# La longitud de arco como variable independiente para órbitas hiperbólicas

**Hugo Subías Ramos**
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Luis Floría Gimeno
26 de febrero de 2023

# Summary


A mechanical system of two bodies, idealized as two point material particles moving in space under the influence of their mutual interactions (as stated in Newton's Third Law of Motion), can be described, with respect to an inertial reference frame, by means of two second-order vector differential equations, each one of them characterizing the position vector of a particle as the unknown function; the global scalar differential order of such a problem is 12.

After an appropiate coordinate transformation, the original system can be decoupled into two subsystems corresponding to two one-body problems, each of them of differential order 6:

- the **center-of-mass problem**, which results into a uniform rectilinear motion or a state of rest (or equilibrium) with respect to the original inertial reference frame, and
- the **problem of the relative motion of one of the particles with respect to the other one**, which as a general rule cannot be immediately solved, although its differential order can be reduced to order 3 thanks to the existence of the angular momentum vector as a first integral, a property that also confines such motion to a plane. This is a consequence of the fact that the force model in this problem is a central force.

Should the central force field of this second subproblem be conservative, the system will admit the scalar first integral of the total mechanical energy, which allows one to further reduce the differential order of the relative-motion problem from 3 to 2. Accordingly, from a purely theoretical point of view, this problem can be formally solved by two quadratures that introduce the two last constants necessary to provide the general solution of the problem.

The **gravitational two-body problem** is then defined as the two-body problem with internal forces when their mutual interaction is given by their mutual gravitational attraction, and the corresponding relative-motion subsystem is called the **Kepler problem**.

The Kepler problem can be solved by other methods that do not require the two aforementioned quadratures; for instance, by means of Binet's method, or introducing new constants of motion (such as the Laplace vector). This last method involves a new vector first integral of the problem, although it only introduces one new scalar constant of motion functionally independent of the three scalar first integrals provided by the angular momentum vector and the additional first integral of the energy. In this way, 5 functionally independent first integrals of the problem are available, and so the Kepler problem can be solved by a mere quadrature.

The solutions to the Kepler problem are conic-section orbits having its principal focus at the center of the gravitational force field (which is also taken as the origin of coordinates). Accordingly, any five functionally independent constants of motion that define the conic-section can be used to completely solve the system, provided that a sixth constant or parameter characterizing the current position of the moving particle along the orbit is considered. As a consequence, any set of 6 functionally independent constants fulfilling these requirements can be called a set of *orbital elements* or *parameters of the orbit*.

Traditionally the choice of the first five constants is related to the *geometry* of the orbit: its shape is determined by its excentricity $e$; its size is characterized by the semi-major axis

$a$ (or the semi-real axis in the hyperbolic case), the distance of the periapsis $q$ or the distance of the apoapsis $Q$ from the origin, or the semi-latus rectum $p$ (which is well defined for any kind of conic-section); on the other hand, the determination of the spatial orientation of the orbit requires three angles, which are usually chosen as the inclination $i$, the longitude of the ascending node $\Omega$, and the argument of pericenter $\omega$ (which accounts for the orientation of the orbit within the orbital plane itself, since it gives the direction of the line of apsides).

These 5 elements of a geometrical nature can be related to the five aforesaid functionally independent first integrals. There only remains to choose one last constant of motion, which must be linked to the position of the moving particle along the orbit.

This last parameter can be defined relative to a specific point of the orbit, the periapsis or the apoapsis being the most common choices, and is usually treated as an angle (such as the classical mean anomaly, the true anomaly, and the eccentric anomaly), or as a specific instant of time (for instance, the time or epoch of pericenter passage $T$).

Consequently, the Kepler problem can be solved by means of a set of 6 constant orbital elements ($a/p/q/Q$, $e$, $i$, $\Omega$, $\omega$, $T$) for any non-degenerate conic-section orbit.

To sum up, the solutions to the unperturbed Kepler problem are characterized by six constants. However, should there be other forces affecting the motion, the solution will deviate from the pure Kepler motion. The effect of such orbital perturbations can be formalized as a force added to the force of the original Kepler problem, and the deviations from the values of the above orbital elements of the unperturbed motion can be obtained from a set of six first-order differential equations, called the **planetary equations**.

Although the planetary equations can take different forms, two main classical cases have traditionally been considered for this specific problem: the **planetary equations in the form of Lagrange**, and the **planetary equations in the form of Gauss**.

The most commonly used independent variable to originally formulate these equations is the physical time $t$, although they can also be established in terms of other independent variables that are usually called *fictitious times* or *pseudotimes*; as a general rule, these pseudotimes are angles in nature, such as the eccentric and the true anomalies.

Inspired by the reguralizing time-transformation introduced by Euler for the treatment of the collision with the origin in the 1-dimensional Kepler problem, Sundman [18] generalized Euler's approach to planar and spatial Keplerian systems. The new independent variable defined by Sundman's transformation is proportional to the eccentric anomaly of elliptic or hyperbolic Keplerian motions.

Taking his cue from Euler, Sundman considered a change of independent variable $t \longrightarrow \tau$ given by the differential relation $dt = g(r)\,d\tau = r\,d\tau$, where $r$ stands for the distance from the origin of coordinates. However, other functional forms for the reparameterizing function $g(r)$ have also been used; for instance, the reparameterizing function $g(r) = r^2$ introduces a new indepent variable $\tau$ proportional to the Keplerian true anomaly.

As successive generalizations of the original Sundman transformation, differential changes of the independent variable can be defined by means of reparameterizing functions of the form $g(r) = k_\alpha r^\alpha$, where $k_\alpha$ can be a function of absolute constants, parameters of the system, first integrals of the problem, etc, and $\alpha$ is a real number, although for many purposes in Celestial Mechanics and Astrodynamics $\alpha$ is taken as an integer or rational number.

Later on, different authors have considered reparameterizing functions that are more general algebraic functions of $r$.

Although these transformations were originally devised for the purpose of regularization (elimination of singularities) of the equations of motion governing gravitational systems, they have also been applied to gain other advantageous properties in the treatment of differential equations governing dynamical systems, from both the analytical and numerical points of view, such as linearization, stabilization, analytical control of the step length in numerical integrations, etc.

Most of the effort along these lines of research has been devoted to the case of elliptic-type orbits of Keplerian systems.

For analytical step-size regulation in numerical integrations of highly eccentric orbits, E. V. Brumberg proposed the use of the *length of orbital arc as the independent variable*.

In the present Undergraduate Dissertation we consider a particular reparameterizing transformation for hyperbolic-type orbital motion. More specifically, *we generalize the transformation considered by Brumberg* (introducing the lenght of arc as the new independent variable for elliptic-type orbits) *to the case of hyperbolic-type motion*.

After developing the reparameterizing transformation at issue, and establishing the relationship between the hyperbolic arc length and the hyperbolic eccentric anomaly *in finite terms*, we first give the equations for the variation of the Keplerian classical first integrals (angular momentum vector, Laplace vector and Keplerian energy) due to the effect of perturbing forces, choosing the hyperbolic arc length as the new independent variable, and then we obtain the planetary equations (both in the Lagrange and Gauss forms) for perturbed Keplerian orbits of the hyperbolic type.

The contents of the present Undergraduate Dissertation are organized as follows:

- *Chapter 1* provides an introduction to some concepts and results of Celestial Mechanics that are relevant to the purposes of the Dissertation: statement of the pure Kepler problem, its first integrals and the Keplerian orbital elements. Next, the effect of additional forces (perturbing forces) superimposed to the Keplerian force model is considered, and the planetary equations for the variation of the orbital elements under perturbations are given. A general overview of the theory of differential reparameterizing transformations of the independent variable is also presented.

- In *Chapter 2* the considerations in an article by E. V. Brumberg concerning the use of the arc length $s$ in elliptic-type orbital motion are generalized to the case of hyperbolic-type orbits, with the purpose of establishing formulae of interest in terms of this new pseudotime. With this aim in view, this chapter is devoted to the development and integration of the differential transformation of the independent variable from physical time $t$ to hyperbolic arc length $s$ via the hyperbolic eccentric anomaly $H$. As in the case of elliptic motion treated by Brumberg, elliptic integrals and functions play an essential role throughout the intermediate calculations and in the final results. In addition to this, as an alternative derivation of these results, they are also recovered by taking advantage of some relationships between the elliptic and hyperbolic eccentric anomalies $E$ and $H$.

- In *Chapter 3* formulae for the variations of the classical Keplerian first integrals and the planetary equations (in both the Lagrange and Gauss forms) for the orbital elements of hyperbolic-type orbits are established in terms of the hyperbolic arc length as the pseudotime.

- *Chapter 4* is a summary of the main conclusions and results of this Dissertation.

- After the Bibliography, an *appendix* summarizes the approach and some developments of Brumberg's article.

# Índice general

# Capítulo 1

# Algunos conceptos de Mecánica Celeste

Como principales referencias bibliográficas para este capítulo se han utilizado los libros de Abad [1], Bond y Allman[4], Goldstein [11] y Stiefel y Scheifele [17].

## 1.1. El problema de dos cuerpos y el problema de Kepler

Dado un sistema de referencia inercial fijo en el espacio ordinario tridimensional $\mathbb{R}^3$, el movimiento de dos cuerpos (idealizados como masas puntuales) que forman un sistema cerrado se puede describir, aplicando la segunda ley de Newton, mediante un sistema de dos ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden para los vectores de posición de dichas masas puntuales (respecto del sistema de referencia anteriormente mencionado) como funciones incógnita; en el caso general esto corresponde a vectores de tres componentes escalares y, dada la posibilidad de reformular una ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de dos ecuaciones de primer orden y la descomposición de una ecuación vectorial en tres ecuaciones diferenciales escalares, todo esto dará lugar a un sistema de $2 \times 2 \times 3 = 12$ ecuaciones diferenciales ordinarias escalares de primer orden, en general no lineales y acopladas.

Tras aplicar un cambio de variables dependientes adecuado, este sistema diferencial se puede desacoplar en dos subsistemas independientes formados por dos ecuaciones vectoriales que determinan, respectivamente, el **movimiento del centro de masas** y el **movimiento relativo** de uno de los cuerpos respecto del otro.

Sobre estos dos subproblemas podemos establecer algunas propiedades generales.

- **Movimiento del centro de masas**: dado que el sistema considerado inicialmente es cerrado (las únicas fuerzas aplicadas son internas), este movimiento es asimilable al movimiento libre (en ausencia de fuerzas) de una partícula auxiliar con masa igual a la masa total del sistema; considerando entonces la primera ley de Newton, obtenemos que este movimiento será rectilíneo y uniforme, o que el centro de masas permanecerá en reposo, según sean las condiciones inicales del problema.

- **Movimiento relativo**: este segundo problema describe el movimiento de una partícula respecto de la otra pero, en términos de las nuevas funciones incógnita, se traduce en el movimiento de una partícula auxiliar ficticia de masa igual a la **masa reducida** del sistema de las dos partículas originales bajo el efecto de una **fuerza central** (fuerza colineal con el vector de posición respecto del centro de fuerzas en todo instante), por lo que posee la integral primera del **momento angular** y, en consecuencia, su movimiento queda confinado a un plano fijo que pase por el centro de fuerzas y admite al momento angular como vector normal. Por este motivo, entre otros, resulta conveniente tomar sistemas de coordenadas en el seno del propio plano orbital, con el objetivo de simplificar los cálculos e interpretar más fácilmente los resultados.

En particular se considerará el **problema gravitatorio de dos cuerpos**. Éste es el problema del estudio del movimiento de un sistema cerrado formado por dos cuerpos con masas $m_1$ y $m_2$, reducidos a masas puntuales, y considerando la mutua atracción gravitatoria, formalizada por la Ley de Gravitación Universal de Newton, como la única interacción entre dichos cuerpos. En tal caso, el subproblema que describe el movimiento relativo se denomina **problema de Kepler**, en el que la fuerza considerada no solo es central sino además conservativa, por lo que esa fuerza deriva de un potencial escalar estacionario (es decir, independiente del tiempo) y el problema admite la **integral primera escalar de la energía** kepleriana $h_k$.

Como consecuencia de lo anterior, las órbitas solución del problema de Kepler son cónicas con uno de los focos coincidente con el centro de fuerzas, resultado que generaliza el contenido original de la primera ley de Kepler del movimiento planetario (establecida por Kepler de forma empírica a partir de los datos de observación recopilados por Tycho Brahe correspondientes a los planetas entonces conocidos del Sistema Solar).

Además, a partir del valor y signo de la energía kepleriana se puede determinar el tipo de cónica solución: un valor negativo de la energía se asocia a órbitas acotadas (circunferencias o elipses), un valor positivo a órbitas hiperbólicas, y el valor nulo a las parabólicas (véase [1], pág. 128, y Tabla 8.1, pág. 129; [11], pág. 96; )

## 1.2. Integrales primeras clásicas del problema de Kepler

Como hemos comentado en la sección anterior, el problema de Kepler corresponde al subproblema del movimiento relativo en el contexto del caso gravitatorio del problema de dos cuerpos con fuerzas internas, y queda formulado como un problema diferencial de orden escalar 6 que admite tres constantes escalares del movimiento procedentes del vector momento angular y una cuarta cantidad conservada, que es la energía total del sistema kepleriano. Como estas cuatro constantes del movimiento son funcionalmente independientes, permiten reducir el orden diferencial del problema desde orden 6 hasta orden 2, situación que, en última instancia, puede ser resuelta formalmente mediante dos cuadraturas que introduzcan las dos constantes restantes necesarias para poder describir la solución general del problema diferencial de orden 6 en cuestión (ver [11], fórmulas (3-18) a (3-20), pág. 75).

Sin embargo, aunque se considere formalmente resuelto el problema de Kepler tal y como se ha descrito, expresar la solución en forma cerrada por medio de funciones del tiempo explícitas y fácilmente manejables no es siempre viable, debido a que en los casos de movimiento elíptico e hiperbólico la **ecuación de Kepler** (ley horaria que relaciona el tiempo con la posición a lo largo de la órbita) queda expresada mediante una relación trascendente, mientras que la ley horaria del movimiento parabólico (**ecuación de Barker**) puede reescribirse como una ecuación polinómica de grado 3, resoluble por radicales.

Otro enfoque para abordar la resolución del problema de Kepler se basa en intentar obtener nuevas integrales primeras de este problema, distintas de las del momento angular y de la energía anteriormente mencionadas, y que sean funcionalmente independientes de ellas.

Es posible construir una nueva integral primera vectorial ([1], pág. 124-126; [2], pág. 115-116; [4], pág. 23; [11], pág. 102-105), llamada **vector de Laplace** y denotada como **A**, que aporta tres nuevas constantes escalares del movimiento. Sin embargo no todas ellas son funcionalmente independientes de las integrales primeras del momento angular y de la energía, ya que entre las tres componentes del vector momento angular, las tres componentes del vector de

Laplace y la energía existen *dos relaciones funcionales* ([1], pág. 125-128; [11], pág. 103-104), por lo que sólo cinco de entre esas siete cantidades escalares conservadas son funcionalmente independientes. Esto permite reducir el orden diferencial del problema a orden 1, y resolverlo por medio del cálculo de una sola primitiva.

Además, el vector de Laplace permite deducir la ecuación de las órbitas solución del problema de Kepler (cónicas keplerianas) mediante sencillas operaciones de álgebra vectorial ([1], pág. 127; [11], pág. 103-104).

La dirección de este vector de Laplace coincide con la dirección foco-periastro, donde el **periastro** es el punto de la órbita más cercano al foco correspondiente al centro de fuerzas, lo cual proporciona información acerca de la orientación de la órbita en el seno del plano orbital, ya que marca la dirección de un eje de la cónica.

Las tres integrales primeras mencionadas en los párrafos anteriores se conocen como las **integrales primeras clásicas del problema de Kepler**.

## 1.3. Constantes del problema de Kepler: integrales primeras y elementos orbitales

En lo que sigue se supondrá fijado un sistema de referencia inercial rectangular cartesiano $\{\mathscr{O},\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}\}$ con origen en un punto $\mathscr{O}$ y ejes coordenados $\mathscr{O}x_1,\mathscr{O}x_2,\mathscr{O}x_3$ según las direcciones de los vectores $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}$ de una base ortonormal positivamente orientada del espacio ordinario tridimensional $\mathbb{R}^3$.

Repecto de dicho sistema de referencia, la posición instantánea de una partícula móvil en el espacio queda definida por su vector de posición $\mathbf{r}$, y su velocidad instantánea por su vector velocidad $\dot{\mathbf{r}}$, reservando la notación de "punto" para indicar "derivada respecto del tiempo físico" $t$; además, la distancia de la partícula al origen de coordenadas (el radio vector) se denotará por $r = \|\mathbf{r}\|$.

Formalizado matemáticamente, el problema de Kepler es el problema del estudio del movimiento gobernado por la ecuación diferencial autónoma vectorial de segundo orden

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r} = F(r)\hat{r}, \quad \hat{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mu = \mathscr{G}(m_1+m_2), \tag{1.1}$$

para la función incógnita $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, donde $\mathscr{G}$ es la constante de gravitación universal.

Este problema puede interpretarse como el problema del movimiento de una partícula de masa unidad bajo el efecto de una fuerza central conservativa que obedece la ley de fuerzas

$$F(r) = -\frac{\mu}{r^2},$$

y que deriva del potencial escalar

$$V(r) = -\frac{\mu}{r}.$$

Como ya se ha indicado en la sección anterior, el problema diferencial formulado por (1.1) admite las conocidas como **integrales primeras clásicas del problema de Kepler**: las integrales primeras vectoriales del momento angular $\mathbf{G}$ y del vector de Laplace $\mathbf{A}$, con normas $G$ y $A$ respectivamente, y la integral primera escalar de la energía $h_k$, cuyas expresiones son

$$\mathbf{G} = \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}, \qquad \mathbf{A} = \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{G} - \frac{\mu}{r}\mathbf{r}, \qquad h_k = \frac{\|\dot{\mathbf{r}}\|^2}{2} - \frac{\mu}{r}. \tag{1.2}$$

Ya se ha visto que para dar la solución general del problema de Kepler se necesitan 6 constantes del movimiento escalares funcionalmente independientes, y que las integrales primeras ya mencionadas aportan información acerca de la geometría de las órbitas solución: el momento angular y el vector de Laplace indican el tipo de órbita, además de su forma, tamaño y orientación en el espacio tridimensional y en el seno del plano orbital, entre otras propiedades; pero como ya se indicó anteriormente, entre las 6 componentes escalares de estos dos vectores solo existen 5 constantes del movimiento funcionalmente independientes (ya que los vectores **G** y **A** son ortogonales, lo que establece una sencilla relación funcional algebraica entre sus componentes; véase [1], pág. 12; [11], pág. 103).

En primer lugar, la órbita es una cónica (versión generalizada de la primera ley de Kepler del movimiento planetario) y su tipo queda determinado por la excentricidad $e$. En cuanto a su tamaño o dimensiones, pueden utilizarse diversos elementos geométricos: el semieje mayor o real $a$, si hablamos de elipses o hipérbolas, o el semilado recto $p$ para cualquier tipo de cónica. Estos tres elementos geométricos de las cónicas están relacionados con las integrales primeras clásicas del problema de Kepler a través de las relaciones ([1], Fórmulas (8.9), pág. 127; [1], pág. 152)

$$p = \frac{G^2}{\mu}, \qquad e = \frac{A}{\mu}, \qquad a = \frac{p}{|e^2-1|} \;\; \forall e \neq 1, \tag{1.3}$$

junto con ([1], Fórmula (8.6), pág. 125; [1], pág. 128)

$$a = -\frac{\mu}{2h_k} \text{ (elipse)}, \qquad a = \frac{\mu}{2h_k} \text{ (hipérbola)}, \qquad e = \sqrt{1+\frac{2h_k G^2}{\mu}}.$$

Opcionalmente, en algunos casos se sustituyen $a$ o $p$ por la **distancia del periastro** $q = a|e-1|$ para órbitas elípticas y hiperbólicas y $q = p/2$ en parábolas. En órbitas elípticas también se puede considerar la **distancia del apoastro**, $Q = a(1+e)$.

Por otra parte, para fijar la posición del plano orbital en el espacio se pueden utilizar dos magnitudes angulares, $\Omega$ e $i$, y se requerirá de una tercera, $\omega$, para orientar la órbita dentro del propio plano orbital ([1], pág. 143-144; [4], §4.6; [11], pág. 478-479; [17], §14):

- El **argumento de longitud del nodo ascendente** $\Omega \in [0, 2\pi]$ es el ángulo medido sobre el plano fundamental $\mathscr{O}x_1x_2$ formado por el eje $\mathscr{O}x_1$ del sistema inercial y la línea de los nodos (la recta de intersección del plano fundamental $\mathscr{O}x_1x_2$ con el plano orbital)

- La **inclinación** $i \in [0, \pi]$ es el ángulo entre los planos fundamental y orbital, donde si $i < \pi/2$ se dice que el movimiento es directo y, en caso contrario, retrógrado

- El **agumento del periastro** $\omega \in [0, 2\pi]$ es el ángulo entre la línea de los nodos y el vector de Laplace (que marca la dirección foco-pericentro, coincidente con un eje de la cónica).

Existen situaciones en las que estos tres ángulos pueden quedar a su vez indeterminados: una órbita circular ($e = 0$) conlleva que todos los puntos sean equidistantes del centro de fuerzas, luego el periastro y en consecuencia $\omega$ quedan indeterminados; si los planos fundamental $\mathscr{O}x_1x_2$ y orbital coinciden ($i = 0$), entonces $\Omega$ y $\omega$ quedan indeterminados; si $\mathbf{G} = \mathbf{0}$, entonces el movimiento es rectilíneo y los tres ángulos quedan indeterminados ([1] pág. 144).

Para completar la solución se requiere, aparte de los cinco elementos ya mencionados, un sexto y último elemento que en cada instante permita localizar la posición concreta de la partícula móvil a lo largo de la órbita.

Si nos limitamos a elementos constantes, un candidato relativamente intuitivo será la **época de paso por el periastro** $T$ (el instante temporal en el que la partícula móvil efectúa un paso por el periastro de la órbita). En el caso de órbitas acotadas (circulares y elípticas), $T$ queda determinado módulo el periodo orbital, dada la naturaleza periódica de dicho movimiento ([1], pág. 145; [11], pág. 479).

Pero si ampliamos la definición de elemento a funciones afines de la variable independiente ([17], §18), entonces también puede utilizarse la **anomalía media** $\ell = n(t-T)$, donde $n$ es el **movimiento medio** (definido a través de la relación $\mu = n^2a^3$ para órbitas elípticas o hiperbólicas, y mediante $\mu = n^2p^3$ en parábolas; véase el caso elíptico en [1], pág. 135).

## 1.4. Sistemas keplerianos perturbados. Ecuaciones planetarias para la variación de los elementos orbitales bajo perturbaciones

En el modelo dinámico de partida se habían impuesto unas hipótesis poco realistas para plantear el problema de Kepler: el sistema descrito conformado por dos cuerpos que interactúan a través de su mutua atracción gravitatoria se ha supuesto que era un sistema aislado, que las masas fuesen puntuales y que dichos cuerpos no se viesen afectados por ninguna otra fuerza o interacción ([1], pág. 191).

A continuación se considerará una versión del problema de dos cuerpos sin esas limitaciones, problema al que denominaremos problema de Kepler generalizado, y que viene formulado por medio de una ecuación diferencial vectorial tridimensional de segundo orden

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \overrightarrow{\mathscr{P}}, \tag{1.4}$$

donde $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ representa la resultante de todas las fuerzas que supongan una desviación respecto del modelo dinámico ideal inicialmente adoptado, y que se denominará *fuerza perturbadora* o, sencillamente, *perturbación*.

En los casos en los que $\|\overrightarrow{\mathscr{P}}\| \ll \mu/r^2$ el movimiento se llamará *movimiento kepleriano perturbado* o *movimiento orbital* ([1], pág. 191-192).

En ausencia de perturbaciones es obvio que el problema formulado por la ecuación (1.4) coincide con el problema de Kepler puro descrito anteriormente por la ecuación (1.1) y, en circunstancias en las que la fuerza perturbadora sea de magnitud mucho menor que la fuerza correspondiente al modelo kepleriano, es de esperar que su efecto se traduzca en pequeñas desviaciones respecto de los valores correspondientes a los elementos orbitales de la órbita kepleriana pura, por lo que puede pensarse en una cónica variable caracterizada por unos parámetros orbitales, $\{a(t) \text{ o } p(t), e(t), i(t), \Omega(t), \omega(t), T(t) \text{ o } \ell(t)\}$, que sean funciones del tiempo $t$ y que, para cada valor $t_j$ de $t$, describan una órbita instantáneamente kepleriana cuyos elementos orbitales sean los valores de dichas funciones evaluadas en el instante $t_j$ en cuestión.

Dicha órbita instantáneamente kepleriana se conoce como órbita osculatriz en el instante considerado, y el conjunto de parámetros orbitales $\{a_j$ o $p_j$, $e_j$, $i_j$, $\Omega_j$, $\omega_j$, $T_j$ o $\ell_j\}$ se denominan elementos orbitales osculadores en el instante $t_j$.

Por lo tanto interesará disponer de unas ecuaciones que describan los cambios que experimentan los elementos orbitales debido al efecto de las fuerzas perturbadoras.

Tradicionalmente se han utilizado dos sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden en forma normal o explícita para tales variaciones de los elementos orbitales: las ecuaciones planetarias de Lagrange y las ecuaciones planetarias de Gauss, dependiendo de cómo se describan los segundos miembros de esas ecuaciones.

Dada una fuerza perturbadora $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ que admite un potencial perturbador $V_p$, es decir, que $\overrightarrow{\mathscr{P}} = -\nabla_{\mathbf{r}} V_p$, las ecuaciones para las derivadas de los elementos orbitales con respecto del tiempo expresadas en función de las derivadas parciales del potencial perturbador respecto de los elementos orbitales dan lugar a las ecuaciones planetarias de Lagrange del movimiento orbital, o ecuaciones planentarias en la forma de Lagrange, que para el caso de órbitas de tipo elíptico ([1], Ecuaciones (12.15), pág. 194), e introduciendo la notación $\eta = \sqrt{1-e^2}$, tienen la forma

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{-2}{na}\frac{\partial V_p}{\partial \ell}, \\
\frac{de}{dt} &= \frac{\eta}{na^2 e}\frac{\partial V_p}{\partial \omega} - \frac{\eta^2}{na^2 e}\frac{\partial V_p}{\partial \ell}, \\
\frac{di}{dt} &= \frac{1}{na^2\eta\sin i}\frac{\partial V_p}{\partial \Omega} - \frac{\cos i}{na^2\eta\sin i}\frac{\partial V_p}{\partial \omega}, \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{-1}{na^2\eta\sin i}\frac{\partial V_p}{\partial i}, \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{-\eta}{na^2 e}\frac{\partial V_p}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\eta\sin i}\frac{\partial V_p}{\partial i}, \\
\frac{d\ell}{dt} &= n + \frac{2}{na}\frac{\partial V_p}{\partial a} + \frac{\eta^2}{na^2 e}\frac{\partial V_p}{\partial e},
\end{aligned} \tag{1.5}$$

mientras que para órbitas de tipo hiperbólico ([16], Ecuaciones (3.16), pág. 19), con $\eta = \sqrt{e^2-1}$, son

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{\partial V_p}{\partial \ell}, \\
\frac{de}{dt} &= -\frac{\eta}{na^2 e}\frac{\partial V_p}{\partial \omega} - \frac{\eta^2}{na^2 e}\frac{\partial V_p}{\partial \ell}, \\
\frac{di}{dt} &= \frac{1}{na^2\eta\sin i}\frac{\partial V_p}{\partial \Omega} - \frac{\cos i}{na^2\eta\sin i}\frac{\partial V_p}{\partial \omega}, \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{-1}{na^2\eta\sin i}\frac{\partial V_p}{\partial i}, \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\eta}{na^2 e}\frac{\partial V_p}{\partial e} + \frac{\cos i}{na^2\eta\sin i}\frac{\partial V_p}{\partial i}, \\
\frac{d\ell}{dt} &= n - \frac{2}{na}\frac{\partial V_p}{\partial a} + \frac{\eta^2}{na^2 e}\frac{\partial V_p}{\partial e}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Por otra parte, dada una fuerza perturbadora cualquiera $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, las ecuaciones diferenciales de primer orden que describen las derivadas de los elementos orbitales en función de las componentes de la fuerza perturbadora respecto del sistema de referencia orbital o de Gauss ([1] pág. 101-103, 149-150), $\overrightarrow{\mathscr{P}} = (\mathscr{P}_u, \mathscr{P}_v, \mathscr{P}_n)$, son las ecuaciones de Gauss del movimiento orbital, o ecuaciones planetarias en la forma de Gauss ([1], Ecuaciones (12.21), pág. 196), que para órbitas de tipo elíptico y con $\eta = \sqrt{1-e^2}$ se escriben como

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2e\sin f}{n\eta}\mathscr{P}_u + \frac{2a\eta}{nr}\mathscr{P}_v,\\
\frac{de}{dt} &= \frac{\eta\sin f}{na}\mathscr{P}_u + \left(\frac{\eta^3}{ern} - \frac{r\eta}{na^2e}\right)\mathscr{P}_v,\\
\frac{di}{dt} &= \frac{r\cos(\omega+f)}{na^2\eta}\mathscr{P}_n,\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r\sin(\omega+f)}{na^2\eta\sin i}\mathscr{P}_n,\\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\eta\cos f}{nae}\mathscr{P}_u + \frac{r(2+e\cos f)\sin f}{na^2e\eta}\mathscr{P}_v + \frac{r\sin(\omega+f)\cos i}{na^2\eta\sin i}\mathscr{P}_n,\\
\frac{d\ell}{dt} &= n + \left(\frac{-2r}{na^2} + \frac{\eta^2\cos f}{nae}\right)\mathscr{P}_u - \frac{r(2+e\cos f)\sin f}{na^2e}\mathscr{P}_v,
\end{aligned} \tag{1.7}$$

y para órbitas de tipo hiperbólico ([16], pág. 22) con $\eta = \sqrt{e^2-1}$ resultan

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{-2e\sin f}{n\eta}\mathscr{P}_u - \frac{2a\eta}{nr}\mathscr{P}_v,\\
\frac{de}{dt} &= \frac{\eta\sin f}{na}\mathscr{P}_u + \left(\frac{\eta^3}{ern} + \frac{r\eta}{na^2e}\right)\mathscr{P}_v,\\
\frac{di}{dt} &= \frac{r\cos(\omega+f)}{na^2\eta}\mathscr{P}_n,\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r\sin(\omega+f)}{na^2\eta\sin i}\mathscr{P}_n,\\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\eta\cos f}{nae}\mathscr{P}_u - \frac{r(2+e\cos f)\sin f}{na^2e\eta}\mathscr{P}_v - \frac{r\sin(\omega+f)\cos i}{na^2\eta\sin i}\mathscr{P}_n,\\
\frac{d\ell}{dt} &= n + \left(\frac{2r}{na^2} + \frac{\eta^2\cos f}{nae}\right)\mathscr{P}_u - \frac{r(2+e\cos f)\sin f}{na^2e}\mathscr{P}_v.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

## 1.5. Transformaciones diferenciales de la variable independiente

Hasta ahora solo se ha considerado al tiempo físico como variable independiente, reservándose la notación "punto" para las derivadas con respecto a dicha variable. Sin embargo es habitual efectuar algún tipo de transformación (sea en forma finita o en forma diferencial) de las variables dependientes y/o independientes con el propósito de poder garantizar alguna o algunas de las siguientes propiedades para sistemas keplerianos:

- Regularidad: un sistema diferencial se dice regular cuando está exento de singularidades. El sistema kepleriano original (1.1) en función del tiempo posee una singularidad de tipo polo en el centro de fuerzas, donde $r = 0$, y el o los cambios de variables tendrán el objetivo de regularizar la singularidad en dicho punto sin generar nuevas singularidades en puntos originalmente regulares.

- Linealidad: el sistema se considerará linealizado cuando quede formulado como un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden formado por ecuaciones lineales (preferiblemente de coeficientes constantes, asimilándolo a un sistema de osciladores regulares fácilmente resoluble).

- Estabilidad: el problema de Kepler formulado en función del tiempo no es estable en el sentido de Lyapunov, y esta propiedad de estabilidad es deseable para reducir la acumulación del error en las integraciones numéricas de las órbitas.

- Control analítico del paso y homogeneización del error de integración: se intenta optimizar el coste computacional y mejorar la precisión de la integración numérica para minimizar el efecto de la inestabilidad inherente al problema, homogeneizando a lo largo de la órbita la distribución de los puntos en los que se evalúa numéricamente la solución. La situación que se presenta es que una partición uniforme del intervalo de integración respecto de la variable temporal da lugar a una distribución no uniforme de puntos a lo largo de las órbitas de tipo elíptico, estando dichos puntos más concentrados en el entorno del apoastro y siendo considerablemente más rala la distribución de puntos en torno al periastro (precisamente donde las variaciones de los vectores posición y velocidad son más rápidas, todo ello como consecuencia de la segunda ley de Kepler o ley de las áreas).

Es una práctica habitual en Mecánica Celeste y Astrodinámica el uso de transformaciones de la variable independiente definidas mediante relaciones diferenciales entre el tiempo físico $t$ y una nueva variable independiente $\tau$, en ocasiones denominada *pseudotiempo* o *tiempo ficticio*. Para representar las derivadas respecto de esta nueva variable independiente se utilizará la notación de "primas", $\Lambda'(\tau) := \dfrac{d\Lambda(\tau)}{d\tau}$.

Dichas relaciones diferenciales suelen establecerse con ayuda de ciertas funciones de las variables de posición y velocidad, así como de integrales primeras y de constantes y parámetros del sistema en cuestión,

$$dt = \Gamma(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}\,; \text{integrales primeras, elementos orbitales, ctes.})\, d\tau,$$

exigiéndose que $\Gamma$ sea una función estrictamente positiva (para que $t$ y $\tau$ crezcan o decrezcan simultáneamente) y al menos de clase $\mathscr{C}^1$.

La función $\Gamma$ suele denominarse **función de reparametrización** o **función reparametrizadora del movimiento**. Esta función debe ser diferenciable de clase $\mathscr{C}^1$, nunca anularse y mantenerse estrictamente positiva, entre otras propiedades, y el objetivo es mejorar a lo largo de la órbita la uniformidad de la distribución de puntos correspondientes a una distribución uniforme de valores del *pseudotiempo*. En muchos casos la nueva variable se caracteriza como un ángulo, por lo que en dichas situaciones es habitual adaptar la función reparametrizadora con el fin de asociar una periodicidad de $2\pi$ a la nueva variable independiente.

Este tipo de transformaciones puede considerarse como generalizaciones de la transformación clásica de Sundman ([1], Fórmula (8.15), pág. 131; [4], Fórmula (9.12), pág. 151; [18], pág. 127),

$$dt = r\, d\tau,$$

inspirada por la transformación utilizada por Euler para regularizar la colisión con el origen en un problema de Kepler unidimensional ([4], pág. 149; [17], pág. 13).

En muchos casos la función reparametrizadora se toma como una función que depende de la distancia $r$ al centro de fuerzas y de constantes y parámetros del problema, es decir,

$$g(r\,; \text{constantes}),$$

con lo que para una función $Z = Z(t)$ se pueden obtener sus derivadas sucesivas respecto de $t$

en función de las derivadas sucesivas de $Z$ respecto de $\tau$ (*cfr* [19], Fórmulas (7-a), pág. 501),

$$\begin{aligned} dt &= g(r)d\tau \Longrightarrow \frac{dt}{d\tau} = g(r), \\ \dot{Z} &= \frac{dZ}{dt} = \frac{dZ}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{g(r)}Z', \\ \ddot{Z} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{Z'}{g(r)}\right) = \frac{1}{g(r)}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{Z'}{g(r)}\right) = \frac{1}{g(r)}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{Z''}{g(r)} + Z'\left(\frac{1}{g(r)}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{g(r)}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{Z''}{g(r)} - \frac{Z'}{g^2(r)}\frac{dg(r)}{dr}\frac{dr}{d\tau}\right) = \frac{1}{g^2(r)}\left(Z'' - \frac{1}{g(r)}\frac{dg(r)}{dr}r'Z'\right) = \\ &= \frac{1}{g^2(r)}\left(Z'' - \frac{d\log(g(r))}{dr}r'Z'\right). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Si se desea relacionar entre sí dos variables independientes cualesquiera, $\tau_1$ y $\tau_2$, introducidas a través de funciones de reparametrización $g_1$ y $g_2$, se tiene que

$$dt = g_1 d\tau_1 = g_2 d\tau_2 \implies d\tau_1 = \frac{g_2}{g_1}d\tau_2.$$

Las transformaciones de este tipo a las que tradicionalmente se ha recurrido se han introducido por medio de funciones de reparametrización en forma de potencias de $r$, $g_\alpha(r) = k_\alpha r^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{Q}$, $k_\alpha \in \mathbb{R}$; como ejemplos clásicos se tienen:

- anomalía media ($\alpha = 0$): proporcional al tiempo físico, y que para el época de paso por el periastro toma el valor 0 y, en órbitas elípticas el periodo orbital corresponde a $2\pi$.
- anomalía excéntrica ($\alpha = 1$): inspirada en el caso original propuesto por Sundman, regulariza y linealiza la ecuación del movimiento mediante la inserción de las integrales primeras de la energía y del vector de Laplace, sin llegar a uniformizar la distribución de puntos sobre la órbita y manteniendo una relativa concentración de puntos de evaluación alrededor del periastro.
- anomalía verdadera ($\alpha = 2$): concentra la distribución de puntos de evaluación cerca del apoastro aportando la misma regularidad que la excéntrica.

En la segunda mitad del siglo XX algunos autores como Janin [12], Szebehely [19], Nacozy [14], Janin y Bond [13] consideraron funciones de reparametrización dependientes de otras potencias de la distancia $r$, mientras que otros autores estudiaron reparametrizaciones mediante funciones algebraicas de $r$ más generales, como por ejemplo

$$g(r;\alpha,a_0,a_1) = \frac{r^\alpha}{\sqrt{a_0 + a_1 r}}, \quad a_0 + a_1 r > 0, \tag{1.10}$$

para distintas elecciones del exponente $\alpha \in \mathbb{Q}$ y de los coeficientes $a_0$ y $a_1$; así, Cid, Ferrer y Elipe [7] ($\alpha = 3/2$), Ferrándiz [8] ($\alpha = 3/2$), Ferrándiz y Ferrer [9] ($\alpha = 2$), Ferrándiz, Ferrer y Sein-Echaluce [10] ($\alpha = 3/2$).

También se han usado funciones de reparametrización del tipo

$$g(r;\alpha) = \frac{r^\alpha}{\sqrt{\Phi(r)}}, \quad \Phi(r) > 0, \quad \Phi(r) \text{ polinomio de grado } > 2, \tag{1.11}$$

como Belen'kii [3], Szebehely y Bond [20], Cid, Ferrer y Elipe [7].

En relación con la distribución de puntos a lo largo de una órbita elíptica dependiendo de la elección de variable independiente para intervalos equiespaciados, véanse [13], Figura 1, págs. 10-11 y [10], Figura 1, pág. 326.

Para la regulación analítica del paso de integración en integraciones numéricas de órbitas elípticas altamente excéntricas, E. V. Brumberg [5] propuso el uso de la longitud de arco orbital como variable independiente.

La transformación de Brumberg [5], que introduce el parámetro $s$ correspondiente al *arco de elipse* como *pseudotiempo*, encaja en el esquema de transformaciones de Sundman generalizadas de la fórmula (1.10) para $\alpha = 1/2$. En su artículo Brumberg deduce e integra (por medio de *integrales y funciones elípticas*) la relación diferencial entre el tiempo físico $t$ y la longitud de arco de elipse $s$.

Precisamente este artículo se ha tomado como punto de partida para este TFG, generalizando el tratamiento y los resultados de este autor para el caso de órbitas de tipo hiperbólico, obteniéndose en forma finita la relación entre el tiempo físico y la longitud de arco de hipérbola. Como en el trabajo de Brumberg, las *integrales y funciones elípticas* constituyen herramientas matemáticas esenciales para el desarrollo e integración de la transformación; para ello se ha hecho uso sistemático y generalizado del libro de Byrd y Friedman [6].

## 1.6. Objetivos y estructura de este trabajo

El principal objetivo de este Trabajo de Fin de Grado es el estudio del movimiento kepleriano de tipo hiperbólico siguiendo un procedimiento análogo al de E. V. Brumberg en su artículo [5] para desarrollar una transformación diferencial entre el tiempo físico $t$ y la longitud de arco $s$ que, posteriormente, se pueda aplicar a las ecuaciones planetarias del movimiento orbital de tipo hiperbólico en las formas de Lagrange y de Gauss presentadas por Navascués en su Trabajo de Fin de Grado [16].

El *primer capítulo* consiste en una revisión de los conceptos y resultados fundamentales de la teoría de los sistemas keplerianos (formulación del problema, integrales primeras, elementos orbitales, problema de Kepler perturbado) y la introducción de variables independientes distintas del tiempo físico por medio de relaciones diferenciales que constituyen generalizaciones de la transformación clásica de Sundman.

En el *segundo capítulo*, siguiendo la línea de trabajo de Brumberg, se deduce la transformación diferencial entre el tiempo $t$ y la longitud de arco de hipérbola $s$ y se integra (en términos de integrales y funciones elípticas) esa relación diferencial por medio de la anomalía excéntrica hiperbólica $H$. Asimismo, siguiendo otro enfoque basado en las relaciones entre las anomalías excéntricas elíptica $E$ e hiperbólica $H$ ([2], Problema 4-17, pág. 168), se efectúa una deducción alternativa que permite recuperar los resultados obtenidos por el procedimiento anterior.

En el *tercer capítulo* se aborda el tratamiento de las órbitas solución de sistemas keplerianos perturbados que sean de tipo hiperbólico utilizando la longitud de arco de hipérbola como variable independiente. En concreto se obtienen las ecuaciones que describen las variaciones (debidas al efecto de fuerzas perturbadoras adicionales) que experimentan las integrales primeras clásicas del problema de Kepler y las ecuaciones planetarias para los elementos orbitales keplerianos convencionales en sus formas de Lagrange y de Gauss, expresando las ecuaciones planetarias obtenidas por Navascués [16] en función del parámetro arco de hipérbola.

A continuación se recapitulan las *Conclusiones* de este TFG, se presenta la *Bibliografía* citada y se incluye un *apéndice* dedicado a una breve presentación del *contenido del artículo de Brumberg*.

# Capítulo 2

# Desarrollo de la transformación del tiempo a la longitud de arco

## 2.1. Deducción de la relación diferencial entre el tiempo y la longitud de arco

El procedimiento que se seguirá aquí se basa en el artículo de Brumberg [5], pero cambiando los parámetros y variables correspondientes a órbitas elípticas por los de hiperbólicas. Las expresiones para las coordenadas cartesianas $x, y$ en el plano orbital (en función de la anomalía excéntrica $H$ del movimiento hiperbólico, del semieje real $a$ y de la excentricidad $e$), la ecuación de Kepler (que relaciona la anomalía excéntrica $H$ con el tiempo $t$) y la representación paramétrica de la hipérbola con $H$ como parámetro de la representación son

$$\begin{aligned} x &= x(H) = a(e - \cosh H), \qquad y = y(H) = a\sqrt{e^2-1}\sinh H, && (2.1) \\ n(t-T) &= e\sinh H - H \Longrightarrow n\,dt = (e\cosh H - 1)\,dH, && (2.2) \\ r(H) &= a(e\cosh H - 1), && (2.3) \end{aligned}$$

siendo $T$ el instante de paso por el periastro y $n$ el movimiento medio, definido mediante la fórmula $\mu = n^2 a^3$.

La longitud de arco $s$ está relacionada con las coordenadas cartesianas y con la anomalía excéntrica por medio de la expresión

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dH}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dH}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dH}\right)^2 &= (-a\sinh H)^2 + (a\sqrt{e^2-1}\cosh H)^2 = \\ &= a^2(\sinh^2 H + (e^2-1)\cosh^2 H) = a^2(e^2\cosh^2 H - 1), \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$ds = a\sqrt{e^2\cosh^2 H - 1}\,dH. \tag{2.4}$$

A partir de la *relación diferencial* (2.4), y aplicando el cambio de variable $u = \cosh z$, se obtiene en términos finitos la siguiente relación entre $s$ y $H$,

$$\begin{aligned} s &= a\int_0^H \sqrt{e^2\cosh^2 z - 1}\,dz = a\int_1^{\cosh H} \frac{\sqrt{e^2u^2-1}}{\sqrt{u^2-1}}\,du = a\int_1^{\cosh H}\sqrt{\frac{1-e^2u^2}{1-u^2}}\,du = \\ &= a\left(\int_0^{\cosh H}\sqrt{\frac{1-e^2u^2}{1-u^2}}\,du - \int_0^1\sqrt{\frac{1-e^2u^2}{1-u^2}}\,du\right) = \\ &= a(\mathbb{E}(\arcsin(\cosh H), e) - \mathbb{E}(e)), && (2.5) \end{aligned}$$

donde $\mathbb{E}(\phi,k)$ designa la **integral elíptica incompleta de segunda especie** de argumento $\phi$ y módulo $k$, y $\mathbb{E}(k)$ la correspondiente integral elíptica **completa** de segunda especie.

La relación diferencial entre el tiempo físico $t$ y la longitud de arco $s$ será de la forma $dt = g(r)ds$, donde la función $g$ es

$$\begin{aligned} g = \frac{dt}{ds} &= \frac{dt}{dH}\frac{dH}{ds} = \frac{e\cosh H - 1}{n}\frac{1}{a\sqrt{e^2\cosh^2 H - 1}} = \sqrt{\frac{e\cosh H - 1}{n^2a^2(e\cosh H + 1)}} = \\ &= \sqrt{\frac{r}{n^2a^3(e\cosh H + 1)}} = \sqrt{\frac{r}{\mu(2 + e\cosh H - 1)}} = \sqrt{\frac{r}{2\mu + n^2a^2r}} = \\ &= \sqrt{\frac{r}{2\mu + 2r\mu/2a}} = \sqrt{\frac{r}{2\mu + 2h_kr}} \end{aligned} \tag{2.6}$$

siendo $h_k = \mu/2a$ la energía de una órbita kepleriana hiperbólica.

Nótese que $g = g(r;\mu,h_k)$ y, por lo tanto, la relación diferencial entre $s$ y $t$ se expresará a través de la función algebraica $g$ de la variable $r$ como

$$dt = g(r;\mu,h_k)ds. \tag{2.7}$$

## 2.2. Sobre la integración de la relación diferencial

Las siguientes sustituciones de la integral

$$\int_1^{\cosh H} \sqrt{\frac{u^2 - e^{-2}}{u^2 - 1}}\, du, \tag{2.8}$$

que figura en la fórmula 2.5 con un factor de $e^{-2}$, se han obtenido del libro de Byrd y Friedmann [6], páginas 18-19.

En esta sección se utilizarán las funciones elípticas de Jacobi a partir de la integral elíptica incompleta de primera especie $\mathbb{F}(\phi,k)$ definida como

$$u = \int_0^{y_1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \mathbb{F}(\phi,k) = \int_0^{\phi} \frac{dz}{\sqrt{1-k^2\sin z}}, \tag{2.9}$$

donde $k$ es el **módulo** y el límite superior de integración $y_1 = \sin\phi$. En estas condiciones, la **amplitud** se define como la función inversa de la integral (2.9), $\mathrm{am}(u,k) = \phi$, y a esta se le pueden aplicar las funciones trigonométricas habituales como seno o coseno para obtener diferentes funciones nuevas: el <u>seno amplitud</u> queda como $\mathrm{sn}(u,k) = \sin\phi$, <u>delta amplitud</u> $\mathrm{dn}(u,k) = \sqrt{1-k^2y_1^2}$, <u>secante y coseno amplitud</u> $\mathrm{nc}(u,k) = \frac{1}{\mathrm{cn}(u,k)} = \frac{1}{\cos\phi} = \sec\phi$, y <u>tangente amplitud</u> $\mathrm{tn}(u,k) = \frac{\mathrm{sn}}{\mathrm{cn}}(u,k) = \tan\phi$.

Se indicará en cada caso la numeración de la fórmula correspondiente del libro de Byrd y Friedman [6] y se detallarán las condiciones para su validez y aplicabilidad, dejando constancia también de otras posibles fórmulas en caso de ser necesarias. Asimismo se han de tener en cuenta las funciones elípticas de Jacobi, también presentadas en Byrd y Friedman [6]:

La primera es la fórmula (216.3), pág. 53, que corresponde a la integral de la raíz cuadrada del cociente de dos polinomios de grado 2 con término lineal nulo, $\sqrt{\frac{t^2-b^2}{t^2-a^2}}$, $a > b > 0$, a saber,

$$\cosh H = y > a = 1 > b = e^{-1} > 0, \quad \mathrm{sn}^2 u = \frac{t^2-1}{t^2-e^{-2}}, \quad k^2 = e^{-2}, \quad g = 1,$$

$$\varphi = \mathrm{am}\, u_1 = \arcsin\sqrt{\frac{\cosh^2 H - 1}{\cosh^2 H - e^{-2}}},$$

que aplicada a (2.8) da lugar a

$$\begin{aligned}\int_1^{\cosh H}\sqrt{\frac{u^2-e^{-2}}{u^2-1}}\,du &= \frac{1-e^{-2}}{a}\int_0^{u_1}\mathrm{nc}^2u\,du = [313.02,\text{ pág. }193]\\ &= \frac{1-e^{-2}}{ak'^2}(k'^2-\mathbb{E}(u)+\mathrm{dn}(u)\mathrm{tn}(u))\\ &= \frac{1-e^{-2}}{a}\left(1-\frac{\mathbb{E}(u)+\mathrm{dn}(u)\mathrm{tn}(u)}{\sqrt{1-k^2}}\right).\end{aligned} \tag{2.10}$$

La segunda, (258.18) de la página 130, es una expresión que contiene cuatro polinomios de primer grado, $\sqrt{\frac{(t-b)(t-c)}{(t-a)(t-d)}}$, $a>b>c>d$, con

$$\begin{aligned}&\cosh H = y > 1 = a > e^{-1} = b > -e^{-1} = c > -1 = d,\\ &\mathrm{sn}^2u = \frac{(e+1)(t-1)}{2(et-1)},\quad k^2=\frac{4e}{(e+1)^2},\quad g=\frac{2e^2}{(e+1)^2},\\ &\varphi = \mathrm{am}u_1 = \arcsin\frac{(1+e)(\cosh H-1)}{2(e\cosh H-1)}.\end{aligned}$$

Análogamente al primer caso, aplicándolo a (2.8) y siendo

$$\Pi(\phi,\alpha^2,k) = \int_0^{\phi}\frac{dx}{(1-\alpha^2\sin^2x)\sqrt{1-k^2\sin^2x}} = \int_0^{u_1}\frac{du}{1-\alpha^2\mathrm{sn}^2u} \tag{2.11}$$

la integral elíptica incompleta de tercera especie de módulo $k$, resultará

$$\begin{aligned}&\int_1^{\cosh H}\sqrt{\frac{u^2-e^{-2}}{u^2-1}}du = (1-e^{-1})(1+e^{-1})\frac{2e^2}{(e+1)^2}\int_0^{u_1}\frac{\mathrm{dn}^2(u)\,du}{(1-\frac{2e}{e+1}\mathrm{sn}^2(u))^2} =\\ &= 2(e^2-1)\int_0^{u_1}\frac{\mathrm{dn}^2(u)\,du}{(e+1-2e\,\mathrm{sn}^2(u))^2} = \frac{2(e^2-1)}{(e+1)^2}\int_0^{u_1}\frac{\mathrm{dn}^2(u)\,du}{(1-\frac{2e}{e+1}\mathrm{sn}^2(u))^2} =\\ &= [362.17,\text{ pág. }218] = -\frac{2(e^2-1)}{(e+1)^2}\frac{1}{2\frac{2e}{e+1}(\frac{4e}{(e+1)^2})}\left[\frac{2e}{(e+1)}\mathbb{E}(u)+\left(\frac{4e}{(e+1)^2}-\frac{2e}{e+1}\right)u+\right.\\ &\left.+\left(2\frac{2e}{e+1}-(\frac{2e}{e+1})^2-\frac{4e}{(e+1)^2}\right)\Pi(u,\frac{2e}{e+1})-\frac{(\frac{2e}{e+1})^2\mathrm{sn}(u)\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)}{1-\frac{2e}{e+1}\mathrm{sn}^2u}\right] =\\ &= \frac{e^4-1}{2e(3e-1)}\left[\frac{2e}{e+1}\mathbb{E}(u)-\frac{2e(e-1)}{(e+1)^2}u-\frac{4e^2\mathrm{sn}(u)\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)}{(3e-1)(e+1-2e\mathrm{sn}^2(u))^2}\right] =\\ &= \frac{(e^2+1)(e-1)}{3e-1}\mathbb{E}-\frac{(e^2+1)(e-1)^2}{(3e-1)(e+1)}u-\frac{2e(e^2+1)(e-1)\mathrm{sn}(u)\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)}{(3e-1)(e+1-2e\mathrm{sn}^2(u))} =\\ &= \frac{(e^2+1)(e-1)}{3e-1}\left(\mathbb{E}(u)-\frac{e-1}{e+1}u-\frac{2e\,\mathrm{sn}(u)\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)}{e+1-2e\,\mathrm{sn}^2(u)}\right).\end{aligned}$$

## 2.3. Relaciones con la anomalía excéntrica hiperbólica

A partir de la transformación en forma finita se pueden establecer nuevas relaciones con otras parametrizaciones que posteriormente utilizaremos en el trabajo.

En primer lugar expresaremos la anomalía excéntrica $H$ en función de la longitud de arco $s$ a partir de la fórmula

$$\frac{s}{a}+\mathbb{E}(e)=\mathbb{E}(\arcsin\cosh H,e)\Longleftrightarrow\cosh H=\operatorname{am}\left(\frac{s}{a}+\mathbb{E}(e)\right),\tag{2.12}$$

obtenida a partir de (2.5). Para ello utilizaremos varias fórmulas y propiedades de Byrd y Friedmann [6],

- (114.1), transformación del módulo recíproco,

$$\begin{aligned}k_1&=\frac{1}{k},\\ \sin\phi_1&=k\sin\phi,\\ \mathbb{F}(\phi,k)&=k_1\mathbb{F}(\phi_1,k_1),\\ \mathbb{E}(\phi,k)&=k_1[k^2\mathbb{E}(\phi_1,k_1)+k'^2\,\mathbb{F}(\phi,k)];\end{aligned}\tag{2.13}$$

- (115.3), tratamiento del argumento complejo,

$$\begin{aligned}\sin\psi&\geq\frac{1}{k},\\ \sin\beta&=\frac{1}{k\sin\psi},\\ \mathbb{F}(\psi,k)&=\mathbb{F}(\beta,k)+i\mathbb{K}(k'),\\ \mathbb{E}(\psi,k)&=\mathbb{E}(\beta,k)+\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}\cot\beta+i[\mathbb{K}(k')-\mathbb{E}(k')].\end{aligned}\tag{2.14}$$

Como consecuencia, llevando (2.13) a (2.12) se obtiene

$$\begin{aligned}k_1&=e^{-1},\\ \sin\phi_1&=e\sin\arcsin\cosh H=e\cosh H,\\ \mathbb{E}(\arcsin\cosh H,e)&=e^{-1}[e^2\mathbb{E}(\arcsin(e\cosh H),e^{-1})+(1-e^2)\mathbb{F}(\arcsin(e\cosh H),e^{-1})],\\ &=e\mathbb{E}(\arcsin(e\cosh H),e^{-1})+\frac{1-e^2}{e}\mathbb{F}(\arcsin(e\cosh H),e^{-1}),\end{aligned}\tag{2.15}$$

y tras incorporar (2.14), que se cumple siempre, a (2.15) se concluye que

$$\begin{aligned}&1<k^{-1}\leq\sin\psi\Longrightarrow e\leq e\cosh H,\\ &k=e^{-1}\Longrightarrow k'=\sqrt{1-e^{-2}},\\ &\beta=\arcsin\frac{1}{k\sin\psi}=\arcsin\operatorname{sech}H.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Con todo lo cual,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\arcsin(e\cosh H),e^{-1})=&\mathbb{E}(\arcsin\operatorname{sech}H,e^{-1})+i\,(\tan H)\sqrt{1-e^{-2}\cosh^{-2}H}\\ &+i\,\mathbb{K}(\sqrt{1-e^{-2}})-i\,\mathbb{E}(\sqrt{1-e^{-2}}),\\ \mathbb{F}(\arcsin(e\cosh H),e^{-1})=&\mathbb{F}(\arcsin\operatorname{sech}H,e^{-1})+i\,\mathbb{K}(\sqrt{1-e^{-2}}),\end{aligned}\tag{2.17}$$

con $\mathbb{K}$ la **integral elíptica completa de primera especie**. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\arcsin\cosh H, e) = e[\mathbb{E}(\arcsin \operatorname{sech} H, \frac{1}{e}) + i\,(\tan H)\sqrt{1-e^{-2}\cosh^{-2}H} + i\mathbb{K}(\sqrt{1-e^{-2}}) \\ - i\mathbb{E}(\sqrt{1-e^{-2}})] + \frac{1-e^2}{e}[\mathbb{F}(\arcsin \operatorname{sech} H, \frac{1}{e}) + i\mathbb{K}(\sqrt{1-e^{-2}})] \\ = e[\mathbb{E}-\mathbb{F}](\arcsin \operatorname{sech} H, \frac{1}{e}) + \frac{1}{e}\mathbb{F}(\arcsin \operatorname{sech} H, \frac{1}{e}) + i\,\frac{1}{e}\mathbb{K}(\sqrt{1-e^{-2}} \\ - i\,e\mathbb{E}(\sqrt{1-e^{-2}}) + i\,(\tan H)\sqrt{1-e^{-2}\cosh^{-2}H}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

A continuación aplicaremos el resultado (117.4), pág. 14 de [6], con el que podemos expresar la diferencia entre integrales elípticas incompletas de primera y segunda especie con los mismos mismos argumento y módulo,

$$\begin{aligned}&\sin\beta = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2-k^2}}, \\ &0 < -\alpha^2 < \infty, \\ &(1-\alpha^2)(k^2-\alpha^2)(\mathbb{K}'-\mathbb{E}')\Pi(\alpha^2,k) + \alpha^2(\alpha^2-k^2)\mathbb{E}\,\Pi(\frac{k'^2}{\alpha^2-1},k') + (k^2-\alpha^2)(\alpha^2-1)\mathbb{E}\,\mathbb{K}' \\ &= \frac{\pi}{2}[\mathbb{F}-\mathbb{E}](\beta,k')\sqrt{\alpha^2(\alpha^2-1)(k^2-\alpha^2)} + \frac{\pi k^2(\alpha^2-1}{2},\end{aligned}$$

donde las notaciones $\mathbb{K}'$ y $\mathbb{E}'$ designan, respectivamente, las integrales elípticas completas de primera y segunda especie y módulo recíproco. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\arcsin\cosh H, e) = e[\mathbb{E}-\mathbb{F}](\arcsin \operatorname{sech} H, \frac{1}{e}) + \frac{1}{e}\mathbb{F}(\arcsin \operatorname{sech} H, \frac{1}{e}) + i\,\frac{1}{e}\mathbb{K}(\sqrt{1-e^{-2}} \\ - i\,e\mathbb{E}(\sqrt{1-e^{-2}}) + i\,(\tan H)\sqrt{1-e^{-2}\cosh^{-2}H}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

## 2.4. Deducción alternativa de la transformación diferencial

En esta sección se recuperarán los resultados anteriormente calculados en este capítulo para el movimiento de tipo hiperbólico aplicando las relaciones que aparecen en el libro de Battin [2], páginas 160 a 170, a los resultados sobre el movimiento de tipo elíptico expuestos en el artículo de Brumberg [5].

En lo que sigue se utilizará la notación de subíndices $e$ para las variables correspondientes a movimientos de tipo elíptico y $h$ para las análogas del movimiento de tipo hiperbólico.

Siendo $\ell$ la anomalía media, $E$ la anomalía excéntrica elíptica, $a$ el semieje, $e$ la excentricidad, $n$ el movimiento medio, $t$ el tiempo físico y $T$ la época de paso por el periastro, la ecuación de Kepler del movimiento elíptico es

$$\ell = E - e\sin E = n(t-T) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t-T), \tag{2.20}$$

y mediante la relación $E = -iH$ las fórmulas del movimiento elíptico se traducen al caso de órbitas hiperbólicas, con lo que la ecuación de Kepler queda

$$\begin{aligned}\ell_e &= E - e\sin E = -iH - e\sin(-iH) = -iH + ie\sinh H = -i(H - e\sinh H) \\ &= i(e\sinh H - H) = i\,\ell_h,\end{aligned}$$

y para las coordenadas rectangulares del vector posición en el plano orbital se tiene

$$x_e = a(\cos E - e) = a(\cos(-iH) - e) = a(\cosh H - e) = x_h,$$
$$y_e = a\sqrt{1-e^2}\sin E = ai\sqrt{e^2-1}\sin(-iH) = a\sqrt{e^2-1}\sinh H = y_h,$$

llegándose a obtener

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dE} &= a\sqrt{1-e^2\cos^2 E} = a\sqrt{1-e^2\cos^2(-iH)} = a\sqrt{1-e^2\cosh^2(H)} \\ &= ia\sqrt{e^2\cosh^2 H - 1} = \frac{dH}{dE}\frac{ds}{dH}.\end{aligned}$$

Introduciendo las notaciones $u$ y $v$ con $u = iv$, la longitud de arco para las órbitas de tipo elíptico ([5], Fórmula 9, pág. 324) resulta

$$\begin{aligned}s_E &= a\int_{\pi/2}^{\pi/2+E}\sqrt{1-e^2\sin^2 u}\,du = a\int_0^E\sqrt{1-e^2\cosh^2 u}\,du = a\int_0^{-iH}\sqrt{1-e^2\cos^2 u}\,du = \\ &= -a\int_0^{iH}\sqrt{1-e^2\cos^2 u}\,du = -a\int_0^H\sqrt{1-e^2\cosh^2 v}\,i\,dv = a\int_0^H\sqrt{e^2\cosh^2 v - 1}\,dv,\end{aligned}$$

resultado que podemos alcanzar análogamente desde la expresión (2.8),

$$\begin{aligned}s_H &= a[\mathbb{E}(\arcsin\cosh H, e) - \mathbb{E}(e)] = a\int_0^{\arcsin\cosh H}\sqrt{1-e^2\sin^2 u}\,du = \\ &= a\int_0^H\sqrt{1-e^2\cosh^2 v}\,i\,dv = a\int_0^H\sqrt{e^2\cosh^2 v - 1}\,dv,\end{aligned} \tag{2.21}$$

con lo que quedaría patente la viabilidad de aplicar la relación de $E = -iH$ para poder transformar las fórmulas propuestas en el artículo de Brumberg para el movimiento de tipo elíptico en las correspondientes fórmulas para el movimiento de tipo hiperbólico que hemos desarrollado a lo largo de este capítulo.

# Capítulo 3

# Ecuaciones de las variaciones de las constantes en función de la longitud de arco

En este capítulo se va a aplicar la transformación diferencial obtenida en (2.6) para establecer las fórmulas que describen las variaciones (debidas a la presencia de fuerzas perturbadoras adicionales) de las integrales primeras clásicas y de los elementos orbitales del problema de Kepler, cuando se utiliza la longitud de arco como nueva variable independiente.

Si $W$ representa una función cualquiera, en virtud de la regla de la cadena, y a la vista de la función de reparametrización (2.6), se tendrá

$$\frac{dW}{ds} = \frac{dW}{dt}\frac{dt}{ds} = g(r)\,\frac{dW}{dt} = \sqrt{\frac{r}{2\mu + 2h_k r}}\,\frac{dW}{dt}. \tag{3.1}$$

## 3.1. Integrales primeras clásicas

Partiremos de las fórmulas (8.37), pág. 129, (8.41), pág. 130 y (8.54), pág. 134 del libro de Bond y Allman [4].

Se considera $\overrightarrow{\mathscr{P}} = \overrightarrow{\mathscr{P}}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \overrightarrow{\mathscr{P}}^*(s, \mathbf{r}(s), \dot{\mathbf{r}}(s))$ una fuerza perturbadora en función de $t$ o de $s$ como variable independiente. Denotando

$$s^* = \frac{s}{a} + \mathbb{E}(e)\,,$$

y usando notación de "primas"para las derivadas respecto del parámetro $s$, se tienen como expresiones preliminares las siguientes:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}(s) &= (x(s), y(s), 0), \\
\dot{\mathbf{r}}(s) &= g(r)(x'(s), y'(s), 0), \\
s^* &= \frac{s}{a} + \mathbb{E}(e) = \mathbb{E}(\arcsin \cosh H, e) \Longrightarrow \cosh H = \mathrm{am}\left(\frac{s}{a} + \mathbb{E}(e)\right) = \mathrm{am}(s^*), \\
x(H) &= a(e - \cosh H) \Longrightarrow x(s) = a[e - \mathrm{am}(s^*)], \\
y(H) &= a\sqrt{e^2-1}\sinh H \Longrightarrow y(s) = a\sqrt{e^2-1}\sqrt{\mathrm{am}^2(s^*)-1}, \\
x'(s) &= \frac{d}{ds}[a(e-\mathrm{am}(s^*)] = -a\frac{d\mathrm{am}(s^*)}{ds} = -a\mathrm{dn}(s^*)\frac{1}{a} = -\mathrm{dn}(s^*), \\
y'(s) &= \frac{d}{ds}\left[a\sqrt{e^2-1}\sqrt{\mathrm{am}^2(s^*)-1}\right] = a\sqrt{e^2-1}\frac{d}{ds}\sqrt{\mathrm{am}^2(s^*)-1} \\
&= a\sqrt{e^2-1}\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{am}^2(s^*)-1}}2\mathrm{am}(s^*)\mathrm{dn}(s^*)\frac{1}{a} = \frac{\sqrt{e^2-1}\mathrm{am}(s^*)\mathrm{dn}(s^*)}{\sqrt{\mathrm{am}^2(s^*)-1}}, \\
\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} &= (x,y,0)(\dot{x},\dot{y},0) = \frac{1}{g(r)}(xx'+yy') = \\
&= \frac{1}{g(r)}\left\{a[e-\mathrm{am}(s^*)][-\mathrm{dn}(s^*)] + a\sqrt{e^2-1}\sqrt{\mathrm{am}^2(s^*)-1}\frac{\sqrt{e^2-1}\mathrm{am}(s^*)\mathrm{dn}(s^*)}{\sqrt{\mathrm{am}^2(s^*)-1}}\right\} = \\
&= \frac{a}{g(r)}\left\{[\mathrm{am}(s^*)-e]\mathrm{dn}(s^*) + (e^2-1)\mathrm{am}(s^*)\mathrm{dn}(s^*)\right\} = \frac{ae\mathrm{dn}(s^*)}{g(r)}[e\mathrm{am}(s^*)-1].
\end{aligned}
$$

### 3.1.1. Variación de la energía kepleriana $h_k$

$$
\frac{dh_k}{ds} = \frac{1}{na}\sqrt{\frac{e\,\mathrm{am}(s^*)-1}{e\,\mathrm{am}(s^*)+1}}(\overrightarrow{\mathscr{P}}\cdot\dot{\mathbf{r}}). \tag{3.2}
$$

### 3.1.2. Variación del momento angular G

$$
\frac{d\mathbf{G}}{ds} = g(r)(\mathbf{r}\times\overrightarrow{\mathscr{P}}) = \sqrt{\frac{1}{2h_k}}\sqrt{\frac{e\mathrm{am}(s^*)-1}{e\mathrm{am}(s^*)+1}}\,\mathbf{r}\times\overrightarrow{\mathscr{P}}^*. \tag{3.3}
$$

### 3.1.3. Variación del vector de Laplace A

$$
\frac{d\mathbf{A}}{ds} = \frac{1}{na}\sqrt{\frac{e\,\mathrm{am}(s^*)-1}{e\,\mathrm{am}(s^*)+1}}\left[2a(\overrightarrow{\mathscr{P}}\cdot\dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - n\,a^2\,e\,\mathrm{dn}(s^*)\sqrt{e^2\,\mathrm{am}^2(s^*)-1}\,\overrightarrow{\mathscr{P}} - (\overrightarrow{\mathscr{P}}\cdot\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}\right]. \tag{3.4}
$$

## 3.2. Ecuaciones planetarias de Lagrange para el movimiento de tipo hiperbólico

En esta sección nuevamente se va a aplicar la transformación diferencial obtenida en (2.6) para deducir en este caso las fórmulas que describen las variaciones de los elementos orbitales keplerianos a causa de fuerzas perturbadoras en el caso de órbitas de tipo hiperbólico, procediéndose como se ha indicado en la fórmula (3.1).

A continuación se presentan las expresiones de las ecuaciones planetarias de Lagrange en función de la longitud de arco $s$ como variable independiente, con la notación $\eta = \sqrt{e^2-1}$:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{ds} &= \frac{2a}{\mu}\sqrt{\frac{e\,\mathrm{am}(s^*)-1}{e\,\mathrm{am}(s^*)+1}}\frac{\partial V_p}{\partial \ell},\\
\frac{de}{ds} &= -\frac{\eta}{\mu e}\sqrt{\frac{e\,\mathrm{am}(s^*)-1}{e\,\mathrm{am}(s^*)+1}}\left(\frac{\partial V_p}{\partial \omega}+\eta\frac{\partial V_p}{\partial \ell}\right),\\
\frac{di}{ds} &= \frac{1}{\mu\eta\sin i}\sqrt{\frac{e\,\mathrm{am}(s^*)-1}{e\,\mathrm{am}(s^*)+1}}\left(\frac{\partial V_p}{\partial \Omega}-\cos i\frac{\partial V_p}{\partial \omega}\right),\\
\frac{d\Omega}{ds} &= \frac{-1}{\mu\sin i}\sqrt{\frac{e\,\mathrm{am}(s^*)-1}{e\,\mathrm{am}(s^*)+1}}\frac{\partial V_p}{\partial i},\\
\frac{d\omega}{ds} &= \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{e\,\mathrm{am}(s^*)-1}{e\,\mathrm{am}(s^*)+1}}\left(\frac{\eta}{e}\frac{\partial V_p}{\partial e}+\frac{\cos i}{\eta\sin i}\frac{\partial V_p}{\partial i}\right),\\
\frac{d\ell}{ds} &= \frac{1}{\mu e}\sqrt{\frac{e\,\mathrm{am}(s^*)-1}{e\,\mathrm{am}(s^*)+1}}\left(\frac{\mu e}{a}-2ae\frac{\partial V_p}{\partial a}+\eta^2\frac{\partial V_p}{\partial e}\right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

## 3.3. Ecuaciones planetarias de Gauss para el movimiento de tipo hiperbólico

Antes de presentar las expresiones finales consignaremos algunas fórmulas auxiliares necesarias para relacionar entre sí los pseudotiempos $f$ (anomalía verdadera), $H$ (anomalía excéntrica hiperbólica) y $s$ (longitud de arco de hipérbola). Partiendo de las relaciones entre $f$ y $H$ ([1], pág. 139) y de la relación entre $s$ y $H$ dada en (2.12), y recordando que $\eta = \sqrt{e^2-1}$,

$$\begin{aligned}
\cosh H &= \mathrm{am}(s/a+\mathbb{E}(e)) = \mathrm{am}(s^*),\\
\sinh H &= \sqrt{\mathrm{am}^2(s^*)-1},\\
\cos f &= \frac{e-\cosh H}{\cosh H-1} = \frac{e-\mathrm{am}(s^*)}{e\mathrm{am}(s^*)-1} = \frac{a(e-\mathrm{am}(s^*))}{r},\\
\sin f &= \frac{\sqrt{e^2-1}\sinh H}{e\cosh H-1} = \frac{\eta\sqrt{\mathrm{am}^2(s^*)-1}}{e\mathrm{am}(s^*)-1} = \frac{a\eta\sqrt{\mathrm{am}^2(s^*)-1}}{r}.
\end{aligned}$$

Gracias a las fórmulas anteriores, las ecuaciones planetarias de Gauss respecto de $s$ quedan:

$$
\begin{aligned}
\frac{da}{ds} &= \frac{da}{dt}\frac{dt}{ds} = -\left(\frac{2e\sin f}{n\eta}\mathscr{P}_u + \frac{2a\eta}{nr}\mathscr{P}_v\right)\left(\frac{e\mathrm{am}(s^*)-1}{na\sqrt{e^2\mathrm{am}^2(s^*)-1}}\right) = \\
&= -\frac{2e}{n^2a}\sqrt{\frac{\mathrm{am}^2(s^*)-1}{e^2\mathrm{am}^2(s^*)-1}}\mathscr{P}_u - \frac{2\eta}{n^2r}\sqrt{\frac{e\mathrm{am}(s^*)-1}{e\mathrm{am}(s^*)+1}}\mathscr{P}_v, \\
\frac{de}{ds} &= \frac{de}{dt}\frac{dt}{ds} = \left[\frac{\eta}{na}\frac{\eta\sqrt{\mathrm{am}^2(s^*)-1}}{e\mathrm{am}(s^*)-1}\mathscr{P}_u + \left(\frac{\eta^3}{rne} + \frac{r\eta}{na^2e}\mathscr{P}_v\right)\right]\left(\frac{e\mathrm{am}(s^*)-1}{na\sqrt{e^2\mathrm{am}^2(s^*)-1}}\right) \\
&= \frac{a\eta^2}{\mu}\frac{\mathrm{am}^2(s^*)-1}{e^2\mathrm{am}^2(s^*)-1}\mathscr{P}_u + \frac{a^2\eta}{\mu}\left(\frac{\eta^2}{re} + \frac{r}{a^2e}\right)\sqrt{\frac{e\mathrm{am}(s^*)-1}{e\mathrm{am}(s^*)+1}}\mathscr{P}_v, \\
\frac{di}{ds} &= \frac{di}{dt}\frac{dt}{ds} = \left[\frac{r}{na^2\eta}(\cos\omega\cos f - \sin\omega\sin f)\right]\left(\frac{e\mathrm{am}(s^*)-1}{na\sqrt{e^2\mathrm{am}^2(s^*)-1}}\right) = \\
&= \left[\frac{r[e-\mathrm{am}(s^*)]}{\mu\eta\sqrt{e^2\mathrm{am}^2(s^*)-1}}\cos\omega - \frac{r}{\mu}\sqrt{\frac{\mathrm{am}^2(s^*)-1}{e^2\mathrm{am}^2(s^*)-1}}\sin\omega\right]\mathscr{P}_n, \\
\frac{d\Omega}{ds} &= \frac{1}{\mu\eta\sin i}\sqrt{\frac{e\mathrm{am}(s^*)-1}{e\mathrm{am}(s^*)+1}}\left(a[e-\mathrm{am}(s^*)]\sin\omega + a\eta\sqrt{\mathrm{am}^2(s^*)-1}\cos\omega\right)\mathscr{P}_n, \\
\frac{d\omega}{ds} &= \frac{a\eta}{e\mu}\frac{e-\mathrm{am}(s^*)}{\sqrt{e^2\mathrm{am}^2(s^*)-1}}\mathscr{P}_u - \left(2 + e\frac{e-\mathrm{am}(s^*)}{\mathrm{am}(s^*)-1}\right)\frac{a\eta\sqrt{\mathrm{am}^2(s^*)-1}}{e\mu\eta}\sqrt{\frac{e\mathrm{am}(s^*)-1}{e\mathrm{am}(s^*)+1}}\mathscr{P}_v \\
&\quad - \frac{\cos i}{\mu\eta\sin i}\left(a[e-\mathrm{am}(s^*)]\sin\omega + a\eta\sqrt{\mathrm{am}^2(s^*)-1}\cos\omega\right)\sqrt{\frac{e\mathrm{am}(s^*)-1}{e\mathrm{am}(s^*)+1}}\mathscr{P}_n, \\
\frac{d\ell}{ds} &= \sqrt{\frac{e\mathrm{am}(s*)-1}{e\mathrm{am}(s*)+1}}\left[n + \left(\frac{2r}{a^2n} + \frac{\eta^2\cos f}{aen}\right)\mathscr{P}_u - \frac{r(2+e\cos f)\sin f}{a^2en}\mathscr{P}_v\right] = \\
&= n\sqrt{\frac{e\mathrm{am}(s^*)-1}{e\mathrm{am}(s^*)+1}} + \frac{1}{na}\left(\frac{2r}{a} + \frac{\eta^2}{e}\frac{e-\mathrm{am}(s^*)}{e\mathrm{am}(s^*)-1}\right)\sqrt{\frac{e\mathrm{am}(s^*)-1}{e\mathrm{am}(s*)+1}}\mathscr{P}_u \\
&\quad - \frac{2r + ae[e-\mathrm{am}(s^*)]}{nrae}\eta\sqrt{\mathrm{am}^2(s^*)-1}\mathscr{P}_v.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

# Capítulo 4

# Conclusiones

A lo largo de este Trabajo de Fin de Grado se han obtenido los siguientes resultados:

- se ha deducido la transformación diferencial entre el tiempo físico $t$ y la longitud de arco de hipérbola $s$ como nueva variable independiente para el caso del movimiento orbital de tipo hiperbólico;

- se ha integrado la relación diferencial entre la longitud de arco de hipérbola y la anomalía excéntrica hiperbólica $H$ en términos de integrales y funciones elípticas;

- partiendo de las relaciones establecidas por Brumberg para el movimiento orbital elíptico, y utilizando fórmulas que relacionan las anomalías excéntricas elíptica e hiperbólica, se han comprobado de manera alternativa la relación diferencial y la relación integrada entre la longitud de arco de hipérbola y la anomalía excéntrica hiperbólica mencionadas en el punto anterior;

- para sistemas keplerianos perturbados con órbitas de tipo hiperbólico, se han presentado fórmulas para la variación de las integrales primeras clásicas del problema de Kepler (vector momento angular, vector de Laplace y energía) tomando la longitud de arco de hipérbola como variable independiente;

- también en términos de la longitud de arco de hipérbola como parámetro temporal, se han obtenido las ecuaciones planetarias (tanto en forma de Lagrange como en forma de Gauss) que gobiernan los cambios que experimentan los elementos orbitales keplerianos de órbitas hiperbólicas cuando se consideran fuerzas perturbadoras adicionales. En concreto se ha trabajado con el conjunto de elementos keplerianos ($a$, $e$, $i$, $\Omega$, $\omega$, $\ell$).

Bibliografía

# Bibliografía


[1] A. Abad, *Astrodinámica*, Bubok Publishing S.L., Universidad de Zaragoza, 2012

[2] R. H. Battin, *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, AIAA Education Series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, New York, 1987.

[3] I. M. Belen'kii, A Method of Regularizing the Equations of Motion in the Central Force-Field. *Celestial Mechanics*, **23** (1) (1981), 9-32

[4] V. R. Bond and M. C. Allman, *Modern Astrodynamics, fundamentals and perturbation methods*, Princeton University Press, 1996

[5] E. V. Brumberg, Length of arc as independent argument for highly eccentric orbits, *Celestial mechanics and Dynamical Astronomy* **53** (4) (1992), 23-328

[6] P. F. Byrd and M. D. Friedman, *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists*, Springer, 1971

[7] R. Cid, S. Ferrer, A. Elipe, Regularization and linearization of the equations of motion in central force-fields, *Celestial Mechanics* **31** (1983), 73-80

[8] J. M. Ferrándiz, Linearization in special cases of perturbed Keplerian motions, *Celestial Mechanics* **39** (1986), 23-31

[9] J. M. Ferrándiz, J. M. Ferrer, A new integrated, general time transformation in the Kepler problem, *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia* **37** (4) (1986), 226-229

[10] J. M. Ferrándiz, S. Ferrer, M. L. Sein-Echaluce, Generalized elliptic anomalies, *Celestial Mechanics*, **40** (1987) 315-328

[11] H. Goldstein, *Classical mechanics*, Addison-Wesley, 1980

[12] G. Janin, Accurate computation of highly eccentric satellite orbits, *Celestial Mechanics*, **10** (1974) 451-467

[13] G. Janin, V. R. Bond, *The elliptic anomaly*. NASA Technical Memorandum 58288. Lyndon B. Johnson Space Center, (Houston, Texas), 1980.

[14] P. Nacozy, The Intermediate Anomaly, *Celestial Mechanics* **16** (1977), 309-313-467

[15] P. E. Nacozy, Time elements in Keplerian orbital elements, *Celestial Mechanics*, **23** (1981), 173

[16] E. NAVASCUÉS, *Ecuaciones para el movimiento orbital de tipo hiperbólico*, TFG, Universidad de Zaragoza, 2016

[17] E. L. STIEFEL Y G. SCHEIFELE, *Linear and regular celestial mechanics*, Springer, 1971

[18] K. F. SUNDMAN, Mémoire sur le problème des trois corps, *Acta Mathematica* **36** (1912-1913), 105-179

[19] V. SZEBEHELY, Linearization of Dynamical Systems Using Integrals of the Motion, *Celestial Mechanics*, **14** (1976), 499-508

[20] V. SZEBEHELY, V. BOND, Transformation of the Perturbed Two-Body Problem to Unperturbed Harmonic Oscillators. *Celestial Mechanics*, **30** (1983), 59-69

# Apéndice A

# Sobre el artículo de Brumberg

Este anexo recoge algunos de los contenidos del artículo de Brumberg [5] en el que, entre otras cosas, se deduce e integra la transformación diferencial que relaciona el tiempo físico $t$ y la longitud de arco $s$ para el caso de una órbita de tipo elíptico.

## A.1. Introducción

Cuando se integran órbitas elípticas con una alta excentricidad el tiempo físico $t$ suele reemplazarse por un pseudotiempo $\tau$ introducido por medio de una relación diferencial

$$dt = \Gamma(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\, d\tau, \tag{A.1}$$

con $\Gamma$ una función de las variables de posición y velocidad de la partícula móvil ([12]; [15]). Con ello, se busca asegurar a lo largo de la órbita una distribución más uniforme de los puntos correpondientes a valores equidistantes de la variable independiente (regulación analítica del paso de integración), y hacer viable el uso de métodos de integración numérica de paso fijo. La función $\Gamma$ más habitualmente utilizada es de la forma

$$g_\alpha(r) = k_\alpha\, r^\alpha, \tag{A.2}$$

con $\alpha = 1$ (anomalía excéntrica), $\alpha = 3/2$ (anomalía elíptica de Janin y Bond, y anomalía intermedia de Nacozy) y $\alpha = 2$ (anomalía verdadera). El coeficiente $k_\alpha$ se suele ajustar para que una variación de $2\pi$ de $\tau$ corresponda en el tiempo físico a un periodo $P$ de movimiento kepleriano,

$$k_\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^P r^{-\alpha} dt. \tag{A.3}$$

Otra forma más complicada para la función $g$ fue propuesta en [8] y [10],

$$g(r) = r^{3/2}(a_0 + a_1 r)^{-1/2}, \tag{A.4}$$

con $a_0$ y $a_1$ constantes o funciones de los elementos orbitales keplerianos.

En el caso general en el que ninguno de los parámetros $a_0$ y $a_1$ sea nulo, la función (A.4) conduce a una anomalía elíptica generalizada. Y con la elección apropiada de $a_0$ y $a_1$ se puede generar una distribución suficientemente uniforme de los puntos de una órbita concreta para intervalos iguales de $\tau$.

Sin embargo se puede lograr el mismo objetivo directamente utilizando como *pseudotiempo* la longitud de arco $s$ de la órbita de la partícula. El propósito del artículo de Brumberg es llamar la atención hacia esta posible elección.

No hace falta recalcar que la longitud de arco ya se utiliza en ocasiones como variable independiente en investigaciones teóricas pero, según afirma Brumberg, no se ha considerado en la literatura su uso para integraciones numéricas.

## A.2. Movimiento kepleriano con la longitud de arco como variable independiente

Tomando coordenadas en el plano orbital, las coordenadas cartesianas $(x, y)$ de la partícula móvil a lo largo de una órbita elíptica en función de la anomalía excéntrica $E$ del movimiento elíptico se expresan en la siguiente forma,

$$x = a(\cos E - e), \qquad y = a\sqrt{1-e^2}\sin E, \tag{A.5}$$

siendo $a$ el semieje mayor y $e$ la excentricidad. La distancia al origen de coordenadas queda determinada por la expresión

$$r = a(1 - e\cos E). \tag{A.6}$$

La relación entre la posición a lo largo de la órbita y el tiempo se da por medio de la ecuación de Kepler,

$$E - e\sin E = n(t - T), \tag{A.7}$$

donde $T$ es la época de paso por el periastro, y $n$ el movimiento medio. La longitud de arco $s$ satisface la relación diferencial

$$\frac{ds}{dE} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dE}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dE}\right)^2} = a\sqrt{1-e^2\cos^2 E}. \tag{A.8}$$

Calculando a partir del periastro, la longitud de arco en términos finitos queda como

$$s = a\int_0^E \sqrt{1-e^2\cos^2 u}\,du = a\int_{\pi/2}^{E+\pi/2} \sqrt{1-e^2\sin^2 u}\,du = a\left[\mathbb{E}(E+\pi/2, e) - \mathbb{E}(e)\right]. \tag{A.9}$$

Para las integrales elípticas incompleta y completa de segunda especie con módulo $k$ se utiliza la notación

$$\mathbb{E}(u,k) = \int_0^u \sqrt{1-k^2\sin^2 u}\,du, \qquad \mathbb{E}(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2 u}\,du.$$

Por tanto, en términos de las funciones elípticas de Jacobi de módulo $e$ se obtiene

$$\begin{aligned} &E = \operatorname{am}\left(\frac{s}{a} + \mathbb{E}\right) - \frac{\pi}{2}, \\ &\sin E = -\operatorname{cn}\left(\frac{s}{a} + \mathbb{E}\right), \qquad \cos E = \operatorname{sn}\left(\frac{s}{a} + \mathbb{E}\right). \end{aligned} \tag{A.10}$$

La cantidad $s$ puede representarse de diferentes formas, por ejemplo

$$s = \mathbb{E}\left(\arcsin\frac{\sin E}{\sqrt{1-e^2\cos E}},\ e\right) - \frac{e^2\sin E\cos E}{\sqrt{1-e^2\cos^2 E}}. \tag{A.11}$$

A partir de (A.7) y (A.8) se sigue que

$$\frac{dt}{ds} = \frac{dt}{dE}\frac{dE}{ds} = \frac{1}{na}\sqrt{\frac{1-e\cos E}{1+e\cos E}}. \tag{A.12}$$

Aplicando la tercera ley de Kepler en su forma $n^2a^3 = \mu$, y denotando $h_k$ la energía kepleriana de la partícula en la órbita elíptica en cuestión y $\mu = \mathscr{G}(m_1 + m_2)$,

$$h_k = \frac{\mu}{2a},$$

se puede reducir (A.12) mediante (A.6) para que adopte la forma de (A.1) con la función de reparametrización

$$\Gamma(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = g(r; \mu, h_k) = \sqrt{\frac{r}{2\mu + 2h_k r}}. \tag{A.13}$$

A continuación Brumberg afirma (sin más justificación ya que sus cálculos y deducciones anteriores se basan en la geometría y en la dinámica de una órbita elíptica) que, expresada de esta manera, la transformación (A.1) es aplicable a cualquier tipo de movimiento kepleriano (es decir, a cualquier cónica kepleriana no degenerada).

En el caso del movimiento elíptico se puede exigir que un periodo orbital $P$ en el tiempo físico $t$ se corresponda con la variación de $2\pi$ de una nueva variable independiente $s^*$. Esto supone la reescritura de la relación (A.1), con $g$ como en (A.13), en la forma

$$dt = g^* ds^*, \quad \text{con} \quad g^* = c\,g, \quad ds^* = \frac{ds}{c}, \quad c = \frac{2a}{\pi}\mathbb{E}(e). \tag{A.14}$$

## A.3. Movimiento perturbado con la longitud de arco como variable independiente

Considerando la ecuación del movimiento perturbado en la forma ([17], Fórmula (16), pág. 11; [12], Fórmula (3.1), pág. 454)

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} = \mathbf{F} - \nabla_{\mathbf{r}} V \tag{A.15}$$

donde $V = V(\mathbf{r}, t)$ es un potencial perturbador y $\mathbf{F}$ una fuerza perturbadora que no deriva de un potencial escalar.

Si las perturbaciones son suficientemente suaves y de pequeña magnitud, la longitud de paso de una integración numérica quedará determinada por la excentricidad de la órbita kepleriana. En consecuencia, la transformación (A.1) con la función de reparametrización (A.13) puede resultar de utilidad. La energía kepleriana $h_k$ es

$$h_k = \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} - \frac{\mu}{r}, \tag{A.16}$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad de la partícula. Además, en presencia de las perturbaciones consignadas en (A.15), las variaciones temporales de la energía de la órbita kepleriana satisfacen la ecuación

$$\frac{dh_k}{dt} = (\mathbf{F} - \nabla_{\mathbf{r}} V) \cdot \mathbf{v}. \tag{A.17}$$

Como ya se hace notar en [17], pág. 10, es conveniente utilizar la energía mecánica total $h$ del problema perturbado,

$$h = h_k + V, \tag{A.18}$$

cuyas variaciones temporales verifican la ecuación

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \tag{A.19}$$

Transformando la ecuación diferencial vectorial de segundo orden (A.15) en un sistema de dos ecuaciones vectoriales de primer orden, e introduciendo la variable independiente $s$, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= g(r)\,\mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{ds} &= g(r)\left(\mathbf{F} - \frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} - \nabla_{\mathbf{r}} V\right), \\ \frac{dt}{ds} &= g(r), \\ \frac{dh}{ds} &= g(r)\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\right). \end{aligned} \tag{A.20}$$

Estas ecuaciones se han de complementar con las relaciones algebraicas (A.13), (A.16) y (A.18). La definición concreta de $s$ por medio de la función de reparametrización (A.13) implica que

$$g = g(r;\mu,h_k) = (\|\mathbf{v}\|^2)^{-1/2}. \tag{A.21}$$

En virtud de (A.16) este resultado coincide con (A.13). En consecuencia las ecuaciones (A.20) pueden deducirse sin recurrir a la solución del problema de Kepler. Más aún, usando (A.21) la cuarta fórmula de (A.20) resulta innecesaria para resolver el resto del sistema formado por las otras tres ecuaciones.

La energía total del problema perturbado, $h$, se puede determinar, caso de ser necesaria, a partir de las fórmulas finitas (A.16) y (A.18).