

Curvas que rellenan el espacio



Muad Mohand Arraouah
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo: Glenier Lázaro Bello Burguet y
Luis Carlos García Lirola
12 de junio de 2024

Abstract

In 1878, Cantor developed his set theory. One of his results was the Cantor-Schröder-Bernstein Theorem, which states that if there is an injective map $f : X \rightarrow Y$ and another injective map $g : Y \rightarrow X$, then there exists a bijective map $h : X \rightarrow Y$. One of the (then) shocking consequences was that $(0, 1)$ and $(0, 1)^2$ had the same cardinality, that is, the "same number" of points. Indeed, there is an obvious injective map from $(0, 1)$ into $(0, 1) \times (0, 1)$ given by $x \mapsto (x, 0)$. Conversely, given $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$, we take their decimal expansions where the number of nonzero digits is infinite $0.x_1x_2x_3\dots$ and $0.y_1y_2y_3\dots$. The map that sends (x, y) to the point with decimal expansion $0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\dots$ is an injective function. In other words, we have demonstrated the existence of a bijection between $(0, 1)$ and $(0, 1)^2$. However, we want to go further and ask the natural question of whether we can find a continuous bijection between $(0, 1)$ and $(0, 1)^2$, or even a differentiable one. The answer to this question was given by Netto in 1879: it is not possible, any bijection must be discontinuous. For this, Netto uses a topological argument of connectedness that we will see later.

Once this possibility is ruled out, the question remains whether it is possible to find a continuous and surjective function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, or $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$. Our work seeks to answer this question (which will be affirmative), and for this, we will construct several examples examining their properties. In 1890, Peano proposed a first construction that we will describe in Chapter 2. It is the first curve that was as a **space-filling curve**.

Once the square $[0, 1]^2$ was seen as a continuous image of $[0, 1]$ (or any line segment), the question arose about the general structure of a continuous image of a line segment. The further pursuit of this question led to the new topological concept of local connectedness and to a complete answer independently found by S. Mazurkiewicz and H. Hahn in 1913. The criterion found by both applies not only to the n -dimensional Euclidean space but more generally to Hausdorff spaces.

In the first chapter, we will introduce the necessary concepts to understand the properties of these curves. We will review concepts such as the completeness of \mathbb{R}^n , uniform convergence, compactness, connectedness, or the Cantor set (all of which are presented in courses like General Topology or Mathematical Analysis I and II). These concepts are fundamental for the construction and subsequent analysis of space-filling curves.

The second chapter is divided into several sections. First, we will introduce certain properties such that if a sequence of continuous functions from the interval $[0, 1]$ to the square $[0, 1]^2$ satisfies them, then its limit function is a continuous and surjective curve that fills the unit square, in addition to having other interesting properties. It's important to highlight that this section is original work, where we have abstracted ideas from the examples to develop our analysis.

Among the examples presented are the Peano and Hilbert curves, constructed in 1890 and 1891 respectively. These curves are classic examples of space-filling curves, and their construction is achieved through a recursive process. Additionally, an arithmetic and complex representation of these curves is provided to explicitly calculate the image of any point within the interval. Thanks to this calculation method, we have been able to generate images of the initial iterations of the construction process for each curve using the Octave software. As a personal contribution, we will propose a new version of a

space-filling curve, employing a similar recursive process. We will also demonstrate that all these curves are non-differentiable at any point.

We will also present the Lebesgue curve, but in this case, we will not follow the geometric approach of the previous cases. Instead, we will define the Lebesgue curve as the continuous extension to the interval $[0, 1]$ of a continuous and surjective function previously defined on the Cantor set C . We will demonstrate that this extension is continuous, surjective (its image covers the entire unit square $[0, 1]^2$), and differentiable at almost all points. In particular, it will be differentiable on $[0, 1] \setminus C$ and not differentiable on C . Finally, we will generalize the definition of the Lebesgue curve to higher dimensions and discuss how to construct the curve alternatively using an iterative method similar to the Peano and Hilbert curves.

In Chapter 3, the Hahn-Mazurkiewicz Theorem is presented, which states that a subset $A \subseteq \mathbb{R}^n$ is the image of a continuous curve $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ if and only if A is compact, connected, and locally connected. The proof will be divided into two parts. In the first part of the chapter, it is shown that these conditions are necessary. The inverse implication of the theorem is proved by imitating the construction of the Lebesgue curve, using Hausdorff's Theorem on the images of the Cantor set.

During the development of this work, I encountered some difficulties due to errors in the results and confusing and incomplete demonstrations presented in the original sources, especially in the article referenced as [3], whose results form the basis of Chapter 3. These inconsistencies compelled me to make an additional effort to complete and correct the demonstrations, thus ensuring the validity of the presented results. This process has not only been challenging but also enriching, as it allowed me to deepen my understanding of the involved concepts and techniques.

Resumen

En 1878, Cantor desarrolló su teoría de conjuntos. Uno de sus resultados fue el Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein, que afirma que si existe una aplicación inyectiva $f : X \rightarrow Y$ y otra aplicación inyectiva $g : Y \rightarrow X$, entonces, existe una aplicación biyectiva $h : X \rightarrow Y$. Una de las (entonces) consecuencias impactantes fue que $(0, 1)$ y $(0, 1)^2$ tenían la misma cardinalidad, es decir, el “mismo número” de puntos. En efecto, hay una aplicación inyectiva obvia de $(0, 1)$ en $(0, 1) \times (0, 1)$ dada por $x \mapsto (x, 0)$. Recíprocamente, dado $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$, tomemos sus expansiones decimales donde el número de dígitos distintos de cero es infinito $0.x_1x_2x_3\dots$ y $0.y_1y_2y_3\dots$ La aplicación que envía (x, y) al punto con expansión decimal $0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\dots$ es una aplicación inyectiva. Es decir, hemos demostrado la existencia de una biyección entre el $(0, 1)$ y el $(0, 1)^2$. Sin embargo, queremos ir más allá y nos plantemos la pregunta natural sobre si podemos encontrar una biyección continua entre el $(0, 1)$ y el $(0, 1)^2$, o incluso diferenciable. La respuesta a esta pregunta la da Netto en 1878: no es posible, cualquier biyección debe ser discontinua. Para ello, Netto usa un argumento topológico de conexión que veremos posteriormente.

Una vez descartada esta posibilidad, queda abierta la cuestión de si era posible encontrar una función continua y sobreyectiva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, o bien, $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$. Nuestro trabajo busca dar respuesta a esta pregunta (que será afirmativa), y para ello, construiremos varios ejemplos examinando sus propiedades. En 1890 Peano plantea una primera construcción que nosotros describiremos en el Capítulo 2. Es la primera curva que fue bautizada con el término en inglés *space filling curve* y que nosotros traduciremos por **curvas que llenan el espacio**.

Una vez visto el cuadrado $[0, 1]^2$ como una imagen continua de $[0, 1]$ (o de cualquier segmento de línea), surgió la pregunta sobre la estructura general de una imagen continua de un segmento de línea. La búsqueda posterior de esta cuestión llevó al nuevo concepto topológico de conexidad local y a una respuesta completa encontrada independientemente por S. Mazurkiewicz y H. Hahn en 1913. El criterio encontrado por ambos se aplica no solo al espacio euclídeo n -dimensional, sino más generalmente a los espacios de Hausdorff.

En el primer capítulo introduciremos los conceptos necesarios para comprender las propiedades de estas curvas. Se repasan conceptos como la completitud de \mathbb{R}^n , la convergencia uniforme, la compacidad, la conexión o el conjunto de Cantor (todos ellos presentados en asignaturas como Topología General o Análisis Matemático I y II). Estos conceptos son fundamentales para la construcción y posterior análisis de las curvas que llenan el espacio.

El segundo capítulo se divide en varias secciones. En la primera sección, introduciremos ciertas propiedades tales que, si una sucesión de funciones continuas del intervalo $[0, 1]$ al cuadrado $[0, 1]^2$ las satisface, entonces su función límite será una curva continua y sobreyectiva que llena el cuadrado unidad, además de poseer otras propiedades interesantes. Es importante destacar que esta sección es de elaboración propia, donde hemos abstraído las ideas de los ejemplos para desarrollar nuestro análisis.

Entre los ejemplos presentados se encuentran las curvas de Peano y de Hilbert, construidas en 1890 y 1891 respectivamente. Estas curvas son ejemplos clásicos de curvas que llenan el espacio, y su construcción se obtiene mediante un proceso recursivo. Además, se ofrece una representación aritmética y compleja de estas curvas para calcular explícitamente la imagen de cualquier punto en el intervalo. Gra-

cias a este método de cálculo, hemos podido generar las imágenes de las primeras iteraciones del proceso de construcción de cada curva, utilizando el programa informático Octave. Como aporte personal, propondremos una nueva versión de una curva que rellena el espacio, utilizando un proceso recursivo similar. También demostraremos que todas estas curvas no son diferenciables en ningún punto.

También presentaremos la curva de Lebesgue, pero en este caso no seguiremos el enfoque geométrico de los casos anteriores. Definiremos la curva de Lebesgue como la extensión continua al intervalo $[0, 1]$ de una aplicación continua y sobreyectiva previamente definida sobre el conjunto de Cantor C . Demostraremos que esta extensión es continua, sobreyectiva (su imagen abarca todo el cuadrado unidad $[0, 1]^2$) y diferenciable en casi todos los puntos. En particular, será diferenciable en $[0, 1] \setminus C$ y no diferenciable en C . Finalmente, generalizaremos la definición de la curva de Lebesgue a dimensiones superiores y comentaremos cómo construir la curva alternativamente, utilizando un método iterativo similar al de las curvas de Peano y Hilbert.

En el Capítulo 3 se presenta el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz, el cual establece que un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es la imagen de una curva continua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si y solo si A es compacto, conexo y localmente conexo. La demostración la dividiremos en dos partes. En la primera parte del capítulo, se demuestra que estas condiciones son necesarias. La implicación inversa del teorema se demuestra imitando la construcción de la curva de Lebesgue, utilizando el Teorema de Hausdorff sobre las imágenes del conjunto de Cantor.

Durante el desarrollo de este trabajo, enfrenté algunas dificultades debido a erratas en los resultados y demostraciones confusas e incompletas presentes en las fuentes originales, especialmente en el artículo [3], cuyos resultados son la base del Capítulo 3. Estas inconsistencias me obligaron a realizar un esfuerzo adicional para completar y corregir las demostraciones, asegurando así la validez de los resultados presentados. Este proceso no solo ha sido desafiante, sino también enriquecedor, ya que me permitió profundizar en la comprensión de los conceptos y técnicas involucradas.

Índice general

Abstract	III
Resumen	V
1. Preliminares	1
1.1. Completitud de \mathbb{R}^n	1
1.2. Convergencia uniforme	2
1.3. Compacidad y conexión	3
1.4. El conjunto de Cantor	5
2. Ejemplos de curvas que rellenan el espacio	9
2.1. Caso general	9
2.2. Curva de Hilbert	11
2.2.1. Construcción de la curva de Hilbert	12
2.2.2. Representación compleja y aritmética de la curva de Hilbert	13
2.2.3. Generalización a 3 dimensiones.	14
2.3. Curva de Peano	15
2.3.1. Construcción geométrica de la curva de Peano	15
2.3.2. Representación compleja y aritmética de la curva de Peano	16
2.4. Aporte personal	17
2.5. Curva de Lebesgue	18
3. Teorema de Hahn-Mazurkiewicz	21
3.1. Condiciones necesarias	21
3.2. Resultados previos. Teorema de Hausdorff	22
3.3. Condiciones suficientes	23
Bibliografía	27

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo proporcionamos los conceptos necesarios para comprender las propiedades de las curvas que rellenan el espacio. Se introducen nociones como la completitud de \mathbb{R}^n , la convergencia uniforme de una sucesión de funciones, la construcción del conjunto de Cantor, compacidad y conexión. El contenido del capítulo ha sido obtenido de [1], [4] y [5].

1.1. Completitud de \mathbb{R}^n

Definimos la noción de sucesión de Cauchy en el contexto de espacios métricos.

Definición. Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio métrico (X, d_X) es de Cauchy si, para $\varepsilon > 0$, existe un N natural tal que para todo $m, n > N$ se satisface $d_X(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Teorema 1.1. *Toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente en un espacio métrico (X, d_X) y sea $l = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que para todo $n > N$, $d_X(x_n, l) < \varepsilon/2$. Tomando $n, m > N$, por la desigualdad triangular, $d_X(x_n, x_m) \leq d_X(x_n, l) + d_X(x_m, l) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Se deduce, por tanto, que toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy. \square

Sin embargo, el recíproco no es cierto. Por ejemplo, la sucesión $\{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $X = (0, 1]$ con la métrica euclídea de \mathbb{R} , dada por $d(x, y) = |x - y|$, es de Cauchy pero no es convergente.

Definición. Un espacio métrico (X, d_X) es completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

Teorema 1.2. *El espacio euclídeo \mathbb{R}^n es completo para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Veamos si toda sucesión de Cauchy en \mathbb{R}^n es convergente. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy y sea $T = \{x_1, x_2, \dots\}$ el conjunto de los valores que toma la sucesión. Si T es finito, todos los términos de la sucesión serán iguales salvo una cantidad finita, y entonces la sucesión $\{x_n\}$ converge a dicho valor.

Supongamos que T es infinito. El Teorema de Bolzano-Weierstrass afirma que toda sucesión acotada en \mathbb{R}^n tiene una subsucesión convergente, equivalentemente, tiene un punto de acumulación p . Tomando $\varepsilon = 1$, como la sucesión es de Cauchy, existe un N tal que si $n \geq N$, entonces $\|x_n - x_N\| < 1$, es decir, para $n \geq N$, $x_n \in B(x_N, 1)$. Por lo tanto, T está contenido en la bola de radio $1 + M$ y centro el origen, siendo $M = \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_N\|\}$. Luego T es un conjunto infinito y acotado, y por el Teorema de Bolzano-Weierstrass tiene un punto de acumulación p en \mathbb{R}^n .

Dado un $\varepsilon > 0$, existe un N tal que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon/2$ si $n, m \geq N$, y como p es punto de acumulación, la bola $B(p; \varepsilon/2)$ tiene un punto x_m con $m \geq N$. Tomando un $n \geq N$, tenemos:

$$\|x_n - p\| \leq \|x_n - x_m\| + \|x_m - p\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ como queríamos demostrar. \square

1.2. Convergencia uniforme

Definición. Sean X e Y espacios topológicos y $f_n : X \rightarrow Y$ una sucesión de funciones. Diremos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente si existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \forall x \in X,$$

En este caso, definimos la función límite como

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \text{si } x \in X.$$

Nos preguntamos si el hecho de que las $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sean continuas implica que la función límite es continua, lo cual es equivalente a preguntarse si, para todo $c \in X$, podemos hacer el siguiente intercambio de límites:

$$\lim_{x \rightarrow c} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow c} f_n(x)$$

La respuesta, en general, es no, puesto que $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ puede que no exista, y si existe, no tiene por qué ser $f(c)$.

Ejemplo. Las funciones $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1, \end{cases}$$

son continuas en todo su dominio. Sin embargo, la función límite $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \neq 0, \end{cases}$$

no es continua en $x = 0$.

Vamos a introducir una condición suficiente pero no necesaria que permite intercambiar dichos límites:

Definición. Una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones $f_n : X \rightarrow Y$ con X un conjunto cualquiera e Y espacio métrico se dice que converge uniformemente a f en X si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ (que depende solo de ε) tal que si $n > N$, entonces:

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in X.$$

Se denota como $f_n \rightarrow f$ uniformemente en X .

Definición. Una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones $f_n : X \rightarrow Y$ con X conjunto cualquiera e Y espacio métrico es uniformemente acotada en X si existe $c \in Y$ y $M > 0$ tal que $f_n(X) \subseteq B(c, M)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $B(c, M) = \{y \in Y \mid d_Y(c, y) < M\}$.

Observación. Si cada f_n está acotada y $f_n \rightarrow f$ uniformemente en X , entonces $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está uniformemente acotada en X . En ocasiones, esta condición es muy útil para demostrar que una sucesión no es uniformemente convergente.

Teorema 1.3. Sea $f_n : X \rightarrow Y$ con X espacio topológico e Y espacio métrico. Supongamos que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en X . Si cada f_n es continua en un punto $c \in X$ entonces la función límite X también es continua en c .

Demostración. Si c es un punto aislado de X , f es continua en c trivialmente. Ahora supongamos que c es un punto de acumulación de X . Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$, hay un N tal que para $n \geq N$

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3 \quad \text{para todo } x \in X.$$

Por otra parte, f_N es continua en c , luego hay un entorno abierto U de c tal que si $x \in U \cap X$ (es no vacío ya que contiene a c) entonces

$$d_Y(f_N(x), f_N(c)) < \varepsilon/3.$$

De ese modo, usando dos veces la desigualdad triangular,

$$d_Y(f(x), f(c)) \leq d_Y(f(x), f_N(x)) + d_Y(f_N(x), f_N(c)) + d_Y(f_N(c), f(c)) < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

como queríamos demostrar. \square

Definición. Una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones $f_n : X \rightarrow Y$ con X conjunto cualquiera e Y un espacio métrico es uniformemente de Cauchy en X si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un N natural tal que $d_Y(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon$ para todos los números naturales $m, n \geq N$ y todo $x \in X$.

Teorema 1.4. *Sea una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones $f_n : X \rightarrow Y$ con X un conjunto cualquiera e Y espacio métrico completo. Entonces la sucesión converge uniformemente en X a una función $f : X \rightarrow Y$ si, y solo si, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en X .*

Demostración. Supongamos que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en X . Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo N tal que para todo $n > N$, se tiene $d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/2$ para todo $x \in X$. Por tanto, usando la desigualdad triangular,

$$d_Y(f_m(x), f_n(x)) \leq d_Y(f_m(x), f(x)) + d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

para cada $x \in X$.

Recíprocamente, supongamos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en X . Para cada $x \in X$, la sucesión $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y como Y es completo, $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente. Definimos para cada x , $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Sea $\varepsilon > 0$, tomamos un N tal que para $n > N$ se cumple $d_Y(f_n(x), f_{n+k}(x)) < \varepsilon/2$ para cada $k = 1, 2, \dots$ y cada $x \in X$. Tomando límite cuando $k \rightarrow \infty$, $d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon/2$. Luego, si $n > N$, tenemos que $d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ para cada $x \in X$, como queríamos demostrar. \square

Observación. Las nociones de convergencia puntual y uniforme se pueden particularizar al caso de funciones cuyo dominio es un subconjunto S de \mathbb{R} o \mathbb{C} e imagen en \mathbb{R}^k . Por ejemplo, si f_n y f son funciones $f_n, f : S \rightarrow \mathbb{R}^k$, decimos que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en S , si para cada $\varepsilon > 0$ existe un N tal que si $n \geq N$ se cumple $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in S$.

Nos focalizaremos en este caso particular para presentar todos los resultados de próximos capítulos.

1.3. Compacidad y conexión

En esta sección recordaremos algunas definiciones y propiedades sobre compacidad y conexión en \mathbb{R}^n , muchas de ellas presentadas en la asignatura de Topología General.

Definición. Se dice que un subconjunto A de \mathbb{R}^n es compacto si toda sucesión en A tiene una subsucesión convergente cuyo límite también pertenece a A .

Equivalentemente, por el Teorema de Heine-Borel, A es compacto si es acotado y cerrado.

Observación. Realmente la definición de compacto en un espacio topológico K cualquiera es la siguiente: Diremos que K es compacto si para cualquier colección de conjuntos abiertos $\{U_\alpha\}$ que cubre K , es decir, $K = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} U_\alpha$ existe un subconjunto finito $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ de esta colección que también cubre K .

En el contexto específico de \mathbb{R}^n que nos ocupa, nos restringimos a la definición previamente presentada, y que se deduce del Teorema de Heine-Borel demostrado en la asignatura de Topología General.

Proposición 1.5. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^m$ compacto y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ función continua. Entonces $f(X)$ es compacto.

Demostración. Sea $A = f(X)$. Veamos que cada sucesión en A tiene una subsucesión convergente con límite en A . Sea $\{a_n\}$ una sucesión en A , entonces, eligiendo un punto en cada preimagen de a_n , obtenemos una sucesión $\{x_n\} \subseteq X$. Puesto que X es compacto, existe una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\} \subseteq X$, con límite $x \in X$. Podemos afirmar que la subsucesión $\{a_{n_k}\}$ converge a $f(x)$, puesto que una función continua f envía sucesiones convergentes a sucesiones convergentes. \square

Definición. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es conexo si no existen U, V abiertos disjuntos de \mathbb{R}^n cumpliendo que $U \cap A \neq \emptyset, V \cap A \neq \emptyset$, tal que $A = (U \cup V) \cap A$. En caso contrario, se dice que A es desconexo.

Proposición 1.6. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^m$ conexo y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ función continua. Entonces $f(X)$ es conexo.

Demostración. Sea $A = f(X)$ y supongamos que A no es conexo. Entonces, existen U, V abiertos disjuntos cumpliendo que $U \cap A \neq \emptyset, V \cap A \neq \emptyset$, tal que $A = (U \cup V) \cap A$.

Dado que f es continua, tomando los abiertos no vacíos $U_1 = f^{-1}(U), V_1 = f^{-1}(V)$ se tiene

$$X = f^{-1}(A) = f^{-1}((U \cup V) \cap A) = (f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)) \cap f^{-1}(A) = (U_1 \cup V_1) \cap X.$$

donde $U_1 = f^{-1}(U), V_1 = f^{-1}(V)$ son disjuntos ya que $U_1 \cap V_1 = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Luego X no es conexo. \square

Definición. Sea un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

- (a) Dado $x \in A$, el mayor subconjunto conexo de A que contiene a x se llama componente conexa de x y se denota C_x . Siempre existe, pues es la unión de todos los subconjuntos conexos que contienen a x y esta unión es conexa, puesto que la intersección de estos conjuntos es no vacía.

Si $x \neq y$ en A , necesariamente $C_x = C_y$ o $C_x \cap C_y = \emptyset$, ya que en caso contrario, $C_x \cup C_y$ será un conjunto conexo que contiene a x e y pero siendo mayor que sus respectivas componentes, lo que no es posible. De este modo, obtenemos una partición del conjunto A en conjuntos conexos y nos referimos a ellos como las componentes conexas de A .

- (b) Se dice que A es localmente conexo si para todo $a \in A$ y todo entorno abierto U de a , podemos encontrar un abierto V de modo que $a \in V \cap A \subseteq U$ y $V \cap A$ es conexo.
- (c) Se dice que A es débilmente localmente conexo si para todo $a \in A$ y todo entorno abierto U de a existe un entorno abierto $V \subseteq U$ de a tal que si $x \in V \cap A$, entonces x y a están en la misma componente conexa de $U \cap A$.
- (d) Se dice que A es uniformemente débilmente localmente conexo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\eta \in (0, \varepsilon)$ tal que si $a, a' \in A$ satisfacen $\|a - a'\| < \eta$ entonces a y a' están en la misma componente conexa de $B(a, \varepsilon) \cap B(a', \varepsilon) \cap A$.
- (e) Se dice que A es conexo por caminos si para todo $x, y \in A$ existe un camino que los une, es decir, una aplicación continua $\sigma : [0, 1] \rightarrow A$ tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$.
- (f) Se dice que A es localmente conexo por caminos si para todo $a \in A$ y todo entorno abierto U de a podemos encontrar un entorno $V \subseteq U$ de a de modo que $V \cap A$ es conexo por caminos.
- (g) Se dice que A es uniformemente localmente conexo por caminos si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\eta \in (0, \varepsilon)$ tal que si $a, a' \in A$ satisfacen $\|a - a'\| < \eta$ entonces existe un camino continuo en $B(a, \varepsilon) \cap B(a', \varepsilon) \cap A$ conectando a y a' .

Ejemplo. 1. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es conexo si y solo si es un intervalo.

2. El seno topológico $A = \{(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x}) : x \in (0, 1]\} \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\} = \overline{\{(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x}) : x \in (0, 1]\}}$ es conexo por ser la clausura del conjunto $E = \{(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x}) : x \in (0, 1]\}$, que es conexo por la Proposición 1.6. En efecto, si $\overline{E} = (U \cup V) \cap \overline{E}$ donde U, V son abiertos no vacíos disjuntos, es decir, es disconexo, entonces $E = E \cap \overline{E} = E \cap (U \cup V) \cap \overline{E} = (U \cup V) \cap E$, contradiciendo que E sea conexo. Sin embargo, A no es localmente conexo, pues dado $(0, y) \in A, y \neq 0$, cualquier entorno abierto de este punto contiene infinitos segmentos de E que no se pueden conectar. Igualmente, no es conexo por caminos pues no existe un camino en A que conecte $(0, 0)$ con cualquier punto de E .

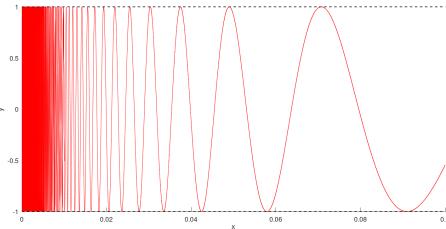


Figura 1.1: Seno topológico.

3. El conjunto $A = [0, 1] \cap [2, 3]$ es (uniformemente) localmente conexo por caminos ($\eta = \min\{\varepsilon, 1\}$) pero no es conexo por caminos.
4. El conjunto $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2n, 2n + 1 - \frac{1}{n}]$ es localmente conexo por caminos porque cada intervalo es individualmente conexo por caminos. Sin embargo, la falta de un η consistente que pueda aplicarse a todo el conjunto y a todos los puntos dentro de él debido a los huecos entre los intervalos y la naturaleza cada vez más ajustada de estos huecos, muestra que A no es uniformemente localmente conexo por caminos ni uniformemente débilmente localmente conexo.

Lema 1.7. *Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es débilmente localmente conexo si y solo si es localmente conexo.*

Demostración. La implicación (\Leftarrow) es inmediata. Para la implicación (\Rightarrow), basta ver que las componentes conexas de todos los subconjuntos abiertos relativos de A son abiertos relativos de A . Si esto es cierto, dado un U entorno abierto de $a \in A$, bastaría tomar V como la componente conexa de $U \cap A$ que contiene a a y ya tendríamos que A es localmente conexo.

Sea U abierto en \mathbb{R}^n y sea C una componente conexa de $U \cap A$. Queremos ver que C es abierto relativo de A . Para ello, tomemos $c \in C$ y un entorno abierto U_c de él tal que $U_c \subseteq U \cap A$. Como A es débilmente localmente conexo, existe un entorno abierto más pequeño V_c tal que si $x \in V_c \cap A$, entonces c y x están en la misma componente conexa U_{c_x} de U_c . En particular, c y x deben estar ambos en C , pues C y U_{c_x} son ambos conexos que se intersecan (en c) y C es un subconjunto maximalmente conexo de $U \cap A$. Esto significa que $V_c \cap A \subseteq C$. Como esto se cumple para un $c \in C$ arbitrario, se tiene que $C = (\cup_c V_c) \cap A$ y por tanto, C es abierto relativo de A como queríamos demostrar. \square

1.4. El conjunto de Cantor

Un número $t \in [0, 1]$ puede expresarse en base 3 como

$$t = 0_3 t_1 t_2 t_3 \dots = \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \frac{t_3}{3^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n}, \quad t_n \in \{0, 1, 2\},$$

donde $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son los dígitos de la representación en base 3 del número.

Utilizamos barras superiores para denotar periodicidad,

$$0_3 a_1 a_2 a_3 \dots a_n \overline{b_1 b_2 b_3 \dots b_k} = 0_3 a_1 a_2 a_3 \dots a_n b_1 b_2 b_3 \dots b_k b_1 b_2 b_3 \dots b_k \dots$$

donde la secuencia $b_1 b_2 b_3 \dots b_k$ se repite indefinidamente.

Todo $t \in [0, 1]$ con representación finita, admite las siguientes representaciones equivalentes:

$$0_3 t_1 t_2 \dots t_k = 0_3 t_1 t_2 \dots (t_k - 1) \bar{2}, \quad t_k \neq 0. \quad (1.1)$$

En efecto,

$$0_3 t_1 t_2 \dots (t_k - 1) \bar{2} = \sum_{n=1}^k \frac{t_n}{3^n} - \frac{1}{3^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^n}.$$

Para demostrar la equivalencia, basta con verificar que: $\frac{1}{3^k} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$, o equivalentemente: $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$. Calculamos la suma de la serie geométrica y efectivamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 2 \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que ambas representaciones son equivalentes.

Una vez conocidos estos conceptos, presentamos la construcción del conjunto de Cantor y algunas de sus propiedades más importantes:

- Comenzamos considerando el intervalo $E_0 = [0, 1]$.
- Eliminamos primero el tercio medio $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = (0_3 1, 0_3 2)$ quedando un conjunto de 2 intervalos $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ de longitud total $\frac{2}{3}$.
- A continuación, eliminamos los tercios medios de los dos intervalos de E_1 , es decir, $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) = (0_3 01, 0_3 02)$ y $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) = (0_3 21, 0_3 22)$, quedando la unión de 2^2 intervalos $E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. La longitud de E_2 es $(\frac{2}{3})^2$.
- Continuamos eliminando los tercios medios de los intervalos de E_2 , es decir, $(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}) = (0_3 001, 0_3 002)$, $(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}) = (0_3 021, 0_3 022)$, $(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}) = (0_3 201, 0_3 202)$ y $(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}) = (0_3 221, 0_3 222)$ y al conjunto restante formado por 2^3 intervalos lo denotamos por E_3 y tiene longitud $(\frac{2}{3})^3$.
- En general, en el n -ésimo paso, los 2^{n-1} intervalos eliminados son de la forma (a, b) siendo

$$a = 0_3 t_1 t_2 \dots t_{n-1} 1, \quad b = 0_3 t_1 t_2 \dots t_{n-1} 2 \text{ donde } t_j \in \{0, 2\}. \quad (1.2)$$

En efecto, para $n = 0, 1, 2, 3$ se cumple la afirmación anterior, como hemos visto antes. Veamos ahora que si se cumple para un cierto n entonces también se cumple para $n + 1$. Si en el paso n -ésimo hemos quitado un intervalo (a, b) como en (1.2), entonces en el paso $(n+1)$ -ésimo quitamos a su izquierda el intervalo (c, d) , donde

$$c = a - \frac{2}{3^{n+1}} = 0_3 t_1 t_2 \dots t_{n-1} 01, \quad d = a - \frac{1}{3^{n+1}} = 0_3 t_1 t_2 \dots t_{n-1} 02,$$

y a su derecha el intervalo (e, f) , donde

$$e = b + \frac{1}{3^{n+1}} = 0_3 t_1 t_2 \dots t_{n-1} 21, \quad f = b + \frac{2}{3^{n+1}} = 0_3 t_1 t_2 \dots t_{n-1} 22.$$

Notar que los intervalos (c, d) y (e, f) son de la forma (1.2). Luego el resultado queda demostrado por inducción.

Además el conjunto restante es E_n formado por 2^n intervalos cerrados y tiene longitud $(\frac{2}{3})^n$.

Definición. Definimos el conjunto de Cantor C como:

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n.$$

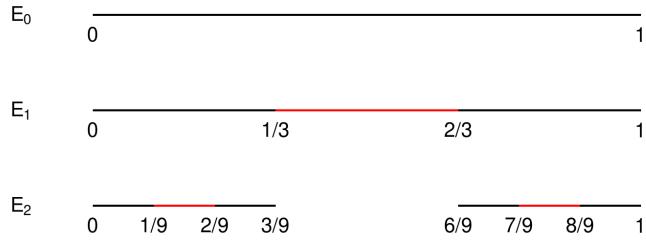


Figura 1.2: Construcción del conjunto de Cantor

Proposición 1.8. *Un número t pertenece al conjunto C si y solo si existe una representación en base 3 de t sin ningún dígito 1, es decir:*

$$C = \{0_3 t_1 t_2 t_3 \dots | t_j \in \{0, 2\}\}$$

Demostración. Sea $t \in [0, 1]$ tal que no tiene ninguna representación en base 3 con solo ceros y doses. Supongamos además que el primer 1 de su representación ocupa la posición n , es decir,

$$t = 0_3 t_1 t_2 t_3 \dots t_{n-1} 1 t_{n+1} t_{n+2} \dots,$$

donde $t_j \in \{0, 2\}$ para $j = 1, \dots, n-1$ y la sucesión $\{t_{n+k}\}$ no es idénticamente nula, pues tendríamos que $t = 0_3 t_1 \dots t_{n-1} 0\bar{2}$, ni idénticamente 2, ya que sería $t = 0_3 t_1 \dots t_{n-1} 2$. Entonces $t \in (0_3 t_1 \dots t_{n-1} 1, 0_3 t_1 \dots t_{n-1} 2)$, que es uno de los intervalos eliminados en el proceso de construcción del conjunto de Cantor (1.2).

Recíprocamente, sea $t \in [0, 1] \setminus C$. Supongamos que hemos eliminado el punto t en el paso n -ésimo; es decir, $t \in E_{n-1} \setminus E_n$. Entonces t está en un intervalo (a, b) como en (1.2) y, por lo tanto,

$$t = 0_3 t_1 t_2 t_3 \dots t_{n-1} 1 t_{n+1} t_{n+2} \dots,$$

donde $t_j \in \{0, 2\}$ para $j = 1, \dots, n-1$. Si todos $t_{n+j} = 0$, entonces $t = a$, y si todos $t_{n+j} = 2$, entonces $t = b$, ambos no pertenecientes a (a, b) . Por lo tanto, al menos uno de los $t_{n+j} \neq 0$ y al menos uno $t_{n+i} \neq 2$. Es decir, t tiene un 1 en la posición n -ésima de su representación en base 3. \square

Proposición 1.9. *El conjunto de Cantor es un compacto no vacío de \mathbb{R} , no numerable, sin puntos aislados y medida nula.*

Demostración. Por construcción, se cumple que $0 \in E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto, $0 \in C$. Luego C es no vacío.

Sabemos que E_n es cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$ por ser la unión de 2^n intervalos cerrados. Como la intersección de conjuntos cerrados es cerrado, tenemos que C es cerrado y como $C \subseteq [0, 1]$, entonces es acotado y por tanto compacto.

Por la Proposición 1.8, existe una biyección entre el conjunto de Cantor C y el conjunto S de sucesiones de ceros y doses. Aplicando el argumento diagonal de Cantor se ve que el conjunto S es no numerable y por tanto, C tampoco es numerable.

El conjunto de Cantor C tiene medida nula ya que $C \subseteq E_n$ y consecuentemente, $m(C) \leq m(E_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$.

Por último, queremos ver que C no tiene puntos aislados, es decir, dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, queremos ver que para todo $t \in C$, existe un $s \in C$ tal que $|t - s| < \varepsilon$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y sea $t \in C$. Tomemos $s \in C$ tal que su representación en base 3 coincide, salvo en el n -ésimo dígito, con la representación de t , es decir,

$$t = 0_3(t_1)(t_2) \dots (t_n)(t_{n+1}) \dots, \quad s = 0_3(t_1)(t_2) \dots (\tau_n)(t_{n+1}) \dots$$

Entonces, $|t_n - \tau_n| = 2$ y $|t - s| = 2/3^n$. Luego basta tomar n suficientemente grande tal que $\frac{2}{3^n} < \varepsilon$ y obtenemos lo que queríamos. \square

Capítulo 2

Ejemplos de curvas que llenan el espacio

En este capítulo nos enfocamos en ejemplos específicos de curvas que llenan el espacio, donde la información ha sido obtenida y adaptada de [2] y [4]. Vamos a utilizar la misma notación que presenta [4]. En este capítulo, los conjuntos que más vamos a utilizar son:

$$I = [0, 1], \quad Q = [0, 1]^2, \quad W = [0, 1]^3$$

Definición. Una curva que llena el espacio es una aplicación continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, de modo que su imagen $f(I)$ es una región de medida positiva.

En la primera sección, introduciremos ciertas propiedades tales que, si una sucesión de funciones continuas del intervalo I al cuadrado Q las satisface, entonces su función límite será una curva continua y sobreyectiva que llena Q , además de poseer otras propiedades como la no diferenciabilidad en ningún punto. Es importante destacar que esta sección es de elaboración propia, donde hemos abstraído las ideas de los ejemplos para desarrollar nuestro análisis.

Entre los ejemplos que se presentan, se encuentran las curvas de Hilbert y de Peano, que se presentan como ejemplos clásicos de curvas que llenan el espacio, siguiendo un proceso recursivo. Además, se ofrece una representación aritmética y compleja de estas curvas para calcular explícitamente la imagen de cualquier punto en el intervalo. Como aporte personal, propondremos una nueva versión de una curva que llena el espacio, utilizando un proceso recursivo similar.

También presentaremos la curva de Lebesgue, pero en lugar de seguir el enfoque geométrico empleado anteriormente, la definiremos como la extensión continua al intervalo I de una aplicación continua y sobreyectiva concreta, la cual estará definida sobre el conjunto de Cantor. Demostraremos que es una curva que llena el espacio y que es diferenciable en casi todo punto.

2.1. Caso general

En esta sección vamos a presentar ciertas propiedades tal que si una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones continuas $f_n : I \rightarrow Q$ las cumple, su función límite será una curva que llene el cuadrado unidad Q . Previamente, fijemos la notación que vamos a utilizar a lo largo de la sección:

Consideremos un entero $k \geq 2$ fijo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, subdividimos el intervalo I en k^{2n} subintervalos $I_r^n = [\frac{r-1}{k^{2n}}, \frac{r}{k^{2n}}]$, $r \in \{1, \dots, k^{2n}\}$. Análogamente subdividimos el cuadrado Q en k^{2n} cuadrados más pequeños $C_{ij}^n = [\frac{i-1}{k^n}, \frac{i}{k^n}] \times [\frac{j-1}{k^n}, \frac{j}{k^n}]$ con centros $p_{ij}^n = \left(\frac{i-1/2}{k^n}, \frac{j-1/2}{k^n}\right)$, para $i, j \in \{1, \dots, k^n\}$. Al conjunto de subintervalos lo denotamos $\mathcal{I}^n := \{I_r^n : r \in \{1, \dots, k^{2n}\}\}$, al conjunto de subcuadrados $\mathcal{C}^n := \{C_{ij}^n : i, j \in \{1, \dots, k^n\}\}$ y al conjunto de centros $\mathcal{P}^n := \{p_{ij}^n : i, j \in \{1, \dots, k^n\}\}$.

Proposición 2.1. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

- (a) $\bigcup_{i,j} C_{ij}^n = Q$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) $\text{diam}(C_{ij}^n) = \frac{\sqrt{2}}{k^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $i, j \in \{1, \dots, k^n\}$.

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas $f_n : I \rightarrow Q$ cumpliendo las siguientes condiciones:

- (I) $\mathcal{P}^n \subseteq f_n(I)$, es decir, la imagen de f_n contiene todos los centros $p_{ij}^n \in \mathcal{P}^n$.
- (II) Dado $r \in \{1, \dots, k^{2n}\}$, para algún cuadrado $C_r^n \in \mathcal{C}^n$ tenemos que $f_m(I_r^n) \subseteq C_r^n$ para todo $m \geq n$.

Lema 2.2. Si $I_r^n, I_s^n \in \mathcal{J}^n$ son distintos, entonces $C_r^n \neq C_s^n$.

Demostración. Supongamos que $C_r^n = C_s^n$. Por la Propiedad (II) y el principio del palomar, habrá algún subcuadrado por cuyo centro no pase f_n . Pero por la Propiedad (I), f_n debe pasar por todos los p_{ij}^n llegando a una contradicción. \square

Proposición 2.3. Para $n, m \in \mathbb{N}$, se cumple $\sup_{x \in [0,1]} \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \sqrt{2} \cdot k^{-\min(n,m)}$.

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $m \geq n$ y sea $x \in I$. Entonces $x \in I_r^n$ para algún $r \in \{1, \dots, k^{2n}\}$ y por lo tanto, $f_m(x), f_n(x) \in C_r^n$ por la Propiedad (II). Luego por la Proposición 2.1 (b), $\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \sqrt{2} \cdot k^{-n} = \sqrt{2} \cdot k^{-\min(n,m)}$. Como $x \in I$ es arbitrario, se cumple $\sup_{x \in I} \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \sqrt{2} \cdot k^{-\min(n,m)}$. \square

Corolario 2.4. La sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente convergente.

Demostración. Por la Proposición 2.3 la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy y por el Teorema 1.4 converge uniformemente. \square

Como la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente convergente y Q es cerrado, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in Q$ para todo $x \in I$, y podemos definir la función límite $f : I \rightarrow Q$ dada por $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Nuestro objetivo es demostrar que f es una curva que rellena el espacio y para ello basta ver que es continua y sobreyectiva.

Teorema 2.5. La función f es continua y sobreyectiva.

Demostración. La función f es continua por el Teorema 1.3. Para ver la sobreyectividad, fijemos un punto (x_0, y_0) del cuadrado Q . Como $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente convergente a f , podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\|f(x) - f_n(x)\| < \sqrt{2} \cdot k^{-n}$ para todo $x \in I$. Por otra parte, $(x_0, y_0) \in C_r^n$ para cierto $r \in \{1, \dots, k^{2n}\}$ y por la Proposición 2.1(b), (x_0, y_0) está a una distancia menor que $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot k^{-n}$ del centro p_r^n . Por la Propiedad (I), $p_r^n = f_n(z_n)$ para cierto $z_n \in I$. Aplicando la desigualdad triangular:

$$\|f(z_n) - (x_0, y_0)\| \leq \|f(z_n) - f_n(z_n)\| + \|f_n(z_n) - (x_0, y_0)\| \leq \sqrt{2} \cdot k^{-n} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot k^{-n} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot k^{-n}.$$

Así, $(x_0, y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$, es decir, nos podemos aproximar a (x_0, y_0) tanto como deseemos por puntos de la imagen de f . Por tanto, deducimos que $(x_0, y_0) \in \overline{f(I)}$. Por otra parte, I es compacto y f continua, entonces $f(I)$ es compacto y, por tanto, cerrado. Como la clausura de un conjunto cerrado es el mismo conjunto,

$$(x_0, y_0) \in \overline{f(I)} = f(I).$$

Con esto, concluimos que f es sobreyectiva. \square

Corolario 2.6. La función f es una curva que rellena el espacio.

Teorema 2.7 (Netto 1878). Una función continua y sobreyectiva $F : I \rightarrow Q$ no puede ser inyectiva.

Demostración. Supongamos que F es inyectiva y sea $g := F^{-1} : Q \rightarrow I$. Dado $C \subseteq I$ un subconjunto cerrado, está también acotado, por lo que es compacto. Como toda función continua envía conjuntos compactos a conjuntos compactos y todo conjunto compacto en Q es, en particular, cerrado, tenemos que $g^{-1}(C) = F(C)$ es cerrado. Tomando complementarios, concluimos que la antiimagen g^{-1} de abiertos es abierto y por tanto, $g = F^{-1}$ es continua. Luego F es un homomorfismo.

La conexión se preserva mediante el homomorfismo F . Eliminamos un punto x del intervalo abierto $(0, 1)$ y su imagen $F(x)$ de Q . El conjunto $Q \setminus \{F(x)\}$ aún es conexo pero $I \setminus \{x\} = [0, x] \cup (x, 1]$ no lo es. Es decir, la función continua F^{-1} envía un conjunto conexo a un conjunto disconexo. Esto es una contradicción y por lo tanto se sigue que F no puede ser inyectiva. \square

Corolario 2.8. La función f no es inyectiva.

Hemos visto que la función f definida anteriormente es continua en todo punto. Además, podemos demostrar que no es diferenciable en ningún punto, aunque primero necesitamos considerar un par de resultados adicionales.

Lema 2.9. Sea $F : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable en $t \in I$. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I \setminus \{t\}$, tal que $a_n \rightarrow t$. Entonces la sucesión

$$\left\{ \frac{\|F(t) - F(a_n)\|}{|t - a_n|} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

es convergente.

Demostración. Sea $F = (F_1, F_2)$ con $F_i : I \rightarrow \mathbb{R}$. F_1 y F_2 son derivables en t por ser F diferenciable en t . Por lo tanto, es inmediato,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|F(t) - F(a_n)\|}{|t - a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{F_1(t) - F_1(a_n)}{t - a_n}, \frac{F_2(t) - F_2(a_n)}{t - a_n} \right) \right\| = \|(F'_1(t), F'_2(t))\| \in \mathbb{R}.$$

□

Lema 2.10. La función $f : I \rightarrow Q$ cumple $f(I_r^n) = C_r^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $r \in \{1, \dots, k^{2n}\}$.

Demostración. Sea $r \in \{1, \dots, k^{2n}\}$ y fijemos $x \in I_r^n$. Por la Propiedad (II), $f_m(x) \in C_r^n$ para todo $m \geq n$, y $f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) \in C_r^n$ por ser C_r^n cerrado. Como x es arbitrario, $f(I_r^n) \subseteq C_r^n$. Además, como f es sobreyectiva y se cumple $\text{Int}(C_r^n) \cap C_s^n = \emptyset$ para todo $r \neq s$, entonces $f^{-1}(\text{Int}(C_r^n)) \subseteq I_r^n$. Por lo tanto,

$$\text{Int}(C_r^n) \subseteq f(I_r^n) \subseteq C_r^n.$$

Por último, $f(I_r^n)$ es compacto, y por ende cerrado. De aquí se deduce que $f(I_r^n) = C_r^n$. □

Teorema 2.11. La función $f : I \rightarrow Q$ no es diferenciable en ningún punto.

Demostración. Sea $t \in [0, 1]$ y sea n_0 tal que $\frac{k^{2n_0}-1}{k^{2n_0}} = 1 - \frac{1}{k^{2n_0}} > t$. Dado $n > n_0$, tomemos $j \in \{1, \dots, k^{2n}\}$ tal que $t \in \left[\frac{j-1}{k^{2n}}, \frac{j}{k^{2n}} \right)$. Por la elección de n_0 , se debe cumplir $j \leq k^{2n} - 1$ y así $\left[\frac{j}{k^{2n}}, \frac{j+1}{k^{2n}} \right] \subseteq [0, 1]$. Además, por el Lema 2.2 es inmediato que $C_j^n = f(I_j^n)$ y $C_{j+1}^n = f(I_{j+1}^n)$ son cuadrados distintos y de lado $\frac{1}{k^n}$. Por el Lema 2.10, existe un punto $s_n \in I_{j+1}^n$ tal que, $f(s_n) = p_{j+1}$ es centro de C_{j+1}^n . Luego

$$\|f(t) - f(s_n)\| \geq \frac{1}{2k^n} \quad y \quad |t - s_n| \leq 2 \cdot \frac{1}{k^{2n}}$$

pues $t, s_n \in \left[\frac{j-1}{k^{2n}}, \frac{j+1}{k^{2n}} \right]$. Por tanto, el cociente incremental $\frac{\|f(t) - f(s_n)\|}{|t - s_n|} \geq \frac{k^n}{4} \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$. Esto prueba que $\lim_{s \rightarrow t} \frac{\|f(t) - f(s)\|}{|t - s|} = \infty$ y, por tanto, que f no es diferenciable en t .

Consideremos ahora el caso $t = 1$. En este caso, $t \in \left(\frac{k^{2n}-1}{k^{2n}}, 1 \right], \left[\frac{k^{2n}-2}{k^{2n}}, \frac{k^{2n}-1}{k^{2n}} \right] \subseteq [0, 1]$ y tanto $C_{k^{2n}-1}^n = f(I_{k^{2n}-1}^n)$, como $C_{k^{2n}}^n = f(I_{k^{2n}}^n)$ son cuadrados distintos de lado $\frac{1}{k^n}$. Igual que antes, existe un punto $s_n \in \left[\frac{k^{2n}-2}{k^{2n}}, \frac{k^{2n}-1}{k^{2n}} \right]$ tal que

$$\|f(t) - f(s_n)\| \geq \frac{1}{2k^n} \quad y \quad |t - s_n| \leq 2 \cdot \frac{1}{k^{2n}}$$

y ya todo es análogo al caso anterior. □

2.2. Curva de Hilbert

La curva de Hilbert fue presentada en 1891 por el matemático David Hilbert como una curva fractal (lo que significa que se puede describir mediante un proceso recursivo que repite una forma básica a diferentes escalas y en diferentes posiciones) continua que cubre el plano, donde cada una de las curvas que aproximan a la curva final es simple, es decir, no se interseca a sí misma.

2.2.1. Construcción de la curva de Hilbert

La construcción y definición de la curva de Hilbert como una curva que llena el espacio se basa en el siguiente procedimiento recursivo:

1. En la primera iteración, dividimos el intervalo unidad I en cuatro subintervalos iguales:

$$I_1 = [0, 1/4], \quad I_2 = [1/4, 1/2], \quad I_3 = [1/2, 3/4], \quad I_4 = [3/4, 1]$$

y el cuadrado unidad Q en cuatro subcuadrados: subcuadrado inferior izquierdo Q_1 , subcuadrado superior izquierdo Q_2 , subcuadrado superior derecho Q_3 y subcuadrado inferior derecho Q_4 , cada uno con una longitud lateral de $1/2$ y con centros en $(1/4, 1/4)$, $(1/4, 3/4)$, $(3/4, 3/4)$ y $(3/4, 1/4)$, respectivamente. A continuación, asignamos cada subintervalo I_j al subcuadrado Q_j y unimos los centros. (Ver Figura 2.1)

2. En la segunda iteración, dividimos cada subintervalo de I del paso anterior en cuatro subintervalos de igual longitud, $1/16$, que denotamos I_{kj} con $k, j = 1, 2, 3, 4$,

$$I_{kj} = \left[\frac{k-1}{4} + \frac{j-1}{16}, \frac{k-1}{4} + \frac{j}{16} \right],$$

y dividimos cada subcuadrado Q_k en cuatro subcuadrados Q_{kj} , cada uno con una longitud lateral de $1/4$. Luego establecemos una correspondencia entre ellos $I_{kj} \leftrightarrow Q_{kj}$ de modo que subintervalos consecutivos se asignan a subcuadrados adyacentes (comparten uno de los lados). (Ver Figura 2.1).

Hilbert demostró que este proceso puede repetirse tantas veces como se desee, de modo que en cada paso de la construcción se cumpla que:

- Subintervalos adyacentes se asignen a subcuadrados adyacentes.
- Se mantiene la relación de inclusión, es decir, si un intervalo se asigna a un cuadrado, cada uno de sus subintervalos se asigna a un subcuadrado contenido en el cuadrado inicial.

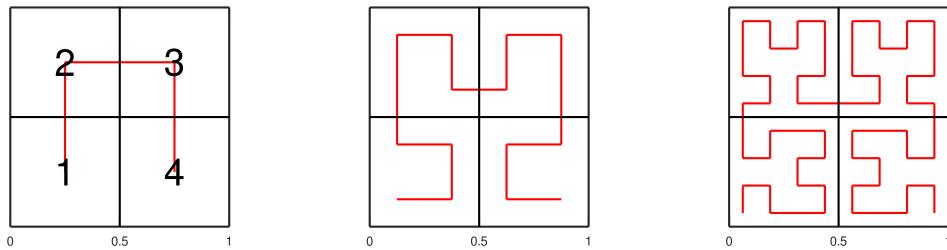


Figura 2.1: Primera, segunda y tercera iteración f_1, f_2, f_3 de la sucesión que define la curva de Hilbert.

Este proceso continúa indefinidamente hasta que el área de cada subdivisión tiende a cero y la curva tiende a ocupar toda la superficie del cuadrado. Este procedimiento permite la siguiente definición geométrica:

Definición. Cada $t \in I$ está determinado de forma única por una secuencia de intervalos cerrados anidados (que se generan mediante nuestra partición sucesiva), cuyas longitudes tienden a 0. A esta secuencia le corresponde una única secuencia de cuadrados cerrados anidados, cuyas diagonales se contraen a un punto, que definen un único punto en Q , la imagen $f_h(t)$ de t . Llamamos curva de Hilbert a $f_h(I)$.

Llegados a este punto, podemos utilizar los resultados de la primera sección. En efecto, estamos en el caso particular $k = 2$ y por construcción, se cumplen las Propiedades (I), (II). Por lo tanto, el siguiente resultado se sigue de los Teoremas 2.5, 2.11 y el Corolario 2.8 .

Teorema 2.12. *La curva de Hilbert es continua, sobreyectiva, no inyectiva y no diferenciable en ningún punto.*

Corolario 2.13. *La curva de Hilbert es una curva que llena el espacio.*

2.2.2. Representación compleja y aritmética de la curva de Hilbert

La definición geométrica de la curva de Hilbert nos ha permitido considerar todas las propiedades de la curva, pero no nos proporciona un método explícito para calcular la imagen de cualquier $t \in I$. Para calcular dicha imagen, es necesario formalizar este proceso en términos de transformaciones en el plano complejo. Además, hacer esto nos permitirá crear figuras como la Figura 2.1. La razón por la que podemos describir el proceso presentado en el plano complejo, es debido a la correspondencia que existe entre Q y $[0, 1] \times [0, i]$.

Para obtener la configuración de la Figura 2.1(b), tenemos que someter a Q en la Figura 2.1(a) a las siguientes transformaciones: Dado $z \in \mathbb{C}$, primero reducimos $\frac{1}{2}$ el cuadrado Q uniformemente hacia el origen: $z' = \frac{1}{2}z$, seguido de una rotación de 90° : $z'' = iz'$, y finalmente, reflejamos en el eje imaginario: $z''' = -\bar{z}''$. Combinando estas tres transformaciones y denotando δ_0 a la transformación resultante, obtenemos

$$\delta_0 z = \frac{1}{2}\bar{z}i.$$

Esto nos da el cuadrado 1 de la segunda iteración. Para obtener el cuadrado 2 de la tercera iteración, reducimos Q como antes, y después lo desplazamos $\frac{1}{2}$ unidades hacia arriba. Esto produce la transformación

$$\delta_1 z = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}.$$

El siguiente cuadrado 3 se obtiene reduciendo $\frac{1}{2} Q$ y desplazándolo $\frac{1}{2}$ unidades hacia arriba y $\frac{1}{2}$ unidades a la derecha

$$\delta_2 z = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}.$$

Por último, obtenemos el cuadrado 4 reduciendo Q , seguido de una rotación de -90° (o $z' = -iz$), una reflexión en el eje imaginario $z'' = -\bar{z}'$, y finalmente, desplazándolo 1 unidad a la derecha y $\frac{1}{2}$ unidad hacia arriba para obtener

$$\delta_3 z = -\frac{1}{2}\bar{z} + 1 + \frac{i}{2}.$$

La aplicación de estas cuatro transformaciones a la Figura 2.1(a) nos proporciona la Figura 2.1(b). Análogamente, si las aplicamos a la 2.1(b), obtenemos la 2.1(c), etc.

Veamos la forma de calcular la imagen de cualquier punto $t \in I$. Para ello, sea un punto $t \in I$ representado en base 4, es decir, de la siguiente manera:

$$t = 0_4 q_1 q_2 q_3 \dots, \quad \text{donde } q_j \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

El punto t se encuentra en el subintervalo $(q_1 + 1)$ -ésimo de la primera partición de I en cuatro subintervalos (el intervalo $[q_1/4, (q_1 + 1)/4]$). Por lo tanto, su imagen se encuentra en el cuadrado $(q_1 + 1)$ -ésimo de la primera partición de Q en cuatro subcuadrados, es decir, $f_h(t) \in \delta_{q_1} Q$.

El primer y segundo dígito $q_1 q_2$ nos indica el subcuadrado de la iteración 2 al que pertenece $f_h(t)$. Se encontrará en el subcuadrado $(q_2 + 1)$ -ésimo de la segunda partición dentro del subcuadrado $(q_1 + 1)$ -ésimo $\delta_{q_1} Q$ de la primera partición, es decir, $f_h(t) \in \delta_{q_1} \delta_{q_2} Q$. Continuamos este razonamiento indefinidamente y llegamos al siguiente resultado:

Proposición 2.14. Si $t = 0_4q_1q_2q_3\dots$, entonces

$$f_h(t) = \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{q_1} \delta_{q_2} \delta_{q_3} \dots \delta_{q_n} Q,$$

donde el símbolo de inclusión \in ha sido reemplazado por el signo igual, ya que los subcuadrados se reducen a puntos.

Con esto podemos obtener una forma sencilla para calcular la imagen de los números con representación en base 4 finita.

Proposición 2.15. Si $t = 0_4q_1q_2q_3\dots q_n$ entonces,

$$f_h(t) = \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \delta_{q_1} \delta_{q_2} \delta_{q_3} \dots \delta_{q_n} (0).$$

Demostración. Notar que $t = 0_4q_1q_2q_3\dots q_n = 0_4q_1q_2q_3\dots q_n 000\dots$ Entonces por la Proposición 2.14,

$$f_h(t) = \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \delta_{q_1} \delta_{q_2} \delta_{q_3} \dots \delta_{q_n} \delta_0 \delta_0 \delta_0 \dots Q.$$

Como $\delta_0 \delta_0 \dots z = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_0^n z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \begin{cases} i\bar{z} & \text{si } n \text{ es impar} \\ z & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} = 0$,

y por lo tanto, $f_h(t) = \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \delta_{q_1} \delta_{q_2} \delta_{q_3} \dots \delta_{q_n} (0)$. \square

Ejemplo. Calculemos el valor de $f_h(7/16)$ y $f_h(11/16)$. Por la Proposición 2.15,

$$f_h(7/16) = f_h(0_431) = \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \delta_3 \delta_1 (0) = \delta_3(i/2) = i/4 + 1 + i/2 = 1 + 3i/4.$$

$$f_h(11/16) = f_h(0_423) = \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \delta_2 \delta_3 (0) = \delta_2(1 + i/2) = 1 + 3i/4.$$

Dado que ambos puntos tienen la misma imagen, se deduce que f_h no es inyectiva, como ya sabíamos anteriormente.

2.2.3. Generalización a 3 dimensiones.

La construcción de la curva de Hilbert en 3D es muy similar a su contraparte bidimensional; sin embargo, en lugar de dividir el intervalo unidad I en 2^{2n} subintervalos congruentes, lo dividimos en 2^{3n} intervalos más pequeños, y junto con esto dividimos el cubo W en 2^{3n} subcubos congruentes. La construcción se realiza de la siguiente manera:

1. Primero, dividimos el intervalo unidad I en $2^3 = 8$ subintervalos de igual longitud: $I_j = [\frac{k-1}{8}, \frac{k}{8}]$ donde $j \in \{1, 2, \dots, 8\}$ y el cubo unidad W en 8 subcubos, W_j con $j = 1, \dots, 8$, de longitud lateral $1/2$. Luego asignamos de forma continua cada subintervalo I_j al subcubo correspondiente W_j .
2. Repetimos este mismo proceso para cada subintervalo I_j de manera que se siga preservando la relación de inclusión, es decir, si un intervalo se corresponde con un cubo, cada uno de sus subintervalos se corresponde con un subcubo contenido en el cubo al que pertenecía el intervalo inicial.

Este procedimiento cumple con los criterios necesarios para definir una curva de relleno de espacio: los subintervalos adyacentes se asignan a subcubos adyacentes que comparten una cara, y cada asignación conserva la anterior. Para obtener una representación aritmético-analítica de esta curva, se sigue un método similar al utilizado en el caso bidimensional, como se describe en [4]. La figura siguiente muestra esta disposición para las primeras 3 iteraciones.

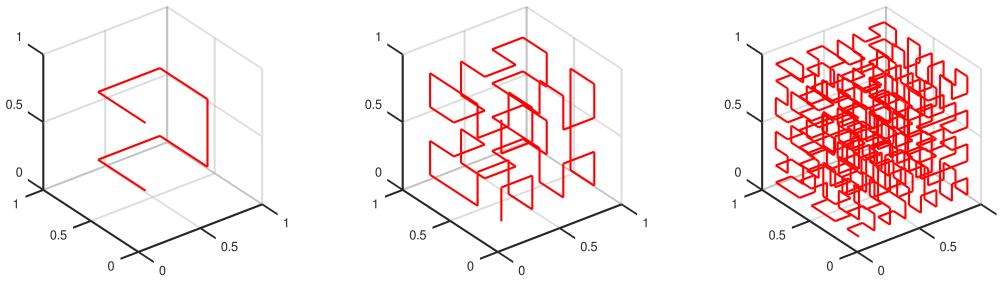


Figura 2.2: Primera, segunda y tercera iteración f_1, f_2, f_3 de la sucesión que define la curva de Hilbert tridimensional.

2.3. Curva de Peano

En 1890, el matemático Giuseppe Peano presentó la primera curva que rellena el espacio $f_p : I \rightarrow Q$ usando el operador

$$k(t_j) = 2 - t_j \quad (t_j = 0, 1, 2)$$

de la siguiente manera:

$$f_p(0_3 t_1 t_2 t_3 t_4 \dots) = (0_3 t_1(k^{t_2} t_3)(k^{t_2+t_4} t_5) \dots, 0_3(k^{t_1} t_2)(k^{t_1+t_3} t_4) \dots) \quad (2.1)$$

Donde k^v es la v -ésima iteración de k , es decir, k compuesta consigo misma v veces. Notar que $k^{2n} = id$ y que $k^{2n-1} = k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.3.1. Construcción geométrica de la curva de Peano

En este apartado vamos a definir la curva de Peano siguiendo el mismo tipo de construcción que dimos para la curva de Hilbert, como el límite de una construcción recursiva de iteraciones. Veamos su construcción:

1. Primero, dividimos el intervalo unidad I en nueve subintervalos de igual longitud I_1, \dots, I_9 y dividimos el cuadrado unidad Q en nueve subcuadrados iguales, cada uno con una longitud lateral de $1/3$, Q_1, \dots, Q_9 . Asignamos cada I_k con Q_k para $k = 1, \dots, 9$, de forma que los subintervalos adyacentes se transformen en subcuadrados adyacentes. Ver Figura 2.3.
2. Luego, aplicamos sucesivamente el mismo procedimiento a cada subintervalo, de modo que se obtienen otras nueve subdivisiones por cada subdivisión anterior. Además, se debe preservar la relación de inclusión, es decir, si un intervalo se asigna a un cuadrado, cada uno de sus subintervalos se asigna a un subcuadrado del cuadrado anterior.

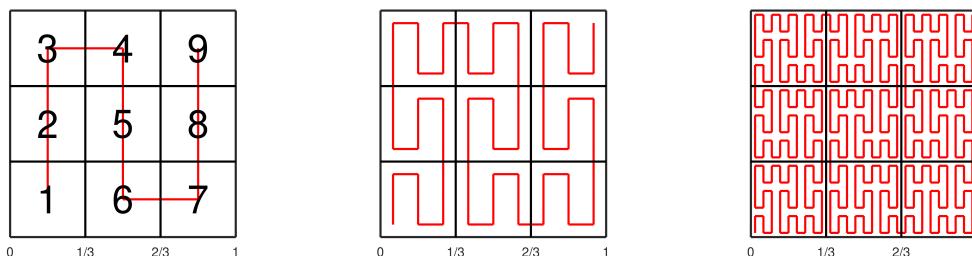


Figura 2.3: Primera, segunda y tercera iteración f_1, f_2, f_3 de la sucesión que define la curva de Peano.

Este proceso continúa indefinidamente hasta que el área de cada subdivisión tiende a cero y la curva tiende a ocupar toda la superficie del cuadrado, dando lugar a la curva de Peano $f_p : I \rightarrow Q$. La demostración de que la función presentada por Peano es igual a la obtenida por la recursión anterior se puede encontrar en [4].

Análogamente al caso de la curva de Hilbert, podemos utilizar los resultados de la primera sección. En efecto, estamos en el caso particular $k = 3$ y por construcción, se cumplen las Propiedades (I), (II). Por lo tanto, el siguiente resultado se sigue de los Teoremas 2.5, 2.11 y el Corolario 2.8 .

Teorema 2.16. *La curva de Peano es continua, sobreyectiva, no inyectiva y no diferenciable en ningún punto.*

Corolario 2.17. *La curva de Peano es una curva que rellena el espacio.*

2.3.2. Representación compleja y aritmética de la curva de Peano

Siguiendo el esquema del caso de Hilbert, vamos a proporcionar un método explícito para calcular la imagen de cualquier $t \in I$. Para ello, formalizamos este proceso en términos de transformaciones en el plano complejo. Para obtener la configuración de la Figura 2.3(b), tenemos que someter a Q en la Figura 2.3(a) a las siguientes transformaciones:

Dado $z \in \mathbb{C}$, primero reducimos $\frac{1}{3}$ el cuadrado Q uniformemente hacia el origen y lo trasladamos a los subcuadrados 1,3, 7 y 9

$$\phi_0 z = \frac{1}{3}z, \quad \phi_2 z = \frac{1}{3}z + \frac{2i}{3}, \quad \phi_6 z = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}, \quad \phi_8 z = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} + \frac{2i}{3}.$$

El subcuadrado 5, se obtiene reduciendo $\frac{1}{3}$ el cuadrado Q , seguido de un cambio de sentido y desplazándolo $\frac{2}{3}$ unidades hacia arriba y hacia la derecha

$$\phi_4 z = -\frac{1}{3}z + \frac{2}{3} + \frac{2i}{3}.$$

Para los cuadrados 4 y 6, reducimos Q , aplicamos una reflexión en el eje real y hacemos la correspondiente traslación

$$\phi_3 z = -\frac{1}{3}z + i + \frac{1}{3}, \quad \phi_5 z = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} + \frac{i}{3}.$$

Por último, Para los cuadrados 2 y 8, reducimos Q , aplicamos una reflexión en el eje vertical y hacemos la correspondiente traslación

$$\phi_1 z = -\frac{1}{3}\bar{z} + \frac{1}{3} + \frac{i}{3}, \quad \phi_7 z = -\frac{1}{3}z + 1 + \frac{i}{3}.$$

La aplicación de estas cuatro transformaciones a la Figura 2.3(a) nos proporciona la Figura 2.3(b). Análogamente, si las aplicamos a la 2.3(b), obtenemos la 2.3(c), etc.

Veamos la forma de calcular la imagen de cualquier punto $t \in I$. Para ello, sea un punto $t \in I$ representado en base 9, es decir, de la siguiente manera:

$$t = 0_9 q_1 q_2 q_3 \dots, \quad \text{donde } q_j \in \{0, \dots, 8\}.$$

El punto t se encuentra en el subintervalo $(q_1 + 1)$ -ésimo de la primera partición de I en cuatro subintervalos (el intervalo $[q_1/9, (q_1 + 1)/9]$). Por lo tanto, su imagen se encuentra en el cuadrado $(q_1 + 1)$ -ésimo de la primera partición de Q en cuatro subcuadrados, es decir, $f_p(t) \in \phi_{q_1} Q$. El primer y segundo dígito $q_1 q_2$ nos indica el subcuadrado de la iteración 2 al que pertenece $f_p(t)$. Se encontrará en el subcuadrado $(q_2 + 1)$ -ésimo de la segunda partición dentro del subcuadrado $(q_1 + 1)$ -ésimo $\phi_{q_1} Q$ de la primera partición, es decir, $f_p(t) \in \phi_{q_1} \phi_{q_2} Q$. Repitiendo este razonamiento indefinidamente se llega a

$$f_p(t) = \begin{pmatrix} \text{Re} \\ \text{Im} \end{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{q_1} \phi_{q_2} \phi_{q_3} \dots \phi_{q_n} Q,$$

donde el símbolo de inclusión \in ha sido reemplazado por el signo igual, ya que los subcuadrados se reducen a puntos.

Teniendo que cuenta que, $t = 0_3 q_1 q_2 q_3 \dots q_{2n-1} q_{2n} \dots = 0_9 (3q_1 + q_2)(3q_3 + q_4) \dots (3q_{2n-1} + q_{2n}) \dots$, se llega al siguiente resultado:

Proposición 2.18. Si $t = 0_3 q_1 q_2 q_3 \dots$, entonces

$$f_p(t) = \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{3q_1+q_2} \phi_{3q_3+q_4} \phi_{3q_5+q_6} \dots \phi_{3q_{2n-1}+q_{2n}} Q. \quad (2.2)$$

Con esto podemos obtener una forma sencilla para calcular la imagen de los números con representación en base 3 finita.

Proposición 2.19. Si $t = 0_3 q_1 q_2 q_3 \dots q_n$ entonces,

$$f_p(t) = \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \phi_{3q_1+q_2} \phi_{3q_3+q_4} \phi_{3q_5+q_6} \dots \phi_{3q_{2n-1}+q_{2n}}(0). \quad (2.3)$$

Demostración. Notar que $t = 0_3 q_1 q_2 q_3 \dots q_n = 0_3 q_1 q_2 q_3 \dots q_{2n} 000 \dots$. Entonces por la Proposición 2.18,

$$\begin{aligned} f_p(0_3 q_1 q_2 \dots q_{2n-1} q_{2n}) &= \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \phi_{3q_1+q_2} \phi_{3q_3+q_4} \phi_{3q_5+q_6} \dots \phi_{3q_{2n-1}+q_{2n}} \phi_0 \phi_0 \phi_0 \dots Q \\ &= \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \phi_{3q_1+q_2} \phi_{3q_3+q_4} \phi_{3q_5+q_6} \dots \phi_{3q_{2n-1}+q_{2n}}(0). \end{aligned}$$

□

Ejemplo. Calculemos $f_p(\frac{1}{9}), f_p(\frac{5}{9})$ usando (2.3):

$$f_p\left(\frac{1}{9}\right) = f_p\left(\frac{1}{3^2}\right) = f_p(0_3 010 \dots) = \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \phi_{3 \cdot 0+1} \phi_0 \phi_0 \dots Q = \phi_1(0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i,$$

$$f_p\left(\frac{5}{9}\right) = f_p\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}\right) = f_p(0_3 120 \dots) = \begin{pmatrix} Re \\ Im \end{pmatrix} \phi_{3 \cdot 1+2} \phi_0 \phi_0 \dots Q = \phi_5(0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i,$$

lo que demuestra que la curva de Peano no es inyectiva, como ya sabíamos.

2.4. Aporte personal

El proceso ideado por Hilbert basado en subdividir tanto I como Q en k^{2n} duplicados iguales, $n = 1, 2, 3, \dots$ de modo que subintervalos adyacentes van a subcuadrados adyacentes y cumpliendo que si un cuadrado corresponde a algún intervalo entonces sus subcuadrados corresponden a subintervalos de ese intervalo, nos permite crear una infinidad de curvas que llenan en plano.

Como aporte personal al capítulo creamos nuestra propia curva que llena el espacio aplicando el mismo argumento recursivo de los casos anteriores. A continuación, mostramos las primeras 3 iteraciones de la construcción de nuestra curva que llenará el espacio:

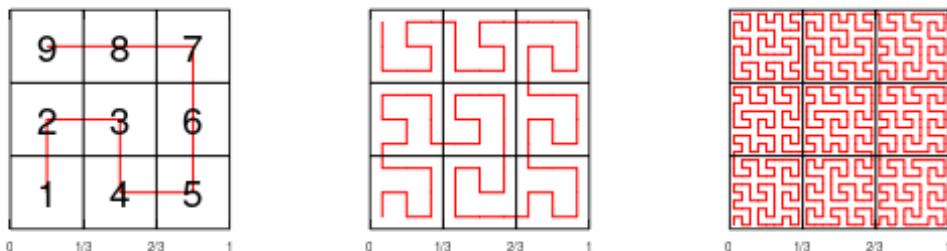


Figura 2.4: Primera, segunda y tercera iteración f_1, f_2, f_3 de la sucesión que define nuestra nueva curva.

2.5. Curva de Lebesgue

En esta sección, presentamos la curva de Lebesgue (1904) y sus propiedades. En lugar de usar un enfoque geométrico como en los casos anteriores, utilizaremos los conceptos del conjunto de Cantor discutidos en el primer capítulo.

Definición. Sea C el conjunto de Cantor. Definimos la aplicación $l : C \rightarrow [0, 1]^2$ dada por:

$$l(0_3(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots) = (0_2t_1t_3t_5\dots, 0_2t_2t_4t_6\dots) \quad (2.4)$$

donde $t_i \in \{0, 1\}$.

Teorema 2.20. *La aplicación l es continua y sobreyectiva.*

Demostración. Empecemos viendo la sobreyectividad. Sea $p \in [0, 1]^2$ y sea su representación en base 2, $p = (0_2a_1a_2a_3\dots, 0_2b_1b_2b_3\dots)$. Tomando $t = 0_3(2a_1)(2b_1)(2a_2)(2b_2)(2a_3)(2b_3)\dots$, es inmediato que $l(t) = p$. A continuación veremos que, dado $n \in \mathbb{N}$, si $|t - t_0| < \frac{1}{3^{2n}}$ entonces $\|l(t) - l(t_0)\| \leq \frac{\sqrt{2}}{2^n}$. Como consecuencia obtendremos la continuidad de l . Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y sean $t, t_0 \in C$, tales que $|t - t_0| < \frac{1}{3^{2n}}$. Notemos que entonces las primeras $2n$ cifras de sus representaciones en base 3 coinciden:

$$t_0 = 0_3(2t_1)(2t_2)\dots(2t_{2n})(2t_{2n+1})\dots, \quad t = 0_3(2t_1)(2t_2)\dots(2t_{2n})(2\tau_{2n+1})\dots$$

En efecto, sea m la primera componente donde difieren t_0 y t . Entonces, $|t_m - \tau_m| = 1$ y

$$t - t_0 = (2\tau_m - 2t_m)/3^m + (2\tau_{m+1} - 2t_{m+1})/3^{m+1} + \dots$$

y, aplicando la desigualdad triangular inversa y sacando factor común,

$$1/3^{2n} > |t - t_0| \geq (2/3^m) - (2/3^{m+1})(1 + 1/3 + 1/9 + \dots) = 2/3^m - 1/3^m = 1/3^m.$$

Luego $m > 2n$. Es decir, t_0 y t coinciden en sus $2n$ primeras componentes, como queríamos probar.

Por lo tanto,

$$l(t) - l(t_0) = \left(\begin{array}{l} (\tau_{2n+1} - t_{2n+1})/2^{n+1} + (\tau_{2n+3} - t_{2n+3})/2^{n+2} + \dots \\ (\tau_{2n+2} - t_{2n+2})/2^{n+1} + (\tau_{2n+4} - t_{2n+4})/2^{n+2} + \dots \end{array} \right)$$

y la continuidad se deduce fácilmente de aquí ya que $\|l(t) - f(t_0)\| \leq \sqrt{2}/2^n$. □

Lebesgue extendió esta función continuamente al intervalo I por interpolación lineal sobre los intervalos eliminados en el conjunto de Cantor. Si denotamos estos intervalos como (a, b) , obtenemos la siguiente definición.

Definición. Definimos la curva de Lebesgue $\tilde{l} : I \rightarrow Q$ como sigue:

$$\tilde{l}(x) = \begin{cases} l(x) & \text{si } x \in C, \\ \frac{1}{b-a} [l(b)(x-a) + l(a)(b-x)] & \text{si } x \in (a, b) \subseteq I \setminus C. \end{cases} \quad (2.5)$$

Esto se puede hacer debido a que Q es un conjunto convexo y, por ello, si dos puntos pertenecen a Q , entonces también pertenece todo el segmento que los une.

Teorema 2.21. *La función \tilde{l} es continua y sobreyectiva, y es diferenciable en casi todo punto de I . En particular, \tilde{l} no es diferenciable en C , pero sí lo es en $I \setminus C$.*

Demostración. Tenemos que demostrar que \tilde{l} es continua en todo punto $t_0 \in I$. Si $t_0 \in C^c = I \setminus C$, \tilde{l} es continua en t_0 por construcción. Si $t_0 \in C$, por la Proposición 1.9, sabemos que t_0 es un punto de acumulación por la derecha, por la izquierda o por ambos lados. Vamos a demostrar solamente el primer caso, ya que la prueba para los casos restantes es análoga. Si t_0 es un punto de acumulación por la derecha (y no por la izquierda), entonces es el extremo derecho de uno de los intervalos que quitamos en la construcción de C . La continuidad por la izquierda es inmediata, ya que estaríamos dentro del intervalo quitado y \tilde{l} restringida a $I \setminus C$ es continua.

Vamos a demostrar que \tilde{l} en t_0 es continua por la derecha. Como l es continua y C es un compacto, l es uniformemente continua. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta_1 > 0$ tal que $|t - t_0| < \delta_1$, implica que $\|l(t) - l(t_0)\| < \varepsilon$ para todo $t, t_0 \in C$. Como t_0 es punto de acumulación por la derecha, existe $t_1 \in C \cap (t_0, t_0 + \delta_1)$. Tomamos entonces $\delta = t_1 - t_0 > 0$. Con esta elección aseguramos que si tomamos un punto en $(t_0, t_0 + \delta)$ que no está en C , entonces está en un intervalo de los que se quitaron y ese intervalo queda seguro contenido en $(t_0, t_0 + \delta)$. Sea pues $t \in (t_0, t_0 + \delta)$:

- Si $t \in C$, entonces $\|\tilde{l}(t) - \tilde{l}(t_0)\| = \|l(t) - l(t_0)\| \leq \varepsilon$.
- Si $t \in I \setminus C$, entonces debe estar en uno de los intervalos quitados pero sabemos que ese intervalo (a, b) con $a, b \in C$, estaría contenido en $(t_0, t_0 + \delta)$ y por ello $|a - t_0| < \delta$ y $|b - t_0| < \delta$. Entonces como $a, b, t_0 \in C$, se cumple $\|l(b) - l(t_0)\| < \varepsilon$ y $\|l(a) - l(t_0)\| < \varepsilon$. Sustituyendo en (2.5) y aplicando la desigualdad triangular,

$$\|\tilde{l}(t) - \tilde{l}(t_0)\| = \frac{1}{b-a} \|(l(b) - l(t_0))(t-a) + (l(a) - l(t_0))(b-t)\| \leq \frac{1}{b-a} (b-t+a-t) \varepsilon = \varepsilon$$

Por tanto, en cualquier caso se tiene $\|\tilde{l}(t) - \tilde{l}(t_0)\| \leq \varepsilon$ obteniendo la continuidad.

Por el Teorema 2.20, la función \tilde{l} restringida a C ya es sobreyectiva, con lo cual, \tilde{l} también es sobreyectiva en I .

Por último, estudiemos la diferenciabilidad de \tilde{l} en I . Por una parte, la función \tilde{l} se define mediante interpolación lineal en los intervalos abiertos disjuntos (a, b) . Luego es diferenciable en $I \setminus C$. Sin embargo, \tilde{l} restringida a C no es diferenciable en ningún punto. En efecto, sea un punto $t \in C$ y una sucesión $\{s_{2n}\} \subseteq C$ tal que

$$t = 0_3(2t_1)(2t_2) \dots (2t_{2n})(2t_{2n+1})(2t_{2n+2}) \dots,$$

$$s_{2n} = 0_3(2t_1)(2t_2) \dots (2t_{2n})(2\tau_{2n+1})(2t_{2n+2}) \dots,$$

donde $\tau_{2n+1} = t_{2n+1} + 1 \pmod{2}$. Entonces $|t - s_{2n}| = 2/3^{2n+1}$.

Si ϕ denota la primera componente de l , tenemos

$$|\phi(t) - \phi(s_{2n})| = |t_{2n+1} - \tau_{2n+1}|/2^{n+1} = 1/2^{n+1}$$

y, por lo tanto,

$$|\phi(t) - \phi(s_{2n})|/|t - s_{2n}| = \frac{3}{4} \left(\frac{9}{2}\right)^n \rightarrow \infty.$$

Luego ϕ no es diferenciable en t . Por ende, \tilde{l} no es diferenciable en ningún punto de C . Como C es un conjunto de medida nula por la Proposición 1.9, \tilde{l} es diferenciable en casi todo punto de I . \square

En este caso, es muy fácil generalizar la definición de la curva de Lebesgue a $[0, 1]^k$ cualquiera. Por ejemplo, para $k = 3$ definimos:

$$l(0_3(2t_1)(2t_2)(2t_3) \dots) = (0_2 t_1 t_4 t_7 \dots, 0_2 t_2 t_5 t_8 \dots, 0_2 t_3 t_5 t_9 \dots)$$

y en general:

Definición. La aplicación $l_k : C \rightarrow [0, 1]^k$ se define de la siguiente manera:

$$l_k(0_3(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots) = \begin{pmatrix} 0_2 t_1 t_{k+1} t_{2k+1} \dots \\ 0_2 t_2 t_{k+2} t_{2k+2} \dots \\ \vdots \\ 0_2 t_k t_{2k} t_{3k} \dots \end{pmatrix}$$

En esta definición, $0_3(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots$ representa la expansión en base 3 de un número en el conjunto de Cantor C , donde cada t_i es un dígito en $\{0, 1\}$.

La j -ésima componente de la curva l_k se obtiene tomando los dígitos de la expansión en base 3 que están en las posiciones congruentes a $j \pmod k$. Específicamente, la j -ésima componente está formada por los dígitos en las posiciones $j, j+k, j+2k, \dots$ de la expansión en base 3 del número en C .

Extender l_k al intervalo I de manera análoga al caso bidimensional permite definir la curva de Lebesgue en el caso general. Las demostraciones de continuidad, sobreyectividad y diferenciabilidad en casi todo punto en este caso son análogas a las del caso bidimensional.

Observación. Existe una forma iterativa de construir la curva de Lebesgue similar a las curvas de Peano y Hilbert. En este caso, en vez de particionar el intervalo I , en cada iteración se envía los intervalos de E_{n+1} sobre los 2^{2n} subcuadrados en los que dividimos Q , $n = 1, 2, 3, \dots$ como se indica en la Figura (2.5):

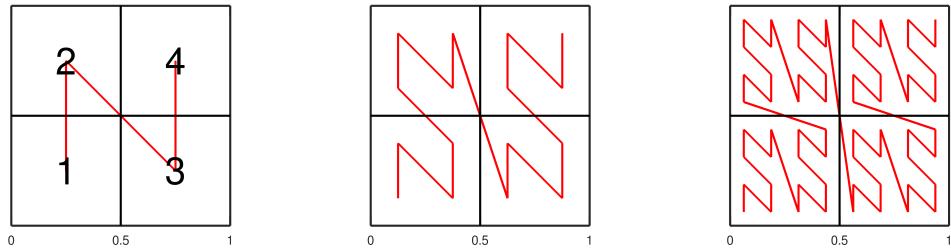


Figura 2.5: Primera, segunda y tercera iteración f_1, f_2, f_3 de la sucesión que define la curva de Lebesgue.

Sin embargo, los resultados de la sección 2.1 no se pueden aplicar a este caso, ya que nuestras funciones f_n tienen su dominio en E_{n+1} , en lugar del intervalo I .

Capítulo 3

Teorema de Hahn-Mazurkiewicz

En este capítulo vamos a ver exactamente qué subconjuntos de \mathbb{R}^n pueden ser imagen de una función continua con dominio I . Esto nos lo da el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz para subconjuntos de \mathbb{R}^n .

Teorema 3.1 (Hahn-Mazurkiewicz, 1928). *Sea un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Existe una curva continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $f(I) = A$ si y solo si A es compacto, conexo y localmente conexo.*

El contenido del capítulo ha sido obtenido y adaptado de [3] y [4].

3.1. Condiciones necesarias

Demostraremos cada implicación del Teorema 3.1 por separado. La implicación más fácil es la de las condiciones necesarias, es decir, que la imagen de una curva que rellena el espacio es compacta, conexa y localmente conexa. Para verlo, nos vamos a apoyar en el Lema 1.7:

Proposición 3.2 (Condiciones necesarias). *La imagen de una aplicación continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es compacta, conexa y localmente conexa.*

Demostración. Llamemos A a la imagen, es decir, $f(I) = A$. Puesto que el intervalo I es compacto y conexo, entonces A es compacto por la Proposición 1.5 y conexo por la Proposición 1.6.

Para ver que A es localmente conexo, basta demostrar que A es débilmente localmente conexo por el Lema 1.7. Supongamos que para $a \in A$ la conexión local débil falla, es decir, existe un entorno abierto U de a tal que para todo entorno abierto $V \subseteq U$ conteniendo a , existe un $x \in V \cap A$, de modo que x y a no están en la misma componente conexa de $U \cap A$. Esto significa que si tomamos $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subseteq U$ y $0 < \eta_n < \varepsilon$ con $\eta_n \rightarrow 0$, existe $a_n \in B(a, \eta_n) \cap A$ de modo que a_n y a no están en la misma componente conexa de $U \cap A$. Notar que la sucesión $\{a_n\}$ converge a a (ya que $d(a_n, a) \leq \eta_n \rightarrow 0$). Como $a_n \in A = f(I)$, existe un elemento x_n con $f(x_n) = a_n$. Por la compacidad de I , existe una subsucesión convergente x_{n_k} con límite $x \in I$. Tenemos que

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a.$$

Como f es continua en x , existe un $\delta > 0$ tal que $|y - x| < \delta$, $y \in I$ implica $\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$. Tomemos $K \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $|x - x_{n_K}| < \delta$. Supongamos que $x_{n_K} < x$ (el caso $x_{n_K} > x$ es análogo), entonces todo $y \in [x_{n_K}, x]$ cumple que $|y - x| \leq |x - x_{n_K}| < \delta$, por lo que $\|f(y) - f(x)\| = \|f(y) - a\| \leq \varepsilon$. Por lo tanto, $f([x_{n_K}, x])$ es un conexo conteniendo a $a_{n_K} = f(x_{n_K})$ y $a = f(x)$ y cumpliendo que $f([x_{n_K}, x]) \subseteq B(a, \varepsilon) \cap A \subseteq U \cap A$. Es decir, a_{n_K} y a pertenecen a la misma componente conexa de $U \cap A$, contradiciendo nuestra suposición sobre a_{n_K} . \square

3.2. Resultados previos. Teorema de Hausdorff

Para la implicación inversa, tendremos que trabajar un poco más. El truco consiste en imitar la construcción de la curva Lebesgue en general, como hemos presentado en el capítulo anterior. Para ello debemos recurrir a un par de lemas y al conocido como Teorema de Hausdorff sobre las imágenes del conjunto de Cantor.

Lema 3.3. *Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto y localmente conexo, entonces es uniformemente débilmente localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que no es uniformemente débilmente localmente conexo. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\eta_i > 0$ satisfaciendo $\eta_i \rightarrow 0$, existe un par de puntos $\{a_i, a'_i\}$ cumpliendo $\|a_i - a'_i\| < \eta_i$ tales que a_i y a'_i están en diferentes componentes conexas de $B(a_i, \varepsilon) \cap B(a'_i, \varepsilon) \cap A$. Debido a la compacidad, podemos suponer que $\{a_i\}$ posee una subsucesión convergente $\{a_{i_k}\}$ con límite $a \in A$ y $\{a'_i\}$ posee una subsucesión convergente $\{a'_{i_k}\}$ con límite $a' \in A$. Como $\|a_{i_k} - a'_{i_k}\| < \eta_{i_k}$ con $\eta_{i_k} \rightarrow 0$, necesariamente $a = a'$. Ahora aplicamos que A es débilmente localmente conexo. Sea $a \in A$ y sea un entorno $B(a, \varepsilon/2)$ de a , entonces existe $\eta > 0$ tal que si $x \in B(a, \eta)$ se tiene que x y a están en la misma componente conexa de $B(a, \varepsilon/2) \cap A$. Tomemos k_0 lo suficientemente grande tal que $a_{i_k}, a'_{i_k} \in B(a, \eta)$ para todo $k > k_0$. Entonces, a_{i_k} y a están en la misma componente conexa U_k de $B(a, \varepsilon/2) \cap A$ y a'_{i_k} y a están en la misma componente conexa U'_k de $B(a, \varepsilon/2) \cap A$ para todo $k > k_0$. Como U_k y U'_k intersecan al menos en a , necesariamente $U_k = U'_k$ por la maximalidad de las componentes conexas. Hemos encontrado un conexo contenido a a_{i_k}, a'_{i_k} y contenido en $B(a, \varepsilon/2) \cap A$. Esto implica que está contenido en $B(a_{i_k}, \varepsilon) \cap B(a'_{i_k}, \varepsilon) \cap A$ llegando a una contradicción. \square

Vamos a demostrar el Teorema de Hausdorff que afirma que todo compacto en \mathbb{R}^n es imagen continua del conjunto de Cantor. Este teorema fue probado en 1927 por Hausdorff y de manera independiente en 1928 por Alexandroff. Fue utilizado por Hahn para dar una segunda demostración a su teorema, que sobrepasaba en simplicidad a su primera prueba y a la prueba dada por Stefan Mazurkiewicz. Este resultado se puede interpretar como que el conjunto de Cantor es el subconjunto compacto universal de \mathbb{R}^n .

Teorema 3.4 (Hausdorff, 1927). *Todo subconjunto compacto de \mathbb{R}^n es una imagen continua del conjunto de Cantor.*

Demostración. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Consideremos el cubrimiento de A dado por $B(a, 1)$ para $a \in A$. Dado que A es compacto, existe un subcubrimiento finito de la forma $B(a_i, 1)$ para $1 \leq i \leq 2^{n_1}$. (donde podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que este subcubrimiento tiene 2^{n_1} elementos para algún $n_1 \in \mathbb{N}$ contando varias veces algunos si es necesario). Sea $A_i = \overline{B(a_i, 1)} \cap A$, donde $\overline{B(a_i, 1)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a_i\| \leq 1\}$. Tenemos que $A = \bigcup_i A_i$. A continuación, para cada i , cubrimos A_i por $B(a, \frac{1}{2})$ para $a \in B(a_i, 1) \cap A$ y duplicando elementos si es necesario, podemos asumir que tiene una subcubrimiento o $B(a_{i,j}, 1/2)$ para $1 \leq i \leq 2^{n_1}$ y $1 \leq j \leq 2^{n_2}$ con n_2 independiente de i . Establecemos $A_{i,j} = \overline{B(a_{i,j}, 1/2)} \cap A_i$ y tenemos que $\bigcup_j A_{i,j} = A_i$. Continuamos de esta manera con entornos de radio $1/4, 1/8, \dots$ y obtenemos sucesiones anidadas de conjuntos compactos,

$$A \supseteq A_{i_1} \supseteq A_{i_1, i_2} \supseteq A_{i_1, i_2, i_3} \supseteq \dots, \quad (3.1)$$

donde A_{i_1, i_2, \dots, i_k} está contenido en una bola cerrada de radio $1/2^{k-1}$. Observe que para cada sucesión $i_k \in \{1, \dots, 2^{n_k}\}$ obtenemos una sucesión de conjuntos cerrados anidados con radio decreciente a 0. Esto determina un elemento único de A de la siguiente manera: a es el elemento único de $\bigcap_k A_{i_1, i_2, \dots, i_k}$.

Por la Proposición 1.8, podemos escribir cualquier elemento del conjunto de Cantor $t \in C$ como

$$t = 0_3(2b_1)(2b_2) \dots (2b_n)(2b_{n+1})(2b_{n+2}) \dots,$$

(donde $b_j = 0$ o 1) y definimos una aplicación $f : C \rightarrow A$ por

$$f(t) := \text{único elemento de } A_{i_1} \cap A_{i_1, i_2} \cap A_{i_1, i_2, i_3} \cap \dots,$$

donde convenientemente establecemos que $i_1 = \sum_{j=1}^{n_1} b_j 2^{j-1}$, $i_2 = \sum_{j=1}^{n_2} b_{j+n_1} 2^{j-1}$ y en general se tiene $i_k = \sum_{j=1}^{n_k} b_{j+n_1+\dots+n_{k-1}} 2^{j-1}$.

Esta aplicación es sobreyectiva porque cada punto en A se encuentra en al menos una sucesión anidada (3.1) que corresponde a una sucesión $\{i_k\}$ y, a su vez, corresponde a un punto en C . Además es continua: Si $|t' - t''| < \frac{1}{3^{n+1}}$, entonces

$$t' = 0_3(2b_1)(2b_2)\dots(2b_n)(2b_{n+1})(2b_{n+2})\dots,$$

$$t'' = 0_3(2b_1)(2b_2)\dots(2b_n)(2\beta_{n+1})(2\beta_{n+2})\dots$$

Si $n_1 + n_2 + \dots + n_j \leq n < n_1 + n_2 + \dots + n_j + n_{j+1}$, entonces $f(t'), f(t'')$ están en $A_{i_1, \dots, i_j} \subseteq \overline{B(x_{i_1, \dots, i_j}, 1/2^{j-1})}$, es decir, $\|f(t') - f(t'')\| < \frac{1}{2^{j-1}}$, y concluimos que f es continua. \square

3.3. Condiciones suficientes

En la construcción de la curva de Lebesgue pudimos extender la aplicación continuamente a todo el intervalo I al unir las imágenes de los puntos iniciales y finales de los intervalos abiertos que componen $I \setminus C$. Esto fue posible porque el intervalo I era convexo. Lo que necesitamos es alguna condición que garantice que estos puntos puedan conectarse mediante un camino continuo que se encuentre en A , incluso cuando A no es convexo. Demostraremos que si A es compacto, conexo y localmente conexo, entonces es conexo por caminos y tal construcción es posible. Eso es lo que presentamos en esta sección.

Observación. Si un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es conexo, entonces los únicos subconjuntos de A que son abiertos y cerrados relativos a A a la vez, son el propio A y el vacío. En efecto, sea $C = U \cap A$ con U abierto y cerrado. Entonces $D = A \setminus C = A \setminus U = (X \setminus U) \cap A$ es abierto y cerrado también. Luego hemos encontrado dos abiertos disjuntos tal que $A = C \cup D = (U \cup (X \setminus U)) \cap A$. Luego necesariamente $C = A$ o $C = \emptyset$, por ser A conexo.

Lema 3.5. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es conexo y localmente conexo por caminos entonces es conexo por caminos. Si A es uniformemente localmente conexo por caminos entonces es localmente conexo por caminos.

Demostración. Comencemos con la primera afirmación. Fijemos $a \in A$ y sea P_a el conjunto de todos los puntos en A que están conectados por caminos a a , es decir, la componente conexa por caminos de a . Como A es conexo, los únicos subconjuntos abiertos y cerrados a la vez son A o el vacío. Luego es suficiente mostrar que P_a es cerrado y abierto en A , para demostrar que $P_a = A$ (dado que P_a no es vacío porque $a \in P_a$ por un camino constante).

Para demostrar que P_a es abierto, considere $p \in P_a$, entonces podemos encontrar un entorno abierto V_p de p tal que $V_p \cap A$ es conexo por caminos (por la conexidad local por caminos). Para todo $v \in V_p \cap A$, v está conectado por un camino a p , que a su vez está conectado por un camino a a , así que al unir caminos, tenemos que v está conectado por un camino a a . En otras palabras, $V_p \cap A \subseteq P_a$, por lo que $P_a = (\cup_p V_p) \cap A$ es abierto.

Para ver que también es cerrado, puesto que “estar conectado por un camino” es una relación de equivalencia, entonces $A = \bigcup P_a$. Por ende, $P_a = A \setminus \bigcup_{a' \neq a} P_{a'}$ es el complementario de un abierto, es decir, P_a es cerrado, como queríamos demostrar.

La segunda afirmación es inmediata, pues ser localmente conexo por caminos es más débil que ser uniformemente localmente conexo por caminos. \square

Teorema 3.6. Supongamos que D es un conjunto denso en I , $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $g : D \rightarrow K$ es uniformemente continua. Entonces existe una única extensión $f : I \rightarrow K$ continua de g de D a todo I .

Demostración. Sea $t \in I \setminus D$. Como D es denso existe una sucesión $\{t_n\} \subset D$ de modo que $t_n \rightarrow t$ y al ser $\{t_n\}$ una sucesión convergente, es de Cauchy. Por tanto la sucesión $\{g(t_n)\}$ también es de Cauchy gracias a la continuidad uniforme de g y, por la completitud de \mathbb{R}^n , es una sucesión convergente. Sea entonces $f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n)$. La función f está bien definida gracias a la continuidad uniforme de g .

Además si ponemos $f(t) = g(t)$ para $t \in D$, tenemos f bien definida para todo $t \in I$. Además, como K es compacto, $f(t) \in K$ para todo $t \in I$. Veamos ahora que f es uniformemente continua sobre I . Tomemos δ el de la continuidad uniforme de g y sean $t, s \in I$ de modo que $|t - s| < \delta$. Elegimos las sucesiones $\{t_n\}$ y $\{s_n\}$ en D convergiendo a t y s respectivamente. Entonces, existe n_0 tal que $|t_n - s_n| < \delta$ para todo $n \geq n_0$, lo que implica que $\|f(t_n) - f(s_n)\| < \varepsilon$. Tomando límite tenemos $\|f(t) - f(s)\| \leq \varepsilon$, es decir, f es uniformemente continua en I .

Falta ver que la unicidad de f . Supongamos que no es única, es decir, que existe una función $\tilde{f}(t) : I \rightarrow K$ tal que $\tilde{f} = g(t) \forall t \in D$ y sea $h(t) = f(t) - \tilde{f}(t) \forall t \in I$. Tenemos que $h(t) = 0 \forall t \in D$. Sea $t_0 \in I$ y sea $\{t_n\} \subseteq D$ convergente a t_0 . Entonces $h(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(t_n) = 0$. Por tanto, $h(t) = 0$ para todo $t \in I$, es decir, $f = \tilde{f}$. Luego f es única. \square

Definición. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y sean $x, x_0 \in A$ dos puntos cualesquiera. Dado cualquier $\varepsilon > 0$, se dice que existe una ε -cadena de x a x_0 si existe una colección finita de puntos $x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_p = x_0$ con $x_j \in A$, de modo que $\|x_j - x_{j-1}\| < \varepsilon$ para $j = 1, \dots, p$.

Teorema 3.7. Si A es compacto, conexo y localmente conexo, entonces es conexo por caminos, localmente conexo por caminos y de hecho uniformemente localmente conexo por caminos.

Demostración. Por el Lema 3.5, basta ver que es uniformemente localmente conexo por caminos. Sea $\varepsilon > 0$ y $\varepsilon_k = \frac{1}{4} \frac{\varepsilon}{2^k}$. Como A es uniformemente débilmente localmente conexo por el Lema 3.3, existe $\eta_k \in (0, \varepsilon_k)$ de modo que si $a, a' \in A$ con $\|a - a'\| < \eta_k$ entonces a, a' están en la misma componente conexa de $B(a, \varepsilon_k) \cap B(a', \varepsilon_k) \cap A$.

Sea $\eta = \eta_0$ y $a, a' \in A$ con $\|a - a'\| < \eta$. Vamos a construir un camino $\gamma : I \rightarrow A \cap B(a, \varepsilon) \cap B(a', \varepsilon)$ uniendo a a a' . Notemos que a y a' están en la misma componente conexa de $B(a, \varepsilon_0) \cap B(a', \varepsilon_0) \cap A$, digamos C . Sea $B = \{x \in C : \text{existe una } \eta_1\text{-cadena en } C \text{ uniendo } x \text{ y } a\}$. Entonces:

- $B \neq \emptyset$ ya que $a \in C$.
- B es abierto relativo a C : si $x \in B$ entonces $C \cap B(x, \eta_1) \subseteq B$, ya que si $y \in C \cap B(x, \eta_1)$, entonces podemos añadir y a la η_1 -cadena que une x y a para obtener una η_1 -cadena uniendo y y a .
- B es cerrado relativo a C . Si $x \in C \setminus B$, entonces $C \cap B(x, \eta_1) \subseteq C \setminus B$. En efecto, si $y \in C \cap B(x, \eta_1)$, y fuese $y \in B$, podríamos unir y y a con una η_1 -cadena en C . Añadiendo x , tendríamos una η_1 -cadena en C uniendo x y a , por lo que $x \in B$, una contradicción.

Como C es conexo, concluimos que $C = B$. Por tanto, existen $n_1 \in \mathbb{N}$, $x_0^{(1)} = a, \dots, x_{2^{n_1}}^{(1)} = a'$ con $\|x_{i+1}^{(1)} - x_i^{(1)}\| \leq \eta_1$ (repitiendo puntos si es necesario) y $x_i^{(1)} \in C \subseteq B(a, \varepsilon_0) \cap B(a', \varepsilon_0) \cap A$ para todo $i \in \{0, \dots, 2^{n_1}\}$. Ahora, notemos que $x_i^{(1)}$ y $x_{i+1}^{(1)}$ están en la misma componente conexa $C_i^{(1)}$ de $B(x_i^{(1)}, \varepsilon_1) \cap B(x_{i+1}^{(1)}, \varepsilon_1) \cap A$. Repitiendo el argumento, existen $n_2 \in \mathbb{N}$, y $x_{i,j}^{(2)}$ con $j \in \{0, \dots, 2^{n_2}\}$ cumpliendo $x_{i,0}^{(2)} = x_i^{(1)}, x_{i,2^{n_2}}^{(2)} = x_{i+1}^{(1)}$ y $\|x_{i,j}^{(2)} - x_{i,j+1}^{(2)}\| \leq \eta_2$ con $x_{i,j}^{(2)} \in C_i^{(1)} \subseteq B(x_i^{(1)}, \varepsilon_1) \cap B(x_{i+1}^{(1)}, \varepsilon_1) \cap A \subseteq B(a, \varepsilon_0 + \varepsilon_1) \cap B(a', \varepsilon_0 + \varepsilon_1) \cap A$ para todo $i \in \{0, \dots, 2^{n_1}\}$ y todo $j \in \{0, \dots, 2^{n_2}\}$. Es decir, hemos obtenido una η_2 -cadena formada por $2^{n_1+n_2}$ puntos contenidos en $B(a, \varepsilon_0 + \varepsilon_1) \cap B(a', \varepsilon_0 + \varepsilon_1) \cap A$. Continuando este proceso, en el k -ésimo paso, obtenemos una η_k -cadena formada por los puntos $x_0^{(k)} = a, \dots, x_{2^{n_1+n_2+\dots+n_k}}^{(k)} = a'$ contenidos en

$$B(a, \varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_k) \cap B(a', \varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_k) \cap A \subseteq B\left(a, \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i\right) \cap B\left(a', \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i\right) \cap A \subseteq B(a, \varepsilon/2) \cap B(a', \varepsilon/2) \cap A.$$

Llamemos $J = \{t \in I : t = t_{i,k} = \frac{i}{2^{n_1+n_2+\dots+n_k}}, k \in \mathbb{N}, i \in \{0, \dots, 2^{n_1+n_2+\dots+n_k}\}\}$ y definimos $\gamma : J \rightarrow B(a, \varepsilon/2) \cap B(a', \varepsilon/2) \cap A$ tal que $\gamma(t_{i,k}) = x_i^{(k)}$. La función γ es uniformemente continua, ya que, dado $\tilde{\varepsilon} > 0$, tomando k tal que $\varepsilon_k < \tilde{\varepsilon}$ y $t_1, t_2 \in J$ con $|t_1 - t_2| \leq \frac{1}{2^{n_1+n_2+\dots+n_k}}$, tenemos que $\|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\| \leq \eta_k \leq \varepsilon_k < \tilde{\varepsilon}$. Como además J es denso en I , podemos extender γ a un camino continuo $\gamma : I \rightarrow B(a, \varepsilon) \cap B(a', \varepsilon) \cap A$ que une a y a' por el Teorema 3.6. Notar que $\gamma(I) = \gamma(\bar{J}) \subseteq \gamma(\bar{J}) \subseteq \bar{B}(a, \varepsilon/2) \cap \bar{B}(a', \varepsilon/2) \cap A \subseteq B(a, \varepsilon) \cap B(a', \varepsilon) \cap A$. \square

Teorema 3.8 (Condiciones suficientes). *Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto, conexo y localmente conexo, entonces existe una función continua y sobreyectiva $f : I \rightarrow A$.*

Demostración. Dado que A es compacto, por el Teorema de Hausdorff existe una función continua y sobreyectiva $g : C \rightarrow A$. Llamemos $\varepsilon_n = 1/2^n$. Por el Teorema 3.7, A es uniformemente localmente conexo por caminos, luego podemos encontrar una sucesión decreciente $\{\eta_n\}$ con $0 < \eta_n < \varepsilon_n$ tal que si $\|a' - a\| < \eta_n$ entonces existe un camino continuo cuya imagen está en $B(a, \varepsilon_n) \cap B(a', \varepsilon_n) \cap A$.

Como g es continua y C compacto, g es uniformemente continua por el Teorema de Heine-Cantor. Luego podemos encontrar una sucesión decreciente $\delta_n > 0$ tal que $|y - x| < \delta_n$ implica $\|g(y) - g(x)\| < \eta_n$. Si (a_k, b_k) es un hueco en C tal que $\delta_{n+1} \leq |b_k - a_k| < \delta_n$, entonces podemos encontrar un camino continuo $\gamma_k : [a_k, b_k] \rightarrow A$ con imagen en $B(g(a_k), \varepsilon_n) \cap B(g(b_k), \varepsilon_n) \cap A$ conectando $g(a_k)$ con $g(b_k)$. Puede haber unos cuantos (a_k, b_k) para los que $|b_k - a_k| \geq \delta_1$ y entonces no tendríamos definido el camino γ_k . En estos casos se toma γ_k como cualquier camino uniendo $g(a_k)$ y $g(b_k)$, lo cual es posible porque A es conexo por caminos. De este modo, nuestra función f queda definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in C \\ \gamma_k(x) & \text{si } x \in (a_k, b_k) \subseteq (I \setminus C) \end{cases}$$

Esta función es claramente continua en todos los puntos de $I \setminus C$. Falta verlo para $x \in C$. Dado $x \in C$ puede ser punto de acumulación por ambos lados, solo por la derecha o solo por la izquierda. Haremos el último caso y omitiremos los primeros dos, porque son muy similares al último caso. Notar que x bordea un hueco a la izquierda. Es claro que f es continua por la derecha en x , por lo que veamos si f es continua por la izquierda.

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera y tomemos ε_n tal que $2\varepsilon_n \leq \varepsilon$. Sea δ_n el de la continuidad uniforme de g . Es seguro que hay algún punto de $x' \in C \cap (x - \delta_n, x)$ pues x es un punto de acumulación por la izquierda. Sea δ tal que $|x' - x| = \delta$. Con esta elección aseguramos que si tomamos un punto en $(x - \delta, x)$ que no está en C , entonces está en un intervalo de los que se quitaron y ese intervalo queda seguro contenido en $(x - \delta, x)$. Sea $y \in (x - \delta, x)$ cualquiera.

- Si $y \in C$, es claro que $|x - y| < \delta \leq \delta_n$ y por ello $\|f(x) - f(y)\| = \|g(x) - g(y)\| < \eta_n \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon$.
- Si $y \in C^c$ entonces debe estar en uno de los intervalos quitados pero sabemos que ese intervalo (a_k, b_k) estaría contenido en $(x - \delta, x)$ y por ello

$$|b_k - a_k| \leq \delta \leq \delta_n.$$

Por ello, el camino construido sobre ese intervalo cumple que $f(y) = \gamma(y) \in B(g(b_k), \varepsilon_n)$. Por lo tanto,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f(b_k)\| + \|f(b_k) - f(y)\| = \|g(x) - g(b_k)\| + \|g(b_k) - \gamma(y)\| < \eta_n + \varepsilon_n \leq 2\varepsilon_n \leq \varepsilon.$$

Luego hemos demostrado que f es continua por la izquierda de x . □

Observación. Se puede demostrar, aunque no lo abordemos en este trabajo, la siguiente generalización del Teorema de Hahn-Mazurkiewicz: Un espacio de Hausdorff es la imagen continua de I si y solo si dicho espacio es compacto, conexo y localmente conexo. La demostración se puede consultar en [5].

Hemos encontrado dos métodos para generar curvas que llenan el espacio: Por un lado, teníamos el método presentado por Hilbert basado en particionar tanto I como Q en k^{2n} duplicados iguales, $n = 1, 2, 3, \dots$ de modo que subintervalos adyacentes van a subcuadrados adyacentes y cumpliendo que si un cuadrado corresponde a algún intervalo entonces sus subcuadrados corresponden a subintervalos de ese intervalo, lo que llevó a curvas como la curva de Hilbert, la curva de Peano y variaciones de estas. Por otro lado, tenemos el método que se describe en la prueba de Hahn, que conduce a curvas que llenan el cubo n -dimensional, de las cuales la curva de Lebesgue presentada en el Capítulo 2 es un ejemplo bidimensional.

Bibliografía

- [1] Apostol, Tom M. *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, 1974.
- [2] Gandul Jiménez, Miriam. *La curva de Hilbert y otras curvas que rellenan áreas o volúmenes*, Grado en Matemáticas, Universidad de Sevilla, 2019. Disponible en: <https://idus.us.es/handle/11441/90006>
- [3] Kupers, Alexander. *On Space-Filling Curves and the Hahn-Mazurikewicz theorem*. Disponible en: <https://people.math.harvard.edu/~kupers/notes/spacefillingfunctions.pdf>
- [4] Sagan, Hans. *Space-Filling Curves*, Universitext Series, Springer-Verlag, 1994.
- [5] Willard, Stephen. *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.