

Modelos de localización y distribución. Una aplicación.



Marta Bergua Barrabés
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo: Herminia I. Calvete
Fernández y José Ángel Iranzo Sanz
12 de junio de 2024

Resumen

Los problemas de optimización de modelos de distribución y localización afectan a decisiones sobre la localización de instalaciones y sobre la distribución de productos desde ciertos centros a puntos de demanda. Son problemas que se encuentran en la realidad y siempre han existido estrategias para encontrar la solución más beneficiosa para el objetivo del problema. Normalmente, este objetivo suele estar relacionado con obtener el coste mínimo satisfaciendo las necesidades del problema o con sacar algún beneficio con las decisiones tomadas.

Además, estos modelos combinan dos tipos de problemas importantes en el campo de la Investigación Operativa. Por un lado, el diseño de redes de distribución se encuentra entre los problemas más utilizados en varios campos de investigación, como en ingeniería, matemática aplicada, informática o gestión de cadenas de suministros. Asimismo, las decisiones de localización son imprescindibles para el largo plazo de un proyecto, pues una buena ubicación de las instalaciones puede generar un beneficio notable.

Este trabajo trata de profundizar en este tipo de modelos a través de la aplicación de estos en un problema determinado. Para ello, el capítulo 1 da una base teórica para el entendimiento de las formulaciones posteriores. En él, se estudian los modelos generales de programación lineal y entera, donde se especifican dos métodos para la resolución de problemas de optimización lineal entera. Además, se explica la formulación estándar para el modelo de localización y los modelos de distribución básicos, entre los que están el problema de transporte, el problema de transporte con coste fijo en los arcos y el problema de flujo a coste mínimo.

Estas nociones teóricas ayudan a la comprensión de los modelos explicados en el capítulo 2. En este capítulo se estudian varios modelos que integran los procesos de localización y distribución en varias etapas. Se describe un sistema basado en un problema concreto, y se busca un modelo para su resolución. Primero, se considera una versión simplificada del modelo, para la que se dan dos formulaciones equivalentes, que difieren en la definición de sus variables. Después, se extiende el modelo a uno general de producción / localización / distribución, añadiendo características al sistema.

Para acabar, el capítulo 3 estudia la implementación de estos modelos para un sistema realista. En él, también se diferencia entre la versión simplificada del problema y el modelo general, obteniendo en ambos casos la solución óptima. Además, se realiza una interpretación de los resultados, obtenidos de manera computacional, y se comparan entre ellos.

Summary

Location distribution optimization problems affect facility location decisions and supply distribution decisions from facilities to demand points. These are real problems and strategies have always existed to find the most beneficial solution for the problem's objective. Usually, this objective is related to obtaining the minimum cost while satisfying the constraints of the problem or to gaining some benefit from the decisions made.

Furthermore, they combine two types of problems with considerable importance in the field of Operations Research. On the one hand, distribution network design is among the most commonly used problems in several fields of research, such as engineering, applied mathematics, computer science or supply chain management. Similarly, location decisions are essential for the long-term success of a project, since a good location of the facilities can generate significant benefits.

This project aims to delve into these types of models through their application in a specific problem. To this end, chapter 1 provides a theoretical foundation for understanding the subsequent formulations.

The chapter begins with the formulation of the general linear optimization problem, along with definitions and properties of interest for the simplex method, which can be used to solve this type of problem. It continues with the formulation of the integer linear optimization problem, two methods for solving integer problems are presented.

The branch and bound approach involves dividing the problem into subproblems until the optimal integer solution is reached. The cutting plane approach involves adding constraints (cuts) to the problem to gradually approach the optimal integer solution. This project explains two types of cuts: Gomory fractional cut, for pure integer problems; and Gomory mixed cut, for mixed problems.

Subsequently, some distribution models are formulated. Among them are the transportation problem, the fixed-charge transportation problem and the minimum cost flow problem. To conclude the chapter, two location models are formulated, uncapacitated and capacitated facility location problems.

These theoretical notions help to understand the models explained in chapter 2. This chapter studies various models that integrate the processes of location and distribution in several stages. A system based on a specific problem is described, the goal is to find the best way to distribute a product across a set of nodes associated with customers, having another set of intermediate nodes that can receive products from production plants. It is allowed to split the assembly of products, and therefore, it might be necessary to install assembly plants.

First, a simplified version of the model is considered, with only one production plant, and without capacity constraints or costs associated with shipping from the assembly plants to the customers. Two equivalent formulations are provided, differing in the definition of their variables. Then, the model is extended to a general production / location / distribution model, adding production plants, capacity constraints, costs, ...

Finally, chapter 3 discusses the implementation of these models for a realistic system. It also distinguishes between the simplified version of the problem and the general model, obtaining the optimal solution in both cases. Moreover, an interpretation of the results, obtained computationally with the software Gurobi, is performed and both solutions are compared.

Índice general

Resumen	III
Summary	V
1. Modelos de localización y distribución	1
1.1. Introducción	1
1.2. Optimización lineal	1
1.3. Optimización lineal entera	3
1.3.1. Método de ramificación y acotación	3
1.3.2. Método de los planos de corte	4
1.4. Modelos de distribución	7
1.4.1. Problema de transporte y problema de transporte con coste fijo en los arcos	7
1.4.2. Problema de flujo a coste mínimo	8
1.5. Modelos de localización	9
1.6. Problemas de planificación de cadenas de suministro	10
2. Modelos integrados de localización y distribución	11
2.1. Introducción	11
2.2. Descripción del sistema	11
2.3. Notación	12
2.4. Caso particular: Una única planta de producción, sin restricciones de capacidad y sin costes asociados a la distribución de las plantas de montaje a los clientes	13
2.4.1. Modelo basado en la definición de variables por el lugar en el que se completa el producto	14
2.4.2. Modelo basado en la definición de las variables por lo que se transporta en cada etapa	15
2.5. Modelo general de producción / localización / distribución	16
3. Una aplicación de los modelos de localización y distribución	19
3.1. Descripción del sistema realista	19
3.2. Resolución para el caso particular	21
3.3. Resolución para el modelo general	22
3.4. Conclusiones y trabajo futuro	24
Bibliografía	25
A. Ejemplos de aplicación de los métodos de resolución en optimización entera	27
A.1. Ejemplo del método de ramificación y acotación	27
A.2. Ejemplo del método fraccionario de planos de corte	28
A.3. Ejemplo del método mixto de planos de corte	29

B. Códigos	31
B.1. Código del modelo presentado en el apartado 2.4.1 (caso particular basado en la definición de variables por el lugar en el que se completa el producto)	31
B.2. Código del modelo presentado en el apartado 2.4.2 (caso particular basado en la definición de las variables por lo que se transporta en cada etapa)	33
B.3. Código del modelo general de producción / localización / distribución presentado en la sección 2.5	35

Capítulo 1

Modelos de localización y distribución

1.1. Introducción

Es este primer capítulo se van a presentar las ideas teóricas principales que subyacen en la formulación y resolución de los modelos de optimización que se van a aplicar en la memoria. Fundamentalmente, se han estudiado aquellos apartados relacionados de los libros de Bazaraa et al. [1], Chen et al. [3] y Nemhauser y Wolsey [4] para la realización de este capítulo teórico.

1.2. Optimización lineal

Un problema de optimización lineal es un tipo de problema de programación matemática cuyo objetivo es encontrar un conjunto de valores para las variables continuas (x_1, \dots, x_n) , llamadas variables decisión, que maximicen o minimicen una función lineal, que se denomina función objetivo. Además, se deben verificar una serie de restricciones, que son un conjunto de ecuaciones o inecuaciones lineales.

Para que se pueda considerar válido un modelo de optimización lineal, las variables decisión deben cumplir ciertas propiedades. Cada variable debe contribuir a la función objetivo y a las restricciones de manera directamente proporcional a su valor. Además, esta contribución debe ser independiente entre variables, de modo que no interaccionen entre ellas. Las variables deben poder tomar valores fraccionarios y los parámetros utilizados en el modelo deben ser totalmente conocidos y exactos.

Matemáticamente, se puede formular un problema de optimización lineal de máximo como

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sujeto a} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{1.1}$$

El problema de optimización lineal puede formularse como un problema de máximo o de mínimo y puede incluir cualquier tipo de restricciones, ya sean de igualdad o de desigualdad. Además, puede tener variables restringidas a ser no negativas, no positivas o que no estén restringidas en signo. Pero, mediante transformaciones que pueden incluir la definición de nuevas variables y el cambio de restricciones, se puede siempre obtener un problema de la forma mostrada en (1.1), denominada forma simétrica del problema de máximo. Cuando las restricciones son de igualdad, se dice que el problema está escrito en

forma estándar. Para transformar (1.1) a la forma estándar, basta introducir una variable de holgura no negativa sumando en cada restricción.

A continuación, se van a dar algunas definiciones y propiedades útiles para la resolución de estos problemas. Para ello, se considera la notación matricial del problema de optimización lineal en forma estándar, que es

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}_n \end{aligned} \quad (1.2)$$

en la que $\mathbf{0}_n$ es un vector de ceros de dimensión n y $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}_n$ indica que cada componente de \mathbf{x} es no negativa.

Definición 1.2.1. Se denomina región factible o región de factibilidad al poliedro $S \subseteq \mathbb{R}^n$ definido por las restricciones del problema, es decir, $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}_n\}$. Además, si $S \neq \emptyset$ se dice que el problema es factible y los puntos $\mathbf{x} \in S$ se denominan soluciones factibles del problema.

Definición 1.2.2. Un punto $\mathbf{x} \in S$ que no puede ser expresado como combinación convexa de dos puntos distintos de la región factible se denomina punto extremo de S .

Definición 1.2.3. Un punto $\mathbf{x} \in S$ se dice que es solución factible básica (sfb) del problema si existen índices B_1, \dots, B_m tales que los vectores columna A_{B_1}, \dots, A_{B_m} de la matriz A son linealmente independientes y si $i \notin \{B_1, \dots, B_m\}$, entonces $x_i = 0$. Las columnas de la matriz $\mathbf{B} := [A_{B_1} | \dots | A_{B_m}]$ forman una base de \mathbb{R}^n , y las variables x_{B_1}, \dots, x_{B_m} se denominan variables básicas.

Proposición 1.2.4. Un punto $\mathbf{x} \in S$ es una sfb si y sólo si es un punto extremo del poliedro S .

Demostración. Sea \mathbf{x}^* una sfb, entonces se puede escribir $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B^* \\ \mathbf{x}_N^* \end{bmatrix}$ con \mathbf{x}_B^* variables básicas y $\mathbf{x}_N^* = \mathbf{0}_{n-m}$ variables no básicas. Como \mathbf{x}^* es básica, es solución única de $\mathbf{B} \mathbf{x}_B = \mathbf{b}$, ya que las columnas de \mathbf{B} son linealmente independientes. Si se supone que \mathbf{x}^* se puede escribir como combinación convexa de otros dos puntos \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 en la región factible, es decir, $\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2$ con $0 < \lambda < 1$. Estos dos puntos también verifican el sistema anterior, luego se tiene necesariamente $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}^*$. Así \mathbf{x}^* no tiene combinación convexa no trivial, y por tanto debe ser un punto extremo.

Recíprocamente, si \mathbf{x}^* es un punto extremo de S , se verifica el sistema $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ con m ecuaciones lineales y n incógnitas. La matriz \mathbf{A} es no singular, ya que en caso contrario \mathbf{x}^* no sería solución única y podría expresarse como combinación convexa de otras soluciones factibles, lo que contradice que sea punto extremo. Luego, existen m columnas en \mathbf{A} , \mathbf{A}_B , tal que \mathbf{A}_B tiene rango completo m . El sistema $\mathbf{A}_B \mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ tendrá entonces solución única, que es \mathbf{x}^* . Por lo tanto, \mathbf{x}^* es sfb. \square

Una de las propiedades fundamentales del problema de optimización lineal es que, si tiene solución óptima, existe un punto extremo que lo es. El problema de optimización lineal se puede resolver mediante distintos métodos. Entre los más conocidos, el método simplex desarrollado en el año 1947 por George Dantzig, es un procedimiento iterativo para la resolución de problemas de optimización lineal en forma estándar. Si el problema es factible, el algoritmo encuentra en cada iteración una sfb mejor (o al menos no peor) que la anterior, y termina cuando consigue la solución óptima con respecto a la función objetivo o cuando detecta que el problema es no acotado. Por otro lado, uno de los primeros algoritmos que fue competitivo en términos de tiempo necesario de cálculo con el método simplex fue el algoritmo de Karmarkar, desarrollado en 1984 por Narendra Karmarkar. Este algoritmo tiene una complejidad polinómica, es decir, es eficiente para problemas grandes. Su tiempo de ejecución es proporcional a una función polinómica del tamaño del problema, cuando el método simplex, en el peor de los casos, podría tener un comportamiento exponencial. A diferencia del método simplex, que busca el óptimo por la frontera a través de puntos extremos, este algoritmo busca el óptimo por el interior de la región factible. Descripciones más detalladas de estos algoritmos pueden verse en [1].

1.3. Optimización lineal entera

Si en un problema de optimización lineal algunas de las variables están restringidas a tomar valores enteros, se tendrá un problema de optimización lineal entera. Este tipo de problema es mucho más común en el mundo real, pero su resolución es más complicada. Dependiendo de la naturaleza de las variables de decisión se puede diferenciar entre un problema de optimización entera mixto, si existen tanto variables continuas como enteras; puro, si únicamente hay variables de decisión enteras; o binario, si todas las variables están restringidas a tomar los valores 0 o 1.

Así, un problema de optimización lineal entera mixto se puede expresar como

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{k=1}^p d_k y_k \\ \text{sujeto a} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^p g_{ik} y_k \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ & y_k \geq 0 \text{ y enteras} \quad k = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{1.3}$$

Si en este tipo de problemas se omite la restricción de integridad sobre las variables, se obtiene la relajación lineal del problema entero. El valor óptimo de la función objetivo de este nuevo problema nunca será peor que el obtenido en el problema entero, por lo que, la relajación lineal proporciona una cota superior o inferior de la función objetivo de un problema de máximo o mínimo, respectivamente.

A diferencia del problema de optimización lineal, en el que se conoce como pasar de una sfb a otra mejor (o al menos no peor), lo que es utilizado por el método simplex, en el caso de la optimización entera no se conoce cómo pasar de una solución factible entera a otra mejor, o no peor, por lo que la resolución de estos problemas es mucho más complicada. A continuación, se van a estudiar dos métodos clásicos para la resolución de problemas de optimización entera.

1.3.1. Método de ramificación y acotación

Los procedimientos de ramificación y acotación se pueden aplicar a cualquier tipo de problema de optimización entera, y trabajan sobre las relajaciones lineales de estos. En lo que sigue, se asume que el problema es entero puro, ya que el algoritmo es similar en caso de que no lo sea, y que se trata de un problema de máximo.

Se considera entonces la relajación lineal del problema y se obtiene la solución óptima de esta. Si esta solución es entera, entonces será la solución óptima del problema original. En caso contrario, se deben aplicar las dos operaciones básicas del algoritmo, ramificar y acotar.

1. **Ramificar:** Se divide la región de factibilidad en dos subconjuntos, eliminando en el proceso una parte de esta que no incluya soluciones factibles enteras. Para hacer esta división, se selecciona una variable básica (x_{B_r} que toma el valor \bar{b}_r) que deba ser entera y que en este momento no lo sea. Entonces, se crean y solucionan dos subproblemas, $P1$ y $P2$, que incorporan la siguiente restricción,

$$P1 : x_{B_r} \leq \lfloor \bar{b}_r \rfloor \quad P2 : x_{B_r} \geq \lfloor \bar{b}_r \rfloor + 1$$

donde $\lfloor a \rfloor$ es la función suelo, que define el entero más grande que es menor o igual que a . Los valores que se han eliminado corresponden a $\lfloor \bar{b}_r \rfloor < x_{B_r} < \lfloor \bar{b}_r \rfloor + 1$, ninguno de los cuales es entero, luego no será solución óptima del problema original.

2. **Acotar:** Los valores óptimos de las funciones objetivo de estos problemas ramificados son una cota para el valor óptimo de la función objetivo del problema original. Luego, un subproblema dejará de ramificarse si su solución óptima es entera, si el resultado es peor que alguna solución entera ya obtenida o si es no factible.

La solución al problema original se obtiene iterando este proceso hasta que ya no sea posible realizar más ramificaciones, y escogiendo la mejor de las soluciones obtenidas como la solución óptima. Para decidir con qué variable realizar la ramificación existen varios criterios. Algunos de ellos se exponen a continuación.

- Escoger la variable que satisface

$$\max_i \{ \min \{ x_{B_i} - \lfloor x_{B_i} \rfloor, \lfloor x_{B_i} \rfloor + 1 - x_{B_i} \} \} \text{ (Variable con parte decimal más cercana a } 0,5 \text{)}.$$

- La regla FIFO (first in first out) o la regla LIFO (last in first out).
- Escoger la variable con mayor impacto en la función objetivo.
- Escoger la variable con menor índice.
- Etc.

En el apéndice (A), apartado A.1, se puede encontrar un ejemplo de un problema de optimización entera resuelto con el método de ramificación y acotación.

1.3.2. Método de los planos de corte

La idea principal de este método es ir agregando iterativamente al problema relajado restricciones (planos de corte), que no eliminen soluciones factibles enteras. Aproximando así cada vez más el conjunto de soluciones enteras, para finalmente obtener la óptima del problema de optimización entera resolviendo solo problemas de optimización lineal. En torno a los años 50 y 60, se desarrollaron varios métodos de planos de corte. Entre ellos, a continuación se presentan los más destacados, es decir, los métodos duales fraccionario y mixto, desarrollados por Gomory. Ambos comparten un procedimiento común con los siguientes pasos.

1. Resolver la relajación lineal del problema mediante el método simplex. Si no es factible, tampoco lo será el original. Si su solución óptima es entera, entonces será la solución óptima del problema original. En otro caso, ir al paso 2.
2. Seleccionar una fila de la tabla simplex óptima que será la fila generadora.
3. Construir la nueva restricción (el corte) a partir de la fila generadora y añadirla a la tabla simplex.
4. Aplicar el método simplex dual. Si se obtiene una solución óptima entera, se ha obtenido la solución óptima del problema de optimización entera. En otro caso, ir al paso 2.

Los distintos métodos duales de planos de corte se diferencian en la forma en la que se elige cómo crear una nueva restricción para el corte. El requisito principal de este corte es que debe ser válido, esto es, que la solución óptima actual de la relajación lineal del problema no debe cumplir la restricción, pero todas las soluciones factibles enteras sí deben verificarla. A continuación, se estudian dos maneras de hacer este corte.

Método fraccionario de planos de corte

Este método permite la resolución de problemas enteros puros y requiere que todos los coeficientes del problema sean enteros. Si alguno fuese racional bastaría multiplicar la expresión (función objetivo o restricción) en la que estuviera el coeficiente por el número apropiado para convertirlo en entero.

Sea la solución óptima de la relajación lineal del problema $y_{B_i} = \bar{b}_i$ (variables básicas) y $y_k = 0$, $k \in K$ (variables no básicas), con alguno de los \bar{b}_i no entero. Se selecciona arbitrariamente alguna de las filas asociadas a estos \bar{b}_i no enteros, que se denomina fila generadora. Supongamos que es la fila r -ésima. Entonces, con la información de la tabla óptima del problema relajado, se puede escribir

$$y_{B_r} + \sum_{k \in K} \bar{g}_{rk} y_k = \bar{b}_r. \quad (1.4)$$

Como las variables son no negativas,

$$y_{B_r} + \sum_{k \in K} \lfloor \bar{g}_{rk} \rfloor y_k \leq y_{B_r} + \sum_{k \in K} \bar{g}_{rk} y_k = \bar{b}_r. \quad (1.5)$$

Además, para toda solución entera, el término de la izquierda es entero y, por tanto, puede escribirse

$$y_{B_r} + \sum_{k \in K} \lfloor \bar{g}_{rk} \rfloor y_k \leq \lfloor \bar{b}_r \rfloor. \quad (1.6)$$

Restando a la ecuación (1.4) la inecuación (1.6), se obtiene

$$\sum_{k \in K} (\bar{g}_{rk} - \lfloor \bar{g}_{rk} \rfloor) y_k \geq \bar{b}_r - \lfloor \bar{b}_r \rfloor. \quad (1.7)$$

Denotando $f_{rk} = \bar{g}_{rk} - \lfloor \bar{g}_{rk} \rfloor$ y $f_{r0} = \bar{b}_r - \lfloor \bar{b}_r \rfloor$, se obtiene el corte fraccionario de Gomory, en el que se ha introducido la variable de holgura de Gomory $s \geq 0$,

$$\sum_k -f_{rk} y_k + s = -f_{r0}.$$

Se puede ver un ejemplo de la aplicación del corte fraccionario de Gomory en un problema concreto en el apéndice (A), apartado A.2.

Método mixto de planos de corte

Este método permite resolver problemas enteros mixtos. Se considera la notación introducida en el apartado anterior, y se distingue entre las variables no básicas que deben ser enteras y_k , $k \in K$, y las variables no básicas que no tienen por qué serlo x_j , $j \in J$. Seleccionando la fila r -ésima para hacer el corte, se tiene

$$y_{B_r} + \sum_{j \in J} \bar{a}_{rj} x_j + \sum_{k \in K} \bar{g}_{rk} y_k = \bar{b}_r. \quad (1.8)$$

Se separa entre los \bar{a}_{rj} positivos y negativos, y la ecuación (1.8) se escribe

$$y_{B_r} + \sum_{j: \bar{a}_{rj} > 0} \bar{a}_{rj} x_j + \sum_{j: \bar{a}_{rj} < 0} \bar{a}_{rj} x_j + \sum_{k \in K} \bar{g}_{rk} y_k = \bar{b}_r. \quad (1.9)$$

Ahora, se consideran f_{r0} y f_{rk} como en el apartado anterior, y se define t tal que

$$t := y_{B_r} + \sum_{k: f_{rk} \leq f_{r0}} \lfloor \bar{g}_{rk} \rfloor y_k + \sum_{k: f_{rk} > f_{r0}} \lceil \bar{g}_{rk} \rceil y_k, \quad (1.10)$$

donde $[a]$ es la función techo, que devuelve el entero más pequeño que es mayor o igual que a .

Restándole a la ecuación (1.9) la ecuación (1.10), se obtiene que

$$\sum_{k:f_{rk} \leq f_{r0}} \overbrace{(g_{rk} - [g_{rk}])}^{f_{rk}} y_k + \sum_{k:f_{rk} > f_{r0}} \overbrace{(g_{rk} - [g_{rk}])}^{1-f_{rk}} y_k + \sum_{j:\bar{a}_{rj} > 0} \bar{a}_{rj} x_j + \sum_{j:\bar{a}_{rj} < 0} \bar{a}_{rj} x_j = \bar{b}_r - t. \quad (1.11)$$

Como t es entero, se puede diferenciar entre los dos casos expuestos a continuación.

■ **Caso 1:** $[\bar{b}_r] \geq t$.

Se tiene que

$$\sum_{k:f_{rk} > f_{r0}} (f_{rk} - 1) y_k \leq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{j:\bar{a}_{rj} < 0} \bar{a}_{rj} x_j \leq 0.$$

Entonces, por (1.11), se obtiene

$$\sum_{k:f_{rk} \leq f_{r0}} f_{rk} y_k + \sum_{j:\bar{a}_{rj} > 0} \bar{a}_{rj} x_j \geq \bar{b}_r - t \geq \bar{b}_r - [\bar{b}_r] = f_{r0}.$$

Como $\frac{1}{1-f_{r0}} \geq 0$, se puede escribir

$$\frac{1}{f_{r0}} \sum_{k:f_{rk} \leq f_{r0}} f_{rk} y_k + \frac{1}{f_{r0}} \sum_{j:\bar{a}_{rj} > 0} \bar{a}_{rj} x_j + \frac{-1}{1-f_{r0}} \sum_{k:f_{rk} > f_{r0}} (f_{rk} - 1) y_k + \frac{-1}{1-f_{r0}} \sum_{j:\bar{a}_{rj} < 0} \bar{a}_{rj} x_j \geq 1.$$

O, equivalentemente,

$$\frac{1}{f_{r0}} \sum_{k:f_{rk} \leq f_{r0}} f_{rk} y_k + \sum_{k:f_{rk} > f_{r0}} \frac{1-f_{rk}}{1-f_{r0}} y_k + \frac{1}{f_{r0}} \sum_{j:\bar{a}_{rj} > 0} \bar{a}_{rj} x_j + \sum_{j:\bar{a}_{rj} < 0} \frac{1}{f_{r0}-1} \bar{a}_{rj} x_j \geq 1.$$

■ **Caso 2:** $[\bar{b}_r] \leq t$.

Por (1.11) se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k:f_{rk} > f_{r0}} (f_{rk} - 1) y_k - \sum_{j:\bar{a}_{rj} < 0} \bar{a}_{rj} x_j &= \overbrace{\sum_{k:f_{rk} \leq f_{r0}} f_{rk} y_k + \sum_{j:\bar{a}_{rj} > 0} \bar{a}_{rj} x_j}^{\geq 0} + t - \bar{b}_r \geq t - \bar{b}_r \geq [\bar{b}_r] - \bar{b}_r = \\ &= [\bar{b}_r] + 1 - \bar{b}_r = 1 - f_{r0}. \end{aligned}$$

Como se sabe que

$$\frac{1}{f_{r0}} \sum_{k:f_{rk} \leq f_{r0}} f_{rk} y_k \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{f_{r0}} \sum_{j:\bar{a}_{rj} > 0} \bar{a}_{rj} x_j \geq 0,$$

se puede escribir que

$$\frac{1}{f_{r0}} \sum_{k:f_{rk} \leq f_{r0}} f_{rk} y_k + \sum_{k:f_{rk} > f_{r0}} \frac{1-f_{rk}}{1-f_{r0}} y_k + \frac{1}{f_{r0}} \sum_{j:\bar{a}_{rj} > 0} \bar{a}_{rj} x_j - \sum_{j:\bar{a}_{rj} < 0} \frac{1}{1-f_{r0}} \bar{a}_{rj} x_j \geq 1.$$

Por lo tanto, denotando con $s \geq 0$ la variable de holgura de Gomory. El corte mixto de Gomory es

$$- \sum_{j:\bar{a}_{rj} > 0} \bar{a}_{rj} x_j - \sum_{j:\bar{a}_{rj} < 0} \frac{f_{r0}}{f_{r0}-1} \bar{a}_{rj} x_j - \sum_{k:f_{rk} \leq f_{r0}} f_{rk} y_k - \sum_{k:f_{rk} > f_{r0}} \frac{f_{r0}(1-f_{rk})}{1-f_{r0}} y_k + s = -f_{r0}.$$

En el apéndice (A), apartado A.3, se incluye un ejemplo resuelto de un problema de optimización entera mixta en el que se ha utilizado el corte mixto de Gomory.

1.4. Modelos de distribución

Sea $\mathcal{G} = [\mathcal{N}, \mathcal{A}]$ una red en la que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3$ es el conjunto de nodos, siendo \mathcal{N}_1 el conjunto de nodos con oferta, \mathcal{N}_2 el conjunto de nodos con demanda y \mathcal{N}_3 el conjunto de nodos sin oferta ni demanda. Además, $\mathcal{A} = \{(i, j) : i, j \in \mathcal{N}\}$ es el conjunto de arcos dirigidos. Cada arco en \mathcal{A} tiene asociado un coste de envío por unidad de producto c_{ij} . El objetivo de los modelos de distribución es determinar cómo debe realizarse la distribución del producto a través de la red para minimizar el coste. Estos problemas se encuentran entre los problemas de optimización lineal que pueden resolverse más eficientemente. Dependiendo de las características de la red y de las restricciones, existen distintos modelos, algunos de los cuales se formulan a continuación.

1.4.1. Problema de transporte y problema de transporte con coste fijo en los arcos

En estos problemas, la red \mathcal{A} es bipartita. Por tanto, se considera un problema de transporte todo aquel que consiste en la optimización del transporte de unidades de un producto desde m nodos fuente con oferta a un conjunto de n nodos destino con demanda (como se ve en la figura 1.1). Al poder plantear este problema de manera especial, se considera como un caso particular de un problema de optimización lineal con un método de resolución específico.

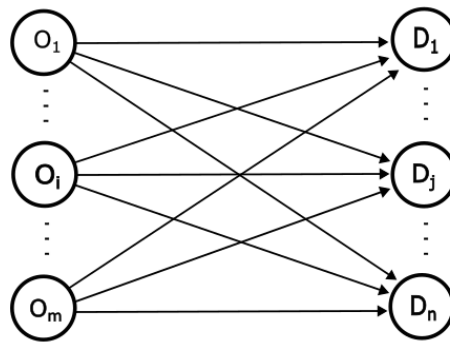


Figura 1.1: Modelo de transporte.

Sea el conjunto de nodos origen del producto (O_1, \dots, O_m) y sea a_i la oferta de O_i , $i = 1, \dots, m$. Sean (D_1, \dots, D_n) los lugares donde se demanda el producto, con b_j , $j = 1, \dots, n$, la demanda de D_j . El objetivo del problema será encontrar el mínimo coste para el plan de transporte que verifique que la demanda en cada destino queda satisfecha. Se supone que el problema está balanceado, es decir, la oferta total y la demanda total coinciden ($a_1 + \dots + a_m = b_1 + \dots + b_n$), ya que al estar en un problema de mínimo se asume que no se van a fabricar ni transportar más productos de los necesarios, aunque sí se debe satisfacer la demanda total.

Definiendo x_{ij} como las unidades de producto enviadas desde O_i hasta D_j . El modelo de transporte se puede formular como

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1.12a)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m \quad (1.12b)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n \quad (1.12c)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.12d)$$

En el modelo se puede observar que la función objetivo (1.12a) minimiza el coste total del envío. Las restricciones (1.12b) son las asociadas a la oferta y garantizan que se utilizan todas las unidades ofertadas. Las restricciones (1.12c) son restricciones de demanda, y aseguran que esta queda satisfecha. Por último, las restricciones (1.12d) garantizan la no negatividad de las variables. Este problema puede resolverse con una implementación particular del método simplex más eficaz que la usual. Además, en caso de que las ofertas y demandas sean enteras, el problema tiene una solución óptima entera ya que la matriz de coeficientes es unimodular.

Si, además, hubiera un coste fijo por utilizar el arco independientemente del número de unidades de producto que lo recorren, f_{ij} , definiendo y_{ij} una variable binaria que regule el uso del arco $(i, j) \in \mathcal{A}$, se puede plantear el problema de transporte con coste fijo en los arcos como

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij}x_{ij} + f_{ij}y_{ij}) \quad (1.13a)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m \quad (1.13b)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n \quad (1.13c)$$

$$x_{ij} \leq M y_{ij} \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.13d)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.13e)$$

$$y_{ij} = 0 \text{ o } 1 \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.13f)$$

Ahora, la función objetivo (1.13a) contiene los costes por unidad enviada por un arco y los costes fijos por el uso de este. Las restricciones (1.13b) y (1.13c) representan las restricciones de oferta y demanda, respectivamente. Las restricciones (1.13d) garantizan que la variable binaria, y_{ij} , sea no nula si se envían unidades por el arco (i, j) . La constante M , que asegura que se pueden enviar tantas unidades como se quiera por ese arco, se puede acotar por la demanda total. Por último, las restricciones (1.13e) y (1.13f) garantizan que las variables están bien definidas. Este problema es un caso particular del problema de optimización entera con carga fija y su resolución precisa de las técnicas explicadas para resolver este tipo de problemas.

1.4.2. Problema de flujo a coste mínimo

Se considera la red $\mathcal{G} = [\mathcal{N}, \mathcal{A}]$ definida anteriormente, con c_{ij} como el coste por unidad enviada utilizando el arco (i, j) . Cada $i \in \mathcal{N}_1$ ofrece a_i unidades de un producto determinado y cada $i \in \mathcal{N}_2$ demanda b_i unidades de este producto. Se puede suponer que el problema está balanceado, es decir, la oferta total y la demanda total son iguales. Además, cada arco tiene asociada una cota inferior, l_{ij} , y una cota superior, u_{ij} , sobre el flujo que puede circular por el arco, $0 \leq l_{ij} \leq u_{ij}$.

Sea x_{ij} la cantidad de producto enviada utilizando el arco $(i, j) \in \mathcal{A}$, es decir, el flujo por el arco. El objetivo del problema de flujo a coste mínimo es determinar el mejor plan para la distribución del producto de manera que se minimice el coste total. Con estas notaciones, el problema puede formularse como

$$\min \sum_{i \in \mathcal{N}_1} \sum_{j \in \mathcal{N}_2} c_{ij} x_{ij} \quad (1.14a)$$

sujeto a

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_2} x_{ij} - \sum_{j \in \mathcal{N}_1} x_{ji} = a_i \quad \forall i \in \mathcal{N}_1 \quad (1.14b)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} x_{ij} - \sum_{j \in \mathcal{N}} x_{ji} = -b_i \quad \forall i \in \mathcal{N}_2 \quad (1.14c)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} x_{ij} - \sum_{j \in \mathcal{N}} x_{ji} = 0 \quad \forall i \in \mathcal{N}_3 \quad (1.14d)$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall i, j \in \mathcal{N} \quad (1.14e)$$

La función objetivo (1.14a) minimiza el coste del envío de unidades. Las primeras restricciones del problema aseguran que la diferencia entre el flujo que sale de un nodo determinado y el que entra en él, debe ser la oferta del nodo, si $i \in \mathcal{N}_1$ (restricciones (1.14b)); la demanda del nodo (en negativo ya que entra al nodo), si $i \in \mathcal{N}_2$ (restricciones (1.14c)); o cero, si el nodo no tiene ni oferta ni demanda y por tanto $i \in \mathcal{N}_3$ (restricciones (1.14d)). Por último, las restricciones (1.14e) garantizan que el flujo que circula por cada arco es mayor o igual que la cantidad mínima y menor o igual que la cantidad máxima que puede circular por el arco. Para este problema también es válido que tiene una solución óptima entera siempre que las ofertas y las demandas sean enteras ya que la matriz de coeficientes es unimodular.

Por otro lado, si no hay restricciones de cotas sobre los arcos, el problema se denomina problema de transbordo. En este problema, dependiendo de las conexiones entre nodos, se puede clasificar los nodos de la siguiente manera. Se tiene un origen puro, si se trata de un nodo con oferta del cual sólo salen arcos; un destino puro, si es un nodo con demanda al que sólo llegan arcos; o un nodo de transbordo, en otro caso. De este último, se puede distinguir entre nodos de transbordo con oferta propia, sin oferta ni demanda o con demanda propia. Esta nueva clasificación de los nodos permite hacer las reformulaciones pertinentes para convertir el problema de transbordo en un problema de transporte. De este modo, puede resolverse de manera sencilla, con el método simplex aplicado en el problema de transporte.

1.5. Modelos de localización

Los modelos de localización permiten determinar dónde construir un conjunto de centros de distribución para proveer un producto a n clientes finales, cuando cada uno de ellos ha demandado una cantidad de producto d_j , $j = 1, \dots, n$. Existen m localizaciones candidatas para los centros de distribución que, en caso de que se construyan, tendrán un coste fijo de apertura asociado f_i , $i = 1, \dots, m$. Se denota mediante c_{ij} al coste por unidad transportada del centro de distribución i al cliente j .

El objetivo final de estos problemas será decidir cuáles de estos centros de distribución abrir de modo que los costes totales, teniendo en cuenta los costes fijos de apertura y los costes de transporte de unidades, se minimicen, mientras la demanda de cada cliente queda siempre satisfecha.

Se definen la variable x_{ij} , que indica el número de productos transportados de i a j , e y_i , la variable binaria que toma el valor 1 o 0 según se abre o no el centro de distribución i . La formulación del problema deberá garantizar que si esta variable vale 0, el número de productos enviados desde el centro de distribución i es también cero. El problema de localización puede formularse como

$$\min \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i y_i \quad (1.15a)$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j \quad j = 1, \dots, n \quad (1.15b)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq M y_i \quad i = 1, \dots, m \quad (1.15c)$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ y enteras} \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.15d)$$

$$y_i = 0 \text{ o } 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (1.15e)$$

La función objetivo (1.15a) del problema de localización recoge la suma de los costes de envío por unidad y los costes fijos por el uso de los centros de distribución. Las restricciones (1.15b) garantizan que la demanda de cada cliente queda satisfecha. Las restricciones (1.15c) aseguran que habrá centro de distribución en todo nodo en el que deba haberlo porque desde allí se van a enviar productos a los clientes. Además, la constante M es un número suficiente grande para garantizar que se pueden distribuir tantas unidades como se quiera, y se puede acotar por la demanda total. Por último, las restricciones (1.15d) y (1.15e) garantizan que las variables estén bien definidas.

El problema anterior puede formularse de manera equivalente definiendo la variable $x'_{ij} = x_{ij}/d_j$, que se puede interpretar como la fracción (entre 0 y 1) de demanda del cliente j satisfecha por el centro de distribución i . Se debe cambiar también c_{ij} por $c'_{ij} = c_{ij}/d_j$. Por último, debido a que ahora la demanda de cada cliente es 1, se puede intercambiar M por n , que es el número total de clientes. Esto puede ser de utilidad ya que se simplifica la interpretación de las variables, se reduce el tamaño del problema (al intercambiar M por n) y la comparación con los costes de transporte es más directa. Esto hace que el problema sea más manejable y eficiente.

Cuando cada centro de distribución tiene una capacidad de producción u_i , este problema se transforma en un problema de localización de instalaciones con capacidad, que se puede formular del siguiente modo,

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i y_i \quad (1.16a)$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j \quad j = 1, \dots, n \quad (1.16b)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq u_i y_i \quad i = 1, \dots, m \quad (1.16c)$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ y enteras} \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.16d)$$

$$y_i = 0 \text{ o } 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (1.16e)$$

Ahora, las restricciones (1.16c) tienen asociadas una capacidad de distribución u_i , que indica el número máximo de unidades que pueden producirse en, y por tanto enviarse desde, el centro de distribución localizado en el nodo i .

1.6. Problemas de planificación de cadenas de suministro

Son problemas que hacen referencia a las decisiones involucradas en la gestión eficiente de las actividades relacionadas con la producción y distribución de un producto determinado. Abarcan desde la fabricación de este a partir de materias primas hasta la entrega final al cliente. Por lo que, si se formula un modelo matemático para describirlo, este debe ser capaz de decidir en qué lugares localizar instalaciones para la fabricación, transformación, almacenamiento o venta de estos productos, y determinar cuál es el flujo óptimo para el transporte entre estos.

Si se supone fija la demanda del producto, el modelo debe minimizar el coste total del transporte y la localización de instalaciones. Esto puede derivar en un problema de transporte simple o más complejo. En los siguientes capítulos se estudia una aplicación de este tipo de problemas, elaborando un modelo matemático más complejo que los descritos anteriormente puesto que integra varios procesos logísticos.

Capítulo 2

Modelos integrados de localización y distribución

2.1. Introducción

En este capítulo se estudian varios modelos que integran los procesos de distribución en varias etapas y de localización. Los dos primeros modelos presentados en los apartados 2.4.1 y 2.4.2 están inspirados en los modelos propuestos en el trabajo de Berenguer et al. [2]. En este trabajo, se considera el problema de distribuir hornos solares por diferentes países africanos. Estos hornos se fabrican inicialmente en una única planta de producción situada en México, completos o solo sus componentes sin ensamblar. A continuación, viajan en contenedores vía marítima hasta ciertos países africanos con puerto y acceso a la costa. Finalmente, los hornos viajan vía terrestre hasta sus destinos finales mientras que las componentes deben ensamblarse en una planta de montaje antes de ser entregados en su destino final. El objetivo de la organización sin ánimo de lucro encargada de la distribución es minimizar el coste total. El tercer modelo de optimización presentado en la sección 2.5, generaliza los modelos anteriores, considerando otras opciones para la producción y el ensamblado, así como la existencia de restricciones de capacidad de producción y de ensamblaje.

2.2. Descripción del sistema

Se considera la distribución de un producto desde las plantas en las que se produce a los clientes que demandan ese producto. Los modelos propuestos consideran la posibilidad de que la fabricación del producto se realice bien de manera completa en alguna planta de producción o bien que la planta fabrique solamente las componentes del producto, que serán ensambladas en plantas de montaje desde las que se hará la entrega a los destinatarios finales.

La distribución se realiza en dos etapas. La figura 2.1 muestra una versión simplificada de este proceso de distribución, en azul se representa la primera etapa del envío y en rojo y verde de la segunda. En la primera etapa, el producto, o sus componentes sin montar, son enviados desde las plantas de producción (nodos a, b y c de la figura) a alguno de los nodos intermedios (nodos 1 y 2 de la figura) por ser estos los nodos accesibles teniendo en cuenta la forma en la que se transportan los productos o sus componentes. Hay que destacar que las características de los contenedores utilizados para realizar los envíos en esta primera etapa impiden que se transporten productos completos o conjuntos de componentes simultáneamente.

Los nodos 1 y 2 actúan como nodos de recepción de los envíos y pueden ser también clientes (nodos 6 y 7 de la figura) o puntos en los que se instale una planta de montaje (nodos 3, 4 y 5 de la figura). Los clientes no tienen porque ser nodos intermedios, y pueden pertenecer también al conjunto de las posibles

plantas de montaje. En la segunda etapa, si el producto está completo (flechas verdes), puede enviarse directamente a los clientes. En el caso de que no esté terminado (flechas rojas), las componentes deben ensamblarse en alguna planta de montaje antes de que el producto sea entregado a los clientes. Además, debe decidirse dónde se instalan las plantas de montaje en las que se ensamblan las componentes y cómo se envían a cada cliente las unidades de producto que demanda.

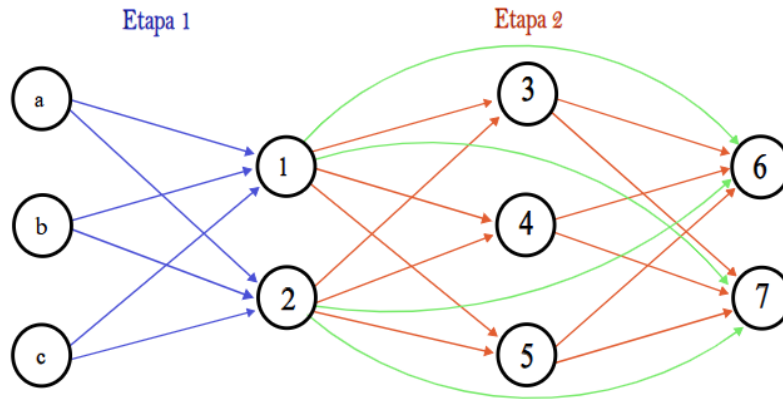


Figura 2.1: Proceso de distribución en dos etapas.

El objetivo general del problema es, por tanto, determinar cuántos productos y cuántos conjuntos de componentes se fabrican en las plantas de producción, dónde se localizan las plantas de montaje, dónde se ensamblan los conjuntos de componentes, y cómo se realiza la distribución en dos etapas desde las plantas de producción a los clientes finales para satisfacer su demanda y minimizar el coste total. A continuación, se describen los costes asociados a este problema.

- Costes asociados a la fabricación / montaje del producto:
 - Coste por la fabricación de un producto completo.
 - Coste por la fabricación de un conjunto de componentes.
 - Coste por el ensamblaje de un conjunto de componentes.
 - Coste fijo por la instalación de una planta de montaje de componentes.
 - Coste fijo por el uso de una planta de producción.
- Costes asociados a la distribución:
 - Coste fijo por contenedor enviado desde las plantas de producción a los nodos intermedios.
 - Coste por el envío de un producto desde las plantas de producción a los nodos intermedios.
 - Coste por el envío de un conjunto de componentes desde las plantas de producción a los nodos intermedios.
 - Coste por el envío de un producto desde los nodos intermedios a los clientes.
 - Coste por el envío de un conjunto de componentes desde los nodos intermedios a las plantas de montaje.
 - Coste por el envío de un conjunto de componentes desde las plantas de montaje a los clientes.

2.3. Notación

En esta sección, para facilitar la comprensión de los modelos matemáticos que se formularán posteriormente, se agrupa la definición de todos los parámetros y se introduce la notación necesaria.

Sea I el conjunto de nodos intermedios. Sea J el conjunto de nodos asociados a los clientes. Sea R el conjunto de nodos asociados a las plantas de producción. Sea L el conjunto de nodos asociados a las posibles localizaciones de plantas de montaje.

Para cada $i \in I$, $j \in J$, $r \in R$ y $l \in L$, se tienen los siguientes parámetros.

Costes

c_r	Coste de fabricación por producto completo en la planta de producción r .
\widehat{c}_r	Coste de fabricación por conjunto de componentes en la planta de producción r .
a_r	Coste fijo por utilizar la planta de producción r .
p_l	Coste por ensamblar un conjunto de componentes en el nodo l .
f_l	Coste fijo por instalar y usar una planta de montaje en el nodo l .
k_{ri}	Coste fijo por enviar un contenedor desde la planta de producción r al nodo intermedio i .
d_{ri}	Coste del envío de un producto completo desde la planta de producción r al nodo intermedio i .
g_{ij}	Coste del envío de un producto completo desde el nodo intermedio i al cliente j .
\widehat{d}_{ri}	Coste del envío de un conjunto de componentes desde la planta de producción r al nodo intermedio i .
\widehat{g}_{il}	Coste del envío de un conjunto de componentes desde el nodo intermedio i a la planta de montaje l .
\widetilde{g}_{lj}	Coste del envío de un producto completo desde la planta de montaje l al cliente j .

Capacidades

cap_r	Número máximo de unidades de producto completo que pueden fabricarse en la planta de producción situada en el nodo r .
\widehat{cap}_r	Número máximo de conjuntos de componentes que pueden fabricarse en la planta de producción situada en el nodo r .
cam_l	Número máximo de unidades de producto que pueden ensamblarse en la planta de montaje situada en el nodo l (Capacidad de la planta de montaje).
$capc$	Número de productos completos que caben en un contenedor.
\widehat{capc}	Número de conjuntos de componentes que caben en un contenedor.

Demanda

h_j	Demanda total de productos completos del cliente j .
-------	--

Constantes

M, M_1, M_2	Constante positiva suficientemente grande.
---------------	--

2.4. Caso particular: Una única planta de producción, sin restricciones de capacidad y sin costes asociados a la distribución de las plantas de montaje a los clientes

En esta sección se van a presentar dos formulaciones distintas de una versión simplificada del problema descrito anteriormente. Se asume que hay una única planta de producción y que todos los nodos intermedios son también clientes finales, es decir, $I \subseteq J$. Además, las plantas de montaje solo pueden instalarse en alguno de los nodos intermedios o de los asociados a los clientes, es decir, $L = J$. En consecuencia, en esta sección no se asociará índice a aquellos parámetros relacionados con la planta de producción y tampoco se usará el índice $l \in L$.

Además, se supone que no hay coste de envío desde la planta de montaje hasta el cliente si la planta de montaje se encuentra en el mismo nodo.

2.4.1. Modelo basado en la definición de variables por el lugar en el que se completa el producto

El primer modelo formulado asocia las variables al lugar en el que se finaliza el montaje de cada producto, es decir, se va a diferenciar entre aquellos productos que se completan en la planta de producción, aquellos que se ensamblan en los nodos intermedios y aquellos que se ensamblan en los nodos asociados a los clientes. Por tanto, se definen las siguientes variables,

Sea δ_j una variable binaria que permite determinar si se instala una planta de montaje en el nodo j ,

$$\delta_j \equiv \begin{cases} 1 & \text{si se instala una planta de montaje en el nodo } j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sean

$t_i \equiv$ Número de contenedores con productos completos que viajan desde la planta de producción al nodo intermedio i .

$\hat{t}_i \equiv$ Número de contenedores con conjuntos de componentes que viajan de la planta de producción al nodo intermedio i .

Sean

$y_{ij} \equiv$ Número de productos completos enviados desde la planta de producción al nodo intermedio i y desde allí directamente al cliente j .

$\hat{y}_{ij} \equiv$ Número de conjuntos de componentes enviados desde la planta de producción al nodo intermedio i , donde se ensambla el producto y, una vez completo, se envía al cliente j .

$\tilde{y}_{ij} \equiv$ Número de conjuntos de componentes que se envían desde la planta de producción al nodo intermedio i desde donde se envían al cliente j , para ser ensamblados antes de su entrega al cliente.

Con las anteriores definiciones, el modelo se formula como

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J} f_j \delta_j + \sum_{i \in I} k_i t_i + \sum_{i \in I} k_i \hat{t}_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (c + d_i + g_{ij}) y_{ij} \\ & + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (\hat{c} + p_i + \hat{d}_i + g_{ij}) \hat{y}_{ij} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (\hat{c} + p_j + \hat{d}_i + \hat{g}_{ij}) \tilde{y}_{ij} \end{aligned} \quad (2.1a)$$

sujeto a

$$\sum_{i \in I} (y_{ij} + \hat{y}_{ij} + \tilde{y}_{ij}) \geq h_j \quad \forall j \in J \quad (2.1b)$$

$$\sum_{j \in J} \hat{y}_{ij} \leq M \delta_i \quad \forall i \in I \quad (2.1c)$$

$$\sum_{i \in I} \tilde{y}_{ij} \leq M \delta_j \quad \forall j \in J \quad (2.1d)$$

$$\sum_{j \in J} y_{ij} \leq \text{cap} c t_i \quad \forall i \in I \quad (2.1e)$$

$$\sum_{j \in J} (\hat{y}_{ij} + \tilde{y}_{ij}) \leq \widehat{\text{cap}} c \hat{t}_i \quad \forall i \in I \quad (2.1f)$$

$$\delta_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J \quad (2.1g)$$

$$y_{ij}, \hat{y}_{ij}, \tilde{y}_{ij}, t_i, \hat{t}_i \geq 0 \text{ y enteras} \quad \forall i \in I, j \in J \quad (2.1h)$$

La función objetivo (2.1a) representa el coste total. Los primeros sumandos corresponden a los costes fijos por la utilización de las plantas de montaje y de los contenedores. Los tres bloques siguientes corresponden a los costes asociados a cada uno de los tipos de variables. Para los productos completos y_{ij} , hay tres sumandos correspondientes a los costes de producción y a los costes de envío de las dos etapas (planta de producción a nodo intermedio y de ahí a cliente). Para los conjuntos de componentes enviados de la planta de producción a los nodos intermedios donde son ensamblados para ser enviados completos en la segunda etapa, \widehat{y}_{ij} , se tienen cuatro sumandos correspondientes a los costes de producción y montaje y a los costes de envío en ambas etapas (ahora en la primera, será como conjunto de componentes y en la segunda, como producto completo). Por último, para los conjuntos de componentes ensamblados en el nodo asociado al cliente, antes de su entrega, \widetilde{y}_{ij} , se consideran los costes de producción y montaje, ahora en el nodo asociado al cliente, y los costes de envío, en este caso siempre el asociado al conjunto de componentes.

Las restricciones (2.1b) aseguran que la demanda de los clientes queda satisfecha. Las restricciones (2.1c) y (2.1d) garantizan que solo se podrán ensamblar productos donde haya una planta de montaje. Notar que no se instalará una planta de montaje que no vaya a usarse ya que la función objetivo minimiza y los coeficientes son todos no negativos. La constante M permite garantizar que en cada planta se pueden ensamblar tantos productos como sea necesario. Se recuerda que en este modelo no hay restricciones de capacidad. Para la resolución del modelo se puede hacer M igual a la demanda total de productos, ya que, puesto que se están minimizando costes, se puede suponer que no se fabricarán más productos de los requeridos. Las restricciones (2.1e) y (2.1f) aseguran que los productos o conjuntos de componentes transportados en cada contenedor quepan en ellos. Por último, las restricciones (2.1g) y (2.1h) garantizan que las variables estén bien definidas.

2.4.2. Modelo basado en la definición de las variables por lo que se transporta en cada etapa

Además de las variables δ_j , t_i y \widehat{t}_i introducidas en el apartado 2.4.1, para formular este modelo se van a introducir variables que indiquen qué se envía en cada etapa. Sean

$x_i \equiv$ Número de productos completos enviados de la planta de producción al nodo intermedio i .

$\widehat{x}_i \equiv$ Número de conjuntos de componentes enviados desde la planta de producción al nodo intermedio i .

$w_{ij} \equiv$ Número de productos completos enviados desde el nodo intermedio i al cliente j .

$\widehat{w}_{ij} \equiv$ Número de conjuntos de componentes enviados desde el nodo intermedio i al cliente j .

$q_i \equiv$ Número de productos ensamblados en el nodo intermedio i .

Con las anteriores definiciones, el modelo se formula como

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J} f_j \delta_j + \sum_{i \in I} k_i t_i + \sum_{i \in I} k_i \widehat{t}_i + \sum_{i \in I} (c + d_i) x_i + \sum_{i \in I} (\widehat{c} + \widehat{d}_i) \widehat{x}_i \\ & + \sum_{i \in I} p_i q_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} g_{ij} w_{ij} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (p_j + \widehat{g}_{ij}) \widehat{w}_{ij} \end{aligned} \quad (2.2a)$$

sujeto a

$$\sum_{i \in I} (w_{ij} + \widehat{w}_{ij}) \geq h_j \quad \forall j \in J \quad (2.2b)$$

$$x_i + q_i = \sum_{j \in J} w_{ij} \quad \forall i \in I \quad (2.2c)$$

$$\widehat{x}_i - q_i = \sum_{j \in J} \widehat{w}_{ij} \quad \forall i \in I \quad (2.2d)$$

$$\sum_{i \in I} \widehat{w}_{ij} \leq M_1 \delta_j \quad \forall j \in J \quad (2.2e)$$

$$q_i \leq M_2 \delta_i \quad \forall i \in I \quad (2.2f)$$

$$x_i \leq \text{capc } t_i \quad \forall i \in I \quad (2.2g)$$

$$\widehat{x}_i \leq \widehat{\text{capc}} \widehat{t}_i \quad \forall i \in I \quad (2.2h)$$

$$\delta_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J \quad (2.2i)$$

$$t_i, \widehat{t}_i, x_i, \widehat{x}_i, w_{ij}, \widehat{w}_{ij}, q_i \geq 0 \text{ y enteras} \quad \forall i \in I, j \in J \quad (2.2j)$$

La función objetivo (2.2a) recoge la suma de todos los costes. Ahora, después de los términos que corresponden a los costes fijos por la utilización de las plantas de montaje y de los contenedores, se tienen los costes de fabricación y transporte en la primera etapa de los dos tipos de unidades, x_i y \widehat{x}_i . Además, para los productos completos que viajan en la segunda etapa, w_{ij} , se suman los costes de montaje (si han sido ensamblados en el nodo intermedio, usando la variable q_i) y los del envío a los clientes. Por último, para los conjuntos de componentes enviados en la segunda etapa, \widehat{w}_{ij} , se tienen dos sumandos que representan el transporte desde el nodo intermedio a la planta de montaje, que estará en el nodo asociado al cliente, y el coste por ensamblar el producto en esta.

Las restricciones que garantizan que se verifica la demanda son (2.2b). Las restricciones (2.2c) aseguran que la suma de productos completos en la planta de producción y los ensamblados en el nodo intermedio son el total de productos completos transportados posteriormente a su destino. Las restricciones (2.2d) garantizan que los conjuntos de componentes que no se ensamblan en los nodos intermedios sean los que se envían sin ensamblar a los clientes. Además, (2.2e) y (2.2f) aseguran que habrá plantas de montaje en aquellos nodos donde se ensamblen los productos, diferenciando entre los ensamblados en nodos intermedios o en nodos asociados a clientes. Las constantes M_1 y M_2 deben ser números suficiente grandes para no limitar las capacidades de las plantas de montaje, para ello se pueden acotar por la demanda en el nodo, en el caso de M_1 , y por la demanda total, para M_2 . Por último, las restricciones (2.2g) a (2.2j) son equivalentes a las restricciones (2.1e) a (2.1h) del primer modelo presentado en la sección 2.4.1.

Observación 2.4.1. Ambos modelos son equivalentes sin más que tomar

$$x_i = \sum_{j \in J} y_{ij}, \quad \widehat{x}_i = \sum_{j \in J} (\widehat{y}_{ij} + \widetilde{y}_{ij}), \quad q_i = \sum_{j \in J} \widehat{y}_{ij} \quad \forall i \in I,$$

$$w_{ij} = y_{ij} + \widehat{y}_{ij}, \quad \widehat{w}_{ij} = \widetilde{y}_{ij} \quad \forall i \in I, j \in J.$$

2.5. Modelo general de producción / localización / distribución

En este apartado se va a considerar un modelo general de producción / localización / distribución con las siguientes características.

- Existen varias plantas de producción, cada una con su propia capacidad de fabricación de productos completos y de conjuntos de componentes.
- Los conjuntos de nodos intermedios, de instalación de plantas de montaje y los asociados a los clientes no tienen porqué estar relacionados.
- Hay costes asociados a la producción, a la instalación y a la distribución en todas sus etapas.
- Cada planta de montaje tiene su capacidad.

La complejidad del modelo en este caso nos lleva a formularlo a partir de las variables utilizadas en la segunda formulación del caso particular presentada en el apartado 2.4.2. Ahora, al existir varias plantas de producción, se necesita identificar el índice $r \in R$ de la planta particular considerada, por lo que las variables serán, x_{ri} , \hat{x}_{ri} , t_{ri} y \hat{t}_{ri} . Además, se define la variable binaria γ_r que permite determinar si la planta de producción r se usa o no.

$$\gamma_r \equiv \begin{cases} 1 & \text{si se utiliza la planta de producción } r, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por otro lado, una vez que los productos completos llegan al nodo intermedio i , la variable w_{ij} indica el número de ellos que se envían al cliente j . Los conjuntos de componentes, sin embargo, deben enviarse a alguna planta de montaje para ser ensamblados y desde allí ser enviados al cliente. Para ello se introducen las variables

$v_{il} \equiv$ Número de conjuntos de componentes enviados desde el nodo intermedio i a la planta de montaje l .

$\hat{v}_{lj} \equiv$ Número de productos ya completos enviados desde la planta de montaje l al cliente j .

Por lo que, se puede formular el modelo general de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{r \in R} a_r \gamma_r + \sum_{l \in L} f_l \delta_l + \sum_{r \in R} \sum_{i \in I} k_{ri} t_{ri} + \sum_{r \in R} \sum_{i \in I} k_{ri} \hat{t}_{ri} \\ & + \sum_{r \in R} \sum_{i \in I} (c_r + d_{ri}) x_{ri} + \sum_{r \in R} \sum_{i \in I} (\hat{c}_r + \hat{d}_{ri}) \hat{x}_{ri} \\ & + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} g_{ij} w_{ij} + \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} (p_l + \hat{g}_{il}) v_{il} + \sum_{l \in L} \sum_{j \in J} \tilde{g}_{lj} \hat{v}_{lj} \end{aligned} \quad (2.3a)$$

sujeto a

$$\sum_{r \in R} x_{ri} = \sum_{j \in J} w_{ij} \quad \forall i \in I \quad (2.3b)$$

$$\sum_{r \in R} \hat{x}_{ri} = \sum_{l \in L} v_{il} \quad \forall i \in I \quad (2.3c)$$

$$\sum_{i \in I} v_{il} = \sum_{j \in J} \hat{v}_{lj} \quad \forall l \in L \quad (2.3d)$$

$$\sum_{i \in I} w_{ij} + \sum_{l \in L} \hat{v}_{lj} \geq h_j \quad \forall j \in J \quad (2.3e)$$

$$\sum_{i \in I} v_{il} \leq \text{cam}_l \delta_l \quad \forall l \in L \quad (2.3f)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ri} \leq \text{cap}_r \gamma_r \quad \forall r \in R \quad (2.3g)$$

$$\sum_{i \in I} \hat{x}_{ri} \leq \widehat{\text{cap}}_r \gamma_r \quad \forall r \in R \quad (2.3h)$$

$$x_{ri} \leq \text{cap}_c t_{ri} \quad \forall i \in I, r \in R \quad (2.3i)$$

$$\hat{x}_{ri} \leq \widehat{\text{cap}}_c \hat{t}_{ri} \quad \forall i \in I, r \in R \quad (2.3j)$$

$$\delta_l, \gamma_r \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, r \in R \quad (2.3k)$$

$$t_{ri}, \hat{t}_{ri}, x_{ri}, \hat{x}_{ri}, w_{ij}, v_{il}, \hat{v}_{lj} \geq 0 \text{ y enteras} \quad \forall i \in I, j \in J, r \in R, l \in L \quad (2.3l)$$

La función objetivo (2.3a) comienza con cuatro términos representando los costes fijos por el uso de las plantas de producción, de las plantas de montaje y de los contenedores. Los siguientes bloques corresponden a los costes asociados a cada variable. Para los productos completos enviados en la primera etapa x_{ri} , se suman los costes de fabricación y los de transporte desde la planta de producción hasta los nodos intermedios. Lo mismo sucede con los conjuntos de componentes enviados en la primera etapa, \hat{x}_{ri} . Después, para los productos completos que viajan de los nodos intermedios a los clientes, w_{ij} , se suman los costes de transporte. Para los conjuntos de componentes, el envío se divide entre el viaje de

los nodos intermedios a la planta de montaje, v_{il} , donde se suman los costes de montaje y de transporte, y de esta planta de montaje a los clientes, \widehat{v}_{lj} , donde se suma el coste del envío.

Las restricciones (2.3b) garantizan que el número de productos completos enviados en la primera etapa a un nodo intermedio i es el mismo que los enviados completos desde el nodo i al cliente j en la segunda etapa. Las restricciones (2.3c) aseguran que la cantidad de conjuntos de componentes que llegan a un nodo intermedio es la misma que la transportada desde ese nodo hasta una planta de montaje. Las (2.3d) garantizan que el número de conjuntos de componentes que llegan a una planta de montaje es el mismo que el número de productos completos que se envían de esta planta a los clientes. Las restricciones (2.3e) garantizan que la demanda queda satisfecha. Además, las restricciones (2.3f), (2.3g) y (2.3h) aseguran que no se sobrepasa la capacidad de montaje o de producción de las plantas. Las restricciones (2.3i) y (2.3j) garantizan que se cumple con las capacidades de los contenedores. Por último, las restricciones (2.3k) y (2.3l) aseguran que las variables están bien definidas.

Capítulo 3

Una aplicación de los modelos de localización y distribución

En este capítulo, se presenta una aplicación de los modelos presentados en el capítulo 2. Para su resolución se ha utilizado el software de optimización Gurobi, a través de la librería de Python gurobipy-11.0.2. El código ha sido implementado en un cuaderno de Jupyter y ejecutado en la plataforma Google Colab, de manera que los algoritmos hacen uso de los recursos que proporciona dicha plataforma (Ubuntu 22.04.3 LTS, Intel Xeon CPU con 2.20GHz y 2 hilos de procesamiento). Los códigos escritos para la resolución de los modelos se muestran en el apéndice (B).

3.1. Descripción del sistema realista

Se considera que hay plantas de producción en cinco países. En estos países se ha identificado un puerto de referencia desde el que se enviarán los contenedores de mercancía si la planta es finalmente seleccionada para fabricar el producto. Los países seleccionados y el puerto de referencia son México (puerto de Veracruz), Argentina (puerto de Buenos Aires), España (puerto de Barcelona), India (puerto de Mumbai, Bombay) e Indonesia (puerto de Tanjung Priok, Yakarta). Para la resolución de los modelos presentados en el apartado 2.4 se supondrá que la única planta de producción se encuentra en Argentina.

Por otro lado, existe un conjunto de nueve ciudades que demandan cierta cantidad del producto, correspondientes a los clientes. Estas ciudades son Ciudad del Cabo (Sudáfrica), Casablanca (Marruecos), Lagos (Nigeria), Dar es Salaam (Tanzania), Dakar (Senegal), El Cairo (Egipto), Kampala (Uganda), Trípoli (Libia) y Gaborone (Botsuana). Las cinco primeras ciudades tienen acceso vía marítima, por lo que formarán parte del grupo de los nodos intermedios. Además de estas ciudades, para la resolución del modelo general de la sección 2.5 se contará con Kinsasa (República Democrática del Congo) como posible lugar para la instalación de una planta de montaje, pero sin pertenecer al conjunto de los nodos intermedios o de los clientes.

Los costes de transporte, fijos y por unidad, se han considerado proporcionales a las distancias entre países. Concretamente, para los costes fijos por el transporte de un contenedor, el factor de proporcionalidad utilizado es 1; para los costes por el envío de un producto completo, es $\frac{1}{1000}$; y para los costes por el envío de un conjunto de componentes es $\frac{1}{2000}$.

La tabla 3.1 muestra las distancias de las trayectorias marítimas, en kilómetros, desde los puertos de los países donde se encuentran las plantas de producción del producto a los países intermedios.

	México	Argentina	España	India	Indonesia
Sudáfrica	14000	7000	9000	9500	10000
Marruecos	8000	9000	1300	10000	11500
Nigeria	10000	8000	4000	8000	11000
Tanzania	15500	10000	10000	4500	7000
Senegal	8000	7000	3500	10000	13000

Tabla 3.1: Trayectorias marítimas en km.

La tabla 3.2 presenta las distancias de las trayectorias terrestres, en kilómetros, entre distintos países de interés. De esta tabla se obtiene la distancia entre los nodos intermedios y los clientes; entre los nodos intermedios y las posibles plantas de montaje y entre estas posibles plantas de montaje y los clientes.

	Sudáfrica	Marruecos	Nigeria	Tanzania	Senegal	Uganda	Libia	Congo
Sudáfrica	0	10000	4500	5000	10000	6000	9000	4000
Marruecos	10000	0	4000	7000	4000	7000	3000	6500
Nigeria	4500	4000	0	5000	3000	4000	3500	2000
Tanzania	5000	7000	5000	0	6000	1300	6000	2600
Senegal	10000	4000	3000	6000	0	5000	5000	5500
Egipto	9000	3200	4000	5000	6000	4000	1200	5000
Uganda	6000	7000	4000	1300	5000	0	5000	1700
Libia	9000	3000	3500	6000	5000	5000	0	6500
Botsuana	1600	7000	3500	2800	9000	3500	8000	3500
Congo	4000	6500	2000	2600	5500	1700	6500	0

Tabla 3.2: Trayectorias terrestres en km.

La figura 3.1 muestra cómo están distribuidos los nodos en este caso de estudio. Los círculos azules indican plantas de producción; los nodos intermedios se representan con círculos morados; los clientes se indican con círculos verdes; y las posibles plantas de montaje se representan por estrellas rojas.

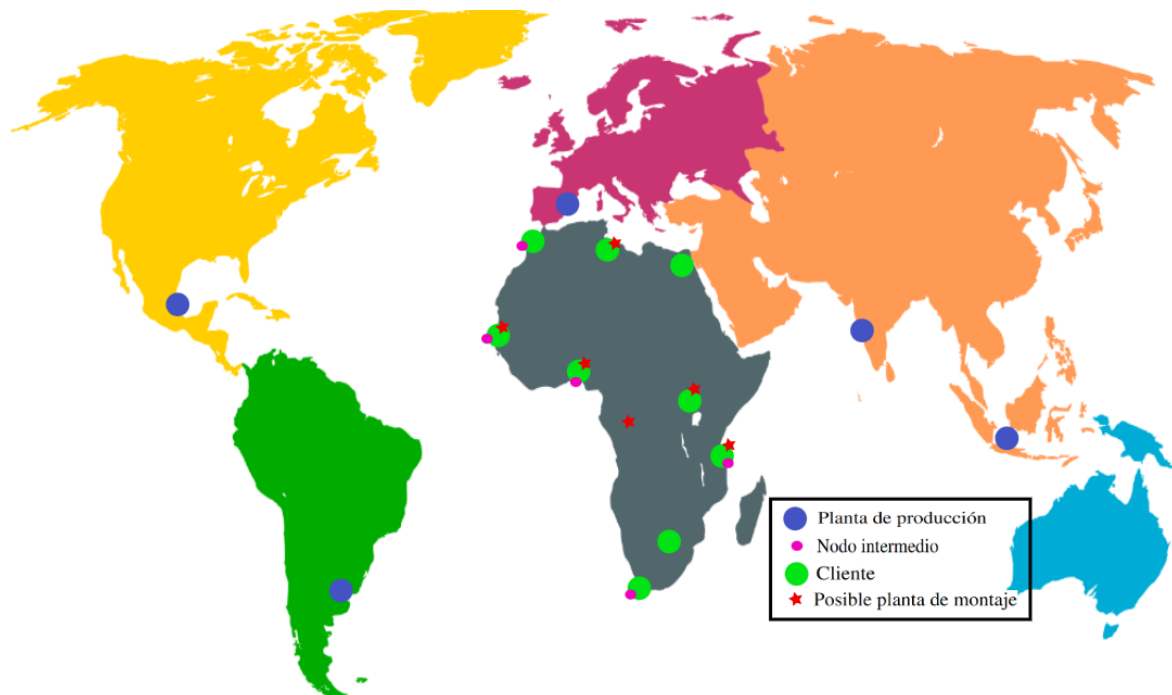


Figura 3.1: Representación de los nodos del problema.

A continuación, la tabla 3.3 muestra los costes de fabricación del producto completo y del conjunto de componentes, en u.m.; el coste fijo por el uso de una planta de producción, en u.m.; y las capacidades de producción, tanto de productos completos como de conjuntos de componentes, de cada planta de producción.

	México	Argentina	España	India	Indonesia
c_r	35	40	45	35	30
\hat{c}_r	22.5	25	24	20	22.5
a_r	2000	2000	2000	1000	1000
cap_r	10000	15000	3000	10000	25000
\widehat{cap}_r	25000	30000	20000	45000	10000

Tabla 3.3: Parámetros asociados a las plantas de producción.

La tabla 3.4 muestra los parámetros relacionados con los nodos asociados a las posibles localizaciones de plantas de montaje y a los clientes. Se presentan los costes por el ensamblaje de un conjunto de componentes en un nodo, en u.m.; los costes por la instalación de una planta de montaje, en u.m.; y la capacidad de esta planta. Además, se muestra la demanda asociada a cada cliente.

	Sud.	Ma.	Ni.	Tan.	Se.	Eg.	Ug.	Li.	Bot.	Con.
p_l	15	15	10	5	10	15	5	10	10	10
f_l	80000	80000	80000	65000	70000	80000	65000	70000	70000	60000
cam_l	-	-	15000	10000	9000	-	15000	5000	-	10000
h_j	16000	11000	9000	4000	7000	15000	13000	9000	8000	-

Tabla 3.4: Parámetros relacionados con los nodos asociados a las posibles localizaciones de plantas de montaje y a los clientes.

Por último, se considera $capc = 2000$ el número de productos completos que puede llevar un contenedor y $\widehat{capc} = 6000$ el número de conjuntos de componentes que caben en un contenedor. Además, se puede tomar $M = \sum_{j \in J} h_j = 92000$.

3.2. Resolución para el caso particular

En primer lugar, se va a considerar la versión simplificada del problema, formulada en la sección 2.4. Se tiene una única planta de producción (en Argentina), no hay restricciones de capacidad ni costes asociados a la distribución desde las plantas de montaje a los clientes. En este problema se asume que todos los nodos intermedios son también nodos asociados a clientes.

Se han formulado dos modelos que describen este problema. Como son equivalentes, la solución óptima de ambos será la misma, explicada a continuación.

- El coste total óptimo es 3856300 u.m.
- Hay una única planta de montaje, que debe localizarse en Tanzania.
- En la primera etapa, se envían desde Argentina quince contenedores llenos de conjuntos de componentes, un total de 90000, que llegan a Tanzania donde se ensamblan para su posterior distribución. Además, se envía un contenedor con 2000 conjuntos de componentes a Sudáfrica.
- En la segunda etapa, los 2000 conjuntos que estaban en Sudáfrica son enviados a la planta de montaje de Tanzania. Mientras, desde Tanzania se distribuyen los productos, ya completos, a los clientes. Concretamente, se distribuyen 16000 a Sudáfrica, 11000 a Marruecos, 9000 a Nigeria,

7000 a Senegal, 15000 a Egipto, 13000 a Uganda, 9000 a Libia y 8000 a Botsuana. Esto deja en Tanzania un total de 2000 productos, que junto con los 2000 que llegan de Sudáfrica para ser ensamblados en la planta de montaje, satisfacen la demanda del país.

La figura 3.2 muestra cómo se realiza esta distribución. Las flechas rosas indican los conjuntos de componentes que viajan desde la planta de producción a los nodos intermedios en la primera etapa, la flecha roja indica el envío de conjuntos de componentes durante la segunda etapa y las flechas moradas representan el viaje de productos completos ensamblados en la planta de montaje situada en Tanzania, y representada por la estrella roja, a los clientes.

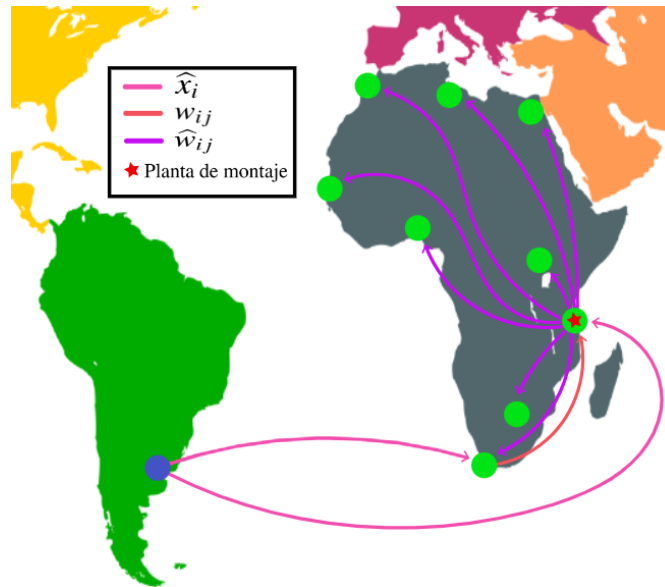


Figura 3.2: Solución de la aplicación del caso particular.

Esta solución se ha obtenido implementando cualquiera de los códigos detallados en el apéndice (B), apartados B.1 y B.2. Como se ha explicado en la sección 2.4, la diferencia entre estos reside en la definición de las variables. Ambos concluyen con la misma solución óptima en un tiempo muy reducido. Para ser exactos, el primer código (correspondiente al modelo del apartado 2.4.1) obtiene la solución óptima en 0,06 segundos, mientras que el segundo (correspondiente al modelo del apartado 2.4.2) la obtiene en 0,11 segundos. Por lo que, utilizar uno u otro no será importante para la resolución del problema.

3.3. Resolución para el modelo general

En este apartado se va a resolver el modelo general de producción / localización / distribución presentado en la sección 2.5. Se consideran las plantas de producción, el conjunto de nodos intermedios y el conjunto de clientes presentados en la descripción del sistema. En este modelo, los conjuntos de nodos intermedios, de instalación de plantas de montaje y los asociados a los clientes no tienen por qué estar relacionados. Ahora, los países en los que se va a poder instalar una planta de montaje son Nigeria, Tanzania, Senegal, Uganda, Libia y Congo, como se había visto en la figura 3.1. Además, cada planta de montaje tiene su capacidad y hay costes asociados a la distribución desde las plantas de montaje a los clientes.

Teniendo en consideración estas nuevas características del problema, utilizando el modelo general explicado antes, se obtiene la siguiente solución óptima.

- El coste total óptimo es 3924000 u.m.

- Las plantas de producción utilizadas son aquellas situadas en México, España, India e Indonesia. Las plantas de montaje deben localizarse en Tanzania, Senegal, Uganda y Congo.
- A Sudáfrica llegan 16000 unidades de producto completo desde Indonesia, que sirven para satisfacer su propia demanda.
- A Marruecos llegan 10000 productos completos desde México y 3000 desde España. De estos, 11000 satisfacen la demanda del país y 2000 son enviados a Libia. Además, llegan desde España 2000 conjuntos de componentes, que son enviados a la planta de montaje de Senegal.
- A Tanzania llegan 10000 productos completos desde India y 9000 desde Indonesia. El país se queda 4000 para satisfacer su demanda, y envía 7000 a Egipto y 8000 a Botsuana. Además, desde India llegan 42000 conjuntos de componentes que son enviados a plantas de montaje. Concretamente, 10000 a la de Tanzania, 7000 a la de Senegal, 15000 a la de Uganda y 10000 a la de Congo.
- A Nigeria llegan 9000 productos desde la planta de montaje situada en Congo.
- A Senegal se envían 7000 productos desde la planta situada en el país.
- Para satisfacer la demanda de Egipto, se envían productos desde las plantas de montaje de Tanzania (5000), de Uganda (2000) y de Congo (1000). Estas unidades, junto a las 7000 que han llegado en primer lugar desde Tanzania, cubren las necesidades del país.
- A Uganda llegan 13000 unidades desde la planta de montaje del propio país.
- En Libia se satisface la demanda con las 2000 unidades recibidas de Marruecos y las 7000 enviadas de las plantas de montaje, 5000 desde Tanzania y 2000 desde Senegal.
- Por último, la demanda de Botsuana se satisface con las unidades enviadas desde Tanzania.

En la versión simplificada presentada en la sección 3.2, la solución prácticamente consistía en enviar conjuntos de componentes a Tanzania, para ser ensamblados en la planta de montaje situada en el país y, posteriormente, ser distribuidos a los clientes. En el modelo general se han añadido capacidades asociadas a las plantas de producción y de montaje, lo que hace inviable ensamblar todos los productos en una misma planta de montaje y fomenta el envío de productos completos directamente desde la planta de producción.

Por otro lado, pese a que este modelo cuenta con varias restricciones adicionales al caso particular, cabe destacar que la diferencia entre los valores óptimos de las funciones objetivo no es muy elevada, teniendo en cuenta, además, que las magnitudes con las que se trabaja en el problema son bastante grandes.

En la figura 3.3 se muestra gráficamente como se realiza la distribución utilizando este modelo. Las distintas flechas de la figura están relacionadas con las variables del modelo. Las flechas verdes se identifican con el envío de productos completos desde la planta de producción a los nodos intermedios. Desde ahí, estos productos pueden ser enviados a otro nodo asociado a un cliente, lo que se representa con las flechas azules, y/o pueden ser utilizados para satisfacer la demanda del país en el que se encuentran, si este pertenece al conjunto de clientes.

Por otro lado, las flechas rosas indican el envío de conjuntos de componentes desde las plantas de producción a los nodos intermedios. Una vez en estos, se deben enviar a una planta de montaje para su ensamblaje, lo que se identifica con las flechas rojas. Si la planta de montaje está situada en el mismo nodo al que han llegado los conjuntos, se ha supuesto que el viaje es inmediato. Para terminar, las flechas moradas representan el viaje de los productos, ya completos, desde las plantas de montaje a los clientes. De nuevo, si la planta de montaje estaba situada ya en un nodo asociado a un cliente, las unidades que le correspondan a este se asumen conseguidas, es decir, no se han representado con ninguna flecha.

Por último, destacar que en esta figura las estrellas rojas representan las plantas de montaje cuya instalación ha sido necesaria para la distribución de los productos.

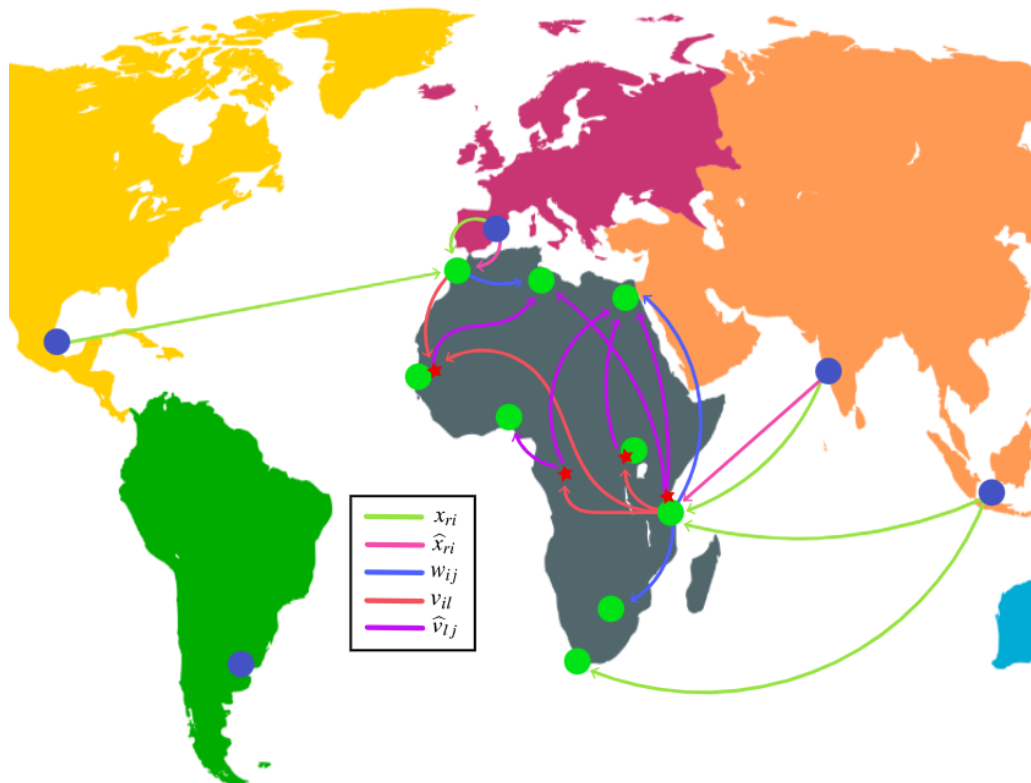


Figura 3.3: Solución de la aplicación del modelo general.

Los detalles de la implementación del código que soluciona este problema quedan explicados en el apéndice (B), apartado B.3. El tiempo de ejecución del algoritmo ha sido de 0,25 segundos.

3.4. Conclusiones y trabajo futuro

El objetivo del trabajo era profundizar en los modelos de localización y distribución a través de su aplicación en un problema determinado. El capítulo 1 permite conocer la teoría necesaria para la comprensión de los modelos, presentados en el capítulo 2 e implementados en el capítulo 3. Así, el estudio de esta aplicación concreta ha permitido entender el proceso de realización de un modelo de producción / localización / distribución. Se ha podido comprender este proceso desde el planteamiento de un problema del mundo real hasta la explicación de la solución óptima, pasando por la formulación matemática del problema y la interpretación de los resultados obtenidos de manera computacional.

Cabe recalcar que el problema estudiado en este trabajo no es excesivamente grande o complicado. Sin embargo, es un modelo lo suficiente completo para comprender cómo se deben estudiar estos problemas, y ha servido como referencia para futuros problemas con más complejidad. Pueden considerarse posibles extensiones de estos modelos incluyendo el uso de funciones multiobjetivo, como se explica en el artículo de Park y Berenguer [5], que es un problema de escasez de suministros, donde se sugiere como objetivos maximizar la eficiencia y minimizar la inequidad.

Para concluir, se puede afirmar que la teoría matemática que explica modelos de optimización sencillos, muchas veces alejados de la realidad debido a su sencillez, es una herramienta que al combinarla, como se ha hecho en este trabajo, permite solucionar problemas reales de mayor magnitud y dificultad.

Bibliografía

- [1] M.S. BAZARAA, J.J. JARVIS, H.D. SHERALI. *Linear Programming and Network Flows*. Wiley, Hoboken, NJ, 4rd edición, 2010.
- [2] G. BERENGUER, A. RICHTER, Z.J. SHEN. Chapter 6. Transportation-Location Problem for a Solar Stove Distributing Nonprofit Organization. *Case Studies in Operations Research*. Katta G.Murty Editor, Springer 2015
- [3] D.S. CHEN, R.G. BASTON, Y. DANG. *Applied Integer Programming. Modeling and Solution*. John Wiley and Sons, Inc. Hoboken, NJ, 2010.
- [4] G. NEMHAUSER, L. WOLSEY. *Integer and Combinatorial Optimization*. John Wiley and Sons, INC., 1999.
- [5] C.H. PARK, G. BERENGUER. Supply Constrained Location-Distribution in Not-for-Profit Settings, *Production and Operation Managment*. **Vol. 29** (No. 11) (2020), 2461–2483.

Apéndice A

Ejemplos de aplicación de los métodos de resolución en optimización entera

En esta sección se van a ilustrar una serie de ejemplos de las aplicaciones de los métodos de resolución para problemas de optimización entera presentados en la sección 1.3.

A.1. Ejemplo del método de ramificación y acotación

Se considera el siguiente problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 5y_1 - 2y_2 \\ \text{sujeto a} \quad & -y_1 + 2y_2 \leq 5 \\ & 3y_1 + 2y_2 \leq 19 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 9 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \text{ y enteras} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Aplicando el algoritmo de ramificación y acotación, se construye el árbol mostrado en la figura A.1. Se ha utilizado la variable con parte decimal más cercana a 0,5 para ramificar.

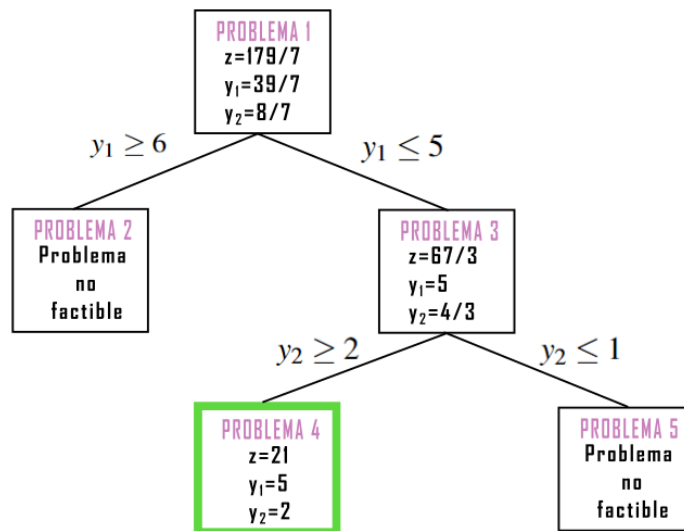


Figura A.1: Árbol asociado a la aplicación del método de ramificación y acotación al ejemplo A.1.

En este ejemplo, solo hay una solución candidata (Problema 4), por lo que $(y_1, y_2) = (5, 2)$ es la solución entera óptima con valor de la función objetivo 21. En caso de que se hubiese conseguido más de una candidata a solución óptima, bastaría tomar aquella solución con el mejor valor de la función objetivo.

A.2. Ejemplo del método fraccionario de planos de corte

Se considera de nuevo el problema del ejemplo A.1, al que se le han añadido las variables de holgura y_3, y_4 e y_5 .

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 5y_1 - 2y_2 \\
 \text{sujeto a} \quad & -y_1 + 2y_2 + y_3 = 5 \\
 & 3y_1 + 2y_2 + y_4 = 19 \\
 & -y_1 - 3y_2 + y_5 = -9 \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \text{ y enteras}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Tras resolver la relajación lineal del problema, se obtiene la siguiente tabla óptima.

Variables	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	\bar{b}_r
	0	0	0	17/7	16/7	179/7
y_1	1	0	0	3/7	2/7	39/7
y_2	0	1	0	-1/7	-3/7	8/7
y_3	0	0	1	5/7	8/7	58/7

Tabla A.1: Tabla óptima del problema relajado asociado al problema (A.2).

Tomando, por ejemplo, la fila asociada a y_1 como fila generadora se obtiene el siguiente corte, en el que $s_1 \geq 0$ es la variable de holgura,

$$-\frac{3}{7}y_4 - \frac{2}{7}y_5 + s_1 = -\frac{4}{7}.$$

Esta restricción se añade a la tabla y se aplica el método simplex dual hasta conseguir que todas las variables básicas sean no negativas. A partir de la siguiente tabla óptima, seleccionando como fila generadora la asociada a y_3 , se obtiene el corte

$$-\frac{2}{3}y_5 - \frac{2}{3}s_1 + s_2 = -\frac{1}{3}.$$

Reiterando el proceso, se selecciona como fila generadora en la siguiente tabla óptima la asociada a y_2 , y se obtiene el corte

$$-\frac{1}{2}s_2 + s_3 = -\frac{1}{2}.$$

Añadiendo este corte a la tabla y aplicándole el método simplex dual se obtiene la solución óptima entera $(y_1, y_2) = (5, 2)$, con valor de la función objetivo 21, como ya se había obtenido en el ejemplo A.1.

A.3. Ejemplo del método mixto de planos de corte

Se considera el siguiente problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 4y_1 + 2y_2 \\ \text{sujeto a} \quad & -4x_1 + 4y_1 \leq 5 \\ & 6x_1 - y_1 \leq 5 \\ & x_1 - y_1 + y_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \text{ y enteras} \end{aligned}$$

Se llama v_1, v_2 y v_3 a las variables de holgura que convierten el problema a forma estándar. Al resolver el problema relajado, se tiene una solución óptima donde la fila asociada a la variable y_1 , con la notación de (1.8), es

$$y_1 + \frac{3}{10}v_1 + \frac{1}{5}v_2 = \frac{5}{2}.$$

Así, se puede calcular $f_{r0} = \frac{1}{2}$, $f_{r1} = 0$ y $f_{r2} = 0$. Luego, sea $s_1 \geq 0$ la variable de holgura de Gomory, el corte mixto queda

$$-\frac{3}{10}v_1 - \frac{1}{5}v_2 + s_1 = -\frac{1}{2}.$$

Esta restricción se añade a la tabla y se aplica el método simplex dual hasta conseguir que todas las variables básicas sean no negativas. En la siguiente tabla óptima, seleccionando como fila generadora la asociada a y_2 , se tiene la fila

$$y_2 - \frac{1}{6}v_2 + v_3 + \frac{5}{6}s_1 = \frac{35}{6}.$$

Se tiene que $f_{r0} = \frac{5}{6}$, $f_{r1} = 0$ y $f_{r2} = 0$. Pero ahora una de las variables tiene un coeficiente negativo, así siendo $s_2 \geq 0$ la variable de holgura de Gomory, el corte mixto quedará

$$-\frac{5}{6}v_2 - \frac{5}{6}s_1 + s_2 = -\frac{5}{6}.$$

Añadiendo este corte a la tabla y aplicándole el método simplex dual se obtiene la solución óptima entera $(x_1, y_1, y_2) = (1, 2, 6)$, con valor de la función objetivo 26.

Apéndice B

Códigos

A continuación, se van a presentar los códigos utilizados en la resolución de los modelos presentados en el capítulo 3. Como ya se ha explicado en este capítulo, para la resolución se ha utilizado el software de optimización Gurobi, a través de la librería de Python gurobipy- 11.0.2.

B.1. Código del modelo presentado en el apartado 2.4.1 (caso particular basado en la definición de variables por el lugar en el que se completa el producto)

```
##Definición de las variables
-----
#Conjuntos de índices
n=5 #Número de nodos intermedios
m=9 #Número de clientes
I=range(n)
J=range(m)

#Constantes
c1=2000 #Unidades de productos completos que caben en un contenedor
c2=6000 #Unidades de conjuntos de componentes que caben en un contenedor
M=92000 #Demanda total

#Parámetros asociados a J
p=[15,15,10,5,10,15,5,10,10] #Coste por ensamblar el producto en j
f=[80000,80000,80000,65000,70000,80000,65000,70000,70000] #Coste por establecer
una planta de montaje en j
h=[16000,11000,9000,4000,7000,15000,13000,9000,8000] #Demanda de cada cliente j

#Parámetros asociados a la planta de producción
n1=40 #Coste por fabricar un producto completo en Argentina
n2=25 #Coste por fabricar un conjunto de componentes en Argentina

#Transporte vía marítima
k=[7000,9000,8000,10000,7000] #Coste del transporte vía marítima por contenedor
d=[7,9,8,10,7] #Coste del transporte vía marítima por unidad de producto completo
hatd=[3.5,4.5,4,5,3.5] #Coste del transporte vía marítima por unidad de conjunto
```

de componentes

```

#Transporte vía terrestre
gt=[[0,10,4.5,5,10],[10,0,4,7,4],[4.5,4,0,5,3],[5,7,5,0,6],[10,4,3,6,0],
    [9,3.2,4,5,6],[6,7,4,1.3,5],[9,3,3.5,6,5],[1.6,7,3.5,2.8,9]] #Coste del
    transporte vía terrestre por unidad de producto completo
hatgt=[[0,5,2.25,2.5,5],[5,0,2,3.5,2],[2.25,2,0,2.5,1.5],[2.5,3.5,2.5,0,3],
    [5,2,1.5,3,0],[4.5,1.6,2,2.5,3],[3,3.5,2,0.65,2.5],[4.5,1.5,1.75,3,2.5],
    [0.8,3.5,1.75,1.4,4.5]] #Coste del transporte vía terrestre por unidad de
    conjunto de componentes

g=np.array(gt).T
hatg=np.array(hatgt).T

##Escritura del modelo
-----
#Se crea el modelo
modelo=Model("primermodelo")

#Se definen los conjuntos de índices
arcos1=[(i,j) for i in I for j in J] #Conjunto (i,j)

#Se definen las variables
x=modelo.addVars(arcos1,vtype="I",name="x", lb=0) #Número de productos completos
    desde la primera etapa (y)
y=modelo.addVars(arcos1,vtype="I",name="y", lb=0) #Número de conjuntos de compo-
    nentes en la primera etapa, que serán productos completos en la segunda (hat y)
w=modelo.addVars(arcos1,vtype="I",name="w", lb=0) #Número de conjuntos de compo-
    nentes en ambas etapas (tilde y)
z=modelo.addVars(J,vtype="B",name="z") #Variable binaria que regula si se establece
    una planta de montaje en j o no
t=modelo.addVars(I,vtype="I",name="t", lb=0) #Número de contenedores llenos de
    productos completos que llegan a i
s=modelo.addVars(I,vtype="I",name="s", lb=0) #Número de contenedores llenos de
    conjuntos de componentes que llegan a i

#Se construye la función objetivo
modelo.setObjective(quicksum(f[j]*z[j] for j in J)+quicksum(k[i]*(t[i]+s[i]) for i in I)
    +quicksum((n1+d[i]+g[i][j])*x[i,j] for i in I for j in J)
    +quicksum((n2+p[i]+hatd[i]+g[i][j])*y[i,j] for i in I for j in J)
    + quicksum((n2+p[j]+hatd[i]+hatg[i][j])*w[i,j] for i in I for j in J),
    sense=GRB.MINIMIZE)

#Se añaden las restricciones
r1 = modelo.addConstrs(quicksum(x[i,j]+y[i,j]+w[i,j] for i in I) >= h[j] for j in J)
r2 = modelo.addConstrs(quicksum(y[i,j] for j in J) <= M*z[i] for i in I)
r3 = modelo.addConstrs(quicksum(w[i,j] for i in I) <= M*z[j] for j in J)
r4 = modelo.addConstrs(quicksum(x[i,j] for j in J) <= c1*t[i] for i in I)
r5 = modelo.addConstrs(quicksum(y[i,j]+w[i,j] for j in J) <= c2*s[i] for i in I)

##Resolución y presentación de soluciones

```

```

-----
modelo.optimize()

#Se saca por pantalla el valor óptimo de la función objetivo
print("Función objetivo =",round(modelo.ObjVal,2))

#Se saca por pantalla el valor de las variables
for variable in modelo.getVars():
    print("\t",variable.VarName,"=",variable.X)

```

B.2. Código del modelo presentado en el apartado 2.4.2 (caso particular basado en la definición de las variables por lo que se transporta en cada etapa)

```

##Definición de las variables
-----
#Conjuntos de índices
n=5 #Número de nodos intermedios
m=9 #Número de clientes
I=range(n)
J=range(m)

#Constantes
c1=2000 #Unidades de productos completos que caben en un contenedor
c2=6000 #Unidades de conjuntos de componentes que caben en un contenedor
M2=92000 #Demanda total

#Parámetros asociados a J
p=[15,15,10,5,10,15,5,10,10] #Coste por ensamblar el producto en j
f=[80000,80000,80000,65000,70000,80000,65000,70000,70000] #Coste por establecer
una planta de montaje en j
h=[16000,11000,9000,4000,7000,15000,13000,9000,8000] #Demanda de cada cliente j

M1=h #Constante que puede ser acotada por la demanda de los clientes

#Parámetros asociados a la planta de producción
n1=40 #Coste por fabricar un producto completo en Argentina
n2=25 #Coate por fabricar un conjunto de componentes en Argentina

#Transporte vía marítima
k=[7000,9000,8000,10000,7000] #Coste del transporte vía marítima por contenedor
d=[7,9,8,10,7] #Coste del transporte vía marítima por unidad de producto completo
hatd=[3.5,4.5,4,5,3.5] #Coste del transporte vía marítima por unidad de conjunto
de componentes

#Transporte vía terrestre
gt=[[0,10,4.5,5,10],[10,0,4,7,4],[4.5,4,0,5,3],[5,7,5,0,6],[10,4,3,6,0],
[9,3.2,4,5,6],[6,7,4,1.3,5],[9,3,3.5,6,5],[1.6,7,3.5,2.8,9]] #Coste del trasporte
vía terrestre por unidad de producto completo
hatgt=[[0,5,2.25,2.5,5],[5,0,2,3.5,2],[2.25,2,0,2.5,1.5],[2.5,3.5,2.5,0,3],

```

```

[5,2,1.5,3,0],[4.5,1.6,2,2.5,3],[3,3.5,2,0.65,2.5],[4.5,1.5,1.75,3,2.5],
[0.8,3.5,1.75,1.4,4.5]] #Coste del transporte vía terrestre por unidad de conjunto
de componentes

g=np.array(gt).T
hatg=np.array(hatgt).T

##Escritura del modelo
-----
#Se crea el modelo
modelo=Model("segundomodelo")

#Se definen los conjuntos de índices
arcos1=[(i,j) for i in I for j in J] #Conjunto (i,j)

#Se definen las variables
x=modelo.addVars(I,vtype="I",name="x", lb=0) #Número de productos completos enviados
de la planta de producción a i
y=modelo.addVars(I,vtype="I",name="y", lb=0) #Número de conjuntos de componentes
enviados de la planta de producción a i
w=modelo.addVars(arcos1,vtype="I",name="w", lb=0) #Número de productos completos
enviados de i a j
v=modelo.addVars(arcos1,vtype="I",name="v", lb=0) #Número de conjuntos de componentes
enviados de i a j
z=modelo.addVars(J,vtype="B",name="z") #Variable binaria que regula si se establece
una planta de montaje en j o no
q=modelo.addVars(I,vtype="I",name="q",lb=0) #Número de conjuntos de componentes
ensamblados en i
t=modelo.addVars(I,vtype="I",name="t", lb=0) #Número de contenedores llenos de
productos completos que llegan de la planta de producción a i
s=modelo.addVars(I,vtype="I",name="s", lb=0) #Número de contenedores llenos de
conjuntos de componentes que llegan de la planta de producción a i

#Se construye la función objetivo
modelo.setObjective(quicksum(f[j]*z[j] for j in J) +quicksum(k[i]*(t[i]+s[i])
for i in I)+quicksum((n1+d[i])*x[i] for i in I) +quicksum((n2+hatd[i])*y[i]
for i in I) +quicksum(p[i]*q[i] for i in I)+quicksum(g[i][j]*w[i,j] for i in I
for j in J) +quicksum((p[j]+hatg[i][j])*v[i,j] for i in I for j in J),
sense=GRB.MINIMIZE)

#Se añaden las restricciones
r1 = modelo.addConstrs(quicksum(w[i,j]+v[i,j] for i in I)>=h[j] for j in J)
r2 = modelo.addConstrs(x[i]+q[i]==quicksum(w[i,j] for j in J) for i in I)
r3 = modelo.addConstrs(y[i]-q[i]==quicksum(v[i,j] for j in J) for i in I)
r4 = modelo.addConstrs(quicksum(v[i,j] for i in I) <= M1[j]*z[j] for j in J)
r5 = modelo.addConstrs(q[i] <= M2*z[i] for i in I)
r6 = modelo.addConstrs(x[i] <= c1*t[i] for i in I)
r7 = modelo.addConstrs(y[i] <= c2*s[i] for i in I)

##Resolución y presentación de soluciones

```

```

-----
modelo.optimize()

#Se saca por pantalla el valor óptimo de la función objetivo
print("Función objetivo =",round(modelo.ObjVal,2))

#Se saca por pantalla el valor de las variables
for variable in modelo.getVars():
    print("\t",variable.VarName,"=",variable.X)

```

B.3. Código del modelo general de producción / localización / distribución presentado en la sección 2.5

```

##Definición de las variables
-----
#Conjuntos de índices
n=5 #Número de nodos intermedios
m=9 #Número de clientes finales
r=5 #Número de plantas inciales
l=6 #Número de posibles localizaciones para la planta de montaje
I=range(n)
J=range(m)
R=range(r)
L=range(l)

#Constantes
c1=2000 #Unidades de productos completos que caben en un contenedor
c2=6000 #Unidades de conjuntos de componentes que caben en un contenedor
M=92000 #Demanda total

#Parámetros asociados a L
p=[15,5,10,5,10,10] #Coste por ensamblar el producto en l
f=[80000,65000,70000,65000,70000,60000] #Coste por establecer una planta de
    montaje en l
cam=[15000,10000,9000,15000,5000,10000] #Capacidad de la planta de montaje

#Parámetros asociados a J
h=[16000,11000,9000,4000,7000,15000,13000,9000,8000] #Demanda de cada cliente j

#Parámetros asociados a R
n1=[35,40,45,35,30] #Coste por fabricar un producto completo en r
n2=[22.5,25,24,20,22.5] #Coste por fabricar un conjunto de componentes en r
a=[2000,2000,2000,1000,1000] #Coste por utilizar la planta de producción r
cap1=[10000,15000,3000,10000,25000] #Capacidad de producción-productos completos
cap2=[25000,30000,20000,45000,10000] #Capacidad de producción-conjuntos de componentes

#Transporte vía marítima
kt=[[14000,7000,9000,9500,10000],[8000,9000,1300,10000,11500],[10000,8000,4000,
    8000,11000],[15500,10000,10000,4500,7000],[8000,7000,3500,10000,13000]] #Coste

```

```

del transporte vía marítima por contenedor
dt=[[14,7,9,9.5,10],[8,9,1.3,10,11.5],[10,8,4,8,11],[15.5,10,10,4.5,7],[8,7,3.5,
10,13]] #Coste del transporte vía marítima por unidad de producto completo
hatdt=[[7,3.5,4.5,4.75,5],[4,4.5,0.65,5,5.75],[5,4,2,4,5.5],[7.75,5,5,2.25,3.5],
[4,3.5,1.75,5,6.5]] #Coste del transporte vía marítima por unidad de conjunto
de componentes

k=np.array(kt).T
d=np.array(dt).T
hatd=np.array(hatdt).T

#Transporte vía terrestre
gt=[[0,10,4.5,5,10],[10,0,4,7,4],[4.5,4,0,5,3],[5,7,5,0,6],[10,4,3,6,0],
[9,3.2,4,5,6],[6,7,4,1.3,5],[9,3,3.5,6,5],[1.6,7,3.5,2.8,9]] #Coste del transporte
vía terrestre por unidad de producto completo
hatgt=[[2.25,2,0,2.5,1.5],[2.5,3.5,2.5,0,3],[5,2,1.5,3,0],[3,3.5,2,0.8,2.5],
[4.5,1.5,1.75,3,2.5],[2,3.25,1,1.3,2.75]] #Coste del transporte vía terrestre por
unidad de conjunto de componentes a la planta de montaje
tildeg=[[4.5,4,0,5,3,4,4,3.5,3.5],[5,7,5,0,6,5,1.3,6,2.8],[10,4,3,6,0,6,5,5,9],[6,7,4,
1.3,5,4,0,5,3.5],[9,3,3.5,6,5,1.2,5,0,8],[4,6.5,2,2.6,5.5,5,1.7,6.5,3.5]] #Coste
del transporte vía terrestre por producto completo desde la planta de montaje

g=np.array(gt).T
hatg=np.array(hatgt).T

##Escritura del modelo
-----
#Se crea el modelo
modelo=Model("modeloLocDistrib")

#Se definen los conjuntos de índices
arcos1=[(i,j) for i in I for j in J] #Conjunto (i,j)
arcos2=[(r,i) for r in R for i in I] #Conjunto (r,i)
arcos3=[(i,l) for i in I for l in L] #Conjunto (i,l)
arcos4=[(l,j) for l in L for j in J] #Conjunto (l,j)

#Se definen las variables
x=modelo.addVars(arcos2,vtype="I",name="x", lb=0) #Número de productos completos
enviados de r a i
y=modelo.addVars(arcos2,vtype="I",name="y", lb=0) #Número de conjuntos de
componentes enviados de r a i
w=modelo.addVars(arcos1,vtype="I",name="w", lb=0) #Número de productos completos
enviados de i a j
v=modelo.addVars(arcos3,vtype="I",name="v", lb=0) #Número de conjuntos de
componentes enviados de i a l
u=modelo.addVars(arcos4,vtype="I",name="u",lb=0) #Número de productos completos
enviados de l a i
e=modelo.addVars(R,vtype="B",name="e") #Variable binaria que regula si se utiliza
una planta de producción r o no
z=modelo.addVars(L,vtype="B",name="z") #Variable binaria que regula si se establece

```

```

una planta de montaje en j o no
t=modelo.addVars(arcos2,vtype="I",name="t", lb=0) #Número de contenedores llenos de
    productos completos que llegan de r a i
s=modelo.addVars(arcos2,vtype="I",name="s", lb=0) #Número de contenedores llenos de
    conjuntos de componentes que llegan de r a i

#Se construye la función objetivo
modelo.setObjective(quicksum(a[r]*e[r] for r in R) +quicksum(f[l]*z[l] for l in L)
    +quicksum(k[r][i]*(t[r,i]+s[r,i]) for r in R for i in I)
    +quicksum((n1[r]+d[r][i])*x[r,i] for r in R for i in I)
    +quicksum((n2[r]+hatd[r][i])*y[r,i] for r in R for i in I)+quicksum(g[i][j]*w[i,j]
    for i in I for j in J) +quicksum((p[l]+hatg[i][l])*v[i,l] for i in I for l in L)
    +quicksum(tildeg[l][j]*u[l,j] for l in L for j in J), sense=GRB.MINIMIZE)

#Se añaden las restricciones
r1 = modelo.addConstrs(quicksum( x[r,i] for r in R) == quicksum(w[i,j] for j in J)
    for i in I )
r2 = modelo.addConstrs(quicksum( y[r,i] for r in R) == quicksum(v[i,l] for l in L)
    for i in I )
r3 = modelo.addConstrs(quicksum( v[i,l] for i in I) == quicksum(u[l,j] for j in J)
    for l in L )
r4 = modelo.addConstrs(quicksum(w[i,j] for i in I) + quicksum(u[l,j] for l in L)
    >= h[j] for j in J)
r5 = modelo.addConstrs(quicksum(v[i,l] for i in I) <= cam[l]*z[l] for l in L)
r6 = modelo.addConstrs(quicksum(x[r,i] for i in I) <= cap1[r]*e[r] for r in R)
r7 = modelo.addConstrs(quicksum(y[r,i] for i in I) <= cap2[r]*e[r] for r in R)
r8 = modelo.addConstrs(x[r,i] <= c1*t[r,i] for r in R for i in I)
r9 = modelo.addConstrs(y[r,i] <= c2*s[r,i] for r in R for i in I)

##Resolución y presentación de soluciones
-----
modelo.optimize()

#Se saca por pantalla el valor óptimo de la función objetivo
print("Función objetivo =",round(modelo.ObjVal,2))

#Se saca por pantalla el valor de las variables
for variable in modelo.getVars():
    print("\t",variable.VarName,"=",variable.X)

```