



**Universidad**  
Zaragoza

## Trabajo Fin de Grado

Física del Sabor en el Modelo Estándar de la física de  
partículas

Autor

Gabriel López Pinar

Directora

Siannah Peñaranda Rivas

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
2023/2024

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Interacción electromagnética</b>	<b>2</b>
2.1. Campo electromagnético clásico . . . . .	2
2.1.1. Ecuaciones de Maxwell y teoría covariante . . . . .	2
2.2. Cuantización del campo electromagnético . . . . .	4
2.2.1. Problemas de cuantización . . . . .	4
2.2.2. Cuantización covariante del campo electromagnético libre . . . . .	5
2.3. Invariancia <i>gauge</i> local . . . . .	7
2.3.1. Invariancia de fase y teorema de Noether . . . . .	7
2.3.2. Lagrangiano de la electrodinámica cuántica (QED) . . . . .	8
<b>3. Modelo Estándar</b>	<b>9</b>
3.1. Introducción al Modelo Estándar . . . . .	9
3.2. Interacción electrodébil . . . . .	10
3.2.1. Teoría de Yang-Mills y simetría SU(2) . . . . .	10
3.2.2. Interacción débil . . . . .	13
3.2.3. Corriente cargada . . . . .	14
3.2.4. Corriente neutra . . . . .	14
3.3. QCD y Física del Sabor . . . . .	16
3.3.1. Interacción fuerte . . . . .	16
3.3.2. Quark Mixing . . . . .	18
<b>4. Procesos físicos</b>	<b>19</b>
4.1. Proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . . . . .	19
4.2. Proceso $b \rightarrow c l \bar{\nu}$ . . . . .	20
4.3. Resultados experimentales y anomalías en física del sabor . . . . .	22
4.3.1. Anchura de desintegración leptónica . . . . .	22
4.3.2. Desintegración de mesones . . . . .	22
<b>5. Conclusiones</b>	<b>24</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>25</b>

<b>A. Desarrollos matemáticos del Capítulo 2</b>	<b>26</b>
A.1. Ecuaciones de Maxwell en forma covariante . . . . .	26
A.2. Ecuaciones de Maxwell e invariancia <i>gauge</i> de (2.5) . . . . .	27
A.3. Propagador del campo EM . . . . .	28
A.4. Hamiltoniano y momento a partir de los estados físicos . . . . .	29
<b>B. Desarrollos matemáticos del Capítulo 3</b>	<b>31</b>
B.1. Cotas de las masas de los bosones W y Z . . . . .	31
B.2. Sabor y color. Representaciones de mesones y bariones . . . . .	32
<b>C. Desarrollos matemáticos del Capítulo 4</b>	<b>35</b>
C.1. Sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . . . . .	35
C.2. Anchura de desintegración del proceso $b \rightarrow cl\nu$ . . . . .	37
<b>D. Reglas de Feynman y sección eficaz</b>	<b>40</b>
D.1. Reglas de Feynman: vértices y propagadores . . . . .	40
D.2. Sección eficaz y anchura de desintegración . . . . .	41
<b>E. Valores numéricos</b>	<b>44</b>

# Capítulo 1

## Introducción

El Modelo Estándar (SM - del inglés *«Standard Model»*) es capaz de describir adecuadamente tres de las cuatro interacciones fundamentales de la materia. Concretamente, unifica la interacción electromagnética con la fuerza nuclear débil en la llamada teoría electrodébil y, además, explica la fuerza nuclear fuerte en el marco de la Cromodinámica Cuántica (QCD - del inglés *«Quantum Chromodynamics»*). Para ello, describe dichas interacciones conforme a la Teoría Cuántica de Campos (QFT - del inglés *«Quantum Field Theory»*) en el marco relativista. No obstante, la interacción gravitatoria no está incluida en el SM. Este es uno de los problemas teóricos que sugieren la existencia de nueva física o física más allá de este modelo. Además, existen medidas experimentales que muestran desviaciones con respecto a la física que predice el SM; en particular en observables relacionados con la denominada física del sabor.

El objetivo de este trabajo es abordar algunos aspectos fundamentales del SM como QFT, con un enfoque particular en la interacción electrodébil y los procesos físicos que involucran cambios en el sabor de las partículas.

El trabajo está estructurado en cuatro capítulos. En el Capítulo 2 desarrollamos la teoría covariante de la Electrodinámica Cuántica (QED - del inglés *«Quantum Electrodynamics»*) partiendo de las ecuaciones de Maxwell, e introduciendo para ello la invariancia *gauge*. El SM, partículas fundamentales e interacciones, se presenta en el Capítulo 3. Se deduce el Lagrangiano de la interacción débil y se desarrolla la unificación electrodébil. Además, se aborda la física del sabor y se realiza una breve introducción a la Cromodinámica Cuántica. En el Capítulo 4 calculamos la sección eficaz y la anchura de desintegración de procesos físicos específicos, comparando los resultados teóricos con datos experimentales. Las conclusiones se presentan en el Capítulo 5.

Finalmente, en los Anexos A, B y C se detallan los desarrollos matemáticos que son resumidos en el texto principal. En el Anexo D se resumen las reglas de Feynman (vértices y propagadores) usadas en los cálculos y en el Anexo E se dan los valores numéricos empleados.

# Capítulo 2

## Interacción electromagnética

Comenzaremos con la interacción más conocida, la electromagnética. Partiremos del campo electromagnético clásico e impondremos la teoría covariante sobre las ecuaciones de Maxwell, introduciendo la invariancia *gauge* [1]. Finalmente, el proceso de cuantización nos conducirá al Lagrangiano de interacciones de la Electrodinámica Cuántica.

### 2.1. Campo electromagnético clásico

#### 2.1.1. Ecuaciones de Maxwell y teoría covariante

Las ecuaciones de Maxwell recogen como los campos eléctrico y magnético son inducidos por cargas estáticas y corrientes. En el vacío se pueden escribir como <sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho, & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{j}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad de carga eléctrica,  $\mathbf{j}$  es la densidad de corriente eléctrica y  $\nabla$  se define como  $\nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ .

La idea es escribir las ecuaciones anteriores en forma covariante (es decir, invariante de Lorentz o invariante relativista). Para ello, trabajamos en el espacio de Minkowski donde empleamos el convenio de los cuadrvectores dados por  $x^\mu = (t, \mathbf{x})$  y el tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definimos ahora un cuadrvector que denominaremos potencial,  $A^\mu \equiv (V, \mathbf{A})$ , que está compuesto por un campo escalar  $V \equiv V(t, \mathbf{x})$  y el potencial vector  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ . A partir del mismo se pueden redefinir los campos eléctrico y magnético, según:  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V$ . Si sustituimos estos campos en las ecuaciones de Maxwell (2.1), podemos ver que las ecuaciones homogéneas se verifican y que las ecuaciones no homogéneas se transforman como se detalla en el Anexo A.1. Al transformarse, siguen siendo válidas en el sentido físico,

---

<sup>1</sup>De ahora en adelante seguiremos el convenio de «Heaviside-Lorentz» y escogeremos unidades naturales tal que podamos imponer  $c = 1$  y  $\epsilon_0 = 1$ .

pero no son covariantes. La solución a este problema es introducir el tensor del campo electromagnético  $F^{\mu\nu}$  que viene dado por:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \equiv \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}, \quad (2.2)$$

que es un tensor antisimétrico y se puede expresar en forma matricial:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos entonces reescribir las ecuaciones de Maxwell homogéneas y no homogéneas:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (2.3)$$

donde  $j^\mu \equiv (\rho, \mathbf{j})$  es un cuadrvector que incluye la densidad y corriente de carga eléctrica. Estas ecuaciones sí son invariantes <sup>2</sup>.

Previamente a la siguiente sección, vamos a analizar los grados de libertad del sistema. En las ecuaciones de Maxwell iniciales tenemos un total de ocho ecuaciones para seis parámetros, las componentes de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , de manera que nos quedan dos grados de libertad independientes. Para el potencial  $A^\mu$ , que pasaremos en lo siguiente a denominar campo del fotón, tenemos cuatro componentes; dos de ellas independientes. Conocemos además que el fotón tiene dos estados físicos, sus dos estados de polarización. De hecho, a este desacuerdo entre el número de componentes del campo y el número de estados físicos es a lo que denominamos invariancia *gauge*.

Podemos entonces imponer condiciones adicionales sobre el campo  $A^\mu$  que restringen el número de sus componentes independientes y es a lo que llamaremos fijar el *gauge*. Se conocen diferentes condiciones que podemos imponer sobre este campo, por ejemplo:  $\partial_\mu A^\mu = 0$  (*gauge* de Lorenz, que asegura la invariancia Lorentz),  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  (*gauge* de Coulomb), etc.

Por tanto, los campos escalar y vectorial,  $V$  y  $\mathbf{A}$ , no definen únicamente  $A^\mu$ ;  $A^\mu$  no es único. Podemos tomar un campo escalar cualquiera  $f(t, \mathbf{x})$  tal que:

$$V \rightarrow V' = V + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \cdot f, \quad (2.4)$$

que en notación covariante sería:  $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f$ , donde  $\partial^\mu \equiv (\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla)$ . Estas transformaciones del campo  $A^\mu$  dejan los campos eléctrico y magnético invariantes, al tensor  $F^{\mu\nu}$  y en consecuencia las ecuaciones de Maxwell. Se denominan transformaciones *gauge*.

Para finalizar, podemos encontrar una densidad Lagrangiana invariante *gauge*:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu, \quad (2.5)$$

que utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, nos permite obtener las ecuaciones de Maxwell no homogéneas; tal y como mostramos en el Anexo A.2.

---

<sup>2</sup>La demostración de las mismas se incluye en el Anexo A.1.

## 2.2. Cuantización del campo electromagnético

### 2.2.1. Problemas de cuantización

Para realizar una cuantización canónica, se deben interpretar los campos conjugados de coordenadas  $A^\mu$  y momento  $\pi$  como operadores de campo que satisfacen las relaciones de conmutación canónicas:

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = i\hbar\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.6)$$

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\mu(\mathbf{x}', t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = 0. \quad (2.7)$$

Pero es inmediato ver que el momento conjugado según la densidad Lagrangiana (2.5) no es compatible con dichas relaciones:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} = -F^{\mu 0} \rightarrow \pi^0 = 0,$$

pues uno de los momentos canónicos no existe y eso hace imposible que se cumpla (2.6). Además, no se pueden invertir las ecuaciones para expresar los términos  $\dot{A}^\mu$  en función de los momentos y, por tanto, la construcción de la densidad Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \pi \partial_0 A^\mu - \mathcal{L}. \quad (2.8)$$

La solución la podemos encontrar usando la invariancia *gauge* que hemos mencionado, fijando el *gauge* a través del *gauge* de Lorentz:

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (2.9)$$

Bajo esta condición, es posible reescribir el Lagrangiano (2.5) y que permanezca invariante en la forma <sup>3</sup>:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - j^\mu A_\mu. \quad (2.10)$$

Este Lagrangiano modificado no altera la física que hay detrás y nos permite cuantificar el campo electromagnético, ya que se verifican las relaciones de conmutación (2.6)-(2.7), pues ahora solucionamos el problema del momento canónico nulo:  $\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} = -\dot{A}^\mu \neq 0$ .

No obstante, para poder encontrar un propagador del campo asociado, necesitamos introducir además un término que fija el *gauge* o término de «*gauge-fixing*», donde  $\xi$  es un parámetro que nos permitirá elegir el *gauge*:

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (2.11)$$

Este término no modifica el Lagrangiano, pues involucra la condición (2.9). Entonces reescribimos el Lagrangiano como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left[ \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) (\partial_\mu A^\mu)^2 \right] - j^\mu A_\mu. \quad (2.12)$$

---

<sup>3</sup>El detalle de la demostración lo recogemos en el Anexo A.2.

Aunque sigue existiendo el momento no nulo:  $\pi^\mu = -\dot{A}^\mu + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) g^{\mu 0} \partial_\nu A^\nu \neq 0$ , aún queda un matiz en la relación de commutación (2.6), ya que si se aplica la derivación:  $[\frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = i \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \neq 0$  y, por tanto, si  $\partial_\mu A^\mu = 0$ , solo se podrá imponer la relación de commutación bajo ciertas condiciones en el sistema, ya que uno de los términos del commutador es nulo. Tendremos que seguir otro procedimiento para cuantizar el campo electromagnético, como veremos en la siguiente sección.

Otra forma de ver la cuantización de la teoría es comprobar la existencia del propagador del campo, es decir, resolver las ecuaciones de movimiento asociadas al Lagrangiano (2.12) por el método de Green. Obtenemos el propagador <sup>4</sup>:

$$D_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \left[ g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]. \quad (2.13)$$

Es importante destacar que el valor que se le da a  $\xi$  es lo que indica el *gauge* empleado y hay varias opciones. Los más usados son el de Feynman-t'Hooft  $\xi = 1$  y el de Landau  $\xi = 0$ . No obstante, si bien el propagador depende del *gauge* escogido, cuando calculamos un observable físico que caracteriza un proceso físico determinado, este no depende del *gauge*.

### 2.2.2. Cuantización covariante del campo electromagnético libre

En este apartado consideraremos otra manera de llegar a la cuantización del campo electromagnético  $A^\mu$  libre, es decir, en ausencia de fuentes:  $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ . Bajo estas condiciones y empleando el *gauge*  $\xi = 1$ , las ecuaciones de Euler-Lagrange para el Lagrangiano quedan como  $\square A^\mu = 0$ , que es precisamente una ecuación de Klein-Gordon sin masa. Las soluciones a dicha ecuación son de la forma:

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sum_{\lambda=0}^3 (\epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda) a_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-ikx} + \epsilon^{\mu*}(\mathbf{k}, \lambda) a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger e^{-ikx}), \quad (2.14)$$

donde  $\epsilon^\mu$  representa un conjunto de cuatrivectores linealmente independientes que definen la polarización para cada una de las componentes de  $\mathbf{k}$ ,  $k_\mu$  es el cuatrivector de onda  $k^\mu = (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$ ; siendo  $\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}| \equiv k$ , y  $a_{\mathbf{k}, \lambda}$  y  $a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger$  son los operadores de aniquilación y creación, respectivamente.

El campo  $A^\mu$  presenta cuatro grados de libertad ( $\lambda = 0, 1, 2, 3$ ) que se corresponden con los estados de polarización dados por los vectores  $\epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda)$ . En realidad, sabemos que el fotón solo presenta dos estados físicos; sus estados de polarización, de forma que, de nuevo, tendremos grados de libertad libres que nos permitirán aplicar el *gauge* correspondiente. Los vectores de polarización verifican las relaciones de ortogonalidad y completitud, además de que deben cumplir la invariancia de Lorentz, lo que nos permite tomar un sistema de referencia cualquiera, que escogemos  $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ . En dicho sistema tendremos los valores

---

<sup>4</sup>La demostración matemática se recoge en el Anexo A.3 y en el Capítulo 4 explicaremos su significado físico más en detalle.

de los vectores mostrados en la Tabla 2.1, donde los que tienen polarización transversal son perpendiculares a la dirección de propagación dada por  $k^\mu$ .

$\epsilon_0^\mu = (1, 0, 0, 0)$	Polarización escalar o time-like	Estado no físico
$\epsilon_1^\mu = (0, 1, 0, 0)$	Polarización transversal	Estado físico
$\epsilon_2^\mu = (0, 0, 1, 0)$	Polarización transversal	Estado físico
$\epsilon_3^\mu = (0, 0, 0, 1)$	Polarización longitudinal	Estado no físico

Tabla 2.1: Vectores de polarización en el sistema de referencia  $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ .

Ahora bien, nos gustaría imponer una cuantización covariante, que vendría dada por (2.6) y (2.7). Pero en lugar de escribirla en función del campo  $A^\mu$  y el momento conjugado, la escribimos en términos de los operadores de creación y aniquilación, es decir:

$$[a_{\mathbf{k},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] = \zeta_\lambda \delta_{\lambda,\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{k},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}] = [a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger, a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] = 0, \quad (2.15)$$

donde  $\zeta_0 = -1$  y  $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1$ .

Nótese que los estados de una partícula vendrían dados por  $|\mathbf{k}, \lambda\rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{q},\lambda}^\dagger |0\rangle$ , y vemos que tienen norma negativa para  $\lambda = 0$ ,

$$\langle \mathbf{q}, \lambda | \mathbf{k}, \lambda \rangle = 2\omega_{\mathbf{k}} \langle 0 | a_{\mathbf{q},\lambda} a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger | 0 \rangle = \zeta_\lambda 2\omega_{\mathbf{k}} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}). \quad (2.16)$$

Esto no es aceptable porque las normas se interpretan como probabilidades. Lo que está sucediendo es que seguimos con cuatro estados de polarización y dos grados de libertad. Tenemos aún que imponer la condición *gauge* (2.9). Para ello, supongamos dos estados físicos  $\psi, \psi'$ ; y apliquemos la condición del *gauge* en la forma:

$$\langle \psi' | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle = 0, \quad (2.17)$$

es decir, en lugar de tomar  $\partial_\mu A^\mu = 0$  a nivel de Lagrangiano, suponemos que el Langragiano es (2.12) pero imponemos la ecuación anterior sobre los estados físicos, lo que se denomina «*cuantización de Gupta-Bleuler*», que demostraron que para que haya una conexión entre la teoría cuántica que estamos construyendo y la teoría clásica del electromagnetismo bastaría con imponer una condición más suave. Vamos a ver que esto es suficiente para eliminar los estados no físicos y así no tener incongruencias con las normas y los grados de libertad.

Separando los estados de frecuencia positiva y negativa en el campo  $A^\mu$ , tenemos que  $\partial_\mu A^\mu = (\partial_\mu A^\mu)^+ + (\partial_\mu A^\mu)^-$ , tal que:

$$(\partial_\mu A^\mu)^\pm = \mp i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \sum_{\lambda=0}^3 k_\mu \epsilon^{\mu(*)}(\mathbf{k}, \lambda) a_{\mathbf{k},\lambda}^{(\dagger)} e^{\mp i k x}, \quad (2.18)$$

de forma que la condición (2.17) se satisface siempre que

$$(\partial_\mu A^\mu)^+ | \psi \rangle = 0. \quad (2.19)$$

Entonces, si tenemos un estado físico definido como:

$$|\psi\rangle = \sum_{\lambda} c_{\lambda} a_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger} |0\rangle, \quad (2.20)$$

la condición anterior nos conduce a la eliminación de los estados de polarización escalar y longitudinal que son los estados no físicos del sistema <sup>5</sup>.

## 2.3. Invariancia *gauge* local

### 2.3.1. Invariancia de fase y teorema de Noether

La relación entre las simetrías y leyes de conservación viene dada por el teorema de Emmy Noether: toda transformación continua de simetría bajo la cual el Lagrangiano es invariante conduce a una ley de conservación. En lo que nos ocupa, nos centraremos en las invariancias bajo operaciones internas, como la fase compleja de las funciones de onda, que nos llevará a la conservación de la corriente y carga.

Un Lagrangiano, y los Hamiltonianos hermíticos, son reales y, por tanto, invariantes ante un cambio de fase global, es decir:  $\psi_i \rightarrow \psi_i e^{i\alpha}$ , donde  $\alpha$  es una fase constante. Este cambio de fase global se denomina simetría  $U(1)$  <sup>6</sup>. Aplicando el teorema de Noether, se debe conservar una cantidad asociada a dicha invariancia de fase.

Sin embargo, podría darse un cambio de fase local, es decir, que  $\alpha$  dependiese de las coordenadas. Supongamos dicha transformación en un campo  $\psi(x)$  en la forma:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)} \psi(x), \quad (2.21)$$

como el Lagrangiano general  $\mathcal{L}(\psi(x), \partial_{\mu}\psi(x))$  depende no solo del campo, sino también de sus derivadas, esta transformación no lo deja invariante:

$$\partial_{\mu}\psi(x) \rightarrow \partial_{\mu}\psi'(x) = e^{i\alpha(x)} (\partial_{\mu}\psi(x) + i(\partial_{\mu}\alpha(x))\psi(x)). \quad (2.22)$$

No obstante, es posible conseguir que el Lagrangiano quede invariante si hacemos uso de la invariancia *gauge* local. Podemos introducir el campo *gauge* que denotaremos como  $A^{\mu}$ , para que se corresponda con el campo del fotón en el marco de la QED [2]. En primer lugar, sustituimos  $\partial_{\mu}$  por la derivada covariante:

$$\partial_{\mu} \rightarrow D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} + iqA_{\mu}(x), \quad (2.23)$$

donde  $q$  es por el momento una constante arbitraria. En segundo lugar, imponemos que el campo transforme como:

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) - \frac{1}{q}\partial_{\mu}\alpha(x), \quad (2.24)$$

---

<sup>5</sup>Los cálculos explícitos se presentan en el Anexo A.4.

<sup>6</sup>Ya que se trata del grupo de las matrices unitarias de dimensión uno, es decir, los números complejos de módulo unidad.

entonces, la derivada del campo transformado queda como:

$$\begin{aligned} D_\mu \psi(x) \rightarrow D'_\mu \psi'(x) &= e^{i\alpha(x)} \left( \partial_\mu \psi(x) + i\partial_\mu \alpha(x) \psi(x) + iqA_\mu(x) \psi(x) - iq \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(x) \psi(x) \right) \\ &= e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi(x), \end{aligned} \quad (2.25)$$

tal que el Lagrangiano permanece invariante.

Luego la clave para desarrollar la teoría de la QED es precisamente la invariancia *gauge*. Esta transformación introducida en la derivada covariante (2.23) que contiene al campo transformado (2.24), es lo que deja invariante el Lagrangiano ante una transformación de fase local, en este caso, perteneciente al grupo U(1).

### 2.3.2. Lagrangiano de la electrodinámica cuántica (QED)

El Lagrangiano de la QED debe contener la interacción entre los campos fermiónicos y el fotón. Partimos de los resultados anteriores, tal que sustituyendo la derivada usual por la derivada covariante (2.23) en el Lagrangiano del campo de Dirac, y añadiendo además el campo del fotón libre o término cinético  $\mathcal{L}_A^{libre} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - qA_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Desde esta expresión, obtenemos el término de interacción que definimos como:

$$\mathcal{L}_{interaccion} = -qA_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi = -J^\mu A_\mu. \quad (2.27)$$

La carga  $q$  caracteriza la fuerza de la interacción y en base a esto, introducimos el operador de carga  $Q$ , que actúa como el generador del grupo U(1):  $\psi' = e^{i\alpha(x)Q}\psi$ , obteniendo el Lagrangiano y la corriente conservada en la forma:

$$\mathcal{L}_{interaccion} = -g_{EM} J_{EM}^\mu A_\mu, \quad J_{EM}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu Q\psi, \quad (2.28)$$

donde hemos introducido la constante  $g_{EM}$  que depende de la carga  $e$  y podemos escribir en función de la constante de estructura fina  $\alpha$ :

$$g_{EM} = \frac{e}{\sqrt{\epsilon_0 \hbar c}} = \sqrt{4\pi\alpha}, \quad (2.29)$$

tal que si tomamos  $\epsilon_0 \hbar c = 1$  entonces es trivialmente igual a la carga  $g_{EM} = e$ .

# Capítulo 3

## Modelo Estándar

En este capítulo introduciremos el Modelo Estándar y describiremos uno de sus grandes logros, la unificación de la interacción electromagnética con la interacción débil en la denominada *teoría electrodébil*. Finalmente, trataremos el tema de la física del sabor y QCD.

### 3.1. Introducción al Modelo Estándar

El SM es una teoría cuántica de campos basada en el grupo de simetría  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , donde el subíndice  $C$  se refiere a la carga de color,  $L$  representa la componente levógira de los campos e  $Y$  es el número cuántico de hipercarga débil. Este modelo recoge todas las partículas e interacciones fundamentales [3], recogidas en las Tablas 3.1 y 3.2. Las partículas que conforman la materia son los fermiones (de espín 1/2), clasificados en quarks y leptones con tres familias en cada categoría. Las interacciones fundamentales vienen dadas a través de los bosones (de espín 1) y se originan mediante el requerimiento de invariancia *gauge* local.

Carga	Quarks		
2/3	u (up) 2,16(7) MeV	c (charm) 1,2730(46) GeV	t (top) 172,57(29) GeV
-1/3	d (down) 4,70(7) MeV	s (strange) 93,5(8) MeV	b (bottom) 4,183(7) GeV
Carga	Leptones		
0	$\nu_e$ (neutrino e) <1,1 eV	$\nu_\mu$ (neutrino $\mu$ ) <0,17 MeV	$\nu_\tau$ (neutrino $\tau$ ) <18,2 MeV
-1	e (electron) 0,51099895000(15) MeV	$\mu$ (muon) 105,6583755(23) MeV	$\tau$ (tau) 1776,93(9) MeV

Tabla 3.1: Fermiones en el SM. [4]

Fuerza	Boson	Fuerza de acople a 1GeV
Fuerte	$g$ (8 gluones)	$\alpha_s \sim \mathcal{O}(1)$
EM	$\gamma$ (fotón)	$\alpha \sim \mathcal{O}(10^{-3})$
Débil	$Z, W^\pm$ (bosones débiles)	$\alpha_w \sim \mathcal{O}(10^{-8})$

Tabla 3.2: Interacciones en el SM. [4]

Es interesante comentar que en la fuerza EM <sup>1</sup> no existe el autoacoplamiento, es decir, los fotones no pueden interaccionar consigo mismos. Esto no es así para la fuerte y la débil, que basados en grupo de simetría no abeliano, permiten autointeracciones entre los bosones de gauge portadores de la interacción. Algo destacable es también que debido al autoacoplamiento de los gluones, los quarks presentan *confinamiento*, es decir, que los quarks libres no existen. Estos siempre aparecen en estados ligados, como combinaciones de tres quarks (bariones) o de un quark y un antiquark (mesones). A estas dos categorías en conjunto se les denomina hadrones. En el modelo de los quarks las diferentes especies de hadrones se organizan a partir de la simetría del sabor. Además, cabe destacar que, en la interacción débil, las corrientes cargadas permiten transiciones entre quarks y leptones diferentes, que son un elemento fundamental en la física de sabor que tratamos en este trabajo.

Finalmente, comentar que el SM incluye un campo escalar bosónico denominado campo de *Higgs*, que aparece a través del mecanismo de ruptura de simetría o mecanismo de Higgs, el cual aporta masa a los bosones y fermiones [5].

## 3.2. Interacción electrodébil

### 3.2.1. Teoría de Yang-Mills y simetría SU(2)

En el Capítulo 2 hemos construido el Lagrangiano de la QED basándonos en la invariancia del Lagrangiano de Dirac ante transformaciones locales del grupo  $U(1)$ . Es posible construir otras teorías partiendo de grupos de transformaciones diferentes y empleando la invariancia *gauge*, y esto fue lo que hicieron Yang y Mills [6]. Su teoría es, en el sentido histórico, predecesora de la unificación electrodébil y parte justo del punto donde nos hemos quedado.

La idea inicial de Yang y Mills era describir el sistema del protón y neutrón, por lo que en lugar de considerar un solo campo de Dirac, vamos a considerar dos:

$$\mathcal{L} = \bar{p}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)p + \bar{n}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)n, \quad (3.1)$$

suponiendo que ambos nucleones tienen la misma masa. Este Lagrangiano lo podemos expresar en función del doble espinor  $\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$  en la forma:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \begin{pmatrix} i\gamma^\mu \partial_\mu - m & 0 \\ 0 & i\gamma^\mu \partial_\mu - m \end{pmatrix} \psi. \quad (3.2)$$

Ahora podemos considerar una transformación de fase global, asociada al grupo  $U(2)$ , ya que hemos incrementado las dimensiones del sistema. Sin embargo, Yang y Mills impusieron además que la matriz de la transformación tuviese determinante igual a 1, es decir, se restringieron al grupo  $SU(2)$ , tal que  $\psi \rightarrow U\psi$ ,  $U = \exp\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\tau}\right)$ . El parámetro  $\boldsymbol{\alpha}$  es real y

---

<sup>1</sup>A partir de ahora, y en la Tabla 3.2 se ha denotado la interacción electromagnética por EM.

$\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  son las matrices de Pauli. Estas matrices tienen traza nula y son los generadores del grupo SU(2). Yang y Mills hicieron esta elección porque tenían información previa sobre el espín de las partículas que estaban describiendo.

De esta forma, supongamos una transformación:

$$\psi \rightarrow \psi' = \left( \mathbb{I} + \frac{i}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\tau} \right) \psi. \quad (3.3)$$

El Lagrangiano, aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange, se transformará como:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta (\partial_\mu \psi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} \delta \bar{\psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \delta (\partial_\mu \bar{\psi}) \\ &= \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta \psi \right] + \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \delta \bar{\psi} \right] = \partial_\mu \left[ -\frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\tau} \psi \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

puesto que  $\boldsymbol{\alpha}$  es una constante real, podemos ignorarlo y a partir de  $\partial_\mu \mathbf{J}^\mu = 0$  obtener tres corrientes conservadas:

$$\mathbf{J}^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \psi. \quad (3.5)$$

Ahora bien, para construir la teoría, debemos imponer una simetría local y hacer uso de la invariancia *gauge*. Para ello, supongamos que la transformación depende ahora de  $x$ :  $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = G(x)\psi(x)$ , tal que:

$$G(x) = \exp \left( \frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x) \right). \quad (3.6)$$

Esta transformación no deja al lagrangiano invariante, luego debemos introducir una derivada covariante:

$$D_\mu = \mathbb{I} \partial_\mu + ig B_\mu, \quad (3.7)$$

donde  $g$  es una constante de acople (arbitraria de momento) y  $B_\mu$  el campo *gauge* que es conveniente definir a partir de tres campos vectoriales reales  $b_1, b_2, b_3$  (ya que el grupo SU(2) tiene tres generadores):

$$B_\mu = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{b}_\mu = \frac{1}{2} \sum_k \tau^k b_\mu^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_3 & b_1 - ib_2 \\ b_1 + ib_2 & -b_3 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

El Lagrangiano (3.2) queda reescrito:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu D_\mu - \mathbb{I} m) \psi, \quad (3.9)$$

de forma que para que sea invariante debemos definir la transformación *gauge* como:

$$D_\mu \psi \rightarrow D'_\mu \psi' = G(D_\mu \psi), \quad (3.10)$$

donde introducimos la expresión de la derivada covariante:

$$D'_\mu \psi' = (\partial_\mu + ig B'_\mu) \psi' = G(\partial_\mu \psi) + (\partial_\mu G) \psi + ig B'_\mu G \psi, \quad (3.11)$$

y también tenemos en cuenta:

$$G(D_\mu\psi) = G\partial_\mu\psi + igGB_\mu\psi. \quad (3.12)$$

Comparando (3.11) y (3.12) podemos ver que la invariancia implica:

$$igB'_\mu G\psi = igG(B_\mu\psi) - (\partial_\mu G)\psi, \quad (3.13)$$

tal que la expresión se debe verificar para cualquier valor de  $\psi$ . Si multiplicamos a ambos lados por  $G^{-1}$ , obtenemos como queda la transformación del campo *gauge*:

$$B'_\mu = GB_\mu G^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu G)G^{-1}. \quad (3.14)$$

Si comparamos esta expresión con la transformación del campo del fotón (2.24), vemos que comparten la transformación debida al gradiente, pero que incluye una rotación (debida a que los elementos de  $SU(2)$  no comutan:  $[\tau_i, \tau_j] = 2\epsilon_{ijk}\tau_k$ ). Con esto en cuenta y haciendo la analogía, podemos obtener la transformación de cada vector real del campo:

$$b_\mu^{k'} = b_\mu^k - \epsilon_{klm}\alpha^l b^m - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^k. \quad (3.15)$$

Para escribir un Lagrangiano completo, aparte de introducir la derivada covariante (3.7), tenemos que incluir un término libre para los tres campos nuevos:

$$\mathcal{L}_b^{libre} = -\frac{1}{4}\sum_l F_l^{\mu\nu}F_{\mu\nu,l} = -\frac{1}{4}\mathbf{F}^{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}_{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

donde la definición de  $\mathbf{F}^{\mu\nu}$  es ahora:

$$F_l^{\mu\nu} = \partial^\nu b_l^\mu - \partial^\mu b_l^\nu + g\epsilon_{jkl}b_j^\mu b_k^\nu, \quad (3.17)$$

y hemos excluido los términos de masa para mantener la simetría.

Finalmente, tenemos que el Lagrangiano de la teoría de Yang-Mills vendrá dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SU(2)} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}\mathbf{F}^{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}_{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - g\mathbf{J}^\mu\mathbf{b}_\mu - \frac{1}{4}\mathbf{F}^{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}_{\mu\nu} \\ &\equiv \mathcal{L}_\psi^{libre} + \mathcal{L}^{interaccion} + \mathcal{L}_b^{libre}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde hemos incluido el factor  $g$  en la definición de  $\mathbf{J}^\mu$  dada en (3.5).

Este Lagrangiano representa la interacción de campos vectoriales con fermiones, de manera que aunque el punto de partida fuese similar al de la QED, los campos introducidos no se corresponden con el fotón y, por tanto, están detrás de una nueva interacción, que será la interacción débil.

### 3.2.2. Interacción débil

El objetivo es explicar la interacción débil, modificando para ello el Lagrangiano de Yang-Mills y dándole un significado físico a los campos vectoriales que introduce. En primer lugar, vamos a reescribir la parte del Lagrangiano de interacción, ya que es la que nos interesa. En lugar de tomar como generador  $\tau$ , consideraremos el operador  $\mathbf{T}$  tal que  $\mathbf{T} = \tau/2$ . De esta forma, la transformación local queda como  $\Psi' = e^{i\alpha(x)\mathbf{T}}\Psi$ , siendo el término de interacción  $\mathcal{L}_{interaccion} = -gJ_T^\mu\mathbf{b}_\mu$ , con  $J_T^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\mathbf{T}\Psi$ , y donde la constante de acople  $g$  será la misma para todos los dobletes cuando los consideremos como autoestados de la interacción débil.

Además, dado un espinor de Dirac  $\psi$ , podemos considerar sus dos proyecciones en el subespacio de helicidad, la izquierda (L, levógiro) y la derecha (R, dextrógiro):

$$\psi_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi, \quad \psi_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi. \quad (3.19)$$

Podemos aplicar la relación  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$ , y así reescribir el Lagrangiano de Dirac:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_R(i\gamma^\mu\partial_\mu)\psi_R + \bar{\psi}_L(i\gamma^\mu\partial_\mu)\psi_L, \quad (3.20)$$

tal que los dobletes que estamos empleando se denominan dobletes de isoespín débil, y se componen de las familias de leptones y quarks correspondientes.

Entonces, vamos a imponer la simetría  $SU(2)$  sobre los dobletes levógiros. El hecho de imponer la simetría *gauge* solo en los estados levógiros hace que la interacción débil sea asimétrica y es lo que denominamos violación de la paridad <sup>2</sup>. Denominaremos a esta simetría  $SU(2)_L$  y en realidad la vamos a desarrollar en base a la ya trabajada  $SU(2)$ . Es un hecho que bajo el grupo de simetría  $SU(2)_L$  las componentes levógiros se transforman de forma distinta que las dextrógiros, siendo los primeros dobletes y los segundos singletes de isoespín débil.

Comenzamos con el Lagrangiano de Dirac considerando solo estados levógiros:

$$\mathcal{L}_{libre} = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L. \quad (3.21)$$

Introducimos la derivada covariante y el campo *gauge*:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + igB_\mu, \quad B_\mu = \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}_\mu, \quad (3.22)$$

con lo que aparece un término nuevo en el Lagrangiano de Dirac dado por la corriente débil:

$$\mathcal{L}_{libre} \rightarrow \mathcal{L}_{libre} - g \mathbf{b}_\mu \cdot \mathbf{J}_{debil}^\mu, \quad \mathbf{J}_{debil}^\mu = \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \mathbf{T} \Psi_L. \quad (3.23)$$

De esta forma, los campos *gauge* ( $b^1, b^2, b^3$ ) se acoplan a los dobletes levógiros. No obstante, estos campos no son campos físicos. Luego, para entender realmente la interacción débil,

---

<sup>2</sup>Podría parecer que es debido a que hayamos impuesto la simetría solo sobre ellos, pero en realidad es algo experimentalmente comprobado con experimentos como el de Wu.

vamos a relacionar esos campos con los bosones físicos y ver como estos interaccionan con las corrientes de las partículas físicas. Esto explicará la interacción débil y nos conducirá a la unificación electrodébil.

### 3.2.3. Corriente cargada

La corriente cargada viene mediada por los campos o bosones cargados  $W^\pm$ . Basándonos en el Lagrangiano que hemos obtenido en (3.23), podemos definir la corriente cargada como:

$$\mathcal{L}_{CC} \equiv -g b_\mu^1 J^{1\mu} - g b_\mu^2 J^{2\mu}, \quad J^{i\mu} = \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_i}{2} \Psi_L, \quad (3.24)$$

donde  $i = 1, 2$  y  $\tau_i$  son las matrices de Pauli correspondientes. Así pues, introducimos los campos  $W^\pm$  como combinación lineal,

$$W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (b_\mu^1 \mp i b_\mu^2). \quad (3.25)$$

De forma que podemos sustituir (3.25) en (3.24) y obtener:

$$\mathcal{L}_{CC} = -g W_\mu^+ J^{+\mu} - g W_\mu^- J^{-\mu}, \quad J^{\mu, \pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \tau^\pm \Psi_L, \quad (3.26)$$

donde hemos definido los operadores escalera  $\tau^\pm = 1/2(\tau_1 \pm i\tau_2)$ .

Tomando un par de fermiones  $\Psi, \Psi'$ , podemos escribir las corrientes positiva y negativa de forma más explícita haciendo uso de la proyección de los operadores levógiros (3.19):

$$J^{+\mu} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \bar{\Psi}' \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \Psi, \quad J^{-\mu} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \bar{\Psi} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \Psi'. \quad (3.27)$$

### 3.2.4. Corriente neutra

Siguiendo el razonamiento anterior, podríamos tomar una corriente neutra a partir del campo  $b_\mu^3$  que nos falta:

$$\mathcal{L}_{interaccion} = -g b_\mu^3 J_3^\mu, \quad J_3^\mu = \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_3}{2} \Psi_L, \quad (3.28)$$

pero hay un problema, y es que el bosón  $Z^0$  no se acopla a esta corriente directamente, como sucedía con los  $W^\pm$ , ya que lo hace de forma diferente entre las distintas partículas leptónicas. La idea es combinar los dos bosones físicos neutros:  $Z^0, A^\mu$ ; el primero perteneciente a la interacción débil y el segundo a la EM. Vemos que no podemos considerar simplemente la  $U(1)$  porque los autoestados levógiros donde aplicamos  $SU(2)_L$  no son autoestados del operador  $Q$  (generador de  $U(1)$ ), ya que mezclan campos de cargas diferentes. Luego un Lagrangiano invariante ante  $SU(2)$  no puede ser simétrico bajo una transformación con  $Q$  como generador. Así pues, lo que hacemos es introducir la hipercarga débil  $Y$  como generador del grupo  $U(1)_Y$  e imponer que dicho operador commute con los generadores de  $SU(2)_L$ , es decir  $T = \tau/2$ , para

así tener ambos una base común. Para hacer esto debemos partir de una simetría combinada,  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ . De esta forma, los dobletes levógiros y dextrógiros transformarán como:

$$\Psi_L \rightarrow \Psi'_L = \exp(i\alpha(x)\mathbf{T} + i\beta(x)Y)\Psi_L, \quad \Psi_R \rightarrow \Psi'_R = \exp(i\beta(x)Y)\Psi_R. \quad (3.29)$$

Por analogía con lo discutido anteriormente, el Lagrangiano invariante ante la transformación local tomará la forma:

$$\mathcal{L}_{EW} = \mathcal{L}_{libre} - g\mathbf{J}_T^\mu \cdot \mathbf{b}_\mu - \frac{g'}{2}J_Y^\mu a_\mu, \quad (3.30)$$

donde tenemos un nuevo término proporcional a  $g'$ . Vemos que hemos introducido la corriente  $J_Y^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu Y\Psi$  así como el campo *gauge*  $a_\mu$  correspondiente a la simetría local  $U(1)_Y$  y su constante de acople  $g'/2$ . En el Lagrangiano libre se incluirían el Lagrangiano de Dirac, el del campo electromagnético y el de la interacción débil.

Ahora la idea es expresar estos campos en función de los campos físicos del fotón  $A^\mu$  y el bosón  $Z^0$ . Si introducimos el ángulo de mezcla  $\theta_W$ , tenemos que:

$$A_\mu = a_\mu \cos \theta_W + b_\mu^3 \sin \theta_W, \quad Z_\mu = -a_\mu \sin \theta_W + b_\mu^3 \cos \theta_W, \quad (3.31)$$

y podemos expresar el Lagrangiano en términos de los campos físicos. Mencionemos que otro resultado de esta teoría es la relación de Gell-Mann-Nishima,  $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$ , que nos conduce directamente a la relación entre las corrientes:

$$J_{EM}^\mu = J_3^\mu + \frac{1}{2}J_Y^\mu. \quad (3.32)$$

Ahora, usando (3.31) podemos reescribir el término de corrientes como:

$$\begin{aligned} -gJ_3^\mu b_\mu^3 - \frac{g'}{2}J_Y^\mu a_\mu &= -\left(g \sin \theta_W J_3^\mu + g' \cos \theta_W \frac{J_Y^\mu}{2}\right) A_\mu - \left(g \cos \theta_W J_3^\mu - g' \sin \theta_W \frac{J_Y^\mu}{2}\right) Z_\mu \\ &\equiv -eJ_{EM}^\mu A_\mu - g_Z J_{NC}^\mu Z_\mu. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Si comparamos (3.33) con (3.32) encontramos la relación entre la constante de acople  $e$  con las constantes de la interacción débil:

$$e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W \rightarrow g'/g = \tan \theta_W, \quad (3.34)$$

esta relación entre  $e$ ,  $g$  y  $g'$  es lo que proporciona la unificación de las interacciones electrodébiles.

Por otra parte, podemos determinar la forma concreta de la corriente neutra  $J_{NC}^\mu$  para su interpretación. Tomamos el segundo término de (3.33) y desarrollamos haciendo uso de (3.32) y (3.34), obteniendo:

$$-\left(g \cos \theta_W J_3^\mu - \frac{g'}{2} \sin \theta_W \cdot 2(J_{EM}^\mu - J_3^\mu)\right) Z_\mu = -\frac{e}{\cos \theta_W \sin \theta_W} (J_3^\mu - \sin^2 \theta_W J_{EM}^\mu) Z_\mu, \quad (3.35)$$

de donde podemos despejar la corriente neutra:

$$J_{NC}^\mu = J_3^\mu - \sin^2 \theta_W J_{EM}^\mu, \quad (3.36)$$

identificando como constante de acople,

$$g_Z = \frac{e}{\cos \theta_W \sin \theta_W} = \frac{g}{\cos \theta_W}. \quad (3.37)$$

La corriente  $J_3^\mu$  se puede expresar como  $J_3^\mu = \bar{\Psi}_L \gamma^\mu T_3 \Psi_L$ , donde cabe destacar que se dará siempre entre partículas y sus antipartículas, para que en efecto la corriente pueda ser neutra. Si la expresamos en función de un único campo fermiónico  $\psi_f$ , tenemos:

$$J_{3,f}^\mu = \bar{\psi}_L \gamma^\mu T_3^f \psi_L = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) T_3^f \psi. \quad (3.38)$$

Finalmente, obtenemos para la corriente neutra fermiónica:

$$J_{NC,f}^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu (1/2(1 - \gamma^5) T_{3,f} - \sin^2 \theta_W Q_f) \psi. \quad (3.39)$$

Cabe destacar que la medida de las propiedades de los bosones W y Z se hace de forma experimental por resonancias en procesos de desintegración. Pero con la teoría desarrollada hasta ahora es posible obtener una cota superior e inferior de sus masas. Este desarrollo se incluye en el Anexo B.1.

### 3.3. QCD y Física del Sabor

#### 3.3.1. Interacción fuerte

Yang y Mills intentaron extender su teoría para describir la interacción fuerte y para ello introdujeron la simetría  $SU(3)$ . Esta se desarrolla de forma similar a la  $SU(2)$ , siendo los mediadores de la interacción los gluones (un total de 8 campos vectoriales), correspondiendo a los 8 generadores del grupo de simetría, que en este caso son las matrices de Gell-Mann ( $\lambda_a$ ). Los gluones son de masa nula, dado que la simetría está realizada en forma exacta.

Siguiendo el procedimiento que realizamos para la construcción del Lagrangiano del sector electrodébil, podemos obtener el Lagrangiano de QCD [7, 8]. En el caso del SM, tendríamos el grupo de simetría  $SU(3)_C$ . Podemos ahora denotar un campo fermiónico (quark) por  $q_f^\alpha$ , donde  $\alpha$  identifica el color y  $f$  correspondería al índice de sabor. El Lagrangiano libre para los quarks sería entonces de la forma del Lagrangiano de Dirac, pero sumando sobre el índice de sabor,

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{q}_f^\alpha (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_f) q_{f\alpha}. \quad (3.40)$$

Exigimos entonces que el Lagrangiano (3.40) sea invariante bajo una transformación local del grupo  $SU(3)_C$ , cuyas matrices de transformación pueden escribirse como  $U = e^{i g_s \frac{\lambda_a}{2} \theta_a(x)}$ ,

donde  $g_s$  es la constante de acople correspondiente,  $\lambda_a$  los generadores del grupo de simetría y  $\theta_a(x)$  el parámetro de la transformación. Además, sustituimos en nuestro Lagrangiano la derivada usual por la derivada covariante,

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_s G_\mu, \quad (3.41)$$

siendo  $G_\mu$  un nuevo campo *gauge* bosónico, que es en realidad una matriz hermítica con una simetría  $SU(3)$ , tal que tenemos 8 bosones *gauge* que corresponden con los *gluones*. Y de esta forma obtenemos un Lagrangiano para QCD que se puede escribir como:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{q}_f^\alpha (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_{f\alpha} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^\alpha G_{\alpha}^{\mu\nu}, \quad (3.42)$$

donde el último término es el término cinético de los campos gluónicos que hemos introducido definiendo un tensor  $G_{\mu\nu}$  para el nuevo campo *gauge*,

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu - i g_s [G_\mu, G_\nu]. \quad (3.43)$$

Nótese que esta definición es similar a la del campo EM, pero ahora tenemos el último término adicional que hace que en el Lagrangiano aparezcan nuevas interacciones entre gluones que no teníamos en QED para el fotón. Recordemos que los gluones llevan color y esto hace que puedan interaccionar con ellos mismos. Esta es una de las diferencias notorias entre estas dos teorías.

Mencionemos además que mientras el número cuántico de sabor es asociado a la interacción electrodébil, en la fuerza fuerte se conserva el sabor y es además independiente de éste<sup>3</sup>. Por otra parte, los mediadores de la interacción electrodébil no acoplan color, y para las interacciones fuertes se debe cumplir que los quarks pertenezcan a una representación en tripletes del grupo de simetría, pues el número de color es  $N_C = 3$ . Además, los estados hadrónicos son singletes de color debido a la hipótesis de confinamiento, y los quarks y los antiquarks son estados diferentes, lo cual implica que la representación sea compleja.

Finalmente, hacemos una pequeña comparativa de las dos grandes teorías QED y QCD en la tabla 3.3.

QED	QCD
Grupo gauge $U(1)$	Grupo gauge $SU(3)$
Carga eléctrica ( $Q$ )	Carga de color ( $I_C, Y_C$ )
Fuerza EM	Fuerza fuerte
Bosón mediador: fotón	Bosón mediador: gluón
Dos posibles cargas	3 colores y 3 anticolores
No hay auto acoplamiento	Hay auto acoplamiento

Tabla 3.3: Diferencias entre la QED y la QCD.

<sup>3</sup>Detalles sobre el grupo de sabor  $SU(3)_F$  se presentan en el Anexo B.2.

### 3.3.2. Quark Mixing

Para finalizar el capítulo vamos a matizar algo que hemos dado por supuesto al introducir la constante  $g$  en el desarrollo de la teoría de la interacción débil. Hemos dado a entender que dicha constante era la misma para todas las familias tanto de quarks como leptones, y esto es algo que se denomina *universalidad de las corrientes cargadas*. En la interacción electrodébil debe conservarse el número leptónico, las corrientes cargadas solo pueden darse dentro de una misma familia leptónica, por ejemplo, un electrón solo puede interactuar con un electrón o un neutrino electrónico.

En realidad, para los leptones se puede comprobar experimentalmente que esta constante  $g$  es la misma para todas las familias. Por ejemplo, supongamos dos procesos de desintegración:  $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_e + \nu_\mu$ ,  $\tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau$ . Si calculamos la amplitud de cada proceso, se obtiene algo proporcional al cociente  $\frac{g_\mu^2}{g_\tau^2}$ , cociente que es aproximadamente la unidad. Lo mismo se puede realizar para comprobar la tercera constante y determinar que  $g_e = g_\tau = g_\mu = g$ , lo que hace que las interacciones débiles con corrientes cargadas entre leptones de diferentes familias no estén permitidas.

Sin embargo, esto no es así para los quarks. Si suponemos, por ejemplo, los procesos:  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ,  $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ , el cálculo de las amplitudes nos da valores diferentes que no coinciden con  $g$ . Además de que en el segundo caso estaría siendo permitida una transición entre quarks de distintas familias. La solución a este problema la introdujo Cabibbo, en un primer lugar solo para  $u, d, s$  y luego ya se extendió al resto. La idea fue que, en realidad, los leptones no interaccionaban fuerte, pero los quarks sí y esto les hace tener sabor, como ya hemos visto. Por lo tanto, debemos diferenciar los quarks que son autoestados de la interacción fuerte,  $\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$ , de los que son autoestados de la interacción débil,  $\begin{pmatrix} u \\ d' \\ s' \end{pmatrix}$ . De hecho, estos se pueden relacionar mediante una combinación lineal a partir del ángulo  $\theta_c$  de Cabibbo:

$$\begin{aligned} d' &= d \cos \theta_c + s \sin \theta_c, \\ s' &= -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c. \end{aligned} \quad (3.44)$$

De forma más general se introdujo la matriz CKM (Cabibbo, Kobayashi y Maskawa) [9]:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Esta matriz es una matriz unitaria que contiene información sobre las interacciones débiles que cambian sabor, describe las transiciones de un tipo de quark a otro. Las variaciones en las constantes al trabajar con autoestados de la interacción fuerte podrían describirse con esta.

# Capítulo 4

## Procesos físicos

En este capítulo vamos a calcular la sección eficaz y la anchura de desintegración de dos procesos físicos empleando toda la teoría desarrollada. Estos resultados los compararemos con resultados experimentales. Destacar que se detalla en el Anexo C el desarrollo completo de los cálculos y, por completitud, en el Anexo D se incluyen las reglas de Feynman necesarias en estos cálculos y la demostración de las expresiones empleadas para la sección eficaz de dispersión y la anchura de desintegración. Además, todos los valores para los parámetros que aparecen en figuras y tablas son tomados de [4], detallados también en el Anexo E.

### 4.1. Proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

El primer proceso a estudiar será uno regido por la QED, ya que se trata de una interacción entre un electrón y un positrón para dar un muón y un antimuón mediante el intercambio de un fotón. El diagrama de Feynman que vamos a emplear es el mostrado en la Figura 4.1.

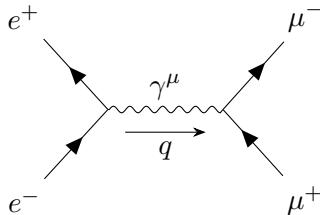


Figura 4.1: Diagrama de Feynman del proceso  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .

El objetivo es determinar la sección eficaz, que indica la probabilidad de la interacción y viene dada por:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(1, 2 \rightarrow 3, 4) = \frac{1}{64\pi^2 E_{CDM}^2} \frac{|\mathbf{p}|}{|\mathbf{q}|} |\mathcal{M}_{fi}|^2, \quad (4.1)$$

simplificada para el caso de interacción de dos partículas en el estado inicial y final desde el sistema de centro de masas (CDM) y asumiendo que las partículas que colisionan tienen la misma masa  $m_1 = m_2 = m$ . En esta expresión  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  son los momentos final e inicial,  $E_{CDM}$  la energía del sistema y  $|\mathcal{M}_{fi}|$  la amplitud invariante de scattering.

Siguiendo los cálculos en el Anexo C.1, obtenemos el módulo de la amplitud al cuadrado  $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ , que asumiendo la masa del electrón despreciable ( $m_e \approx 0$ ), nos queda como:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 \approx \frac{e^4}{E^2} [E^2(1 + \cos^2 \theta) + m_\mu^2(1 - \cos^2 \theta)].$$

Sustiyendo en (4.1), teniendo en cuenta que  $\mathbf{p} = p_\mu = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$  y  $\mathbf{q} = p_e \approx E$  e integrando sobre el ángulo sólido, obtenemos:

$$\sigma \approx \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{CDM}^2} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{E_{CDM}^2}} \left( 1 + \frac{2m_\mu^2}{E_{CDM}^2} \right), \quad (4.2)$$

donde  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ .

Podemos entonces representar la sección eficaz en el rango de energías de  $[200, 500]$  (MeV). Los resultados se muestran en la Figura 4.2. Podemos ver que la sección eficaz vale cero para cualquier valor de la energía menor que dos veces la masa del muón, tiene un máximo y posteriormente decrece.

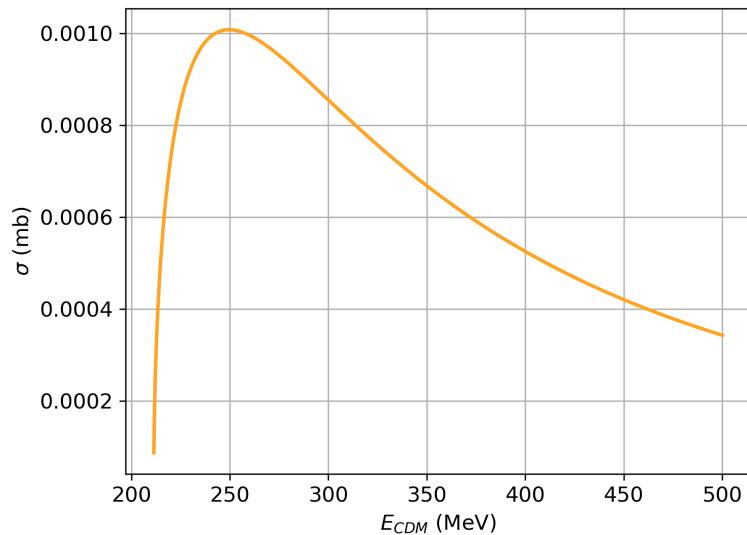


Figura 4.2: Sección eficaz del proceso  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  con la aproximación  $m_e \approx 0$ .

## 4.2. Proceso $b \rightarrow cl\nu$

En esta sección vamos a analizar un proceso dado por la interacción electrodébil, donde se da cambio de sabor entre un quark  $b$  y un quark  $c$  a través de un bosón  $W^\pm$ , desintegrandóse en un leptón  $l$  y un neutrino  $\nu$  que tomaremos de forma genérica para hacer los cálculos, Figura 4.3.

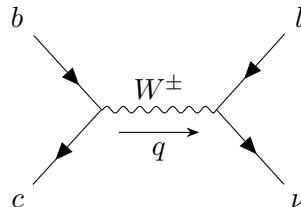


Figura 4.3: Diagrama de Feynman del proceso  $b \rightarrow cl\nu$ .

El objetivo es determinar la anchura de desintegración que viene dada por la expresión:

$$d\Gamma(i \rightarrow f) = \frac{1}{2M} |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P - p_f) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}, \quad (4.3)$$

donde  $M$  es la masa de la partícula inicial;  $P, p_f$  los momentos totales inicial y final respectivamente y  $p_i, E_i$  momentos y energías de cada partícula involucrada.

Siguiendo los cálculos del Anexo C.2, calculamos el módulo de la amplitud al cuadrado  $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ , donde tomamos el sistema de referencia en el que el quark  $b$  está en reposo y consideraremos que  $q^2 \ll m_w^2$ , obteniendo finalmente:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{g^4 |V_{cb}|^2}{m_w^4} (m_b E_\nu) \frac{1}{2} (m_b^2 - 2m_b E_\nu - m_c^2 - m_l^2).$$

Sustituyendo en (4.3) y operando, obtenemos:

$$\frac{d\Gamma}{dE_l} = \frac{32G_F^2 |V_{cb}|^2}{2(4\pi)^3} \left[ (m_b^2 - m_c^2 - m_l^2) \frac{1}{2} (E_\nu^{+2} - E_\nu^{-2}) - \frac{2}{3} m_b (E_\nu^{+3} - E_\nu^{-3}) \right], \quad (4.4)$$

donde  $\frac{g^2}{m_w^2} = \frac{8G_F}{\sqrt{2}}$ , siendo  $G_F$  la constante de Fermi. Nótese que la expresión está en función de  $E_l$ , la energía asociada al leptón, ya que las variables  $E_\nu^\pm$  (que introducimos en la integración) también están expresadas en función de  $E_l$  como:

$$E_\nu^\pm = \frac{\frac{1}{2}(m_b^2 - m_c^2 + m_l^2) - m_b E_l}{m_b - E_l \mp \sqrt{E_l^2 - m_l^2}}. \quad (4.5)$$

El rango de valores en los que tiene interpretación física la expresión (4.4) viene dado por los límites donde se anula:  $E_\nu^+ = E_\nu^-$  o  $E_\nu^+ = 0 = E_\nu^-$ . El primer caso nos conduce a  $E_l = m_l \equiv E_{l,inf}$  y el segundo a  $E_l = \frac{1}{2m_b}(m_b^2 - m_c^2 + m_l^2) \equiv E_{l,sup}$ . En la Figura 4.4 representamos la expresión (4.4) en función de la energía del leptón  $E_l$  (incluimos también el caso del neutrino  $m_l = 0$ ).

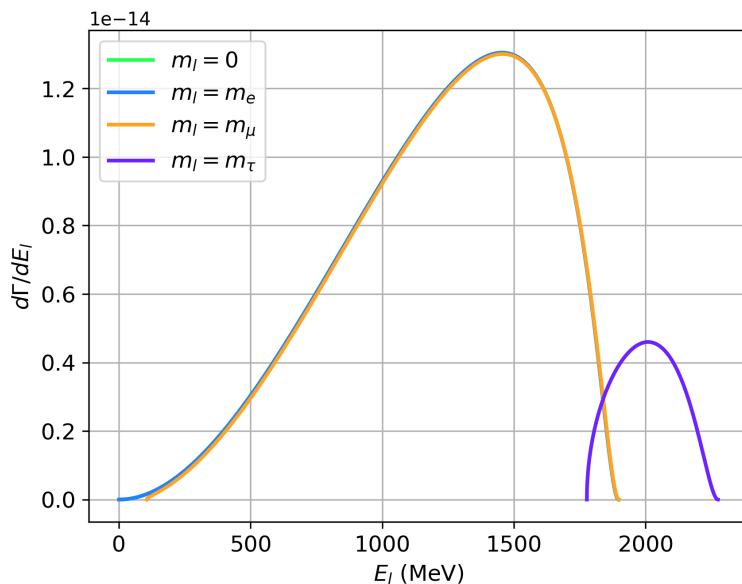


Figura 4.4: Anchura de desintegración entre el diferencial de la energía del leptón del proceso  $b \rightarrow cl\nu$ . Se representa simultáneamente para los diferentes leptones.

Vemos que en el caso de  $m_l = m_e$  o  $m_l = m_\mu$ , las gráficas son muy parecidas. El máximo no coincide con la masa de las partículas, ya que  $E_l$  se toma desde el quark  $b$ , luego también se tiene en cuenta su momento  $\mathbf{p}_l$ . Cuando  $m_l = m_\tau$ , el máximo se desplaza a  $E_l$  superior, además de que la gráfica alcanza valores mucho menores (un orden de magnitud menos), luego es un proceso mucho menos probable y que ocurre a energías  $E_l$  superiores. Finalmente, si  $m_l = m_\nu \approx 0$ , tenemos un proceso sin sentido físico al tratarlo con un bosón  $W^\pm$  como intermediario de la interacción, ya que si tuviésemos dos neutrinos al final, no se conservaría la carga en el cambio de sabor. Es por ello que su probabilidad es nula y no se ve en la gráfica.

## 4.3. Resultados experimentales y anomalías en física del sabor

### 4.3.1. Anchura de desintegración leptónica

En primer lugar, vamos a calcular la anchura de desintegración dada por (4.4) para los tres leptones posibles (electrón, muón, tau). Emplearemos el programa *phyton* (*librería scipy 1.12.0*) para hacer la integral numéricamente. Además, para poder comparar los resultados  $\Gamma_{teo}^i$  con resultados experimentales  $\Gamma_{exp}^i$  del Particle Data Group, relacionaremos los «*Branching-Ratios*» (BR) de cada uno de los canales de desintegración  $i$ , con las anchuras de desintegración a través de los tiempos de vida  $\tau$  de las partículas que se desintegran:

$$\Gamma^i = \frac{\hbar}{\tau} BR^i. \quad (4.6)$$

Los resultados se muestran en la Tabla 4.1.

$m_l$	$\Gamma_{teo}^i (\times 10^{-12} \text{ MeV})$	$\text{BR}_{exp}$	$\Gamma_{exp}^i (\times 10^{-12} \text{ MeV})$
$m_e$	$12,86 \pm 0,04$	$2,24 \pm 0,09 \%$	$9,7 \pm 0,4$
$m_\mu$	$12,76 \pm 0,03$	$2,24 \pm 0,09 \%$	$9,7 \pm 0,4$
$m_\tau$	$1,59 \pm 0,03$	$1,05 \pm 0,23 \%$	$4,5 \pm 1,0$

Tabla 4.1: Anchuras de desintegración para el proceso  $b \rightarrow cl\nu$  según el leptón que interviene. Resultados teóricos y experimentales.

Claramente, los valores para el electrón y muón difieren de los experimentales en unos  $7\sigma$ , lo cual era de esperar dado que el proceso experimental no involucra solamente a los quarks; ya que en la naturaleza no podemos encontrar los quarks aislados como lo hemos considerado en nuestros cálculos. En el caso del tau los resultados difieren en unos  $3\sigma$ . Sin embargo, si comparamos cualitativamente, presentan un 30 % de error relativo los dos primeros casos y un 60 % el último (que es lógico, ya que presenta mucho error experimental).

### 4.3.2. Desintegración de mesones

En este apartado estudiaremos tres procesos:  $\bar{B}^0 \rightarrow D^+ l^- \bar{\nu}_l$ ,  $\bar{B}^0 \rightarrow D^{*+} l^- \bar{\nu}_l$ , y  $B_c^- \rightarrow J/\psi l^- \bar{\nu}_l$ . En los tres tiene lugar un cambio de sabor de un quark  $b$  a un quark  $c$ , por lo que

utilizaremos la aproximación de tomar el proceso de desintegración con los quarks y así poder emplear la expresión (4.4). Destacar que esta aproximación no es correcta, lo asumimos para poder hacer un estudio teórico de estos procesos.

Concretamente, calcularemos los cocientes de BR:

$$R_{D^{(*)}} = \frac{BR(\bar{B}^0 \rightarrow D^{(*)+} \tau^- \bar{\nu}_\tau)}{[BR(\bar{B}^0 \rightarrow D^{(*)+} \mu^- \bar{\nu}_\mu) + BR(\bar{B}^0 \rightarrow D^{(*)+} e^- \bar{\nu}_e)]/2},$$

$$R_{J/\psi} = \frac{BR(B_c^- \rightarrow J/\psi \tau^- \bar{\nu}_\tau)}{BR(B_c^- \rightarrow J/\psi \mu^- \bar{\nu}_\mu)}. \quad (4.7)$$

Estos cocientes son muy convenientes en el análisis ya que algunas incertidumbres teóricas y experimentales se cancelan en los mismos.

$R$	$R_{teo}$	$R_{SM}$	$R_{exp}$
$R_D$	$0,237 \pm 0,003$	$0,298 \pm 0,004$	$0,356 \pm 0,029$
$R_{D^*}$	$0,209 \pm 0,003$	$0,254 \pm 0,005$	$0,284 \pm 0,013$
$R_{J/\psi}$	$0,1980 \pm 0,0039$	$0,2582 \pm 0,0038$	$0,71 \pm 0,17 \pm 0,18$

Tabla 4.2: Cocientes de BR para diferentes desintegraciones. Resultados calculados teóricamente (aproximados  $R_{teo}$  y exactos  $R_{SM}$ ) y experimentales  $R_{exp}$ .

Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 4.2. En primer lugar, en todos los procesos analizados podemos ver que nuestros resultados siguen la misma tendencia que los que se obtienen en el SM, es decir,  $R_D$  es mayor que  $R_{D^*}$  y  $R_{D^*}$  es similar a  $R_{J/\psi}$ .

Si comparamos nuestros valores teóricos con los experimentales, encontramos una discrepancia de más  $4\sigma$  para  $R_D$  y  $R_{D^*}$ , y de casi  $3\sigma$  para  $R_{J/\psi}$ . Estas discrepancias de nuestros cálculos con respecto a la medida experimental también aparecen con respecto a las predicciones en el SM, aunque menores en este caso. De hecho, estas son anomalías en la física del sabor que se están investigando actualmente.

Las discrepancias pueden deberse tanto a falta de precisión experimental como a fallos en los cálculos teóricos. En dos artículos de *Nature* [10, 11] donde se habla de la anomalía de los mesones  $B$ , concretamente de la desintegración aquí tratada, que es la semileptónica y que involucra la creación del quark  $c$ , se comenta la posibilidad de una física más allá del SM. Se hipotetiza sobre la existencia de los leptoquarks (LQ), partículas predichas por muchas teorías de gran unificación (GUT). Un quark se puede transformar en un leptón cargado o en un neutrino vía un leptoquark. La adición de estas desintegraciones al SM podría explicar el porqué los valores observados son mayores que las predicciones. También se habla de la existencia de una nueva interacción mediada por un bosón  $Z'$  que viola la universalidad leptónica; este nuevo bosón  $Z'$  (a diferencia del bosón  $Z$ ) se acoplaría a los leptones de forma diferente en función de su sabor (se desintegraría en leptones tau con mayor probabilidad que en muones o en electrones).

# Capítulo 5

## Conclusiones

En el trabajo se han abordado los conceptos fundamentales que constituyen el Modelo Estándar de la física de partículas.

El primero de ellos es la invariancia *gauge*, la cual se ha podido demostrar que tiene su origen en la teoría clásica del electromagnetismo, como una discordancia entre los grados de libertad del sistema y los estados físicos. Estudiamos entonces cómo cuantizar el campo electromagnético en el marco de la QFT y como imponer la invariancia ante transformaciones locales y así obtener el Lagrangiano de la QED, que da las interacciones entre fermiones y el campo electromagnético.

Otro concepto fundamental son las simetrías. Las transformaciones locales mencionadas pertenecen a los diferentes grupos de simetría:  $U(1)$ ,  $SU(2)$ ,  $SU(3)$  y la invariancia de los Lagrangianos ante las mismas supone simetrías, que por el Teorema de Noether nos conducen a corrientes de interacción conservadas.

Ha quedado demostrado que las simetrías locales no se pueden dar sin la invariancia *gauge*, y ambas herramientas son imprescindibles para describir, no solo las partículas fundamentales, sino las interacciones de las mismas, con los campos bosónicos mediadores de las diferentes fuerzas, que aparecen de forma natural al imponer las simetrías.

No obstante, aquí debemos matizar que en el Modelo Estándar como teoría cuántica de campos las partículas no tienen masa y se hace necesario la ruptura espontánea de simetría que da lugar al campo de *Higgs*, y es responsable de aportar masa a los bosones y fermiones.

En este trabajo se han detallado las interacciones en QED (grupo  $U(1)$ ) y la interacción débil (grupo  $SU(2)$ ), además de demostrar la unificación de ambas en la denominada interacción electrodébil. En base a los desarrollos anteriores, se ha descrito de forma más breve la interacción fuerte (grupo  $SU(3)$ ), introduciendo los conceptos de sabor y color.

Finalmente, se han analizado dos procesos físicos, uno regido por la QED y otro por la interacción electrodébil, para analizar así un cambio de sabor. Esto nos ha permitido calcular los cocientes de desintegraciones de tres procesos físicos reales de desintegración de mesones, reproduciendo una discordancia con los datos experimentales, y acabando así el trabajo con una evidencia de la necesidad de modelos más allá del Modelo Estándar.

# Bibliografía

- [1] S. Peñaranda. Notas de Electrodinámica Cuántica. 2008.
- [2] A. Pich. The Standard model of electroweak interactions. In *2006 European School of High-Energy Physics*, pages 1–49, 2007.
- [3] M. J. Herrero. The Standard model. *NATO Sci. Ser. C*, 534:1–59, 1999.
- [4] R. L. Workman et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2022:083C01, 2022.
- [5] I. Van Vulpen. The Standard Model Higgs Boson. 2013.
- [6] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [7] M. Gell-Mann. A Schematic Model of Baryons and Mesons. *Phys. Lett.*, 8:214–215, 1964.
- [8] G. Zweig. An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 1. 1 1964.
- [9] N. Cabibbo. Unitary Symmetry and Leptonic Decays. *Phys. Rev. Lett.*, 10:531–533, 1963.
- [10] F. Archilli, MO. Bettler, P. Owen, et al. Flavour-changing neutral currents making and breaking the standard model. *Nature*, 546:221–226, 2017.
- [11] G. Ciezarek, M. Franco Sevilla, B. Hamilton, et al. A challenge to lepton universality in B-meson decays. *Nature*, 546:227–233, 2017.
- [12] W. E. Burcham and M. Jobes. *Nuclear and Particle Physics*. John Wiley and Sons, Inc., Harlow, Essex, England, 1995.

# Anexos A

## Desarrollos matemáticos del Capítulo 2

### A.1. Ecuaciones de Maxwell en forma covariante

En primer lugar, sustituimos los campos eléctrico y magnético en función del potencial  $A^\mu \equiv (V, \mathbf{A})$  en las ecuaciones de Maxwell (2.1). Comenzamos probando que las ecuaciones homogéneas se verifican <sup>1</sup>:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla \times \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \right) = -\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

y que las ecuaciones no homogéneas se transforman:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \rightarrow \nabla \cdot \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \right) = \square V - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = \rho,$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \rightarrow \nabla \times \left( \nabla \times \mathbf{A} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \right) = \square \mathbf{A} + \nabla \left( \frac{\partial V}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{A}) \right) = \mathbf{j},$$

siendo  $\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$  el operador D'Alembertiano.

Al transformarse, no son covariantes, y por ello debemos introducir el tensor  $F^{\mu\nu}$  que se da en (2.2). Para el caso de las no homogéneas:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j},$$

el cuadrvector  $j^\mu$  nos permite reescribir las ecuaciones anteriores como:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \rightarrow \partial_\mu F^{\mu 0} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial A^0}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^0} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\mu} E^\mu = j^0,$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \rightarrow \partial_\mu F^{\mu i} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial A^i}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^i} \right) = j^i,$$

donde se ha utilizado:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial A^i}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{\partial A^i}{\partial x^0} - \frac{\partial A^0}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial A^i}{\partial x^j} - \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \right) = -\frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial A^i}{\partial x^j} - \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \right),$$

si tomamos por ejemplo  $i = 1$ :

$$-\frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial A^i}{\partial x^j} - \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \right) = -\frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y,$$

se haría de forma equivalente para el resto de coordenadas.

---

<sup>1</sup>Recordamos que  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$  y  $\nabla \times (\nabla V) = 0$ .

Para las homogéneas:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

en la primera, es inmediato comprobar que:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$

lo que es equivalente a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) = \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0,$$

una expresión idéntica a  $\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$  si tomamos  $\lambda = 1, \mu = 2, \nu = 3$ .

Para la segunda expresión podemos tomar el campo  $\mathbf{B} = (B_x, 0, 0)$  y comprobar que la ecuación es equivalente a  $\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$ . Entonces:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0,$$

lo cual es igual que escribir:

$$\partial_2 F_{30} - \partial_3 F_{20} - \partial_0 F_{32} = \partial_2 F_{03} + \partial_3 F_{20} + \partial_0 F_{32},$$

que sería tomar  $\lambda = 2, \mu = 3, \nu = 0$ . Se haría de forma equivalente para el resto de coordenadas.

## A.2. Ecuaciones de Maxwell e invariancia *gauge* de (2.5)

Podemos demostrar que recuperamos la ecuación:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu.$$

Para ello, recurrimos a las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = 0, \tag{A.1}$$

reescribimos (2.5) como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) - j^\mu A_\mu,$$

tal que aplicando (A.1) el término de la derecha queda como:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\partial_\mu F^{\mu\nu},$$

y, por otra parte, es inmediato ver que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -j^\nu,$$

quedando, pues, demostrado.

Ahora, vamos a modificar dicha densidad Lagrangiana en base al *gauge*  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Consideremos únicamente la parte del Lagrangiano que corresponde al campo electromagnético libre:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial^\nu A^\mu \partial_\mu A_\nu + \partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu),$$

entonces podemos sustituir los términos:

$$-\partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu = -\partial^\mu (A^\nu \partial_\nu A_\mu) + A^\nu \partial_\nu (\partial^\mu A_\mu),$$

$$-\partial^\nu A^\mu \partial_\mu A_\nu = -\partial^\nu (A^\mu \partial_\mu A_\nu) + A^\mu \partial_\mu (\partial^\nu A_\nu),$$

pero en realidad, el segundo término del segundo sumando de ambas expresiones es nulo por la condición del *gauge*, aunque lo dejaremos, porque esta es la modificación del Lagrangiano que necesitamos. Entonces reagrupando:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}[2\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu (2A^\nu \partial_\nu A_\mu)] = -\frac{1}{2}\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu,$$

donde el segundo término del paréntesis es nulo por el Teorema de Noether, que asegura que si a un Lagrangiano se le añade una derivada total de cualquier función, este permanece invariante <sup>2</sup>. Entonces nos queda finalmente que la densidad Lagrangiana para el campo electromagnético empleando el *gauge* de Lorentz es (2.10).

### A.3. Propagador del campo EM

En primer lugar, a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange sobre el Lagrangiano (2.12), obtenemos:

$$\square A^\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu. \quad (\text{A.2})$$

Entonces vamos a emplear el método de Green para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con condiciones iniciales. Precisamente la función de Green que debemos introducir es lo que también se conoce como propagador del sistema físico  $D_{\mu\nu}$ .

Reescribimos la expresión (A.2) introduciendo el tensor métrico:

$$\left[g^{\lambda\mu}\square - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\lambda \partial^\mu\right] A_\mu = j^\lambda,$$

asumiendo la existencia del propagador:

$$\left[g^{\lambda\mu}\square - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\lambda \partial^\mu\right] D_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = g_\nu^\lambda \delta^4(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

tal que realizamos la transformada de Fourier para pasar al espacio de momento <sup>3</sup>:

$$-\left[g^{\lambda\mu}k^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\lambda k^\mu\right] D_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = g_\nu^\lambda,$$

siendo la forma más sencilla del propagador un tensor de rango 2:

---

<sup>2</sup>  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial^\mu \phi_\mu \iff \mathcal{L}' = \mathcal{L}$ .

<sup>3</sup>  $\text{TF: } f(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}$

$$D_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = a g_{\mu\nu} + b k_\mu k_\nu.$$

Utilizando esta expresión podemos encontrar  $a, b$  tal que se preserve la invariancia Lorentz:

$$g_\nu^\lambda = -a k^2 g_\nu^\lambda + \left[ a \left( 1 + \frac{1}{\xi} \right) - \frac{1}{\xi} b k^2 \right] k^\lambda k_\nu,$$

e igualando términos, vemos que tiene solución:  $a = -\frac{1}{k^2}$  y  $b = \frac{1-\xi}{k^4}$ . Luego, hemos encontrado el propagador del campo  $A^\mu$ , es decir, el propagador del fotón:

$$D_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{k^2} \left[ g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]. \quad (\text{A.3})$$

Aunque a causa de haber cambiado al espacio de  $\mathbf{k}$ , existe un problema al escribir el propagador en el espacio de coordenadas relacionado con una singularidad en el plano complejo, y tendríamos que aplicar la Teoría de residuos. Por esta razón, se emplea el propagador de Feynman que introduce una modificación (que no afecta a los resultados físicos finales cuando calculamos un observable). Este propagador es el que se da en (2.13).

#### A.4. Hamiltoniano y momento a partir de los estados físicos

La condición (2.19) aplicada sobre (2.20), nos conduce a:

$$c_0 + c_3 = 0 \quad (\text{A.4})$$

*Dem.*

Al aplicar la relación tenemos que:

$$0 = (\partial_\mu A^\mu)^+ |\psi\rangle = -i \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_q}} \sum_{\lambda, \lambda'} c_\lambda q_\mu \epsilon^\mu(\mathbf{q}, \lambda') a_{\mathbf{q}, \lambda'} a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger |0\rangle,$$

si desarrollamos:

$$-\frac{i}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_\lambda \zeta_\lambda c_\lambda k_\mu \epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda) |0\rangle = 0 \rightarrow i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} (c_0 + c_3) |0\rangle = 0 \rightarrow c_0 + c_3 = 0.$$

*QED*

Al encontrar esta ligadura, solucionamos el problema de los grados de libertad y vamos a verlo en detalle. Un estado físico cualquiera  $|\psi\rangle$  será una combinación lineal de  $|\psi_T\rangle$ , estados transversales creados por  $a_{\mathbf{k},1}^\dagger$  y  $a_{\mathbf{k},2}^\dagger$ ; y  $|\phi\rangle$ , constituido por los estados no físicos:  $|\psi\rangle = |\psi_T\rangle + c|\phi\rangle$ . Donde:  $|\psi_T\rangle = \sum_{\lambda=1,2} c_\lambda a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger |0\rangle$ ,  $|\phi\rangle = (a_{\mathbf{k},0}^\dagger - a_{\mathbf{k},3}^\dagger) |0\rangle$ .

De esta forma se cumplirán dos propiedades necesarias:

1. Solo contribuyen a la norma los estados físicos.
2. La energía y momento solo se debe a los estados físicos.

Con estas propiedades se puede afirmar que en realidad  $|\psi\rangle \sim |\psi_T\rangle$ , y que se puede elegir cualquier  $\psi$ , ya sea transversal o no, pues la elección no tiene consecuencias físicas. La primera queda expresada por las relaciones:

$$\begin{aligned}\langle\phi|\phi\rangle &= 0 \\ \langle\psi_T|\phi\rangle &= 0 \rightarrow \langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi_T|\psi_T\rangle\end{aligned}\tag{A.5}$$

*Dem.*

$$\begin{aligned}\langle\phi|\phi\rangle &= \langle 0 | (a_{\mathbf{k},0} - a_{\mathbf{k},3})(a_{\mathbf{k},0}^\dagger - a_{\mathbf{k},3}^\dagger) | 0 \rangle = \langle 0 | (a_{\mathbf{k},0}a_{\mathbf{k},0}^\dagger + a_{\mathbf{k},3}a_{\mathbf{k},3}^\dagger) | 0 \rangle \\ &\rightarrow \langle 0 | ([a_{\mathbf{k},0}, a_{\mathbf{k},0}^\dagger] + [a_{\mathbf{k},3}, a_{\mathbf{k},3}^\dagger]) | 0 \rangle = 0 \\ \langle\psi_T|\phi\rangle &= \langle 0 | (c_1^*a_{\mathbf{k},1} + c_2^*a_{\mathbf{k},2})(a_{\mathbf{k},0}^\dagger - a_{\mathbf{k},3}^\dagger) | 0 \rangle = 0\end{aligned}$$

*QED*

Para la segunda debemos considerar la forma del hamiltoniano y el momento en función de los operadores creación y destrucción:

$$\begin{aligned}H &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}} \left( -a_{\mathbf{k},0}^\dagger a_{\mathbf{k},0} + \sum_{\lambda=1,2,3} a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda} \right), \\ \mathbf{P} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathbf{k} \left( -a_{\mathbf{k},0}^\dagger a_{\mathbf{k},0} + \sum_{\lambda=1,2,3} a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda} \right),\end{aligned}$$

tal que los elementos de matriz de estos operadores siempre contendrán la combinación  $(-a_{\mathbf{k},0}^\dagger a_{\mathbf{k},0} + a_{\mathbf{k},3}^\dagger a_{\mathbf{k},3})$  entre dos estados físicos, y resulta que esto se hace nulo:

$$(a_{\mathbf{k},0} - a_{\mathbf{k},3}) |\psi\rangle = c(a_{\mathbf{k},0} - a_{\mathbf{k},3}) |\phi\rangle = c(a_{\mathbf{k},0} - a_{\mathbf{k},3})(a_{\mathbf{k},0}^\dagger - a_{\mathbf{k},3}^\dagger) |0\rangle = 0,$$

lo que nos lleva a que solo los modos transversales contribuyen a la energía y momento, solucionándose entonces el problema anterior de la norma negativa.

*Dem.*

$$\begin{aligned}\langle\psi'|(-a_{\mathbf{k},0}^\dagger a_{\mathbf{k},0} + a_{\mathbf{k},3}^\dagger a_{\mathbf{k},3})|\psi\rangle &= \langle\psi'|(-a_{\mathbf{k},0}^\dagger a_{\mathbf{k},0} + a_{\mathbf{k},0}^\dagger(a_{\mathbf{k},0} - a_{\mathbf{k},3}) + a_{\mathbf{k},3}^\dagger a_{\mathbf{k},3})|\psi\rangle \\ &\rightarrow \langle\psi'|(-a_{\mathbf{k},0}^\dagger a_{\mathbf{k},3} + a_{\mathbf{k},3}^\dagger a_{\mathbf{k},3})|\psi\rangle = -\langle\psi'| (a_{\mathbf{k},0}^\dagger - a_{\mathbf{k},3}^\dagger) a_{\mathbf{k},3} |\psi\rangle = 0\end{aligned}$$

*QED*

# Anexos B

## Desarrollos matemáticos del Capítulo 3

### B.1. Cotas de las masas de los bosones W y Z

Asumiremos desconocidas las masas y el ángulo  $\theta_W$ , y conocidas las constantes  $e, G_F, v, \alpha_{EM}$  (carga del electrón, constante de Fermi, valor esperado en el vacío del campo de *Higgs* y constante de acomplio EM).

Debemos considerar que del estudio de la vida media del muón se tiene una relación de la constante de Fermi con  $g$ :

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}, \quad (\text{B.1})$$

entonces de (B.1) y haciendo uso de (3.34) y (2.29), obtenemos:

$$M_W = \sqrt{\frac{\alpha_{EM}\pi}{\operatorname{sen}^2\theta_W G_F \sqrt{2}}}. \quad (\text{B.2})$$

Además, sabemos que se pueden expresar las masas en función de  $v$  (mecanismo de *Higgs*):

$$\begin{aligned} M_W &= \frac{1}{2}vg, \\ M_Z &= \frac{1}{2}v\sqrt{g^2 + g'^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

de donde usando (3.34) encontramos una relación entre las masas de ambos bosones:

$$M_Z = \frac{M_W}{\cos\theta_W} = \frac{M_W}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta_W}}. \quad (\text{B.4})$$

Así pues, basta con determinar  $M_W$  y  $\operatorname{sen}^2\theta_W$  para dar los valores. Tenemos que la cota superior será  $\operatorname{sen}^2\theta_W \rightarrow 0$  y la cota inferior será  $\theta_W = 45^\circ$ , ya que es el ángulo que minimiza ambas expresiones a la vez. Obtenemos entonces:

$$\begin{aligned} 52,74 \text{ GeV/c}^2 &\leq M_W \leq 117,89 \text{ GeV/c}^2, \\ 74,57 \text{ GeV/c}^2 &\leq M_Z \leq 124,27 \text{ GeV/c}^2. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Obviamente este es un rango de energías para estas masas que nos permitiría acotar sus valores y podría ser útil en caso de no haber encontrado aún estas partículas experimentalmente. A día de hoy conocemos las masas del  $W$  y el  $Z$ , que están en este rango.

## B.2. Sabor y color. Representaciones de mesones y bariones

Supongamos el subgrupo  $SU(3)_F$ , es decir, el del sabor. La representación fundamental del mismo viene dada por los operadores  $\lambda_3 \equiv \frac{I_3}{2}$  y  $\lambda_8 \equiv \frac{Y}{\sqrt{3}}$ , ya que son los que se pueden diagonalizar y, por tanto, será de rango 2.

Esta representación vendrá dada por los quarks  $u, d, s$  y otra para sus antipartículas, que tendrán todos los números cuánticos contrarios, salvo el isoespín  $I$  y el momento  $J$ . Diremos, pues, que el sabor de estos tres quarks lo determinarán los valores de  $I_3, Y$  (iseospín e hipercarga), siendo  $Y = B + s$  (donde  $s$  es la extrañeza).

A partir de esta representación se pueden constituir los bariones ( $qqq$ ) (y antibariones de la conjugada de la representación) y mesones ( $q\bar{q}$ ). Los mesones serán una composición de subespacios:  $3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$ , cada uno de los cuales dados por un par quark-antiquark de tipo  $u, d, s$ . Los bariones serán una composición  $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$ . Se representan en las Figuras B.1 y B.2 los mesones y bariones del grupo de simetría  $SU(3)_F$ .

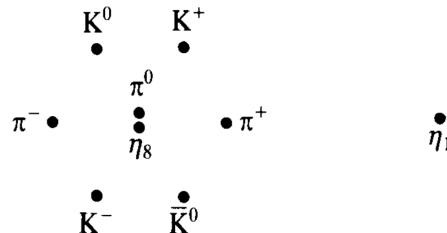


Figura B.1: Mesones  $J^P = 0^-, 1^-$  a partir del grupo  $SU(3)_F$  [12].

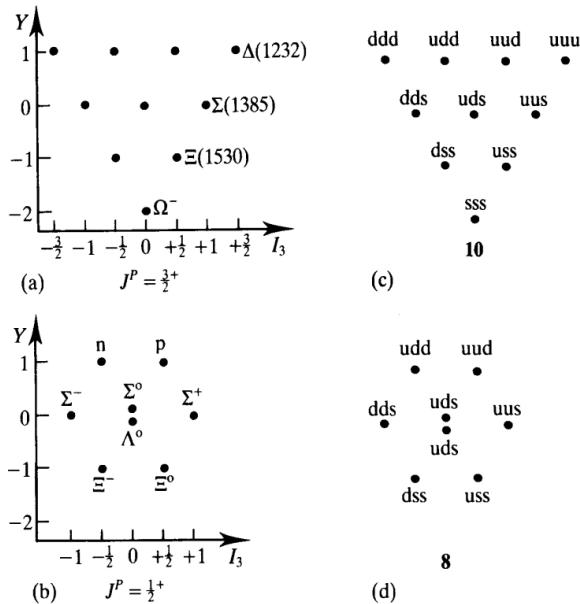


Figura B.2: Bariones  $J^P = 3/2^+, 1/2^+$  a partir del grupo  $SU(3)_F$  [12].

Puesto que existen 3 familias de quarks, nos faltan introducir los quarks pesados, denominados así por tener masas mucho mayores que el resto. El primero en descubrirse fue el  $c$  (charm) tras el descubrimiento de los procesos inhibidos y la regla de OZI, seguidamente se descubrieron el  $b$  (bottom) y  $t$  (top) (aunque inicialmente se denominaron beauty and truth).

Los descubrimientos se adaptaron a la teoría incrementando la dimensión de los grupos hasta el  $SU(6)_F$ . De esta forma se fueron incrementando el número de operadores diagonalizables, que darían el total de números cuánticos que determinan el sabor de una partícula:  $I, I_3, s, c, b, t$ ; Tabla B.1.

	d	u	s	c	t	b
I	1/2	1/2	0	0	0	0
$I_3$	-1/2	1/2	0	0	0	0
s	0	0	-1	0	0	0
c	0	0	0	1	0	0
b	0	0	0	0	1	0
t	0	0	0	0	0	1

Tabla B.1: Sabor de los quarks.

Por otra parte, el color surge a partir de un problema de simetría en las funciones de onda. Por ejemplo, en el caso de los bariones, si analizamos con detalle la composición en quarks de cada partícula, resultan combinaciones lineales simétricas, es decir, la función de onda relativa al sabor es simétrica. Pero el problema es que la parte espacial y de espín también lo son, lo que conduce a una función de onda total simétrica para un fermión, algo que no puede darse.

Es por ello que se decidió dar un grado de libertad extra a los quarks, es decir, a partir de un único quark se darían tres que tendrían el mismo sabor pero diferente color:  $q_R, q_G, q_B$  (y para los antiquarks sus respectivos anticolores). En términos matemáticos, el problema de la simetría estaría resuelto, ya que supondría añadir una función antisimétrica para el caso de los bariones:  $\Psi_{color} = \frac{1}{\sqrt{6}}(RGB + BRG + GBR - RBG - GRB - BGR)$  y una simétrica para el caso de los mesones:  $\Psi_{color} = \frac{1}{\sqrt{3}}(R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B})$ .

Entonces, los quarks están constantemente cambiando de color, pero siempre con una probabilidad de  $1/3$  de tener un color determinado. Es decir, para no violar el principio de exclusión de Pauli, nunca pueden darse dos o más quarks con el mismo sabor y mismo color unidos. Y esta es la explicación cualitativa de lo que es un gluón (la cuantitativa se deduce de la simetría local en el grupo) y de cómo funciona la interacción fuerte: cada vez que un quark cambia de color, lo que hace es intercambiar un gluón con otro quark, que será un mesón dado por un color y un anticolor.

De una manera más formal, estaríamos ante un grupo  $SU(3)_C$  de color. Donde en este caso se diagonalizan los operadores  $I_{3C} \equiv \frac{\lambda_3}{2}$  e  $Y_C \equiv \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}}$ , isoespín e hipercarga de color respectivamente. Así pues, cada color vendrá dado por estos números cuánticos:

$$\begin{aligned} R &\equiv (I_C = 1/2, I_{3C} = 1/2, Y_C = 1/3), \\ G &\equiv (I_C = 1/2, I_{3C} = -1/2, Y_C = 1/3), \\ B &\equiv (I_C = 0, I_{3C} = 0, Y_C = -2/3), \end{aligned} \tag{B.6}$$

y los anticolores justo los opuestos.

Al hacer las combinaciones de esta representación fundamental (igual que en los casos de bariones y mesones), aparecen las funciones de onda antisimétricas y simétricas que resultan tener los números cuánticos  $I_C = I_{3C} = Y_C = 0$ , lo que explica el denominado *confinamiento del color*. El color es una propiedad intrínseca de las partículas, pero no lo presentan las partículas finales.

# Anexos C

## Desarrollos matemáticos del Capítulo 4

### C.1. Sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Vamos a calcular la sección eficaz del proceso  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  empleando para ello la expresión (D.10). Tras tomar el convenio de signos como se indica en la Figura (4.1), calculamos la amplitud  $|\mathcal{M}_{fi}|$ . Para ello, planteamos la conservación del cuadrimomento  $q$  en el proceso, ya que este será el momento del fotón intermedio:

$$q = p_{e^-} + p_{e^+} = p_{\mu^+} + p_{\mu^-},$$

donde los cuadrimomentos  $p_i$  son de las diferentes partículas que intervienen. La amplitud la podemos expresar entonces empleando el vértice y propagador de la QED, para lo cual hacemos uso de las reglas de Feynman. Queda pues como:

$$i\mathcal{M}_{fi} = \bar{v}(p_{e^+})(ie\gamma^\mu)u(p_{e^-}) \left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}\right) \bar{u}(p_{\mu^-})(ie\gamma^\nu)v(p_{\mu^+}),$$

donde  $u, v$  son partícula y antipartícula respectivamente y  $e$  la carga del electrón en módulo. A partir de esto, podemos calcular el módulo de la amplitud al cuadrado como:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = (i\mathcal{M}_{fi})(-i\mathcal{M}_{fi}^\dagger),$$

donde consideramos:

$$i\mathcal{M}_{fi}^\dagger = \bar{v}(p_{\mu^+})(-ie\gamma^\alpha)u(p_{\mu^-}) \left(\frac{ig_{\alpha\beta}}{q^2}\right) \bar{u}(p_{e^-})(-ie\gamma^\beta)v(p_{e^+}).$$

Entonces, podemos hacer el producto de ambas teniendo en cuenta la suma sobre el espín de los fermiones:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \sum_{s,s'} \frac{e^4}{4q^4} [\bar{v}(p_{e^+})\gamma^\mu u(p_{e^-})\gamma^\alpha \bar{u}(p_{e^-})v(p_{e^+})] g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} [\bar{u}(p_{\mu^-})\gamma^\nu v(p_{\mu^+})\bar{v}(p_{\mu^+})\gamma^\beta u(p_{\mu^-})],$$

y considerando las relaciones de completitud:

$$\begin{aligned} \sum_{s_i} u^{s_i}(p) \bar{u}^{s_i}(p) &= (p_{i\mu} \gamma^\mu + m_i), \\ \sum_{s_i} v^{s_i}(p) \bar{v}^{s_i}(p) &= (p_i^\mu \gamma_\mu - m_i), \end{aligned} \tag{C.1}$$

obtenemos:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr} [(\not{p}_{e^+} - m_e)\gamma^\mu (\not{p}_{e^-} + m_e)\gamma^\alpha] g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \text{Tr} [(\not{p}_{\mu^-} + m_\mu)\gamma^\nu (\not{p}_{\mu^+} - m_\mu)\gamma^\beta],$$

donde  $\not{p} = p^\mu \gamma_\mu = p_\mu \gamma^\mu$ .

Ahora, para el cálculo de las trazas, vamos a emplear las propiedades de las matrices que resumimos a continuación:

Matrices en general  $A, B, C$  y un número complejo  $z$

- $\text{Tr}(zA) = z \text{Tr}(A)$
- $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$
- $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB) = \text{Tr}(BCA)$

Matrices  $\gamma$  teniendo en cuenta el anticonmutador  $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$

- $\text{Tr}(\text{número impar de matrices } \gamma) = 0$
- $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$
- $\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu) = 4(g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} - g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu})$

De tal forma que operando, obtenemos:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} 4[p_{e^+}^\mu p_{e^-}^\alpha + p_{e^+}^\alpha p_{e^-}^\mu - g^{\mu\alpha}(m_e^2 + p_{e^+} p_{e^-})]g_{\mu\nu} \cdot g^{\alpha\beta} 4[p_{\mu^-}^\nu p_{\mu^+}^\beta + p_{\mu^-}^\beta p_{\mu^+}^\nu - g^{\nu\beta}(m_\mu^2 + p_{\mu^-} p_{\mu^+})].$$

Contrayendo los índices haciendo uso de los tensores métricos obtenemos:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} [(p_{e^-} p_{\mu^+}) (p_{e^+} p_{\mu^-}) + (p_{e^-} p_{\mu^-}) (p_{e^+} p_{\mu^+}) + m_\mu^2 (p_{e^-} p_{e^+}) + m_e^2 (p_{\mu^+} p_{\mu^-}) + 2m_e^2 m_\mu^2]$$

Ahora, usando el sistema CDM, podemos dar explícitamente el valor de los momentos en función del ángulo  $\theta$  tomado desde la línea central del cilindro del haz, Figura C.1.

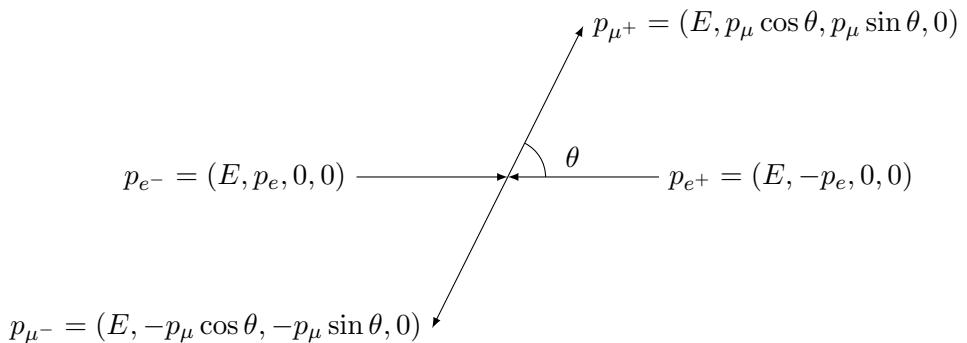


Figura C.1: Sistema de referencia CDM en el proceso  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .

Nótese que para simplificar la notación, hemos definido el módulo del momento como  $|p_{e/\mu}| \equiv p_{e/\mu}$ , que no debemos confundir con los cuadrimomentos  $p_{e^\pm}, p_{\mu^\pm}$ . También destacar que  $E_{CDM} = \sqrt{q} = 2E$ .

Ahora bien, antes de desarrollar la expresión, tengamos en cuenta que la probabilidad de que se dé el proceso, es realmente la de que haya dos muones en el estado final. Si consideramos la masa del muón esto supondría una energía  $E_{CDM} \approx 2m_\mu \sim MeV$ . Luego la masa del muón  $m_\mu$  no es despreciable, pero la del electrón si que lo es, ya que es  $m_e \sim eV$ , luego la aproximaremos a cero  $m_e \approx 0$ . Obtenemos entonces la expresión:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 \approx (E^2 - p_e p_\mu \cos\theta)(E^2 - p_e p_\mu \cos\theta) + (E^2 + p_e p_\mu \cos\theta)(E^2 + p_e p_\mu \cos\theta) + m_\mu^2(2E^2),$$

que podemos simplificar como:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 \approx \frac{e^4}{E^2} [E^2(1 + \cos^2 \theta) + m_\mu^2(1 - \cos^2 \theta)].$$

Para calcular la sección eficaz, sustituimos este resultado en la expresión dada en (D.10), teniendo en cuenta que  $\mathbf{p} = p_\mu = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$  y  $\mathbf{q} = p_e \approx E$ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(1, 2 \rightarrow 3, 4) \approx \frac{e^4}{16\pi^2 E_{CDM}^4} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{E_{CDM}^2}} \left[ \frac{E_{CDM}^2}{4} (1 + \cos^2 \theta) + m_\mu^2 (1 - \cos^2 \theta) \right],$$

tal que al integrar obtenemos la expresión (4.2).

## C.2. Anchura de desintegración del proceso $b \rightarrow cl\nu$

Vamos a calcular la anchura de desintegración del proceso  $b \rightarrow cl\nu$  empleando para ello la expresión (D.11). Tras tomar el convenio de signos como se indica en la Figura (4.3) comenzamos calculando la amplitud  $|\mathcal{M}_{fi}|$ , considerando para ello la conservación del quadrimomento  $q$ :

$$q = p_b + p_c = p_l + p_\nu.$$

En este caso empleamos el vértice y propagador de la EW, teniendo en cuenta el elemento de matriz  $V_{cb}$  para el cambio de sabor. Obtenemos entonces:

$$i\mathcal{M}_{fi} = u(p_b) \left[ -\frac{ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) V_{cb} \right] \bar{u}(p_c) \left[ -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2 - m_w^2} \right] u(p_l) \left[ -\frac{ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \right] \bar{u}(p_\nu),$$

donde hemos considerado todo como partículas  $u$  (ya que no hemos especificado el tipo de leptones). A partir de dicha expresión, calculamos el módulo de la amplitud al cuadrado:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= (i\mathcal{M})(-i\mathcal{M}^\dagger) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{s_b, s_c, s_l, s_\nu} \frac{g^4 |V_{cb}|^2}{64(q^2 - m_w^2)^2} \cdot [u(p_b) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \bar{u}(p_c) u(p_l) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \bar{u}(p_\nu)] \\ &\quad \cdot [u(p_\nu) (1 + \gamma^5) \gamma_\nu \bar{u}(p_l) u(p_c) (1 + \gamma^5) \gamma^\nu \bar{u}(p_b)], \end{aligned}$$

de manera que aplicando las relaciones de completitud (C.1) obtenemos:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{g^4 |V_{cb}|^2}{256(q^2 - m_w^2)^2} \cdot \text{Tr}[(\not{p}_b + m_b) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\not{p}_c + m_c) (1 + \gamma^5) \gamma^\nu] \\ &\quad \cdot \text{Tr}[(\not{p}_l + m_l) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\not{p}_\nu + m_\nu) (1 + \gamma^5) \gamma_\nu]. \end{aligned}$$

Ahora aplicamos las propiedades:

- $\text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^5] = -4i \varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu}$
- $\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^5] = \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0$
- $(\gamma^5)^2 = \mathbb{I}$
- $\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$
- $\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$

de forma que obtenemos:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{g^4 |V_{cb}|^2}{4(q^2 - m_w^2)^2} \cdot [p_b^\mu p_c^\nu + p_b^\nu p_c^\mu - g^{\mu\nu} (p_b \cdot p_c) + i \varepsilon^{\beta\mu\alpha\nu} p_{b\beta} p_{c\alpha}] \\ \cdot [p_{l\mu} p_{\nu\nu} + p_{l\nu} p_{\nu\mu} - g_{\mu\nu} (p_l \cdot p_\nu) + i \varepsilon_{\xi\mu\gamma\nu} p_l^\xi p_\nu^\gamma],$$

tal que debemos tener en cuenta:

- Términos tal que  $\varepsilon_{ijk} = 0$  cuando  $i = j, j = k, k = i$  considerando que  $p_b = p_c + p_l + p_\nu$ , implica que  $\varepsilon$  se anula acompañado de  $p_b, p_c, p_l, p_\nu$
- Términos tal que  $g^{\mu\nu} \varepsilon_{\xi\mu\gamma\nu} = \varepsilon_{\xi\gamma\nu}^\nu = 0$
- Términos tal que  $p_b^\mu p_c^\nu p_{l\mu} p_{\nu\nu} = (p_b \cdot p_l)(p_c \cdot p_\nu)$

Finalmente, tenemos que:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{g^4 |V_{cb}|^2}{4(q^2 - m_w^2)^2} [2(p_b \cdot p_l)(p_c \cdot p_\nu) + 2(p_b \cdot p_l)(p_c \cdot p_l) - p_{b\beta} p_{c\alpha} p_l^\xi p_\nu^\gamma \varepsilon^{\beta\mu\alpha\nu} \varepsilon_{\xi\mu\gamma\nu}],$$

y siendo que el último término se anula ya que  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{pqk} = \delta_i^p \delta_j^q - \delta_i^q \delta_j^p$ , obtenemos:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{g^4 |V_{cb}|^2}{(q^2 - m_w^2)^2} (p_c p_l) (p_b p_\nu).$$

El sistema de referencia que tomaremos será el del quark  $b$  en reposo, tal que:  $p_b = (E_b, 0, 0, 0)$ ,  $p_c = (E_c, \mathbf{p}_c)$ ,  $p_l = (E_l, \mathbf{p}_l)$ ,  $p_\nu = (E_\nu, \mathbf{p}_\nu)$ . Además, consideraremos que  $q^2 \ll m_w^2$ , obteniendo finalmente:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{g^4 |V_{cb}|^2}{m_w^4} (m_b E_\nu) \frac{1}{2} (m_b^2 - 2m_b E_\nu - m_c^2 - m_l^2),$$

tal que haciendo uso de (D.11) llegamos a la expresión:

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{2m_b} (2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_c - p_l - p_\nu) \frac{d^3 \mathbf{p}_c}{(2\pi)^3 2E_c} \frac{d^3 \mathbf{p}_l}{(2\pi)^3 2E_l} \frac{d^3 \mathbf{p}_\nu}{(2\pi)^3 2E_\nu}.$$

A partir de dicha expresión, podemos integrar en las diferentes variables de momento hasta obtener  $d\Gamma/dE_l$  y  $\Gamma$ . Esto lo podemos hacer por pasos:

### Integral en $\mathbf{p}_c$

Tenemos que  $\delta^4(p_b - p_c - p_l - p_\nu) = \delta(E_b - E_c - E_l - E_\nu)\delta^3(\mathbf{p}_b - \mathbf{p}_c - \mathbf{p}_l - \mathbf{p}_\nu)$ . Luego en el sistema CDM como  $\mathbf{p}_b = 0 \rightarrow E_b = m_b$  y nos queda:

$$\delta(m_b - E_c - E_l - E_\nu)\delta^3(-\mathbf{p}_c - \mathbf{p}_l - \mathbf{p}_\nu),$$

tal que podemos eliminar la integral en  $\mathbf{p}_c$  porque  $\mathbf{p}_c = \mathbf{p}_l + \mathbf{p}_\nu$ .

### Integral en $\mathbf{p}_\nu$

Queremos obtener una expresión de  $d^3\mathbf{p}_\nu$  en función de las energías y ángulo de las partículas, para así poder hacer la integral en  $d\Omega$ . Partimos de:

$$E_c = \sqrt{m_c^2 + |\mathbf{p}_c|^2} = \sqrt{m_c^2 + |\mathbf{p}_l + \mathbf{p}_\nu|^2},$$

$$|\mathbf{p}_l + \mathbf{p}_\nu|^2 = |\mathbf{p}_l|^2 + |\mathbf{p}_\nu|^2 + 2|\mathbf{p}_l||\mathbf{p}_\nu|\cos\theta,$$

tal que haciendo que  $m_\nu \approx 0$  obtenemos:

$$E_c = \sqrt{m_c^2 + |\mathbf{p}_l|^2 + E_\nu^2 + 2|\mathbf{p}_l|E_\nu\cos\theta}.$$

Entonces dado que:

$$\frac{dE_c}{d\theta} = \frac{|\mathbf{p}_l|E_\nu\sin\theta}{E_c},$$

sí desarrollamos en coordenadas cilíndricas:

$$d^3\mathbf{p}_\nu = |\mathbf{p}_\nu|^2 d|\mathbf{p}_\nu| \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{E_c E_\nu}{|\mathbf{p}_l|} dE_\nu dE_c d\varphi,$$

pudiendo entonces integrar en  $E_c$  y  $\varphi$ , es decir, en el ángulo sólido  $d\Omega$ :

$$d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{(4\pi)^4 m_b} \frac{d^3\mathbf{p}_l}{E_l |\mathbf{p}_l|} dE_\nu \int_{E_c^-}^{E_c^+} dE_c \delta(m_b - E_c - E_l - E_\nu).$$

Destacar que:

$$E_c^\pm = \sqrt{m_c^2 + |\mathbf{p}_l|^2 + E_\nu^2 \pm 2|\mathbf{p}_l|E_\nu},$$

tal que al tener la integral la función  $\delta$  tenemos que valdrá 1 si  $E_c^- < m_b - E_l - E_\nu < E_c^+$  y 0 en otro caso.

### Integral en $\mathbf{p}_l$

Hacemos un desarrollo similar:

$$d^3\mathbf{p}_l = |\mathbf{p}_l|^2 d|\mathbf{p}_l| \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi |\mathbf{p}_l|^2 d|\mathbf{p}_l|,$$

$$E_l^2 = m_l^2 + |\mathbf{p}_l|^2 \rightarrow d|\mathbf{p}_l| = \frac{E_l dE_l}{|\mathbf{p}_l|},$$

$$\rightarrow d^3\mathbf{p}_l = 4\pi |\mathbf{p}_l| E_l dE_l \rightarrow d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{(4\pi)^3 m_b} dE_l dE_\nu,$$

obteniendo:

$$\frac{d\Gamma}{dE_l} = \frac{g^4 |V_{cb}|^2}{(4\pi)^3 m_w^4} \int_{E_\nu^-}^{E_\nu^+} E_\nu (m_b^2 - m_c^2 - m_l^2 - 2m_b E_\nu) dE_\nu.$$

Así, finalmente, si tenemos en cuenta la condición impuesta antes  $E_c^- < m_b - E_l - E_\nu < E_c^+$  tenemos que la anchura viene dada por (4.4).

# Anexos D

## Reglas de Feynman y sección eficaz

### D.1. Reglas de Feynman: vértices y propagadores

En base a toda la teoría desarrollada, vamos a resumir los vértices y propagadores de la QED y de la EW necesarios para el cálculo de amplitudes en los procesos de interacción que nos interesan en el trabajo.

Para el caso de la QED el vértice de la interacción se puede deducir del Lagrangiano (2.26), y quedaría como:

$$V_{QED} \equiv -ieQ_\psi\gamma^\mu, \quad (D.1)$$

donde  $e$  es la carga del electrón en módulo <sup>1</sup>,  $Q_\psi$  el signo de la carga asociada a la función de onda y  $\gamma^\mu$  el fotón que interviene, Figura D.1.

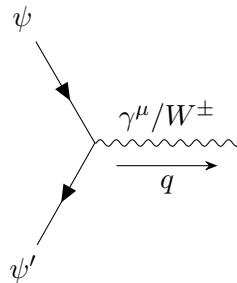


Figura D.1: Vértices en una interacción QED ( $\gamma^\mu$ ) o EW ( $W^\pm$ ).

El propagador del fotón lo hemos deducido en (2.13), donde se emplea *gauge* de Feynman-t'Hooft. No obstante, aquí lo emplearemos haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$P_{QED} \equiv -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}, \quad (D.2)$$

ya que esa variable es necesaria en caso de calcular magnitudes físicas, pero en nuestro caso, es una forma de simplificar los cálculos y llegar al mismo resultado.

Respecto a la teoría EW, nos interesan para los cálculos las interacciones que se dan a través de la corriente cargada, luego el vértice lo deducimos a partir del Lagrangiano (3.26),

---

<sup>1</sup>Nótese que no la hemos llamado  $q$  porque  $q$  será en el Capítulo 4 el valor del cuadrimomento en los vértices de la interacción.

teniendo en cuenta (3.27). Distinguiremos dos tipos de vértices, el vértice de los leptones (sin sabor):

$$V_{EW(L)} \equiv -\frac{ig}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1 - \gamma^\mu), \quad (\text{D.3})$$

y el vértice de los quarks, que dado que se da un intercambio de sabor, hay que considerar la matriz CKM definida en (3.45):

$$V_{EW(Q)} \equiv -\frac{ig}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1 - \gamma^\mu)V_{ij}. \quad (\text{D.4})$$

El propagador en el caso de la teoría EW no lo hemos demostrado explícitamente. El procedimiento es igual que en el caso de la QED (Sección 2.2), ya que ambos vienen de resolver la ecuación diferencial obtenida a partir del Lagrangiano calculando las funciones de Green que dan la propagación del sistema. Tomando de nuevo el *gauge* de Feynman-t'Hooft, el propagador empleado será:

$$P_{EW} \equiv -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2 - m_w^2}, \quad (\text{D.5})$$

donde  $m_w$  es la masa del bosón W.

Finalmente, detallamos el convenio empleado para determinar el signo de los momentos en los diagramas de Feynman:

$$\begin{aligned} f \xrightarrow[p]{} \bullet : u(p) &\text{ Partícula entrando en el vértice} \\ f \xleftarrow[p]{} \bullet : \bar{u}(p) &\text{ Partícula saliendo del vértice} \\ \bar{f} \xleftarrow[p]{} \bullet : \bar{v}(p) &\text{ Antipartícula saliendo del vértice} \\ \bar{f} \xrightarrow[p]{} \bullet : v(p) &\text{ Antipartícula entrando en el vértice} \end{aligned}$$

## D.2. Sección eficaz y anchura de desintegración

En este anexo explicamos como obtener las expresiones de la sección eficaz y la anchura de desintegración de procesos de interacción entre partículas. Estos observables son de gran interés, ya que se pueden determinar tanto teóricamente como experimentalmente.

Supongamos el caso de dos partículas que van a  $n$  partículas en el estado final. Los estados iniciales  $i$  y finales  $f$  serán:

$$\begin{aligned} |i\rangle &\equiv |\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2\rangle, \\ |f\rangle &\equiv |\mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 \dots \mathbf{p}_{n+2}\rangle. \end{aligned}$$

Queremos determinar la probabilidad de transición por unidad de tiempo y el flujo incidente, ya que el cociente de estas dos, dará la sección eficaz, que se puede interpretar como la probabilidad de que se dé el proceso.

La probabilidad de transición por unidad de tiempo a un estado  $|f\rangle \neq |i\rangle$  es:

$$\frac{|\mathcal{S}_{fi}|^2 dN_f}{T} = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) V |\mathcal{T}_{fi}|^2 dN_f, \quad (\text{D.6})$$

donde  $\mathcal{S}$  es la matriz que conecta los estados iniciales y finales en  $t$  infinito ( $\mathcal{S} \equiv \langle f | S | i \rangle$ ),  $dN_f$  el número de estados de  $n$  partículas del estado final con momentos entre  $\mathbf{p}_i$  y  $\mathbf{p}_i + d\mathbf{p}_i$ ,  $V$  el volumen infinito que desaparecerá en el cálculo final y  $\mathcal{T}_{fi}$  un factor que absorberemos en la amplitud de scattering.

El diferencial  $dN_f$  viene dado por:

$$dN_f = \prod_{i=3}^{n+2} \frac{V d^3 p_i}{(2\pi)^3}, \quad (\text{D.7})$$

donde se ha tenido en cuenta que el estado de una partícula con momento  $\mathbf{p}$  es:

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle,$$

tal que el número de estados de una partícula con momentos entre  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ , normalizado por el factor  $E_{\mathbf{p}}$  para que sea invariante Lorentz, es:

$$dN = \langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} = \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3}.$$

El flujo incidente lo podemos determinar considerando el producto  $\rho V$ , de densidad de una partícula por unidad de volumen por el volumen considerado:

$$\rho v = \rho |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = \frac{1}{V} \left| \frac{\mathbf{p}_1}{E_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{E_2} \right| = \frac{[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}}{V E_1 E_2},$$

teniendo en cuenta la relación  $E = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2}$ .

Definimos ahora la amplitud invariante de scattering  $\mathcal{M}_{fi}$  que es la que está relacionada con las reglas de Feynman y que podremos determinar para cada proceso en particular:

$$\mathcal{M}_{fi} \equiv \prod_{i=1}^{n+2} (2E_i V)^{1/2} \mathcal{T}_{fi}. \quad (\text{D.8})$$

Teniendo en cuenta todo, la sección eficaz viene dada por:

$$d\sigma = \frac{1}{4[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \prod_{j=3}^{n+2} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}, \quad (\text{D.9})$$

aunque, para nuestros cálculos, nos interesa el caso particular de dos partículas en el estado inicial y dos en el estado final desde el sistema CDM:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(1, 2 \rightarrow 3, 4) = \frac{1}{64\pi^2 E_{CDM}^2} \frac{|\mathbf{p}|}{|\mathbf{q}|} |\mathcal{M}_{fi}|^2, \quad (\text{D.10})$$

simplificado para el caso de que las partículas que colisionan tienen la misma masa  $m_1 = m_2 = m$  y donde  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  son los momentos final e inicial desde el CDM.

Finalmente, la anchura de desintegración de una partícula de masa  $M$  a  $n$  partículas finales viene dado, en su sistema de referencia en reposo, por:

$$d\Gamma(i \rightarrow f) = \frac{1}{2M} |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P - p_f) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}, \quad (\text{D.11})$$

que es una expresión análoga a (D.9) sustituyendo  $4[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}$  por  $2M$ , que se obtiene tomando como flujo  $\rho v = 1$ , y  $p_i$  por  $P$ .

# Anexos E

## Valores numéricos

Todos los valores para los parámetros que aparecen en figuras y tablas son tomados de [4]. En la Tabla E.1 se dan las masas de las partículas y en la Tabla E.2 se dan otros valores usados; constantes fundamentales y tiempos de vida.

Partícula	Masa (MeV)
$e$	0,51099895000(15)
$\mu$	105,6583755(23)
$\tau$	1776,86(12)
$b$	4180(30)
$c$	1270(30)
$\bar{B}^0$	5279,66(12)
$B_c^-$	6274,47(30)
$D^-$	1869,66(05)
$D^{*-}$	2010,26(05)
$J/\psi$	3096,900(6)

Tabla E.1: Masa de diferentes partículas en MeV.

Constante	Valor
$\alpha$	0,007297352568(6)
$\hbar$	$6,582119569(22) \times 10^{-22}$ MeV · s
$G_F$	$1,1663787(6) \times 10^{-5}$ GeV $^{-2}$
$V_{cb}$	0,04153(15)
$\tau_{B^0}$	$1,519(4) \times 10^{-12}$ s
$\tau_{B_c^-}$	$0,510(9) \times 10^{-12}$ s

Tabla E.2: Otros valores usados.