambda}.$$

Así que,

$$\lambda = \frac{1}{n}\cdot Tr(\phi_{\alpha,V}) = \frac{1}{n}\cdot \sum_{g\in G} \alpha(g)Tr(\rho(g)) = \frac{1}{n}\cdot \sum_{g\in G} \alpha(g)\chi_V$$

Recordemos que $<\alpha,\chi_V>_G= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(g)\overline{\chi_V(g)}$ y que $\chi_{V^*} = \overline{\chi}_V$, lo que implica que $\chi_V = \overline{\chi}_{V}^{*}$. Entonces:

$$\sum_{g\in G} \alpha(g)\chi_V = \sum_{g\in G} \alpha(g)\overline{\chi}_{V^*} = |G|(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \alpha(g)\overline{\chi_{V^*}(g)}) = |G| <\alpha,\chi_{V^*}>_G.$$

Por tanto,

$$\lambda = \frac{|G|}{n}\cdot <\alpha,\chi_{V^*}>_G$$

Para ver si V^* es irreducible, usamos el Corolario 2.9, que dice que es irreducible si y solo si $<\chi_{V^*},\chi_{V^*}>_G= 1$. Entonces, como V es irreducible, tenemos que

$$<\chi_{V^*},\chi_{V^*}>_G= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V^*}(g)\overline{\chi_{V^*}(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V(g)}\chi_V(g) =$$

$$\overline{\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)\overline{\chi_V(g)}} = \overline{<\chi_V,\chi_V>_G} = \overline{1} = 1$$

Por tanto, V^* es irreducible, así que la hipótesis en α implica que $\lambda =< \alpha, \chi_{V^*} >_G = 0$. Luego, $\phi_{\alpha,V} = 0$. Ahora, consideramos $V = \mathbb{C}G$ con la representación regular. Como $\mathbb{C}G$ es suma directa de módulos irreducibles, podemos deducir que también $\phi_{\alpha,V} = 0$ y repitiendo el razonamiento de la proposición anterior, eso implica que $\alpha = 0\ \forall g \in G$. Sea ahora α una función de clase arbitraria. Ponemos

$$\beta = \sum_{V_i}^{k} < \alpha, \chi_{V^*} >_G \chi_{V_i}.$$

Por la ortogonalidad de los χ_V respecto a $< \cdot, \cdot >_G$ tenemos

$$< \beta, \chi_{V^*} >_G =< \alpha, \chi_{V^*} >_G,$$

luego $\forall V$ irreducible

$$< \alpha - \beta, \chi_{V^*} >_G =< \alpha, \chi_{V^*} >_G - < \beta, \chi_{V^*} >_G = 0.$$

Por tanto, lo anterior implica que $\alpha - \beta = 0$, es decir, $\alpha = \beta$ es una combinación lineal de los cacteres irreducibles $\square$

Proposición 2.13. *La ortogonalidad de las filas de la tabla de caracteres es equivalente a la ortogonalidad por columnas. Es decir, sean $\{V_i\}_{i=1}^k$ los módulos de las representaciones irreducibles de un grupo finito G y g, h elementos de G que no pertenecen a la misma clase de conjugación, entonces*

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_{V_i}(g)\overline{\chi}_{V_i}(h) = 0$$

y además

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_{V_i}(g)\chi_{V_i}(g) = \frac{|G|}{c([g])}$$

siendo $c([g])$ el número de elementos de $[g]$.

Demostración. Sean $[g_j]$ con $j = 1...k$ las clases de conjugación de G y $\{V_i\}_{i=1}^k$ los módulos irreducibles. Como sabemos por la Proposición 2.6:

$$< \chi_{V_{i_1}}, \chi_{V_{i_2}} >_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi_{V_{i_1}}(g)\overline{\chi}_{V_{i_2}}(g) = \sum_{j=1}^{k} \frac{c([g_j])}{|G|} \quad \chi_{V_{i_1}}([g_j])\overline{\chi}_{V_{i_2}}([g_j]) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i_1 \neq i_2 \\ 1 & \text{si} \quad i_1 = i_2 \end{cases}$$

Si llamamos T a la matriz de la tabla de caracteres, es decir $T_{ij} = (\chi_{V_i}([g_j]))_{ij}$, entonces podemos poner lo anterior en forma de matrices:

$$TDT^* = T \begin{pmatrix} \frac{c([g_1])}{|G|} & & & 0 \\ & \frac{c([g_2])}{|G|} & & \\ & & \cdots & \\ 0 & & & \frac{c([g_k])}{|G|} \end{pmatrix} T^* = I_k,$$

donde estamos denotando $T^* = \overline{T}^T$. Ahora queremos ver qué nos da $\sum_{i=1}^k \chi_{V_i}([g_{j_1}])\overline{\chi}_{V_i}([g_{j_2}])$. Esto es básicamente, intercambiar las filas y las columnas de T. Puesto en forma de matrices, equivale a averiguar $T^T(T^T)^*$. Así que,

$$T^T(T^T)^* = \overline{T^*T} = \overline{(TD)^{-1}TDT^*T} = \overline{(TD)^{-1}I_kT} = \overline{D^{-1}T^{-1}T} = \overline{D^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{|G|}{c([g_1])} & & & 0 \\ & \frac{|G|}{c([g_2])} & & \\ & & \cdots & \\ 0 & & & \frac{|G|}{c([g_k])} \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_{V_i}(g)\chi_{V_i}(h) = \begin{cases} \frac{|G|}{c([g])} & \text{si} \quad [g]=[h] \\ 0 & \text{si} \quad [g]\neq[h] \end{cases}$$

□

Ejemplo 2.14 (Tabla de caracteres de S_4.)**.** Ahora vamos a emplear todo lo que hemos aprendido para completar la tabla de caracteres de S_4. En este caso hay 5 clases de conjugación: [1], [(12)], [(123)], [(1234)] y [(12)(34)] cada una con 1, 6, 8, 6 y 3 elementos respectivamente. Entonces, como hemos visto en la Proposición 2.12, hay 5 representaciones irreducibles. Ya sabemos tres de ellas, ya que al igual que en S_3, tenemos la representación trivial U con carácter $(1,1,1,1,1)$, la representación alternada U' con carácter $(1,-1,1,-1,1)$ y la estándar, que al igual que hicimos para obtenerla en la tabla de S_3 (Ejemplo 2.3), en la representación por permutaciones en $\mathbb{C}^4$ tenemos que $\mathbb{C}^4 = U \oplus V$.

Entonces vamos a calcular los caracteres de cada una de las clases de conjugación de la representación por permutaciones sobre $\mathbb{C}^4$. Ya sabemos que $\chi_{\mathbb{C}^4}([1]) = \dim \mathbb{C}^4 = 4$, por otro lado, en el caso de [(12)], corresponde a las permutaciones de dos elementos, es decir, matrices como por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cuya traza es claramente 2. Entonces en esta representación, la traza son los elementos que se quedan fijos, por tanto $\chi_{\mathbb{C}^4} = (4,2,1,0,0)$.

Así que la representación estándar tiene carácter $\chi_V = \chi_{\mathbb{C}^4} - \chi_U = (4,2,1,0,0) - (1,1,1,1,1) = (3,1,0,-1,-1)$ y como vimos en el Corolario 2.9, es irreducible puesto que $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \frac{1}{24}\sum_{g\in G} \chi_V \overline{\chi_V} = \frac{1}{24}(1\cdot 9 + 6\cdot 1 + 6\cdot 1 + 3\cdot 1) = 1$. Así que podemos rellenar ya las tres primeras filas.

(Número de elementos por clase)	1	6	8	6	3
Clases de conjugación de S_4	[1]	[(1 2)]	[(1 2 3)]	[(1234)]	[(12)(34)]
representación trivial U	1	1	1	1	1
representación alternada U'	1	-1	1	-1	1
representación estándar V	3	1	0	-1	-1

Para la siguiente fila, probamos $V' = V \otimes U'$. Recordamos que $\forall g \in G$, $\chi_{V\oplus U'}(g) = \chi_V(g)\chi_{U'}(g)$. Así que,

$$\langle \chi_{V\oplus U'}, \chi_{V\oplus U'} \rangle = \frac{1}{24}\sum_{g\in G} \chi_{V\oplus U'}\overline{\chi_{V\oplus U'}} = \frac{1}{24}(1\cdot 9 + 6\cdot 1 + 6\cdot 1 + 3\cdot 1) = 1.$$

Por tanto es irreducible, así que la tabla nos queda:

(Número de elementos por clase)	1	6	8	6	3
Clases de conjugación de S_4	[1]	[(1 2)]	[(1 2 3)]	[(1234)]	[(12)(34)]
representación trivial U	1	1	1	1	1
representación alternada U'	1	-1	1	-1	1
representación estándar V	3	1	0	-1	-1
representación $V \oplus U'$	3	-1	0	1	-1

Para calcular la última fila, es decir, el carácter $\chi_W = (\chi_1, ..., \chi_5)$ del módulo desconocido irreducible W, podemos usar la ortogonalidad por columnas descrita en el Proposición 2.13, es decir, que si $[g] \neq [h]$ entonces $\sum_\chi \chi([g])\overline{\chi}([(h)]) = 0$. Por ejemplo, para $[g] = [1]$ y $[h] = [(12)]$:

$$\sum_\chi \chi([1])\overline{\chi}([(12)]) = 1 - 1 + 3 - 3 + \chi_1\chi_2 = \chi_1\overline{\chi}_2 = 0.$$

Usando esta fórmula para todas las posibles parejas de clases de conjugación obtenemos que:

$$\chi_2\overline{\chi}_3 = \chi_3\overline{\chi}_4 = \chi_4\overline{\chi}_5 = \chi_2\overline{\chi}_4 = \chi_1\overline{\chi}_4 = \chi_2\overline{\chi}_5 = 0$$

y

$$\chi_1\overline{\chi}_3 = \chi_3\overline{\chi}_5 = -2; \quad \chi_1\overline{\chi}_5 = 4$$

De aquí es fácil sacar que $\chi_2 = \chi_4 = 0$ y como $\chi_3 \neq 0$, $\chi_1 = \chi_5$. Con esta última igualdad, podemos decir que $|\chi_1| = |\chi_5| = 2$ y $|\chi_3| = 1$. Como vimos en la Proposición 2.10, el orden del grupo es la suma de los cuadrados de las dimensiones de los módulos irreducibles, que correponden al carácter en $g = 1$, por tanto:

$$\chi_W(1) = \sqrt{24 - \chi_U(1)^2 - \chi_{U'}(1)^2 - \chi_V(1)^2 - \chi_{V\otimes U'}(1)^2} = \sqrt{24-1-1-9-9} = 2$$

Así que $\chi_1 = \chi_5 = 2$ y $\chi_3 = -1$. Comprobamos que efectivamente es irreducible, viendo que $< \chi_w, \chi_w >_G = 1$ (Corolario 2.9)

$$< \chi_w, \chi_w >_G = \frac{1}{24} 1\cdot 4 + 6\cdot 0 + 8\cdot 1 + 6\cdot 0 + 3\cdot 4 = 1$$

Por tanto, la tabla de caracteres de S_4 nos quedaría de la siguiente manera:

(Número de elementos por clase)	1	6	8	6	3
Clases de conjugación de S_4	[1]	[(1 2)]	[(1 2 3)]	[(1234)]	[(12)(34)]
representación trivial U	1	1	1	1	1
representación alternada U'	1	-1	1	-1	1
representación estándar V	3	1	0	-1	-1
representación $V \oplus U'$	3	-1	0	1	-1
representación W	2	0	-1	0	2

Capítulo 3

Representaciones de grupos simétricos

Ahora, vamos a centrarnos en las representaciones irreducibles de los grupos simétricos en general, dado que, como hemos visto, el número de clases de conjugación corresponde a el número de representaciones irreducibles y el número de clases de conjugación del grupo simétrico de orden d es fácil de obtener, ya que corresponde al número de particiones de d. Vamos a aprovechar esta propiedad y ver qué relación guarda con las representaciones irreducibles de S_d.

Teorema 3.1. *Dos elementos de S_d pertenecen a la misma clase de conjugación si y solo si tienen la mismo tipo de ciclos.*

Demostración. Si dos $g_1, g_2 \in S_d$ elementos tienen la misma estructura de ciclos, es decir, $g_1 = C_1C_2...C_k$ y $g_2 = D_1D_2...D_k$ con $C_j = (a_{i_1} \dots a_{i_{d_i}})$ y D_j ciclos de la misma longitud y tanto los C_j como los D_j son disjuntos dos a dos, podemos definir $\sigma \in S_d$ que cumple que $D_j = (a_{\sigma(i_1)} \dots a_{\sigma(i_{d_i})}) \quad \forall j = 1, ..., k$. Entonces, es fácil de comprobar que

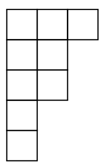
$$\sigma_j(a_{i_1} \dots a_{i_{d_i}})\sigma_j^{-1} = (a_{\sigma_j(i_1)} \dots a_{\sigma_j(i_{d_i})}).$$

Por tanto, $g_2 = D_1D_2...D_k = (\sigma C_1 \sigma^{-1}) \dots (\sigma C_k \sigma^{-1}) = \sigma C_1 \dots C_k \sigma^{-1} = \sigma g_1 \sigma^{-1}$. Es decir, pertenecen a la misma clase de conjugación. El recíproco es directo con la igualdad de arriba. $\square$

Entonces, cada clase de conjugación está unívocamente determinada por la estructura de ciclos de sus elementos, es decir, por la manera en la manera en la que podemos agrupar los d elementos en ciclos. Por tanto, hay tantas clases de conjugación como particiones de d. Para el resto del trabajo, a una partición $d = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ la denominaremos $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_k)$ con $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_k \geq 1$. Por ejemplo, S_3 tiene 3 clases de conjugación y las particiones posibles de 3 son $(1,1,1)$, $(2,1)$ y (3).
Una herramienta muy útil para visualizar las particiones y que usaremos son los diagramas de Young.

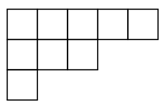
Definición 3.2. Un diagrama de Young es una representación visual de una partición γ de un entero d en la que si $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_k)$, colocamos γ_i casillas en la fila i de manera decreciente. Por ejemplo, el diagrama de Young de la partición $\gamma = (3,2,2,1,1)$ de 9 sería:

$\gamma = (3,2,2,1,1)$



Si intercambiamos filas por columnas, obtenemos la partición conjugada γ'. En este caso la partición conjugada de (3,2,2,1,1,) sería

$\gamma' = (5,3,1)$



Si numeramos las casillas con los números $1,...,d$ de manera consecutiva, por ejemplo, obtenemos una *tabla de Young*:

$$\gamma = (3,2,2,1,1) \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2} 6 & 7 \\ \cline{1-2} 8 \\ \cline{1-1} 9 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

A esta numeración en particular con los números consecutivos, que suele ser la habitual, se le conoce como *numeración estándar*.

Aunque no parezca que estén relacionados, las tablas de Young nos pueden ayudar a definir una serie de operadores que nos ayudarán a construir las representaciones irreducibles de S_d.

Definición 3.3. Dada una tabla de Young asociada a una partición γ de d con la numeración estándar, definimos dos subgrupos

$$P_\gamma = \{g \in S_d \mid g \text{ mantiene los números en cada fila}\}$$

y

$$Q_\gamma = \{g \in S_d \mid g \text{ mantiene los números en cada columna}\}.$$

Notemos que $P_\gamma \cap Q_\gamma = 1$

Ejemplo 3.4. Por ejemplo, para S_3 tomamos el diagrama de Young correspondiente a $\gamma = (2,2,1)$ y asignamos a las casillas los números en orden, es decir:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

En este caso, los elementos que mantienen las filas son $(1\ 2)$, $(3\ 4)$ y $(1\ 2)(3\ 4)$, entonces $P_\gamma = \{1,(1\ 2),(3\ 4),(1\ 2)(3\ 4)\}$; por el contrario, los elementos que conservan las columnas son los que permutan $1,3$ y 5, y $(2\ 4)$, por tanto $Q_\gamma = \langle(1\ 3),(1\ 3\ 5),(2\ 4)\rangle$.

Definición 3.5. Ahora introducimos dos elementos del álgebra de grupo $\mathbb{C}S_d$ (Definición 1.13) de la siguiente manera:

$$a_\gamma = \sum_{g\in P_\gamma} e_g \quad \text{y} \quad b_\gamma = \sum_{g\in Q_\gamma} \operatorname{sgn}(g) e_g.$$

Y por último, llamamos simetrizador de Young de una partición γ a

$$c_\gamma = a_\gamma \cdot b_\gamma \in \mathbb{C}S_d.$$

Ejemplo 3.6. Si consideramos S_3 y tomamos la tabla de Young correspondiente a $\gamma = (2,1)$ con la numeración habitual, $P_{(2,1)} = \{1,(1\ 2)\}$ y $Q_{(2,1)} = \{1,(1\ 3)\}$ por tanto

$$a_{(2,1)} = 1 + e_{(1\ 2)} \quad \text{y} \quad b_{(2,1)} = 1 - e_{(1\ 3)}.$$

En el ejemplo anterior de $\gamma = (2,1)$, se tiene que

$$c_{(2,1)} = (1+e_{(1\ 2)})(1-e_{(1\ 3)}) = 1 + e_{(1\ 2)} - e_{(1\ 3)} - e_{(1\ 2)(1\ 3)}.$$

Usando la notación como la de la representación regular del Ejemplo 1.20, podemos escribir los e_g como tuplas. Entonces, para $\gamma = (3)$, $P_{(3)} = S_3$ y $Q_{(3)} = \{1\}$, $a_{(3)} = (1,1,1,1,1,1)$ y $b_{(3)} = (1,0,0,0,0,0)$, por tanto, $c_{(3)} = (1,1,1,1,1,1)$.
Para $\gamma = (2,1)$, como en el ejemplo anterior, $a_{(2,1)} = (1,1,0,0,0,0)$ y $b_{(2,1)} = (1,0,1,0,0,0)$, por tanto, $c_{(2,1)} = (1,1,-1,0,0,-1)$.

Para $\gamma = (1,1,1)$, $P_{(1,1,1)} = \{1\}$ y $Q_{(1,1,1)} = S_3$, $a_{(1,1,1)} = (1,0,0,0,0,0)$ y $b_{(1,1,1)} = (1,-1,-1,-1,1,1)$, por tanto, $c_{(1,1,1)} = (1,-1,-1,-1,1,1)$.

Lema 3.7. *Cada elemento de $P_\gamma Q_\gamma$ se puede poner de única manera como $p \in P_\gamma$ y $q \in P_\gamma$*

Demostración. Si pq=p_1q_1 con $p, p_1 \in P_\gamma$ y $q, q_1 \in Q_\gamma$, $p_1^{-1}p = q_1q^{-1} \in P_\gamma \cap Q_\gamma$. Y como vimos en la Definición 3.3, $P_\gamma \cap Q_\gamma = \{1\}$, entonces $p = p_1$, $q = q_1$. □

Lema 3.8. *Sea T la tabla Young de partición γ (con cierta numeración) y sean P_γ, Q_γ los subgrupos asociados. Dado un $g \in S_d$, sean $g(T)$ la tabla de Young obtenida al aplicar la permutación g a las entradas de T. Entonces, los subgrupos asociados a $g(T)$ son*

$$gP_\gamma g^{-1} \quad y \quad gQ_\gamma g^{-1}$$

Demostración. Las filas de $g(T)$ son de la forma $g(F)$ con F fila de T, luego

$$gP_\gamma g^{-1} \cdot g(F) = gP_\gamma(F) = g(F).$$

Además, si H es subgrupo que cumple que $Hg(F) = g(F)$ para toda fila F, se tiene

$$g^{-1}Hg(F) = F, \quad \text{luego} \quad g^{-1}Hg \leq P_\gamma.$$

El resultado es análogo para Q_γ es análogo. □

Como demostraremos más adelante, si consideramos los c_γ actuando por la derecha como una aplicación de $\mathbb{C}S_d$, su imagen V_γ corresponde a una representación irreducible. Es decir,

$$V_\gamma = \mathbb{C}S_d \cdot c_\gamma.$$

A partir de ahora denotaremos los elementos de la base de $\mathbb{C}S_d$ igual que a los del grupo, es decir, pondremos g en lugar de e_g.

Ejemplo 3.9. Consideramos ahora S_d para la partición $\gamma = (d)$. Como solo hay una fila, como hemos visto en el ejemplo de S_3, $P_{(d)} = S_d$ y $Q_{(d)} = \{1\}$, por tanto, $c_{(d)} = \sum_{h \in S_d} h$. Para todo $g \in S_d$

$$gc_{(d)} = g \sum_{h \in S_d} h = \sum_{h \in S_d} gh = c_{(d)}$$

Luego $\forall v \in V_{(d)}$

$$v = (\sum_{g \in S_d} n_g g) \cdot c_{(d)} = \sum_{g \in S_d} n_g g c_{(d)} = \sum_{g \in S_d} n_g c_{(d)} = (\sum_{g \in S_d} n_g) c_{(d)}$$

donde los $n_g \in \mathbb{C}$. Para ver que de representación se trata, hacemos que actúe un elemento $x \in S_d$:

$$x \cdot v = x \cdot (\sum_{g \in S_d} n_g) c_{(d)} = (\sum_{g \in S_d} n_g) x c_{(d)} = v$$

Puesto que $xc_{(d)} = c_{(d)}$. Por tanto, $V_{(d)}$ corresponde a la representación trivial.
Ahora nos fijamos en que, para $\gamma' = (1, 1, 1..., 1)$, solo hay una columna, lo que significa que $Q_{(d)} = S_d$ y $P_{(d)} = \{1\}$. De manera similar a como hemos visto para S_3, $c_{\gamma'} = \sum_{h \in S_d} sgn(h)h$. Entoces, para todo $g \in G$:

$$g \cdot c_{\gamma'} = g \cdot \sum_{h \in S_d} sgn(h)h = sgn(g) \sum_{h \in S_d} sgn(g)sgn(h)gh = sgn(g)c_{\gamma'},$$

ya que $(sgn(g))^2 = 1$ y $sgn(g)sgn(h) = sgn(gh)$. Por tanto, $\forall v \in V_{\gamma'}$,

$$v = (\sum_{g \in S_d} n_g g) \cdot c_{\gamma'} = \sum_{g \in S_d} n_g g c_{\gamma'} = (\sum_{g \in S_d} n_g sgn(g)) \cdot c_{\gamma'}.$$

Luego si hacemos actuar $x \in S_d$ tenemos:

$$xv = (\sum_{g \in S_d} n_g sgn(g)) \cdot xc_{\gamma'} = (\sum_{g \in S_d} n_g sgn(g)) sgn(x) \cdot c_{\gamma'} = sgn(x)v$$

Por tanto, $V_{\gamma'}$ corresponde a la representación alternada.
Ahora consideramos la partición $\gamma = (d-1,1)$. Su tabla de Young consiste en una fila con los números $\{1,\dots,d-1\}$ y otra fila únicamente con la casilla $\{d\}$. Por tanto, P_γ está formado por los elementos que dejan fijo d y por tanto $P_\gamma \cong S_{d-1}$. Como sólo hay una columna $\{1,d\}$ con más de un elemento, tenemos que $Q_\gamma = 1 - e_{(1\ d)}$. Entonces, para $V_{\gamma'} = \mathbb{C}S_d c_\gamma$, existe una base $v_2,\dots,v_d$ con $v_j = (j\ d)\cdot c_\gamma$ para $j = 2,\dots,d$, donde se puede ver que [3][p. 518, ej. 4.4]:

$$v_j = (j\ d)\cdot c_\gamma = (j\ d)(\sum_{p(d)=d} p)(1-e_{(1\ d)}) = \sum_{p(d)=d}(j\ d)p - \sum_{p(d)=d}(j\ d)pe_{(1\ d)}) = \sum_{g(d)=j} e_g - \sum_{h(1)=j} e_h,$$

como la base tiene $d-1$ vectores, tenemos que $dimV_\gamma = d-1$. Por último, nos damos cuenta que

$$\sum_{j=1}^{d} v_j = \sum_{j=1}^{d}(\sum_{g(d)=j} g - \sum_{h(1)=j} h) = \sum_{j=1}^{d}\sum_{g(d)=j} g - \sum_{j=1}^{d}\sum_{h(1)=j} h = \sum_{g\in S_d} g - \sum_{h\in S_d} h = 0$$

Vemos así que V_γ corresponde a la representación estándar. (Ejemplo 1.17)

Observación: Si T y T' son dos tablas de *Young* correspondientes a la misma partición γ pero con distinta numeración, podemos encontrar $g \in S_d$ con $T' = g(T)$. Entonces $P'_\gamma = gP_\gamma g^{-1}$ y $Q'_\gamma = gQ_\gamma g^{-1}$. Luego $c'_\gamma = gc_\gamma g^{-1}$ y de esto se deduce que

$$\begin{aligned} g:\ & V'_\gamma \to V_\gamma \\ & ac'_\gamma \mapsto ac'_\gamma g = agc_\gamma \end{aligned}$$

es un G-isomorfismo.
Hemos supuesto durante todo el trabajo que el módulo de la representación estándar de S_d es irreducible, el siguiente teorema, junto con lo que hemos visto, nos asegura que todos los módulos contruidos de esta forma son irreducibles.

Lema 3.10. *Sea $G = S_d$ y γ una partición dada. Como notación usaremos $c := c_\gamma$. Entonces*

i) Para todos los $p \in P_\gamma$, $q \in Q_\gamma$, $p\cdot c\cdot(sgn(q)q) = c$, y, salvo multiplicación por un escalar, c es el único elemento de este tipo en $\mathbb{C}S_d$ [3][p. 53].

ii) Para cualquier $a \in \mathbb{C}G, cac = \alpha c$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$.

iii) Si W es un subespacio invariante de $\mathbb{C}G$, y $W^2 = 0$, entonces $W = 0$ [6].

Demostración. (i) Veamos primero que c cumple la propiedad. Como

$$c = (\sum_{p\in P_\gamma} p)(\sum_{q\in Q_\gamma} sgn(q)q),$$

dado $p_1 \in P_\gamma$,

$$p_1 \sum_{p\in P_\gamma} p = \sum_{p\in P_\gamma} p_1 p = \sum_{p\in P_\gamma} p,$$

luego $p_1 c = c$. Análogamente, para cualquier $q_1 \in Q_\gamma$, $cq_1 = c\cdot \mathrm{sgn}(q_1)$, luego $p_1 c q_1 = c\cdot\mathrm{sgn}(q_1)$. Además, si un elemento $\sum_{g\in S_d} n_g g$ satisface la condición, entonces

$$p(\sum_{g\in G} n_g g)(sgn(q))q = \sum_{g\in G} n_g pgq(sgn(q)) = \sum_{g\in G} n_g g.$$

Luego si $pgq = h$, igualando coeficientes se deduce que $n_h = n_p g q = n_g sgn(q)$ y en particular $n_p q = n_1 \cdot sgn(q)$. Es decir, si $h \in P_\gamma Q_\gamma$, tenemos $h = pq$ para p,q únicamente determinados por el Lema 3.7 y

$$n_h = n_{pq} = n_1 \cdot sgn(q) = n_1 \quad \text{(coeficiente de } c \text{ en } pq)$$

Veamos ahora que si $g \notin P_\gamma Q_\gamma$, entonces $n_g = 0$, esto junto con lo anterior implicará que $\sum_{g \in G} n_g g = n_1 \cdot c$. Para tal g, es suficiente encontrar una transposición t tal que $p = t \in P_\gamma$ y $q = g^{-1} t g \in Q_\gamma$; ya que entonces $g = pgq$, así que $n_g = n_{pgq} = sgn(q) n_g = -n_g$. Si T es la tabla de Young de γ y $T' = gT$ es la tabla de Young obtenida reemplazando cada entrada i de T por $g(i)$, afirmamos que hay dos enteros distintos que aparecen en la misma fila de T y en la misma columna de T'; t es entonces la transposición de estos dos enteros. Esto implica $t \in P_\gamma$ y $t \in Q'_\gamma$, donde Q'_γ es el grupo de columna asociada a $T' = g(T)$, además por el Lema 3.8, $Q'_\gamma = g Q_\gamma g^{-1}$ luego $t = gqg^{-1}$ para $q \in Q_\gamma$, así que $q = g^{-1} t g$ como queríamos.
Debemos verificar que si no hubiera tal par de enteros, entonces uno podría escribir $g = pq$ para algún asociado $p \in P_\gamma$, $q \in Q_\gamma$. Para hacer esto, notemos que por el Lema 3.8, $P'_\gamma = g P_\gamma g^{-1}$ y $Q'_\gamma = g Q_\gamma g^{-1}$ son los grupos asociados a T'. Suponemos que no hay 2 enteros que están en la misma fila de T y en la misma columna de T'. Por tanto, todos los enteros de la primera fila de T están en columnas distintas de T'. Esto significa que lo podemos permutar mediante un elemento $q_1 \in Q'_\gamma$ para que estén en la primera fila de $q_1 T'$ y también podemos encontrar un $p_1 \in P_\gamma$ de forma que $p_1 T$ y $q_1 T'$ tengan la primera fila igual. Repitiendo el proceso, podemos encontrar $p \in P_\gamma$ y $q \in Q'_\gamma = g Q_\gamma g^{-1}$ con $pT = qT'$, donde $q = g \hat{q} g^{-1}$ con $\hat{q} = Q_\gamma$ y

$$pT = g\hat{q}g^{-1} gT = g\hat{q}T,$$

luego $p = g\hat{q} \implies g = p\hat{q}^{-1}$ con $p \in P_\gamma$ y $\hat{q} \in Q_\gamma$ como queríamos.
(ii) Sea $a \in \mathbb{C}G$ y consideramos $c \cdot a \cdot c$. Para $p \in P_\gamma$, $q \in Q_\gamma$ cualesquiera:

$$p \cdot c \cdot a \cdot c \cdot q = c \cdot a \cdot c \cdot sgn(q).$$

Por tanto, (i) implica que $cac = \alpha c$ para cierto $\alpha \in \mathbb{C}$.
(iii) Sea U un subespacio invariante complementario, de modo que $\mathbb{C}S_d = U \oplus W$ es una suma directa de representaciones. Entonces podemos escribir $1 = u + w$ para algún $u \in U, w \in W$. En particular, $w = wu + w \cdot w$. Dado que $W \cdot W = 0$, $w \cdot w = 0$, y por lo tanto $w = wu$. Se deduce de la invariancia de U que $w \in U$. En particular, $1 = u + w$ también está contenido en U, y por invariancia, U es todo $\mathbb{C}S_d$. Por lo tanto $W = 0$.

□

Teorema 3.11. *Cada V_γ es una representación irreducible de S_d.*

Demostración. [6] Para simplificar la notación llamamos $A := \mathbb{C}S_d$. Sea W un subespacio invariante de $V_\gamma = Ac_\gamma$. por el lema anterior, se deduce que $c_\gamma A c_\gamma$ es el subespacio unidimensional de A que consiste en múltiplos escalares de c_γ, es decir, $c_\gamma A c_\gamma = \mathbb{C}c_\gamma$.
Dado que $W \subset Ac_\gamma$, $c_\gamma W \subset c_\gamma A c_\gamma$. En otras palabras, $c_\gamma W$ es un subespacio del subespacio unidimensional $c_\gamma A c_\gamma = \mathbb{C}c_\gamma$. Dado que $\mathbb{C}c_\gamma$ es unidimensional y esto implica $c_\gamma W = \{0\}$ o $c_\gamma W = \mathbb{C}c_\gamma$. Supongamos que $c_\gamma W = \mathbb{C}c_\gamma$. Entonces

$$Ac_\gamma = A\mathbb{C}c_\gamma = Ac_\gamma W \subseteq W,$$

donde la inclusión final se debe a la invariancia de W. Se deduce en este caso que $W = Ac_\gamma = V_\gamma$. Supongamos ahora que $c_\gamma W = \{0\}$. Vamos a mostrar que esto implica $W = \{0\}$. Dado que $W \subset Ac_\gamma$, $WW \subset Ac_\gamma W$. Pero como $c_\gamma W = 0$ entonces $WW \subset (Ac_\gamma)W = A(c_\gamma W) = 0$. Pero, por el segundo apartado del lema anterior, $W^2 = 0$ implica que $W = 0$. Hemos demostrado que si W es un subespacio invariante de $V_\gamma = Ac_\gamma$, entonces W es cero o todo Ac_γ. Por lo tanto, Ac_γ es irreducible. □

Lema 3.12. *Si γ, λ son particiones distintas, entonces $V_\gamma \ncong V_\lambda$*

Demostración. Como $\gamma \neq \lambda$, si $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ son respectivamente el número de elementos de las filas de γ y λ, tiene que haber un índice i tal que.

$$\gamma_1 = \lambda_1, \ldots, \gamma_{i-1} = \lambda_{i-1}, \gamma_i \neq \lambda_i$$

y podemos suponer $\gamma_i > \lambda_i$. Entonces si T_γ y T_λ son las correspondientes tablas de Young tiene que haber dos enteros que estén en la misma fila de T_γ y en la misma columna de T_λ, si no fuera así, los γ_1 elementos de la primera fila de γ estarían en columnas distintas de λ, ocupando todas las columnas, lo mismo para la segunda, hasta llegar a la fila i. Pero en ese momento los γ_i elementos no vaben en las columnas de λ. Por ejemplos:

$$\gamma = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\ \hline 5&6&7\\ \cline{1-3} 8&9&10\\ \cline{1-3} 11\\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 8&2&7&4\\ \hline 11&6&3\\ \cline{1-3} 1&9\\ \cline{1-2} 5\\ \cline{1-1} 10\\ \cline{1-1}\end{array}$$

Como vemos, 8 y 10 están en la misma fila de γ y la misma columna de λ.

Sea t la trasposición de estos enteros. Tenemos que $t \in P_\gamma$, luego $tP_\gamma = P_\gamma$ y como también, $t \in Q_\lambda$ así que

$$q_\lambda \cdot t = q_\lambda \cdot sgn(t) = -q_\lambda$$

Por tanto,

$$c_\lambda \cdot c_\lambda = p_\lambda q_\lambda p_\gamma q_\gamma = p_\lambda q_\lambda t \cdot t p_\gamma q_\gamma = -p_\lambda q_\lambda p_\gamma q_\gamma = -c_\lambda \cdot c_\gamma$$

es decir, $c_\lambda \cdot c_\gamma = 0$.
El argumento se puede repetir considerando en lugar de T_γ el diagrama $g(T_\gamma)$ con $g \in S_d$ arbitrario, esto implica que $\forall g \in S_d$

$$c_\lambda \cdot g c_\gamma g^{-1} = 0 \quad \text{luego} \quad c_\lambda g c_\gamma = 0$$

Por tanto, $\forall a \in \mathbb{C}S_d$ tenemos $c_\lambda a c_\gamma = 0$, luego $c_\lambda V_\gamma = \mathbb{C}G c_\gamma = 0$. Si V_γ y V_λ fueran isomorfos, esto implicaría que $c_\lambda \cdot V_\lambda$. Pero $c_\lambda \cdot V_\lambda = c_\lambda \mathbb{C}G c_\lambda \neq 0$ □

Teorema 3.13. *Las representaciones irreducibles de S_d son precisamente las de la forma V_γ con γ partición de d.*

Demostración. Esto es consecuencia inmediata de los dos resultados anteriores teniendo en cuenta el hecho de que el número de particiones de d es el número de clases de conjugación de S_d □

Ejemplo 3.14. Ahora podemos describir representaciones de los grupos simétricos S_d con $d = 2,3,4$.

— Para S_2, hay 2 particiones posibles: $(1,1)$ y (2). Como vimos en el Ejemplo 3.9, $V_{(2)}$ corresponde a la representación trivial U y $V_{(1,1)}$, la alternada.

$$U \ \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline\end{array} \qquad U' \ \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array}$$

— Para S_3, las particiones posibles son (3), $(2,1)$, $(1,1,1)$. De la misma manera, $V_{(3)} = U$, $V_{(1,1,1)} = U'$ y, como vimos también en el Ejemplo 3.9, $V_{(2,1)}$ corresponde a la estándar V. Por tanto:

$$U \ \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline\end{array} \qquad U' \ \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad V \ \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline\end{array}$$

— Para S_4, tenemos 5 particiones posibles: (4), $(3,1)$,$(2,2)$, $(2,1,1)$ y $(1,1,1,1)$. Nos fijamos en el Ejemplo 2.14, donde obtuvimos los módulos irreducibles a través de los caracteres. Es fácil ver que $V_{(d)} = U$, $V_{(1,1,1,1)} = U'$ y $V_{(3,1)} = V$. Nos faltaría asignar $V \otimes U'$ y la representación W. Tenemos que $(2,1,1)$ es la partición conjugada a $(3,1)$, entoces $V_{(2,1,1)} = V_{(3,1)} \otimes U'$ [3][p.47]. Por tanto, $V_{(2,1,1)} = V \otimes U$ y por eliminación, $V_{(2,2)} = W$. La figura nos quedaría así:

$$U \ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline\end{array} \qquad V \ \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad W \ \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline\end{array} \qquad V \otimes U' \ \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1} \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad U' \ \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline\end{array}$$

Bibliografía

[1] K. DONOGHUE, *Research Experience for Undergraduates: Geometry and Topology*, UC Berkeley, 20 June 2017, disponible en `https://math.berkeley.edu/~donoghue/reu/quantum/Notes_June_20.pdf`.

[2] A. ELDUQUE, *Groups and Galois Theory. Course Notes*, Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 2022, p.22

[3] W. FULTON Y J. HARRIS, *Representation Theory. A First Course*, Graduate texts in Mathematics, Springer Science+Business Media, Nueva York, 2004,

[4] B. HALL, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 222 (2nd ed.), Springer, 2015

[5] R. A. HORN, C. R. JOHNSON *Matrix Analysis* Cambridge Univeristy Press, 2012, p. 21,62

[6] S. JOHNSTON, (HTTPS://MATH.STACKEXCHANGE.COM/USERS/361676/SAMUEL-JOHNSTON) *About Young symmetrizer c_λ, URL* Mathematics Stack Exchange, (version: 2022-11-01), disponible en https://math.stackexchange.com/q/4566512 .

[7] S. LANG, *Algebra*, Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, Chapter 16, Nueva York, 2002.

[8] C. F.VAN LOAN *The ubiquitous Kronecker product*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 123, Issues 1–2, 2000. `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042700003939?via%3Dihub`.