

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Formalismo de Koopman y cuantización

Autor:

Paul Rosa Ruiz

Directores:

Dr. Jesús Clemente Gallardo

D. David Martínez Crespo

Departamento de Física Teórica
Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza

Junio de 2024

Resumen

En este trabajo, se estudia el formalismo de Koopman-van Hove (KvH) para la representación de observables clásicos como operadores sobre un espacio de Hilbert, y se aplica a sistemas híbridos clásico-cuánticos. Adicionalmente, se estudia la imagen de Heisenberg utilizando automorfismos internos al álgebra de observables híbridos, demostrando que no existen dinámicas híbridas unitarias que preserven dicha álgebra en este contexto. Finalmente, se propone una dinámica no lineal que preserve el conjunto de observables híbridos.

Palabras clave: *formalismo de Koopman-van Hove, sistemas híbridos, sistemas hamiltonianos, imagen de Heisenberg.*

Abstract

In this project, we study the Koopman-van Hove (KvH) formalism for representing the algebra of classical observables as operators over a Hilbert space, and we apply it to hybrid classical-quantum systems. Additionally, the Heisenberg picture is examined using internal automorphisms of the algebra of hybrid observables, demonstrating the non-existence of unitary hybrid dynamics in this approach. Finally, a nonlinear dynamics that preserves the set of hybrid observables is proposed.

Keywords: *Koopman-van Hove formalism, hybrid systems, Hamiltonian systems, Heisenberg picture*

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer a vosotros, Jesús y David, por toda la dedicación, atención y apoyo que me habéis brindado a lo largo de estos años. Ha sido un auténtico placer trabajar en este grupo. Espero poder seguir teniendo el privilegio de aprender de vosotros, sois unos referentes para el científico en el que me quiero convertir.

En segundo lugar, gracias a vosotros, amigos, por hacer de la vida un viaje más ameno y divertido. Especialmente a la pequeña familia que hemos formado en Tübingen que, con vuestro cariño y risas, nos hemos apoyado el uno en el otro cuando más hacía falta. Pintáis mi vida de un color muy especial.

Finalmente, mil gracias a vosotros, aita y ama. Por haber siempre acompañado de la mano a aquel niño que miraba a las estrellas soñando algún día ser científico. Me habéis enseñado a tomar el camino que el corazón dicta y a luchar por ello. Sois mi apoyo incondicional cuando las cosas se ponen difíciles en la vida y solo vosotros sabéis todo lo que hemos tenido que superar para ahora poder disfrutar de este bonito camino a la cima del monte Everest.

A todos vosotros, gracias.

Paul Rosa Ruiz,
11 de junio de 2024.

Índice general

1. Introducción y objetivos	1
2. Mecánica geométrica	4
2.1. Sistemas clásicos	4
2.2. Sistemas cuánticos	8
2.3. Cuantización geométrica	10
2.3.1. Condiciones de cuantización de Dirac	11
2.3.2. Precuantización: El formalismo de Koopman-van Hove	11
2.3.3. Representación KvH del álgebra de observables clásicos	14
3. Sistemas híbridos	18
3.1. Dinámica híbrida unitaria	19
3.2. Dinámica híbrida no lineal	20
4. Conclusiones	23
A. Algunas propiedades de geometría diferencial	26
A.1. Campos vectoriales	26
A.2. Tensor de Poisson	27
A.3. Curvas integrales	28
B. Fibrados vectoriales y conexiones	29
B.1. Conexiones	33
B.2. Estructura Hermítica	35
B.3. Curvatura de una conexión	35
B.4. Fibrados de línea y conexiones	37
C. Algunas cuestiones de análisis funcional	38
C.1. Espacios de Hilbert	38
C.2. Operadores no acotados	39
D. Algunos aspectos algebraicos	43

E. C^*-álgebra clásica y cuántica	49
E.1. C^* -álgebra clásica	49
E.2. C^* -álgebra cuántica	50
F. Formalismo de Koopman-von Neumann	52
G. Cuantización geométrica	57
G.1. Condición de integrabilidad de Weil	57
G.2. Cuantización	58
H. Resultados auxiliares	59
H.1. Sistemas clásicos	59
H.1.1. Campos vectoriales hamiltonianos	60
H.2. Precuantización geométrica	60
H.3. Teorema de Gleason	63
H.4. Dinámica híbrida no unitaria	63

Introducción y objetivos

En física decimos que un sistema es clásico si se rige por los principios básicos de la mecánica clásica, es decir, si se rige bajo el Principio de Hamilton de mínima acción (cuya consecuencia son las Leyes de Newton), y si los estados de una partícula se rigen bajo un determinismo causal. Estos sistemas logran modelar sistemas cuyas energías no son suficientes para que los efectos cuánticos sean relevantes.

Un sistema cuántico dista de un sistema clásico en varios aspectos con gran importancia ontológica. Desarrollado durante la década de 1920, la mecánica cuántica nace como una teoría que busca describir el mundo microscópico y propone que las partículas presentan propiedades ondulatorias introduciendo la entidad matemática llamada función de onda para describir un sistema cuántico. Además, la no conmutatividad de los observables¹ es la causa del principio de incertidumbre de Heisenberg propuesto en 1927 que impone un límite teórico en la precisión de ciertas mediciones en los experimentos. La forma en que un sistema clásico se manifiesta como límite de un sistema cuántico es aún un problema abierto, de hecho, las dos prescripciones que se darán en este trabajo también pueden ayudar a comprender mejor la relación entre mecánica cuántica y clásica.

Los sistemas híbridos clásico-cuánticos son aproximaciones a aquellos sistemas originalmente cuánticos que contienen algunos grados de libertad que pueden aproximarse como variables clásicas. Estos sistemas son útiles para modelizar sistemas donde existen dos escalas de energía o masa que distan en órdenes de magnitud, cuyo tratamiento puramente cuántico resulta inabarcable debido a su complejidad. De esta manera, se tiene un modelo aproximado más asequible para su estudio o su simulación numérica.

Modelizar un sistema físico requiere definir tres aspectos del mismo: sus estados, sus observables y su dinámica. Existen dos enfoques duales y análogos pero diferentes para tratar con la dinámica de

¹En física cuántica, a diferencia de en física clásica, en general el orden en el que se miden dos magnitudes físicas altera el resultado.

un sistema: por un lado, se considera que lo que evoluciona en el tiempo son los estados del sistema y que los observables clásicos se quedan estáticos en el tiempo, por otro lado, lo que evolucionan son los observables y los estados se mantienen estáticos. En física cuántica, la primera se denomina *imagen de Schrödinger* y la segunda *imagen de Heisenberg*.

En [1], se prueba que un sistema híbrido admite una estructura Hamiltoniana, es decir, que se puede tratar geoméricamente como si de un sistema clásico se tratase. Sin embargo, este enfoque presenta limitaciones a la hora de definir magnitudes termodinámicas como es la entropía del sistema, necesaria para la interpretación física del sistema.

En 1931 [15], Bernard Koopman² construye una representación de los observables clásicos como operadores multiplicativos sobre un espacio de Hilbert, y representa el hamiltoniano (observable generador de la dinámica) como un operador derivativo³ de orden 1. A esta construcción lo llamaremos formalismo de Koopman-von Neumann (KvN) y se pueden encontrar más detalles en su artículo original. Este formalismo motivó la propuesta de describir el sistema híbrido en términos de espacios de Hilbert, donde hay una varias nociones de entropía. Para ello, en [6] se propone generalizar el formalismo de Koopman a cualquier sistema físico descrito por C^* -álgebras, de tal manera que se tiene una representación de la parte hermítica de la C^* -álgebra como operadores de un espacio de Hilbert. Finalmente, se toma el subsistema clásico del sistema híbrido y se le acopla uno cuántico considerando el espacio de Hilbert correspondiente al producto tensorial de los mismos.

Sin embargo, en [6] se prueba que, empleando el formalismo de KvN, el generador de una dinámica clásica, ha de ser un automorfismo externo al álgebra de observables híbridos. Además, una dinámica unitaria en este formalismo no reproduce todas las características que buscamos de un sistema híbrido (más concretamente, la *back-reaction*⁴). En [18] se plantea una dinámica no unitaria basada en sistemas cuánticos abiertos, donde se considera que la evolución es Markoviana, sin embargo, se prueba que esta dinámica permite describir un conjunto de sistemas híbridos mayor pero aún muy reducido (la dinámica tiene una *back-reaction* parcial). Hallar una dinámica híbrida no unitaria bien definida que permita la descripción de sistemas híbridos reales usando el formalismo de KvN es aún objeto de investigación.

Existe un enfoque diferente a la de KvN para representar los observables clásicos sobre un espacio de Hilbert llamado formalismo de Koopman-van Hove (KvH) (véase [20]). Este consiste en usar el formalismo de cuantización geométrica, cuyo primer paso denominado prequantización, permite representar los observables clásicos $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ como operadores derivativos sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} . El espacio de Hilbert \mathcal{H} se construye considerando secciones de cuadrado integrables $\mathcal{L}^2(L)$ sobre un fibrado de línea $L \rightarrow \mathcal{M}_C$ construido sobre el espacio de fases clásico \mathcal{M}_C . El hecho de que los operadores sean derivativos hace que esta representación, en general, no sea conmutativa,

²Más adelante con la colaboración de von Neumann.

³Este hecho será el causante de que la dinámica híbrida sea un automorfismo externo y no interno.

⁴Efecto dinámico entre la parte clásica y cuántica.

pero, a diferencia del formalismo de KvN, en el formalismo de KvH el operador correspondiente al Liouvilliano clásico pertenece al álgebra de observables.

En este trabajo, como en [18], utilizamos la descripción de los sistemas híbridos en términos de espacios de Hilbert, sin embargo, para ello, usaremos el formalismo de KvH, en vez de KvN; el uso de KvH para sistemas híbridos se puede encontrar en trabajos como [10], [5], [11]. Al sistema clásico se le acopla un sistema cuántico tomando el producto tensorial de ambos espacios de Hilbert y se estudia la dinámica híbrida generada por un Liouvilliano que representa un automorfismo interno al álgebra de observables. Recaltar que, con este enfoque, el automorfismo es interno al álgebra, a diferencia de lo que se tenía con el formalismo de KvN de [18]. En el siguiente paso, se plantea una dinámica unitaria híbrida y se prueba que esta dinámica no deja invariante el álgebra de observables híbridos⁵, es decir, que no está bien definida como dinámica híbrida. Finalmente, se construye una dinámica no lineal que sí que preserve el álgebra de observables híbridos.

Para ello, el trabajo se organiza en cuatro capítulos además de los apéndices para fijar notación de las herramientas matemáticas empleadas durante el trabajo. En el capítulo 2, se repasan las estructuras matemáticas relevantes en la descripción de sistemas clásicos y cuánticos. A continuación, se introducen los formalismos de Koopman y de cuantización geométrica centrándonos en la precuantización. En el capítulo 3, se construye un sistema híbrido a partir de la precuantización, se demuestra que la dinámica unitaria no está bien definida y se propone una dinámica no unitaria. El trabajo concluye en el capítulo 4 con las conclusiones y posibles líneas de trabajo futuras.

El uso del formalismo de KvH para estudiar la imagen de Heisenberg usando automorfismos internos al álgebra de observables híbridos es el mayor aporte original del trabajo, además de la demostración de la inexistencia de dinámicas unitarias híbridas con KvH y la propuesta de una nueva dinámica no lineal que deje invariante el álgebra de observables híbridos. El capítulo 2 pretende ser una revisión bibliográfica que incida sobre aquellos aspectos que permitan fundamentar y proporcionar una mejor comprensión de los resultados finales.

Este trabajo partió de una buena comprensión del problema a tratar, consultando en la literatura los diferentes métodos empleados para abordarlo. A esto lo siguió el estudio de la cuantización geométrica que requería del uso de herramientas de geometría diferencial y de análisis funcional, más concretamente, de teoría de fibrados vectoriales, algunos conceptos de teorías gauge y de operadores no acotados sobre espacios de Hilbert. El siguiente paso fue acoplar el sistema precuantizado a un sistema cuántico y estudiar ciertas propiedades de la libertad gauge de la precuantización para asegurarnos de que todo quedaba bien definido. A continuación, se plantea la dinámica unitaria híbrida y se demuestra que esta no queda bien definida en un contexto híbrido, para ello, se tuvo que recurrir a técnicas de mecánica cuántica y a las conexiones de fibrados vectoriales. Finalmente, usando la libertad gauge del subsistema clásico del fibrado clásico, se plantea una dinámica no lineal y se demuestra que sí que preserve el álgebra de observables clásicos.

⁵Salvo para observables triviales sin significado físico de interés.

Mecánica geométrica

Este capítulo pretende introducir dos formalismos con los cuales un sistema estadístico clásico puede ser descrito en términos de estados de un espacio de Hilbert. Pero antes de eso, definamos lo que queremos decir con un sistema estadístico clásico.

2.1. Sistemas clásicos

El espacio de fases de un sistema clásico de dimensión n está descrito por una variedad diferenciable orientable \mathcal{M} de dimensión $2n$, n dimensiones correspondientes a las posiciones del sistema y las otras n , correspondientes a sus momentos. En cada punto $m \in \mathcal{M}$, podemos construir de manera intrínseca el espacio tangente a ese punto T_m que es el espacio vectorial de vectores tangentes al punto $p \in \mathcal{M}$ (véase definición A.1.1). Denotaremos por $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ al conjunto de campos vectoriales (véase definición A.1.2) sobre \mathcal{M} .

Adicionalmente, el espacio de fases clásico requiere de una estructura adicional: ha de formar una variedad simpléctica (\mathcal{M}, ω) , donde ω es la denominada *forma simpléctica*.

Definición 2.1.1 (Forma simpléctica). Una forma simpléctica $\omega : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$, es una 2-forma que es bilineal, antisimétrica y no degenerada ($\forall Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \omega(X, Y) = 0$, entonces $X = 0$).

Definición 2.1.2 (Variedad simpléctica). Una **variedad simpléctica** es una variedad diferenciable \mathcal{M} dotada de una forma simpléctica ω sobre \mathcal{M} .

Teorema 2.1.1 (Darboux, 1882). Sea (\mathcal{M}, ω) una variedad simpléctica $2n$ -dimensional. Entonces, existe un atlas tal que para cada carta local (U, ψ) la expresión de la dos forma en las coordenadas

locales correspondientes $\{q^i, p_i\}_{i=1}^n$ es

$$(\psi^{-1})^*\omega|_U = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i.$$

A este atlas lo denominaremos atlas de Darboux.

Demostración. Véase [8]. □

Este resultado es clave en cuanto a su significado físico en mecánica hamiltoniana ya que nos permite localmente hacer una distinción física entre las $2n$ coordenadas generadas por la carta: n de ellas (las que van a la izquierda del producto exterior de la expresión anterior) como posiciones, y las otras n como momentos.

Además, la forma simpléctica nos define un isomorfismo¹ de fibrados

$$\Gamma(T\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(T^*\mathcal{M}) \cong \Lambda^1(\mathcal{M}); \quad X \mapsto -\omega(X, \cdot)$$

entre los campos vectoriales y las 1-formas. En otras palabras, dado un observable clásico $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, la forma simpléctica nos permite asignar un campo vectorial asociado a f , $X_f \in \Gamma(T\mathcal{M})$ definida por la ecuación:

$$df + \omega(X_f, \cdot) = 0. \tag{2.1.1}$$

Para más detalles véase H.1.1.

Con todo esto, podemos definir uno de los tres aspectos que define un sistema físico, sus observables; en este caso, serán funciones reales C^∞ integrables sobre el espacio de fases (\mathcal{M}, ω) .

Definición 2.1.3 (Observable estadístico clásico). Dada una variedad simpléctica (\mathcal{M}, ω) , diremos que una función $f \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ es un observable estadístico clásico si es Ω -integrable², con Ω la medida simpléctica sobre (\mathcal{M}, ω) definida como

$$d\Omega := \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_n. \tag{2.1.2}$$

donde \wedge denota el producto exterior o producto de wedge.

Hay un observable clásico que merece especial atención llamado el *hamiltoniano* $h \in C^\infty(\mathcal{M})$ que representa la energía del sistema. Las órbitas³ de un sistema vendrán dadas por las curvas integrales

¹También conocido como el isomorfismo musical denotado por \flat .

²Durante el trabajo damos por hecho que las funciones que consideremos son integrables.

³Conjunto de puntos relacionados por la función evolución del tiempo, es decir, la trayectoria de una partícula.

(véase A.3.1) del campo vectorial asociado al hamiltoniano X_h , i.e. una partícula seguirá la curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M} : t \mapsto \gamma(t) = (q^i(t), p_i(t))$, definida de la siguiente manera:

$$\dot{\gamma}(t) = (X_h \circ \gamma)(t) = X_h(\gamma(t)),$$

donde, explícitamente,

$$X_h = \frac{\partial h}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i}.$$

Es decir, la partícula clásica evolucionará en el tiempo siguiendo las curvas integrales del campo vectorial del hamiltoniano, X_h .

Otro aspecto de un sistema estadístico clásico son sus estados, que serán densidades de probabilidad definidas sobre \mathcal{M} .

Definición 2.1.4 (Estado estadístico clásico). Se denomina estado estadístico clásico, o simplemente estado, a una densidad de probabilidad $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$, Ω -integrable tal que cumple:

$$\int_{\mathcal{M}} \rho \cdot d\Omega = 1, \quad (2.1.3)$$

donde Ω es la medida simpléctica de la variedad simpléctica. Denotaremos por $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ al conjunto de estados de (\mathcal{M}, ω) .

El estado ρ define una medida finita μ sobre \mathcal{M} absolutamente continua con respecto a Ω , donde ρ es su derivada de Radon–Nikodym respecto a Ω :

$$\mu(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} d\mu = \int_{\mathcal{M}} \rho \cdot d\Omega = 1 \quad (2.1.4)$$

Se define el *valor esperado de un observable sobre un estado* como una aplicación

$$\langle \cdot \rangle : C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \times \mathcal{D}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.1.5)$$

$$(f, \rho) \mapsto \langle f \rangle_\rho = \int_{\mathcal{M}} f d\mu = \int_{\mathcal{M}} f \cdot \rho \cdot d\Omega.$$

El último aspecto de un sistema clásico es su evolución temporal. Para poder estudiar la dinámica de un sistema clásico debemos, primero, introducir una estructura matemática nueva en el espacio de funciones $C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, llamado corchete de Poisson. El álgebra de observables clásicos junto a este corchete formará un álgebra de Lie que llamaremos álgebra de Poisson.

Definición 2.1.5 (Paréntesis de Poisson). Sea (\mathcal{M}, ω) una variedad simpléctica. Sean $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ dos funciones sobre \mathcal{M} y $X_f, X_g \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ sus campo vectoriales hamiltonianos correspondientes. Definimos el **paréntesis de Poisson (o corchete de Poisson)** de f y g como la función

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g). \quad (2.1.6)$$

Debido a que la correspondencia entre funciones y campos vectoriales dada por la ecuación (2.1.1) está bien definida, se puede definir una operación en el conjunto de funciones:

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\} : C^\infty(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}) &\rightarrow C^\infty(\mathcal{M}) \\ (f, g) &\rightarrow \{f, g\}. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Mencionar que el paréntesis de Poisson también puede definirse a partir de un tensor \mathcal{J} (2,0)-contravariante llamado tensor de Poisson (véase definición A.2.1): $\{f, g\} = \mathcal{J}(df, dg)$, $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Localmente⁴, el paréntesis de Poisson toma la siguiente forma:

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i}. \quad (2.1.8)$$

El espacio de observables clásico $C^\infty(\mathcal{M})$ junto al paréntesis de Poisson, forman un álgebra de Poisson, lo que nos servirá para definir la dinámica del sistema híbrido:

Definición 2.1.6. Un álgebra de Poisson es un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} dotada de dos productos bilineales, \cdot y $\{\cdot, \cdot\}$, que tiene las siguientes propiedades: El producto \cdot forma una \mathbb{K} -álgebra asociativa, el producto $\{\cdot, \cdot\}$ forma un álgebra de Lie, y por tanto, es antisimétrico y obedece la identidad de Jacobi; y $\{\cdot, \cdot\}$ actúa como una derivación del producto punto a punto \cdot , i.e.

$$\{x, y \cdot z\} = \{x, y\} \cdot z + y \cdot \{x, z\}.$$

Corolario 2.1.2. $(C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}), \cdot, \{\cdot, \cdot\})$, donde \cdot denota el producto punto a punto y $\{\cdot, \cdot\}$ el paréntesis de Poisson, forma un álgebra de Poisson.

Demostración. La prueba se sigue de la asociatividad del cuerpo \mathbb{R} y de las proposiciones H.1.1 y H.1.2. □

Hasta ahora hemos visto que los observables clásicos forman un álgebra de Poisson junto al producto punto a punto y el corchete de Poisson. Sin embargo, en la sección E se prueba que también define un álgebra de Lie-Jordan-Banach (definición D.0.11) visto como el límite conmutativo de otro espacio, por lo que, su complexificación (considerar funciones $C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ con valores en el cuerpo de los números complejos) es una C^* -álgebra (definición D.0.14). Es decir, el conjunto de observables clásicos formará la subálgebra de elementos hermíticos⁵ de una C^* -álgebra, Para más detalles,

⁴En una carta $(U, \psi = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n))$ del atlas de Darboux.

⁵Un elemento x de una C^* -álgebra se dice que es hermítico si $x^* = x$ con la involución $*$ del álgebra.

véase la sección E. Esto es usado en [6], [18] para construir la dinámica usando la construcción GNS, sin embargo, en este trabajo no haremos referencia explícita a la estructura de C^* -álgebra de los observables.

Volviendo a la dinámica del sistema, dado el observable hamiltoniano⁶ $h \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, el álgebra de Poisson de observables clásicos $(C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}), \cdot, \{\cdot, \cdot\})$ evoluciona de la siguiente manera: dado un observable $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, su dinámica viene dada por la siguiente ecuación⁷:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}. \quad (2.1.9)$$

O, en su versión dual, la evolución de un estado⁸ $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ lo da la ecuación de Liouville:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\{\rho, H\}. \quad (2.1.10)$$

2.2. Sistemas cuánticos

La formulación habitual⁹ de la mecánica cuántica comienza considerando un espacio de Hilbert¹⁰ complejo y separable¹¹. Antes de seguir, fijamos una notación extendida en la literatura que hace los cálculos en mecánica cuántica más simples. Se trata de la *notación bra-ket* o *notación de Dirac*, introducido originalmente por Paul Dirac (1904-1984). Se convenia que:

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad \text{es un vector,} \quad (2.2.1)$$

$$\langle\phi| \in \mathcal{H}^* \quad \text{es un vector del espacio dual,} \quad (2.2.2)$$

de tal manera que $\langle\phi| = |\phi\rangle^*$, y el producto escalar entre dos vectores $|\psi\rangle, |\eta\rangle \in \mathcal{H}$ se denota como

$$\langle\eta|\psi\rangle \in \mathbb{C} \quad (2.2.3)$$

En esta notación, se puede escribir el proyector sobre el subespacio de dimensión 1 generado por $|\psi\rangle$ como un *ket-bra*:

$$|\psi\rangle\langle\psi| : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad (2.2.4)$$

de tal manera que evaluando un vector $|\eta\rangle$: $|\psi\rangle\langle\psi||\eta\rangle = \langle\psi|\eta\rangle |\psi\rangle \in \mathcal{H}$.

La mecánica cuántica se basa en 5 postulados para describir sistemas puros¹² en la imagen de Schrödinger:

⁶Observable clásico correspondiente a la energía del sistema.

⁷Suponemos que f no tiene ninguna dependencia explícita respecto al tiempo.

⁸Suponemos que ρ no tiene ninguna dependencia explícita respecto al tiempo.

⁹La referencia más usual para el esquema matemático de la mecánica cuántica fue la presentada por el matemático húngaro-estadounidense John von Neumann en [21].

¹⁰Véase definición C.1.1.

¹¹Véase proposición C.1.1.

¹²En este trabajo solo consideraremos estados puros.

1. El estado de un sistema cuántico queda definido por un elemento $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ del espacio de Hilbert, o, equivalentemente, por el proyector¹³ $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, que denominaremos *matriz densidad*, sobre el correspondiente subespacio generado por $|\psi\rangle$ de dimensión 1).
2. Un observable cuántico es un operador autoadjunto¹⁴ no (necesariamente) acotado¹⁵ sobre el espacio de Hilbert. Denotaremos a este conjunto como

$$\Theta(\mathcal{H}) := \{A : D(A) \rightarrow \mathcal{H} \mid A \text{ autoadjunto}\}. \quad (2.2.5)$$

3. Cuando un sistema está en el estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, la medida del observable A dará como resultado uno de sus valores propios a con una probabilidad dependiente del estado $P_{A|\psi} = |\langle a|\psi\rangle|^2$, donde $|a\rangle$ es el vector propio asociado al autovalor a ($A|a\rangle = a|a\rangle$) que, por simplicidad, consideramos no degenerado¹⁶.

Vemos entonces que la medida de un operador tiene asociada una distribución de probabilidad que depende del estado del sistema. El correspondiente valor esperado del observable A será una aplicación

$$\langle \cdot \rangle : \Theta(\mathcal{H}) \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} \quad (2.2.6)$$

$$(A, |\psi\rangle) \mapsto \langle A \rangle_{|\psi\rangle} = \langle \psi | A \psi \rangle,$$

y la dispersión será la raíz cuadrada de la varianza: $\Delta_{|\psi\rangle} A = \sqrt{\langle A^2 \rangle_{|\psi\rangle} - \langle A \rangle_{|\psi\rangle}^2}$.

4. Para un estado $|\psi\rangle$ sobre el cual se realiza una medida de A obteniéndose el valor a_i (con las probabilidades descritas anteriormente), el estado resultante de la medida se obtiene realizando la proyección del estado sobre el subespacio propio asociado al valor propio a_i . Este proceso es el que se denomina colapso de la función de onda y su interpretación es aún objeto de debate.
5. La evolución temporal de un sistema descrito por $|\psi(t)\rangle$ se rige por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \tilde{H} |\psi(t)\rangle, \quad (2.2.7)$$

donde \tilde{H} es el hamiltoniano que corresponde al observable de la energía del sistema. Esta ecuación corresponde a la *imagen de Schrödinger* introducida en 1926 por el mismo Schrödinger. Como el sistema está aislado, sigue una dinámica unitaria generada por el Hamiltoniano. Equivalentemente, si se decide describir el estado mediante proyectores¹⁷ $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, esta evoluciona en el tiempo siguiendo la Ecuación de von Neumann:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \hat{\rho}]. \quad (2.2.8)$$

¹³A la que denominaremos *matriz densidad*.

¹⁴Véase definición C.2.8.

¹⁵Véase definición C.2.5

¹⁶En caso de ser degenerado, la probabilidad vendrá dada por el módulo al cuadrado de la proyección sobre su subespacio propio.

¹⁷Supongamos que $\| |\psi\rangle \| = 1$.

Mencionar que esta ecuación abarca situaciones más generales donde un estado puede venir descrito por una combinación convexa de *estados puros*¹⁸ denominado como *estado mezcla*.

Existe una formulación alternativa denominada *imagen de Heisenberg* propuesta en 1925 donde la dinámica recae sobre los observables dejando los estados estáticos en el tiempo. Bajo este esquema, la evolución de un observable¹⁹ $A \in \Theta(\mathcal{H})$ está determinada por la acción adjunta del hamiltoniano,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, A], \quad (2.2.9)$$

siguiendo la Ecuación de Heisenberg. Esta ecuación es la análoga cuántica a la Ecuación (2.1.9). En este trabajo estudiaremos la imagen de Heisenberg de un sistema híbrido, por tanto, nos centraremos en la caracterización de la dinámica de los observables híbridos, más detalles en el capítulo 3.

2.3. Cuantización geométrica

El formalismo de Koopman-von Neumann permite representar observables clásicos como operadores sobre el espacio de Hilbert de funciones de cuadrado integrable $\mathcal{L}^2(\mathcal{M}, d\Omega)$ sobre el espacio de fases \mathcal{M} con su medida simpléctica. De esta manera, los estados serían funciones de onda $\phi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{M}, d\Omega)$, los observables operadores sobre $\mathcal{L}^2(\mathcal{M}, d\Omega)$ y la dinámica (unitaria) estaría dada por una ecuación de Schrödinger (véase ecuación (F.0.12)) generada por el operador de Koopman-von Neumann (definición F.0.2). Una exposición detallada de este formalismo se puede encontrar en el capítulo F; en este trabajo, usaremos el formalismo de Koopman-van Hove para obtener otra representación de los observables clásicos sobre un espacio de Hilbert, empleando herramientas de cuantización geométrica,

La teoría de cuantización geométrica surge de la mano de Bertram Konstant (véase [4]) y Jean-Marie Souriau (véase [19]) en la década de 1970 en el contexto de teoría de representaciones. Empleando herramientas de geometría diferencial, como son los fibrados vectoriales y conexiones, define un espacio de Hilbert con los estados del sistema clásico y representa los observables clásicos mediante operadores sobre dicho espacio. El procedimiento de cuantización geométrica consiste en tres pasos: precuantización, polarización²⁰ y corrección metapléctica²¹. En este trabajo, ya que no se pretende cuantizar como tal ninguna teoría clásica sino obtener una diferente representación del álgebra de Poisson (véase 2.1.6) de observables clásicos usando la representación de Koopman-van Hove (véase [10], [5]), solamente introduciremos la precuantización.

¹⁸Un estado puro $\rho \in \Theta(\mathcal{H})^*$ es una matriz densidad que se puede escribir como $\rho = |\phi\rangle\langle\phi|$ para algún $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ normalizado.

¹⁹Suponemos, por simplicidad, ninguna dependencia explícita respecto al tiempo.

²⁰En el apéndice G.2 se proporciona una exposición de la polarización para el lector interesado.

²¹Véase [16], [22], [2].

2.3.1. Condiciones de cuantización de Dirac

La definición de una cuantización consiste en construir una representación del álgebra de Poisson (2.1.6) de observables clásicos como operadores sobre un espacio de Hilbert. El origen de este problema se remonta a principios del siglo XX, con los intentos de Hermann Weyl en 1927 con la denominada cuantización de Weyl. Dirac, al notar la similitud entre las relaciones de conmutación de los operadores cuánticos posición y momento respecto al paréntesis de Poisson de las correspondientes funciones clásicas, conjeturó que debería de existir un homomorfismo entre las dos álgebras de observables. En términos modernos, lo describimos como una aplicación \mathbb{P} entre el conjunto de observables clásicos al conjunto de observables cuánticos con las siguientes propiedades:

1. Linealidad: $\mathbb{P}(f + g) = \mathbb{P}(f) + \mathbb{P}(g)$,
2. conmutadores: $[\mathbb{P}(f), \mathbb{P}(g)] = -i\hbar\mathbb{P}(\{f, g\})$,
3. constantes: para f constante en M , $\mathbb{P}(f) = f \cdot I_d$ en \mathcal{H} ,
4. la representación \mathbb{P} del álgebra de observables clásicos es irreducible.

Las condiciones 1 y 2 son necesarias para que el mapa \mathbb{P} sea un morfismo de álgebras de Lie (véase definición D.0.7), y la condición 4 es equivalente a la condición de que si $\{f_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,n}$ forma un conjunto de observables completo, los operadores $\{\mathbb{P}(f_\alpha)\}_{\alpha=1,\dots,n}$ son también completos.

A estas condiciones se les denomina las condiciones de cuantización de Dirac (véase [9]); sin embargo, el teorema de "no-go" de Groenwold-von Hove (véase [13]) prueba que es imposible encontrar una aplicación \mathbb{P} que cumpla todas las propiedades anteriores para todos los observables clásicos. Ante esta situación, lo único que nos queda es limitar el conjunto de observables clásicos que cuantizar o modificar las estructuras algebraicas consideradas. Hoy en día existen múltiples métodos de cuantización como cuantización por deformación (véase [3]), cuantización de Berezin (véase [4]), cuantización geométrica, etc.

2.3.2. Precuantización: El formalismo de Koopman-van Hove

En el formalismo de Koopman-van Hove (véase [20],[10],[5]) se utiliza el procedimiento de precuantización para representar el álgebra de Poisson de observables clásicos sobre un espacio de Hilbert que cumpla las condiciones de cuantización de Dirac empleando herramientas de geometría diferencial como fibrados y conexiones.

Para ello, la idea es tomar la variedad simpléctica, dotarla de una estructura de fibrado de línea complejo hermítico (véase B.4.1) y definir el espacio de Hilbert correspondiente a las secciones de cuadrado integrable sobre el mismo fibrado. Además, sobre este espacio de Hilbert se pueden definir operadores que representen los observables clásicos y cumplan las reglas de cuantización de Dirac

(salvo la última, que se cumplirá al aplicar la cuantización y la corrección metaplética).

En la precuantización, se define un fibrado vectorial complejo 1-dimensional, $L \xrightarrow{\pi} M$, donde para todo $m \in M$, $L_m := \pi^{-1}(m) = \mathbb{C}$ de \mathbb{C} -dimensión 1. El espacio de fases \mathcal{M} es la base y a cada punto lo dotamos de un grado de libertad complejo que, cuando se fije su norma, representará físicamente una "fase" la cual interpretaremos a lo largo del trabajo.

Queremos que la 1-forma de curvatura del fibrado $L \xrightarrow{\pi} M$ sea $\frac{i\omega}{\hbar}$, por lo que, la 1-forma de conexión Θ vendrá dada por $\Theta = \frac{i}{\hbar}(\theta + d\varphi)$ donde θ es un potencial simpléctico²² cualquiera y $\varphi \in C^\infty(\mathcal{M})$, de esta manera, se tiene una libertad en la elección de φ . La elección de una φ nos define un nuevo potencial simpléctico $\tilde{\theta} := \theta + d\varphi$ físicamente igual de válida que θ . A esta libertad lo que denominaremos *libertad gauge*, y a la elección de una φ , *elección de gauge* o *fijación del gauge*.

Una elección de gauge φ nos fija una trivialización dada por el sistema local $\underline{s} \in \Gamma(L)$ de la siguiente manera:

$$\nabla \underline{s} = \frac{i}{\hbar} \underline{s} \cdot \tilde{\theta} \quad (2.3.1)$$

donde $\tilde{\theta} := \theta + d\varphi$. Esta libertad gauge se estudiará en más profundidad en la sección 2.3.3.

Una trivialización nos permitirá describir cualquier sección como una función suave compleja. Es decir, a partir de la trivialización dada por \underline{s} , cualquier sección $\psi \in \Gamma(L)$ puede escribirse como

$$\psi = \tilde{\psi} \cdot \underline{s}, \quad \tilde{\psi} \in C^\infty(\mathcal{M}),$$

donde \cdot denota el producto punto a punto.

Los estados de nuestro sistema ahora son secciones $\phi \in \Gamma(L)$, que localmente se pueden ver como funciones en $C^\infty(M)$. Recordemos que el objetivo de la cuantización es definir un espacio de Hilbert cuyos elementos sean estados del sistema clásico y los operadores representen observables clásicos. Por tanto, necesitamos definir un producto interno hermitico

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Gamma(L) \times \Gamma(L) \rightarrow \mathbb{C},$$

sobre nuestro fibrado $L \xrightarrow{\pi} M$. Para ese fin, hacemos uso del producto escalar definido sobre \mathbb{C} , donde dados $z, y \in \mathbb{C}$, $(z, y) = z^*y$, donde z^* denota el complejo conjugado de z . Además, usaremos la n -forma de volumen definido sobre nuestra variedad simpléctica²³ (orientable) a partir de la forma simpléctica ω : $d\Omega = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \omega \wedge \dots \wedge \omega$. El resultado es un producto escalar en el espacio de secciones $\Gamma(L)$ dado por:

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_M (\phi(m), \psi(m)) d\Omega(m), \quad \forall \phi, \psi \in \Gamma(L). \quad (2.3.2)$$

²² θ será la 1-forma de Liouville si \mathcal{M} es un fibrado cotangente.

²³La constante de normalización se toma por conveniencia.

La definición de un producto interno hermitico, nos permitirá también definir una norma

$$\|\psi\|_2 = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle},$$

para $\psi \in \Gamma(L)$. La compleción del espacio de secciones de cuadrado integrable será el espacio Hilbert que describa los estados del sistema precuantizado.

$$\mathcal{L}^2(L) := \overline{\{\psi \in \Gamma(L) : \|\psi\|_2 < \infty\}}.$$

Definición 2.3.1 (Percuantización). Una variedad simpléctica (M, ω) es precuantizable si existe un fibrado de línea hermitico $L \xrightarrow{\pi} M$ con conexión ∇ y forma hermitica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ cuya curvatura es $\frac{i\omega}{\hbar}$. La aplicación de cuantización \mathbb{P} toma observables clásicos $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ y los lleva a observables $\mathbb{P}(f)$ vía

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : C^\infty(\mathcal{M}) &\rightarrow \Theta(\mathcal{L}^2(L)) \\ f &\mapsto \mathbb{P}(f) := -i\hbar\nabla_{X_f} + \mathcal{M}_f \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

que actúa sobre secciones complejas $\phi \in \mathcal{L}^2(L)$ (funciones de onda) $\phi = \tilde{\phi} \cdot \underline{s} : \mathcal{M} \rightarrow L$ donde $\tilde{\phi} \in C^\infty(L)$ y $\mathcal{M}_f(g) = f \cdot g$ es el operador multiplicativo.

Para simplificar los cálculos, se escoge el sistema local \underline{s} de tal manera que para cada punto $m \in \mathcal{M}$:

$$(\underline{s}(m), \underline{s}(m)) = 1, \quad (2.3.4)$$

así, el producto escalar de dos secciones será el producto escalar complejo de las funciones que multiplican el sistema local, i.e. para dos secciones arbitrias $\phi = \tilde{\phi}\underline{s}, \psi = \tilde{\psi}\underline{s}$, uno tiene

$$(\phi(m), \psi(m)) = \tilde{\phi}(m)^* \cdot \tilde{\psi}(m), \quad \forall m \in \mathcal{M}. \quad (2.3.5)$$

Cabe destacar que la aplicación de precuantización \mathbb{P} puede ser extendida por linealidad para considerar también funciones $C^\infty(\mathcal{M}_C, \mathbb{C})$ complejas, aunque solo los operadores reales tengan significado físico como observables y solamente estos últimos serán simétricos.

Proposición 2.3.1. *Dada una variedad simpléctica (\mathcal{M}, ω) y una función $f \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, y la precuantización \mathbb{P} anteriormente descrita, entonces, el operador (no necesariamente acotado) $(\mathbb{P}(f), C_C(\mathcal{M}))$ es simétrico (hermitico con dominio denso).*

Demostración. La demostración se puede hallar en la proposición [H.2.2](#). □

Es decir, los observables clásicos precuantizados forman un subconjunto de los operadores simétricos (o hermiticos) sobre $\mathcal{L}^2(L)$ que denotaremos como $\mathbb{P}(\mathcal{M}_C) := \{\mathbb{P}(f) \mid f \in C^\infty(\mathcal{M})\} \subset \text{Herm}(\mathcal{L}^2(L))$ donde con $\text{Herm}(\mathcal{L}^2(L))$ denotamos el conjunto de operadores simétricos.²⁴

²⁴El hecho de denotarlo como hermiticos tiene como objetivo compartir la notación con la literatura.

2.3.3. Representación KvH del álgebra de observables clásicos

Siguiendo el formalismo de KvH, la precuantización nos proporciona una representación del álgebra de Poisson de observables clásicos $(C^\infty(\mathcal{M} \times \mathbb{R}), \{\cdot, \cdot\})$ como operadores $(\Theta(\mathcal{H}), [\cdot, \cdot])$.

Teorema 2.3.2. Sean $h \in C^\infty(\mathcal{M})$ el hamiltoniano de un sistema clásico descrito por el espacio de fases (\mathcal{M}, ω) , \mathbb{P} la precuantización descrita anteriormente, y $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ un observable clásico precuantizado. Entonces la precuantización es una representación del álgebra de Poisson $(C^\infty(\mathcal{M}), \{\cdot, \cdot\})$ como operadores $(\Theta(\mathcal{L}^2(L)), [\cdot, \cdot])$, i.e.

$$\mathbb{P}(\{h, f\}) = -\frac{i}{\hbar}[\mathbb{P}(h), \mathbb{P}(f)]. \quad (2.3.6)$$

Demostración. La demostración puede hallarse en el teorema [H.2.1](#). □

Sin embargo, a diferencia del formalismo de Koopman-von Neumann donde los operadores se representaban a través de operadores multiplicativos, ahora en el formalismo de Koopman-van Hove los observables clásicos son representados también mediante operadores derivativos en el espacio de Hilbert. En esta representación, los observables clásicos no conmutan en general, sin embargo, el hamiltoniano clásico viene representado por un observable permitiéndonos definir una dinámica que será un automorfismo interno del álgebra de observables. Estas son las principales diferencias con respecto a la representación de observables clásicos que se tiene empleando el formalismo de Koopman-von Neumann (véase [\[18\]](#)), donde los operadores correspondientes a los observables clásicos conmutan pero la dinámica define un automorfismo externo²⁵.

Estados estadísticos clásicos

Dada una densidad de probabilidad clásica $\rho \in C^\infty(\mathcal{M})$ y un observable $A \in C^\infty(\mathcal{M})$, el valor esperado del observable clásicamente vendrá dado por

$$\langle A \rangle_\rho = \int_{\mathcal{M}} A \rho d\Omega. \quad (2.3.7)$$

Este mismo estado estadístico clásico, en el formalismo de KvH, vendrá dado por un estado puro; es decir, el estado vendrá descrito por una función de onda²⁶ $\phi \in \Gamma(L)$ y la matriz de densidad asociada $\tilde{\rho} \in \Theta(\mathcal{H})^*$ será el proyector normalizado sobre la misma: $\tilde{\rho} = \frac{|\phi\rangle\langle\phi|}{\langle\phi|\phi\rangle}$. Bajo esta prescripción, el valor esperado de un observable $\mathbb{P}(A) \in \Theta(\mathcal{H})$ vendrá dado por la traza de la matriz densidad actuando sobre el mismo,

$$\langle \mathbb{P}(A) \rangle_{\tilde{\rho}} = \text{Tr}(\tilde{\rho} \mathbb{P}(A)). \quad (2.3.8)$$

²⁵El operador que actúa de hamiltoniano de la dinámica (el Liouvilliano) no pertenece al álgebra de observables clásicos.

²⁶Por simplicidad de notación, a continuación, trataremos ϕ como si fuera la función $\tilde{\phi} \in C^\infty(\mathcal{M})$ que describe la sección dada la sección del vacío \underline{s} , $\phi = \tilde{\phi}\underline{s}$.

Lema 2.3.3. Dada la representación de KvH de un observable $\mathbb{P}(A) \in \mathbb{P}(\mathcal{M}_C) \subset \Theta(\mathcal{H})$ y un estado puro $\tilde{\rho} \in \Theta(\mathcal{H})^*$: $\tilde{\rho} = \frac{|\phi\rangle\langle\phi|}{\langle\phi|\phi\rangle}$, donde $\phi \in \Gamma(L)$, el valor esperado del observable precuantizado $\mathbb{P}(A)$ en el estado $\tilde{\rho}$ viene dado por la siguiente expresión:

$$\langle\mathbb{P}(A)\rangle_{\tilde{\rho}} = \int_{\mathcal{M}} (\theta(X_A) + A)|\phi|^2 d\Omega - i\hbar \int_{\mathcal{M}} \bar{\phi}\{A, \phi\} d\Omega. \quad (2.3.9)$$

Demostración. Basta calcular $\langle\mathbb{P}(A)\rangle_{\tilde{\rho}} = \text{Tr}(\tilde{\rho}\mathbb{P}(A))$ tomando $\mathbb{P}(A) = -i\hbar\nabla_{X_A} + \mathcal{M}_A$:

$$\begin{aligned} \langle\mathbb{P}(A)\rangle_{\tilde{\rho}} &= \text{tr} \left(\frac{|\phi\rangle\langle\phi|}{\langle\phi|\phi\rangle} \mathbb{P}(A) \right) = \frac{\langle\phi|\mathbb{P}(A)|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} = \\ &= \int_{\|\phi\|=1} \bar{\phi}\mathbb{P}(A)\phi d\Omega = \int_{\mathcal{M}} (\theta(X_A) + A)|\phi|^2 d\Omega - i\hbar \int_{\mathcal{M}} \bar{\phi}\{A, \phi\} d\Omega. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

□

Teorema 2.3.4. Dado un estado puro $\tilde{\rho} \in \Theta(\mathcal{H})^*$: $\tilde{\rho} = \frac{|\phi\rangle\langle\phi|}{\langle\phi|\phi\rangle}$ donde $\phi \in \Gamma(L)$. Entonces, la densidad de probabilidad clásica viene dada por la relación

$$\boxed{\rho = |\phi|^2 - \text{div}(\mathcal{J}\theta|\phi|^2) + i\hbar\{\bar{\phi}, \phi\}.} \quad (2.3.11)$$

donde θ es el potencial simpléctico del espacio de fases y \mathcal{J} es el tensor de Poisson (véase definición A.2.1).

Demostración. Consideremos cualquier observable precuantizado $\mathbb{P}(A) \in \Theta(\mathcal{H})$, y $\mathbb{P}(A) = -i\hbar\nabla_{X_A} + \mathcal{M}_A$ su precuantización. Empleando la forma de calcular valores medios en la representación de KvH (Ecuación (2.3.9)), debemos postular:

$$\int_{\mathcal{M}} A\rho d\Omega = \langle A \rangle_{\rho} := \langle\mathbb{P}(A)\rangle_{\tilde{\rho}} \quad (2.3.12)$$

Entonces tenemos:

$$\int_{\mathcal{M}} A\rho d\Omega = \int_{\mathcal{M}} \bar{\phi}\mathbb{P}(A)\phi d\Omega = \int_{\mathcal{M}} (\theta(X_A) + A)|\phi|^2 d\Omega - i\hbar \int_{\mathcal{M}} \bar{\phi}\{A, \phi\} d\Omega. \quad (2.3.13)$$

Buscando relacionar ρ con ϕ , introducimos primero el tensor de Poisson $\mathcal{J} : \Gamma(T^*\mathcal{M}) \times \Gamma(T^*\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ que es una aplicación $C^\infty(\mathcal{M})$ -bilineal. Dado un sistema de coordenadas, localmente podemos escribir

$$\{F, H\} = \mathcal{J}(dF, dH) = \mathcal{J}^{\mu\nu} dF_\mu dH_\nu = \mathcal{J}^{\mu\nu} \partial_\mu F \partial_\nu H,$$

y

$$X_A = \mathcal{J}(\cdot, dA) = \mathcal{J}^{\mu\nu} \underbrace{dA_\nu}_{\partial_\nu A}.$$

Por un lado, se tiene que

$$0 = \int_{\mathcal{M}} \operatorname{div}(\mathcal{J}^{\mu\nu}\theta_\nu A|\phi|^2)d\Omega = \int_{\mathcal{M}} \operatorname{div}(\mathcal{J}^{\mu\nu}\theta_\nu|\phi|^2)Ad\Omega + \int_{\mathcal{M}} \mathcal{J}^{\mu\nu}\theta_\nu|\phi|^2\partial_\mu A d\Omega, \quad (2.3.14)$$

integrando por partes, considerando el hecho de que $\phi(\partial\mathcal{M}) = 0$, denotando por θ_ν la componente ν del potencial simpléctico θ en la carta de Darboux, y usando el convenio de sumación de Einstein. Por otro lado, dado que el operador $\{\cdot, \phi\}$ es una derivación, se tiene que:

$$\int_{\mathcal{M}} \{A\bar{\phi}, \phi\}d\Omega = \int_{\mathcal{M}} A\{\bar{\phi}, \phi\}d\Omega + \int_{\mathcal{M}} \bar{\phi}\{A, \phi\}d\Omega. \quad (2.3.15)$$

Obteniendo la siguiente relación $\rho = |\phi|^2 - \operatorname{div}(\mathcal{J}\theta|\phi|^2) + i\hbar\{\bar{\phi}, \phi\}$. □

Nótese que la densidad de probabilidad clásica dada por la ecuación (2.3.11) no está definida positiva, por tanto, debemos fijar la libertad gauge (definir la fase de ϕ) para que esto no pueda suceder.

Corolario 2.3.5. *Para que la densidad de probabilidad clásica no dependa de la fase de la función de onda y sea definida positiva, se debe cumplir la siguiente condición:*

$$\operatorname{div}(\mathcal{J}\theta R_C) = -\{R_C, S_C\} \quad (2.3.16)$$

donde $R_C \in C^\infty(\mathcal{M}_C, \mathbb{R}^+)$, $S_C \in C^\infty(\mathcal{M}_C, \mathbb{R})$ tales que $\phi = \sqrt{R_C}e^{iS_C/\hbar}$.

Demostración. Ver la demostración del corolario H.2.3. □

Libertad gauge

Como ya hemos visto, el uso de un fibrado de línea para representar los estados de nuestro sistema clásico introduce una libertad gauge dada por el potencial simpléctico o 1-forma de conexión. Añadir una 1-forma exacta (luego, cerrada) al potencial simpléctico nos da otra conexión ∇ con la misma curvatura, es decir, dado un potencial simpléctico $\theta \in \Lambda^1(\mathcal{M}_C)$ y una función $\varphi \in C^\infty(\mathcal{M}_C, \mathbb{R})$, definimos otro potencial simpléctico como $\tilde{\theta} := \theta + d\varphi$. Son dos potenciales simplécticos diferentes con la misma forma simpléctica asociada, i.e.

$$\tilde{\omega} = d\tilde{\theta} = d(\theta + d\varphi) = d\theta + \underbrace{d(d\varphi)}_{=0} = d\theta = \omega.$$

La libertad gauge de la fase²⁷ clásica quedará fijada por la ecuación (2.3.16) para que la densidad de probabilidad clásica sea positiva y no dependa de la fase de la función de onda que lo representa.

²⁷Veremos en la ecuación B.3.4 que una libertad gauge en la forma simpléctica es equivalente a un cambio de fase de la función de onda.

A continuación veremos dos formas de entender la relación que hay entre cambios de fase de los estados y transformaciones gauge en el potencial simpléctico: la primera viendo cómo transforman los observables precuantizados bajo cambios de fase, y la segunda dirigiéndonos a la teoría de fibrados vectoriales.

Proposición 2.3.6. *Dados un observable clásico $f \in C^\infty(\mathcal{M}_C)$, su observable precuantizado \tilde{f} asociado²⁸ al potencial simpléctico θ , un estado $\psi = \tilde{\psi} \cdot \underline{s} \in \Gamma(L)$ y un cambio de fases dado $\psi' = e^{i\varphi/\hbar}\psi$, donde $\varphi \in C^\infty(\mathcal{M}_C, \mathbb{R})$, entonces, el observable precuantizado transforma de la siguiente manera:*

$$\mathbb{P}(f)(\psi') = e^{i\varphi/\hbar} \mathbb{P}(f)'(\psi), \quad (2.3.17)$$

donde $\mathbb{P}(f)'$ es el operador precuantizado de f asociado al potencial simpléctico $\theta' = \theta + d\varphi$.

Demostración. Véase demostración en la proposición [H.2.4](#). □

Vemos que un cambio de fases puede absorberse mediante un cambio gauge en el potencial simpléctico con el coste de una fase extra al evaluarlo en un observable. Se puede ver que la propiedad que se muestra en la proposición [2.3.6](#) es equivalente a la condición sobre la fase que da el corolario [2.3.5](#). Sin embargo, la fase extra que se tiene en el operador precuantizado debido a los cambios gauge no supone ningún problema físico, ya que, esta fase se verá anulada cuando tomemos valores medios de los observables:

Corolario 2.3.7. *El valor esperado de un operador precuantizado es invariante bajo transformaciones de gauge. Es decir, dados el observable clásico f , los operadores precuantizados \tilde{f}, \tilde{f}' y los estados ψ, ψ' como en la Proposición [H.2.4](#), entonces:*

$$\langle \mathbb{P}(f) \rangle_{\psi'} = \langle \mathbb{P}(f)' \rangle_{\psi} \quad . \quad (2.3.18)$$

Demostración. Empleando la notación Braket de Dirac:

$$\langle \mathbb{P}(f) \rangle_{\psi'} = e^{-i\varphi/\hbar} \langle \psi | e^{i\varphi/\hbar} \mathbb{P}(f)' \psi \rangle = e^{-i\varphi/\hbar} e^{i\varphi/\hbar} \langle \psi | \mathbb{P}(f)' \psi \rangle = \langle \psi | \mathbb{P}(f)' \psi \rangle = \langle \mathbb{P}(f)' \rangle_{\psi}. \quad (2.3.19)$$

□

Otra forma de enfocar esta libertad gauge es recurriendo a la teoría de fibrados vectoriales que nos dice que un cambio del sistema local produce un cambio en la 1-forma de conexión (y en la forma de curvatura también). Consideramos un cambio de sistemas locales dado por $g := e^{i\varphi/\hbar}$ como en la Ecuación [\(B.3.4\)](#). Por tanto, según la Ecuación [\(B.3.5\)](#) y la proporcionalidad entre el potencial simpléctico y la forma de conexión, se tiene lo que esperábamos:

$$\tilde{\theta} = g^{-1}\theta g - i\hbar g^{-1}dg = \theta + d\varphi, \quad (2.3.20)$$

²⁸En el sentido de que la 1-forma de la conexión del observable precuantizado está dada por el potencial simpléctico siguiente.

Sistemas híbridos

En este capítulo, presentaremos un nuevo enfoque para tratar con sistemas híbridos y estudiaremos su dinámica. Tomaremos el sistema clásico y lo precuantizaremos con las herramientas de cuantización geométrica tal y como se hace en el formalismo de KvH, y, posteriormente, le acoplaremos un sistema cuántico de manera natural en el sentido de que trataremos ambas partes como dos subsistemas cuánticos acoplados. Es decir, un estado de un sistema híbrido será un elemento del espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_Q$ donde $\mathcal{H}_C = \mathcal{L}^2(L)$ es el espacio definido en el caso clásico y \mathcal{H}_Q el espacio de Hilbert de la parte cuántica. A partir de aquí supondremos que el espacio de Hilbert de la parte cuántica tiene dimensión infinita¹, por tanto, podemos considerar² que $\mathcal{H}_Q = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m)$ es el espacio de funciones cuadrado integrables sobre \mathbb{R}^m para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces, el espacio de Hilbert se puede ver como $\mathcal{H}_{CQ} = \mathcal{L}^2(L) \otimes \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m) \cong \mathcal{L}^2(\mathcal{M}_C \times \mathbb{R}^m)$.

A su vez, un observable será un elemento de $\Theta_{CQ} := \mathbb{P}(\mathcal{M}_C) \otimes \Theta(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m))$, donde $\Theta(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m))$ denota el conjunto de operadores sobre $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m)$.

Mencionar también que todas las herramientas de geometría diferencial que usemos en un sistema híbrido como la derivada exterior d , la conexión ∇ , etc. solo actúan sobre el subsistema clásico sin afectar a la parte cuántica, ya que están definidos sobre \mathcal{M}_C . Por ejemplo, localmente, la derivada exterior sobre un estado híbrido $f \in \mathcal{H}_{CQ} \cong \mathcal{L}^2(\mathcal{M}_C \times \mathbb{R}^m)$ como

$$df(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i \right). \quad (3.0.1)$$

¹Si \mathcal{H}_Q es de dimensión finita, es decir, $\mathcal{H}_Q \cong \mathbb{C}^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, lo siguiente es aplicable pero habría que adaptar cierta notación, no lo haremos en este trabajo.

²Recordemos que todos los espacio de Hilbert separable infinito-dimensionales son isomorfos.

3.1. Dinámica híbrida unitaria

La pregunta que nos hacemos en este punto es bajo qué condiciones la dinámica unitaria deja invariante el espacio de observables híbridos. Veremos que salvo para observables triviales, una dinámica unitaria no puede ser una dinámica híbrida bien definida.

Teorema 3.1.1. *No existe ninguna dinámica unitaria independiente del tiempo y conectada con la identidad que deje invariante el espacio de observables no triviales híbridos.*

Demostración. Una dinámica unitaria independiente del tiempo y conectada por la unidad tiene la forma de (2.2.9), por lo que, para que una dinámica de este tipo preserve el subálgebra de observables híbridos es condición necesaria y suficiente que el conmutador de un observable híbrido con el hamiltoniano híbrido sea, de nuevo, un observable híbrido. Buscamos bajo qué condiciones un observable cumple que el conmutador del mismo con el hamiltoniano es un observable:

$$[\mathbb{P}(h) \otimes H_Q, \mathbb{P}(f) \otimes F_Q] \in \Theta_{CQ} = \mathbb{P}(\mathcal{M}_C) \otimes \Theta(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m)). \quad (3.1.1)$$

El conmutador del producto tensorial de dos observables puede descomponerse en productos de conmutadores y anticonmutadores, de esta manera, convertimos la condición anterior en una cuestión en el subsistema clásico, ya que la dinámica unitaria en el subsistema cuántico preserva el álgebra de observables cuánticos. Explícitamente,

$$[\mathbb{P}(h) \otimes H_Q, \mathbb{P}(f) \otimes F_Q] = \underbrace{[\mathbb{P}(h), \mathbb{P}(f)]}_{\in \mathbb{P}(\mathcal{M}_C)} \otimes \underbrace{[H_Q, F_Q]_+}_{\in \Theta(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m))} + \underbrace{[\mathbb{P}(h), \mathbb{P}(f)]_+}_{\in \Theta(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m))} \otimes \underbrace{[H_Q, F_Q]}_{\in \Theta(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m))} \quad (3.1.2)$$

donde con $[\cdot, \cdot]_+$ denotamos el anticonmutador³. De esta manera, para que la transformación infinitesimal de un operador sea un operador híbrido, se requiere que el anticonmutador de dos observables clásicos precuantizados sea otro operador precuantizado, i.e. $[\mathbb{P}(h), \mathbb{P}(f)]_+ = \mathbb{P}(g)$ para algún $g \in C^\infty(\mathcal{M}_C)$. Veremos que, en general, lo anterior no es posible ya que el anticonmutador nos da términos derivativos de segundo orden que no se pueden interpretar como operadores precuantizados.

Vemos que parte del anticonmutador puede verse como un observable precuantizado, pero no su totalidad:

$$\begin{aligned} [\mathbb{P}(h), \mathbb{P}(f)]_+ &= [-i\hbar \nabla_{X_h} + h, -i\hbar \nabla_{X_f} + f]_+ = -\hbar^2 [\nabla_{X_h}, \nabla_{X_f}]_+ - i\hbar [\nabla_{X_h}, f]_+ - i\hbar [h, \nabla_{X_f}]_+ + [h, f]_+ = \\ &= -\hbar \nabla_{X_h} \nabla_{X_f} - \hbar^2 \nabla_{X_f} \nabla_{X_h} - \underbrace{i\hbar \nabla_{X_h} f}_{=-i\hbar \nabla_{X_h} - i\hbar X_h(f)} - i\hbar f \nabla_{X_h} - i\hbar h \nabla_{X_f} - \underbrace{i\hbar \nabla_{X_f} h}_{=-i\hbar \nabla_{X_f} - i\hbar X_f(h)} + h \cdot f + f \cdot h = \\ &= -\hbar^2 (\nabla_{X_h} \nabla_{X_f} + \nabla_{X_f} \nabla_{X_h}) - 2i\hbar \underbrace{(f \nabla_{X_h} + h \nabla_{X_f})}_{\nabla_{X_{fh}}} + h \cdot f + f \cdot h = \\ &= -\hbar^2 [\nabla_{X_h}, \nabla_{X_f}]_+ + 2\mathbb{P}(fh). \quad (3.1.3) \end{aligned}$$

³ $\nabla(A, D(A)), (B, D(B)) \in \Theta(\mathcal{H}), [A, B]_+ := AB + BA$ con dominio $D([A, B]_+) = D(AB) \cap D(BA) = D([A, B])$.

Nótese que tenemos términos derivativos de segundo orden, el anticonmutador de las derivadas covariantes. Estos términos no podrán ser absorbidos con observables precuantizados, en general. A pesar de ello, aún podemos manipular más la expresión para dejar un solo término derivativo de segundo orden. Para ello, intentamos expresar el anticonmutador mediante el conmutador más un término adicional. Veámoslo partiendo del último resultado obtenido en la ecuación (3.1.3)

$$\begin{aligned}
[\mathbb{P}(h), \mathbb{P}(f)]_+ &= [-i\hbar\nabla_{X_h} + h, -i\hbar\nabla_{X_f} + f]_+ = -\hbar^2[\nabla_{X_h}, \nabla_{X_f}]_+ + 2\mathbb{P}(fh) = \\
&= -2\hbar^2\nabla_{X_f}\nabla_{X_h} + \hbar^2[\nabla_{X_f}, \nabla_{X_h}] + 2\mathbb{P}(fh) = -2\hbar^2\nabla_{X_f}\nabla_{X_h} + \hbar^2 \underbrace{[\nabla_{X_f}, \nabla_{X_h}]}_{=-\frac{i}{\hbar}\{f, h\} + \nabla_{[X_f, X_h]}} + 2\mathbb{P}(fh) = \\
&= -2\hbar^2\nabla_{X_f}\nabla_{X_h} + i\hbar \overbrace{(-i\hbar\nabla_{\underbrace{[X_f, X_h]}_{X_{\{f, h\}}}} + \{f, h\})}^{=\mathbb{P}(\{f, h\})} + 2\mathbb{P}(fh) = \\
&= -2\hbar^2\nabla_{X_f}\nabla_{X_h} + \mathbb{P}(i\hbar\{f, h\} + 2fh). \quad (3.1.4)
\end{aligned}$$

Todo operador precuantizado no constante es de orden derivativo 1, por tanto, no hay forma de interpretar la doble derivada covariante como un operador precuantizado salvo que este se anule, que corresponde al caso en el cual el observable es constante. Sin embargo, este caso no tiene ningún interés físico. \square

3.2. Dinámica híbrida no lineal

Hemos visto que la dinámica unitaria solo está bien definida en el contexto de sistemas híbridos para observables triviales. Nos preguntamos si se puede definir una dinámica no lineal (y, por tanto, no unitaria) que deje invariante el subálgebra de los observables híbridos. La respuesta será que sí, sin embargo, la dinámica tendrá unas características determinadas, como que la dinámica de un observable dependerá del estado inicial del sistema sobre el que estamos midiendo.

Para ello, vemos que parte del término de $\nabla_{X_f}\nabla_{X_h}$ puede absorberse con un cambio gauge (un cambio en la forma simpléctica).

Consideremos el estado $\Upsilon \in \mathcal{L}^2(L) \otimes \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m) \cong \mathcal{L}^2(\mathcal{M}_C \times \mathbb{R}^n)$ que se puede escribir de la forma $\Upsilon = \sqrt{R} e^{-iS/\hbar} \underline{s}$ para $R, S \in C^\infty(\mathcal{M}_C \times \mathbb{R}^n)$. Entonces,

$$\nabla_{X_h}(\Upsilon \underline{s}) = \nabla_{X_h} \left(\sqrt{R} e^{-iS/\hbar} \underline{s} \right) = \left(\frac{i}{\hbar} \underbrace{(\theta(X_h) - dS(X_h))}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{2} X_h(\ln(R))}_{(2)} \right) \Upsilon \underline{s}. \quad (3.2.1)$$

Imponiendo cierta condición sobre el sistema local \underline{s} , se demuestra en la proposición H.4.1 que el término (1) puede anularse. Así, el único término que permanece de la ecuación (3.2.1) es el término

(2). Calculando la segunda derivada covariante (suponiendo, de nuevo, que (1) se anula) se tiene lo siguiente⁴:

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_f} \nabla_{X_h} \Upsilon_{\underline{S}} &= \nabla_{X_f} \left(\frac{1}{2} X_h(\ln(R)) \Upsilon_{\underline{S}} \right) = \frac{1}{2} X_f(X_h(\ln(R))) \Upsilon_{\underline{S}} + \frac{i}{2\hbar} X_h(\ln(R)) \theta(X_f) \Upsilon_{\underline{S}} + \\
&\quad + \frac{1}{2} X_h(\ln(R)) \underbrace{X_f(\text{Log}(\tilde{\Upsilon}))}_{= \frac{1}{2} X_f(\ln(R)) - \frac{i}{\hbar} X_f(S)} \Upsilon_{\underline{S}} = \\
\frac{1}{2} \left(X_f(X_h(\ln(R))) + \frac{i}{\hbar} \theta(X_f) X_h(\ln(R)) + \frac{1}{2} X_h(\ln(R)) X_f(\ln(R)) - \frac{i}{\hbar} X_h(\ln(R)) X_f(S) \right) \Upsilon_{\underline{S}} &= \\
= \left(\frac{1}{2R} X_f(X_h(R)) - \frac{1}{4R^2} X_f(R) X_h(R) + \frac{i}{2\hbar R} X_h(R) \underbrace{(\theta(X_f) - dS(X_f))}_{(3)} \right) \Upsilon_{\underline{S}}, &\quad (3.2.2)
\end{aligned}$$

a priori, no se anula. Nos interesa que el término (3) de la ecuación anterior también se anulase junto a (1) de tal manera que la segunda derivada covariante no dependiera de la fase S . Es decir, lo ideal sería hallar una solución al siguiente sistema de ecuaciones⁵:

$$\begin{cases} \theta(X_h) = dS(X_h) & (1), \\ \theta(X_f) = dS(X_f) & (3), \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Como primera opción, uno puede pensar que bastaría imponer la condición (más restrictiva):

$$dS = \theta.$$

Pero esta condición no se puede cumplir en general, ya que, θ es una 1-forma no cerrada, pero dS es exacta, luego cerrada.

La existencia de la solución del sistema de ecuaciones (3.2.3), que anularía los términos (1) y (3) a la vez, no está asegurada y requiere plantearlo como un problema con ligaduras que restringe el conjunto de observables clásicos que lo cumplan. Otra forma de verlo sería plantearlo como un problema dinámico añadiendo una conexión al término temporal de la ecuación dinámica, o también estudiar si se pueden imponer ciertas condiciones al hamiltoniano h para simplificar la resolución del sistema. Este problema requiere de futuras investigaciones que quedan fuera de este trabajo y ha sido discutido en otros trabajos como en [10], [5], [11]. Lo que sí podemos asegurar por la proposición H.4.1 es que el término (1) de (3.2.1) se anula para alguna trivialización, pero no podemos asegurar que (3) de (3.2.2) también se anule, deberemos tomarlo en cuenta para la dinámica.

A continuación se explora la dinámica no lineal en la imagen de Heisenberg que deje invariante el álgebra de observables clásicos. El estado ϕ evolucionará en el tiempo siguiendo la curva integral

⁴Denotamos por *Log* el logaritmo complejo y por *ln* el logaritmo neperiano sobre los reales.

⁵Con abuso de notación diremos que (1) se cumple si la ecuación (1) de (3.2.3) se cumple o, equivalentemente, si el término (1) de la ecuación (3.2.1) se anula. Análogo con (3).

del campo hamiltoniano, de tal manera que escogiendo la fase dada por la ecuación (??), la segunda derivada covariante de Υ se reducirá a la siguiente expresión:

$$\nabla_{X_f} \nabla_{X_h} \Upsilon = \nabla_{X_f} \left(\frac{1}{2R} X_h(R) \Upsilon \right). \quad (3.2.4)$$

Finalmente, el conmutador de la ecuación (3.1.2) queda reducido a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} [\mathbb{P}(h) \otimes H_Q, \mathbb{P}(f) \otimes F_Q] \Upsilon &= \mathbb{P}(\{h, f\}) \otimes [H_Q, F_Q]_+ \Upsilon + \mathbb{P}(-i\hbar\{h, f\} + 2h \cdot f) \otimes [H_Q, F_Q] \Upsilon - \\ &- 2\hbar^2 \nabla_{X_f} \nabla_{X_h} \otimes [H_Q, F_Q] \Upsilon = \mathbb{P}(\{h, f\}) \otimes [H_Q, F_Q]_+ \Upsilon + \mathbb{P}(-i\hbar\{h, f\} + 2h \cdot f) \otimes [H_Q, F_Q] \Upsilon - \\ &- 2\hbar^2 \left(\frac{1}{2R} X_f(X_h(R)) - \frac{1}{4R^2} X_f(R) X_h(R) + \frac{i}{2\hbar R} X_h(R) (\theta(X_f) - dS(X_f)) \right) \otimes [H_Q, F_Q] \Upsilon. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Con todo esto, podemos proponer la dinámica híbrida no-lineal en la imagen de Heisenberg que preserve el álgebra de observables híbridos:

Teorema 3.2.1. *Dados un estado híbrido⁶ $\Upsilon \in L^2(L) \otimes \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m)$ tal que se puede escribir como $\Upsilon = \sqrt{R} e^{iS/\hbar}$ donde $R, S \in C^\infty(\mathcal{M}_C \times \mathbb{R}^m)$, un observable híbrido no dependiente del tiempo $\mathbb{P}(f) \otimes F_Q \in \mathbb{P}(\mathcal{M}_C) \otimes \Theta(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m))$, y el hamiltoniano híbrido $\mathbb{P}(h) \otimes H_Q \in \mathbb{P}(\mathcal{M}_C) \otimes \Theta(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m))$, entonces, la dinámica híbrida no-lineal independiente del tiempo y conectada por la unidad dada por la ecuación siguiente:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbb{P}(f) \otimes F_Q) \Upsilon &= \frac{i}{\hbar} [\mathbb{P}(h) \otimes H_Q, \mathbb{P}(f) \otimes F_Q] \Upsilon + 2i\hbar \nabla_{X_f} \nabla_{X_h} \otimes [H_Q, F_Q] \Upsilon = \frac{i}{\hbar} [\mathbb{P}(h) \otimes H_Q, \mathbb{P}(f) \otimes F_Q] \Upsilon + \\ &+ 2i\hbar \left(\frac{1}{2R} X_f(X_h(R)) - \frac{1}{4R^2} X_f(R) X_h(R) + \frac{i}{2\hbar R} X_h(R) (\theta(X_f) - dS(X_f)) \right) \otimes [H_Q, F_Q] \Upsilon. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

preserva el álgebra de observables híbridos.

Demostración. La demostración es inmediata a partir de la expresión del conmutador dada por la ecuación (3.2.5). De esta manera,

$$\frac{d}{dt} (\mathbb{P}(f) \otimes F_Q) \Upsilon = \mathbb{P}(\{h, f\}) \otimes [H_Q, F_Q]_+ \Upsilon + \mathbb{P}(-i\hbar\{h, f\} + 2h \cdot f) \otimes [H_Q, F_Q] \Upsilon \quad (3.2.7)$$

que pertenece a $\mathbb{P}(\mathcal{M}_C) \otimes \Theta(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m))$. □

⁶ $m \in \mathbb{N}$.

Conclusiones

Este trabajo nace de la búsqueda de una dinámica híbrida bien definida en términos de espacios de Hilbert. Se basa en los trabajos [6] y [18] donde se estudia la implementación del formalismo de Koopman-von Neumann de representaciones de observables clásicos a sistemas híbridos. Sin embargo, hasta la fecha no se ha encontrado una dinámica con todas las propiedades físicas esperables de un sistema híbrido en este enfoque. Este trabajo propone una nueva perspectiva para hallar una dinámica híbrida. Para ello, se sigue el formalismo de Koopman-van Hove que permite representar el álgebra de observables clásicos como operadores sobre un espacio de Hilbert usando el procedimiento llamado precuantización de cuantización geométrica. En este marco teórico, la dinámica de un sistema híbrido es un automorfismo interno del álgebra de observables híbridos, a diferencia de lo que se tiene con el formalismo de Koopman-von Neumann. Además, en este trabajo se demuestra que no hay ninguna dinámica híbrida unitaria no trivial y se propone una dinámica no lineal que deja invariante el álgebra de observables clásicos.

La principal aportación original de este trabajo se puede resumir como: *el uso del formalismo de Koopman-van Hove para estudiar la imagen de Heisenberg usando automorfismos internos al álgebra de observables híbridos, demostración de la no existencia de dinámicas híbridas unitarias no triviales y propuesta de una dinámica no lineal bien definida.*

Finalmente, se proponen las siguientes posibles líneas de investigación futuras. En primer lugar, estudiar la existencia de la solución del sistema de ecuaciones (3.2.3), que implicaría que la dinámica no lineal descrita por la ecuación (3.2.6) no dependiera de la fase del estado sobre el que se mide el observable. Para ello, se requiere de su planteamiento como un problema con ligaduras o como un problema dinámico añadiendo una conexión no abeliana al término temporal. En segundo lugar, estudiar la dinámica híbrida no lineal dual en la imagen de Schrödinger. De tal manera que se tenga la dinámica sobre los estados del sistema híbrido. Por último, interpretar físicamente la dinámica no lineal obtenida, y estudiar sus propiedades como puede ser la *back-reaction* o ver si la densidad de probabilidad clásica obtenida con la traza parcial del sistema cuántico está bien definida.

Bibliografía

- [1] J. L. Alonso, A. Castro, J. Clemente-Gallardo, J. C. Cuchí, P. Echenique, and F. Falceto. Statistics and Nosé formalism for Ehrenfest dynamics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(39):395004, September 2011.
- [2] S. Bates and A. Weinstein. *Lectures on Geometric Quantization*. American Mathematical Society, 1997.
- [3] F Bayen, M Flato, C Fronsdal, A Lichnerowicz, and D Sternheimer. Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures. *Annals of Physics*, 111(1):61–110, March 1978.
- [4] F. A. Berezin. Quantization. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 38(5):1116–1175, 1974. English translation in *Math. USSR-Izv.*, 8(5):1109–1165, 1974.
- [5] Denys I. Bondar, François Gay-Balmaz, and Cesare Tronci. Koopman wavefunctions and classical–quantum correlation dynamics. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 475(2229):20180879, September 2019.
- [6] C Bouthelie-Madre, J Clemente-Gallardo, L González-Bravo, and D Martínez-Crespo. Hybrid Koopman C^* -formalism and the hybrid quantum–classical master equation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 56(37):374001, August 2023.
- [7] Andrea Carosso. Geometric Quantization. *SpringerBriefs in Mathematics*, pages 103–112, January 2018.
- [8] G. Darboux. Sur la représentation approchée des fonctions discontinues. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 81:849–853, 1875.
- [9] Paul A. M. Dirac. The Fundamental Equations of Quantum Mechanics. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 109(752):642–653, 1925.

- [10] François Gay-Balmaz and Cesare Tronci. Madelung transform and probability densities in hybrid quantum–classical dynamics. *Nonlinearity*, 33(10):5383, 2020.
- [11] François Gay-Balmaz and Cesare Tronci. Evolution of hybrid quantum–classical wavefunctions. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 440:133450, 2022.
- [12] Andrew M. Gleason. Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 6(6):885–893, 1957.
- [13] H. J. Groenwold and L. Van Hove. Non-existence of a quantum field theory for a given Classical field theory. *Physical Review*, 83:321, 1951.
- [14] Brian C. Hall. *Quantum Theory for Mathematicians*, volume 267 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2013.
- [15] B. O. Koopman. Hamiltonian Systems and Transformation in Hilbert Space. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 17(5):315–318, May 1931.
- [16] Bertram Kostant. Quantization and unitary representations. *Lecture Notes in Mathematics, Vol. 170, Springer, Berlin, 1970*, pages 87–208, 1970.
- [17] Marcello Porta. Lecture notes on mathematical quantum theory, 2024. Available at <https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/maphy/lehre/ws-2019-20/mqt>.
- [18] Paul Rosa Ruiz. Formalismo de Koopman para sistemas híbridos, 2023. Trabajo de Fin de Grado de Física, Dir: Jesús Clemente Gallardo, David Martínez Crespo, Available at <https://deposita.unizar.es/record/77069>.
- [19] Jean-Marie Souriau. *Structure des Systèmes Dynamiques*. Dunod, Paris, 1970. English translation: *Structure of Dynamical Systems. A Symplectic View of Physics*, Birkhäuser, 1997.
- [20] L. van Hove. *On certain unitary representations of an infinite group of transformations*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001.
- [21] John von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, 1955.
- [22] N. J. Woodhouse. *Geometric Quantization*. Oxford University Press, 2nd edition, 1992.

Algunas propiedades de geometría diferencial

A.1. Campos vectoriales

Definición A.1.1 (Espacio tangente). El espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ de una variedad \mathcal{M} sobre un punto $p \in \mathcal{M}$ es

$$T_p\mathcal{M} := \{[\gamma], \quad \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}, \quad \gamma(0) = p\},$$

donde $\epsilon > 0$ puede depender solo de γ y la relación de equivalencia en el conjunto de curvas sobre p está definida por

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad : \iff \quad (\psi \circ \gamma_1)'(0) = (\psi \circ \gamma_2)'(0)$$

para una (y cada) carta admisible (U, ψ) en $p \in U$.

Definición A.1.2 (Campo vectorial). Un campo vectorial X sobre una variedad diferenciable \mathcal{M} es una aplicación

$$p \in \mathcal{M} \mapsto X(p) \in T_p\mathcal{M},$$

que es suave en el sentido de que $\forall p \in \mathcal{M}$ y una (y cada) carta $(U, \psi = (x_1, \dots, x_n))$ en p

$$X|_U = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad v_i \in C^\infty(U). \quad (\text{A.1.1})$$

Definición A.1.3. El conjunto de campos vectoriales sobre \mathcal{M} lo denotamos por $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

El conjunto de campos vectoriales $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ es un módulo sobre el anillo $C^\infty(\mathcal{M})$ mediante la suma punto a punto y la multiplicación por escalares y vectores.

Definición A.1.4 (Derivación). Una aplicación \mathbb{R} -lineal $\delta : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ decimos que es una derivación del anillo $C^\infty(\mathcal{M})$ si para cualquier $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$,

$$\delta(f \cdot g) = \delta(f) \cdot g + f \cdot \delta(g).$$

Los campos vectoriales actúan como una derivación sobre el anillo $C^\infty(\mathcal{M})$ de la siguiente manera:

$$\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}) \quad (X, f) \mapsto X(f),$$

donde $X(f)(p) = df|_p(X(p))$, siendo d la diferencial exterior de la variedad M .

Además, un resultado muy interesante es que toda derivación sobre $C^\infty(\mathcal{M})$ corresponde a un campo vectorial

Proposición A.1.1. *Toda derivación δ de $C^\infty(\mathcal{M})$ es de la forma $\delta(f) = X(f)$ para algún $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$*

Definición A.1.5. El corchete de Lie, o conmutador, de dos campos vectoriales

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$$

está definido como

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ y $f \in C^\infty(\mathcal{M})$.

El corchete de Lie de dos campos vectoriales es un campo vectorial

Observación A.1.2. Dado dos campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ la existencia del campo vectorial $[X, Y]$ sigue de que el conmutador de dos derivaciones es una derivación, i.e. $[\delta_1, \delta_2] := \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1$ es una derivación (la prueba es seguir la definición A.1.4).

A.2. Tensor de Poisson

Definición A.2.1 (Tensor de Poisson). Dada una variedad simpléctica (\mathcal{M}, ω) , el tensor de Poisson \mathcal{J} es un campo tensorial antisimétrico de tipo $(2, 0)$ sobre \mathcal{M} :

$$\mathcal{J} : \Gamma(T^*\mathcal{M}) \times \Gamma(T^*\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}), \quad (\text{A.2.1})$$

de tal manera que $\forall f, g \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$:

$$\mathcal{J}(df, dg) = \{f, g\} = \omega(X_f, X_g). \quad (\text{A.2.2})$$

Localmente, dada una carta $(U, \psi = (q^i, p_i)_{i=1}^n)$ del atlas de Darboux, el tensor de Poisson toma la siguiente forma:

$$\mathcal{J} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (\text{A.2.3})$$

A.3. Curvas integrales

Definición A.3.1 (Curva integral). Una curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ es una *curva integral* de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ si $\alpha'(t) = X_{\alpha(t)}$ para todo $t \in I$.

Definición A.3.2 (Campo completo). Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ es *completo* si todas sus curvas integrales están definidas en todo \mathbb{R} .

Fibrados vectoriales y conexiones

En esta sección se pretende introducir las herramientas matemáticas empleadas en cuantización geométrica. En primer lugar, se hace un repaso general de la teoría de fibrados vectoriales y se define la noción de conexión de las mismas. Exponer el lenguaje matemático correspondiente a estas estructuras nos permitirá entender más fácilmente los fibrados de línea, que corresponden a un caso muy particular de fibrado vectorial. A continuación, nos centraremos en estos fibrados de línea y lo equiparemos de una estructura adicional, un producto hermitico compatible con la estructura de fibrado, lo que nos proporcionará los llamados fibrados de línea hermiticos. Este caso particular de fibrado es la estructura matemática en el cual se sustenta la cuantización geométrica, en concreto, para sistemas clásicos, tomaremos como base el espacio de fases (una variedad diferenciable de dimensión par) y lo dotaremos de fibras complejas unidimensionales.

Definición B.0.1 (\mathbb{K} -Fibrado vectorial). Un \mathbb{K} -Fibrado vectorial, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ de rango r sobre una variedad M es:

1. una variedad E con una aplicación diferenciable $\pi : E \rightarrow M$, tal que
2. la *fibra*

$$E_p := \pi^{-1}(\{p\}) \tag{B.0.1}$$

sobre cada punto $p \in M$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión r , y

3. cada punto $p \in M$ admite un entorno $U \subset M$ y un difeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{K}^r$ para el cual el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times \mathbb{K}^r \\
 \searrow \pi & & \swarrow pr_1 \\
 & U &
 \end{array}$$

conmuta y tal que para cada $q \in M$ el mapa

$$\Phi|_{E_q} : E_q \rightarrow \{q\} \times \mathbb{K}^r \quad (\text{B.0.2})$$

es lineal (por tanto, un isomorfismo lineal).

Más adelante veremos que la estructura que emplearemos para la cuantización geométrica será un \mathbb{C} -fibrado vectorial de rango 1, i.e. un una variedad cuyas fibras son el espacio complejo \mathbb{C} . Por tanto, a partir de ahora, salvo que se mencione lo contrario, consideraremos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, y diremos fibrado vectorial refiriéndonos a un \mathbb{C} -fibrado vectorial.

En cuanto a la notación, dado un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$, llamaremos

- E el *espacio total*, M la *base* y π la *proyección* del fibrado.
- Además, al difeomorfismo Φ definido en 3 de B.0.1 lo llamaremos una *trivialización local*.

Definición B.0.2 (Secciones). Una aplicación diferenciable $s : M \rightarrow E$ es una *sección* del fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$ si

$$\pi \circ s = id_M,$$

i.e., para cada $p \in M$

$$s(p) \in E_p.$$

Es decir, una sección es una función que a cada punto de la base M le hace corresponder un elemento de la fibra E . Al conjunto de secciones lo denotamos como

$$\Gamma(E) := \{ s : M \rightarrow E \mid s \text{ es una sección } \},$$

y su restricción fibrados definidos sobre $U \subset M$

$$\Gamma(E)|_U := \{ s : U \rightarrow E \mid s \text{ es una sección de } E|_U \}.$$

Observación B.0.1. El conjunto de secciones $\Gamma(E)$ de un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$ forma un (\mathbb{C} -) espacio vectorial y un \mathcal{C}^∞ -módulo bajo la suma y el producto punto a punto. Además, si $s \in \Gamma(E)$ y $s' \in \Gamma(E')$, entonces $s \oplus s' \in \Gamma(E \oplus E')$, $s \otimes s' \in \Gamma(E \otimes E')$ y $\bar{s} \in \Gamma(\bar{E})$.

En el contexto de fibrados vectoriales, nace un noción análoga a las bases de espacios vectoriales finitos que es la de *sistema local*.

Definición B.0.3 (Sistema local). Un *sistema local* de rango r de un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$ es una familia

$$s_1, \dots, s_r \in \Gamma(E)|_U$$

de secciones locales definidos sobre un subconjunto abierto $U \subset M$ que es linealmente independiente punto a punto.

Denotaremos un sistema local como $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r)$.

Hay una correspondencia canónica entre trivializaciones y sistemas locales:

Lema B.0.2. *Dado un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$ de rango r , hay una correspondencia 1 – 1 entre:*

- *sistemas locales $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r)$ con $s_1, \dots, s_r \in \Gamma(E)|_U$ y*
- *trivializaciones locales $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^r$*

dado por la asignación de una trivialización a cada sistema local \underline{s}

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^r, \quad \sum_i s_i(p)v_i \mapsto \left(p, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix} \right)$$

Demostración. Sea $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^r$ una trivialización local, entonces,

$$s_i(p) = \Phi^{-1}(p, e_i), \quad i = 1, \dots, r$$

define un sistema local.

Recíprocamente, dado un sistema local sobre $U \subset M$, la función definida por

$$\Phi^{-1} : U \times \mathbb{C}^r \rightarrow \pi^{-1}(U), \quad \left(p, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix} \right) \mapsto \sum_i s_i(p)v_i$$

es biyectivo, preserva la fibra y es lineal fibra a fibra. Su inversa Φ es un difeomorfismo y, por tanto, una trivialización local, porque Φ^{-1} es diferenciable y un difeomorfismo local. \square

La noción de sistema local nos permite equipar a un fibrado vectorial de lo que se denomina como *atlas de fibrado*, lo que nos permitirá obtener propiedades globales del fibrado a partir de herramientas locales (e.g. los sistemas locales).

Definición B.0.4 (Atlas de fibrado). Un *atlas de fibrado* para un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$ es una familia de trivializaciones locales $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ de E , (o, equivalentemente, de sistemas locales sobre U_α) tal que $M = \cup_\alpha U_\alpha$.

Los atlas de fibrado nos permitirán caracterizar las secciones por sistemas locales \underline{s}_α (en U_α) y funciones $C^\infty(U_\alpha, \mathbb{C}^r)$.

Observación B.0.3. Dado un atlas de fibrado para un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$, toda sección $\psi \in \Gamma(E)$ puede ser escrito localmente como

$$\psi|_U = \sum_i s_\alpha^i v_\alpha^i = \underline{s}_\alpha v_\alpha,$$

donde $\underline{s}_\alpha = (s_\alpha^1, \dots, s_\alpha^r)$ es un sistema local definido sobre U_α y

$$v_\alpha = \begin{pmatrix} v_\alpha^1 \\ v_\alpha^2 \\ \vdots \\ v_\alpha^r \end{pmatrix} \in C^\infty(U_\alpha, \mathbb{C}^r)$$

es una representación local de ψ . Es decir, para cada $p \in U_\alpha$ se tiene

$$\Phi_\alpha(\psi|_p) = (p, v_\alpha(p))$$

siendo Φ_α la trivialización local correspondiente a \underline{s}_α .

Antes de seguir, necesitamos imponer ciertas condiciones a las trivializaciones locales (o, equivalente, a los sistemas locales) para que estén bien definidos globalmente. Lo que haremos será pedir que en las intersecciones de los abiertos de un atlas, los sistemas locales transformen de una manera muy concreta: han de cumplir las *condiciones de cociclos*.

Dado un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$, y un atlas de fibrado $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_\alpha$, para cada dos trivializaciones Φ_α, Φ_β del atlas, el cambio de trivialización

$$\begin{array}{ccc} & \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) & \\ \Phi_\alpha|_{\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)} \swarrow & & \searrow \Phi_\beta|_{\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)} \\ (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^r & \xrightarrow{\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta|_{(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^r}} & (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^r \end{array}$$

preserva la fibra y es lineal *fiberwise*. Por tanto, $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta|_{(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^r}$ es de la forma

$$(p, v_\alpha) \mapsto (p, \underbrace{g_{\beta\alpha}(p)v_\alpha}_{v_\beta})$$

con

$$g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow Gl_r(\mathbb{C})$$

suaves.

Lema B.0.4. Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial de rango r con un atlas de fibrado y $g_{\alpha\beta}$ como arriba. Entonces, $v_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, \mathbb{C}^r)$ son representaciones locales de una sección $\psi \in \Gamma(E)$ si y solo si para todo α, β

$$v_\beta = g_{\beta\alpha} v_\alpha \quad \text{en } U_\alpha \cap U_\beta.$$

Recordemos que dos representaciones $v_\alpha, v_\beta \in C^\infty(U_\alpha, \mathbb{C}^r)$ de un vector en E_p con $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ no son más que los coeficientes respecto a las bases $\underline{s}_\alpha(p)$ y $\underline{s}_\beta(p)$, respectivamente.

Como ocurre en álgebra lineal, punto a punto, los coeficientes transforman acorde a la matriz de cambio de base, en este caso $g_{\beta\alpha}(p)$,

$$v_\beta = g_{\beta\alpha}(p) v_\alpha.$$

Por eso, los sistemas locales \underline{s}_α y \underline{s}_β están (punto a punto) relacionados por

$$\underline{s}_\alpha = \underline{s}_\beta \cdot g_{\beta\alpha} \quad \text{en } U_\alpha \cap U_\beta.$$

Definición B.0.5. Llamaremos a $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow Gl_r(\mathbb{C})$ *cambio de trivialización* o *cambio de sistema local*.

Los cambios de trivialización $g_{\beta\alpha} \in \Gamma(Mat(r \times r, \mathbb{C}))$ pueden verse como secciones en el fibrado vectorial de las matrices complejas $r \times r$, ya que, para cada punto de la base $U_\alpha \cap U_\beta$, nos proporciona la matriz de cambio de base entre $\underline{s}_\alpha(p)$ y $\underline{s}_\beta(p)$. Por tanto, han de cumplir lo que se denominan como *condiciones de cociclos*¹:

$$g_{\gamma\alpha} = g_{\gamma\beta} g_{\beta\alpha} \quad \text{en } U_\gamma \cap U_\beta \cap U_\alpha$$

y en particular

$$g_{\alpha\alpha} = id \quad \text{y} \quad g_{\gamma\alpha} = g_{\alpha\gamma}^{-1}$$

B.1. Conexiones

Hay diferentes maneras de definir una conexión ∇ sobre un fibrado vectorial. Lo podemos ver como un operador que dado un campo vectorial y una sección, te devuelve otra sección. También se puede entender un operador que dado una sección, te devuelve una 1-forma con valores sobre la fibra. Todas las definiciones son equivalentes, aquí daremos la que creo que es más ilustrativa y trasluce todas las propiedades que tiene la misma.

Definición B.1.1 (p -forma sobre un fibrado). Una p -forma de fibrado con valores sobre el fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$ es un mapa

$$\alpha : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_p \rightarrow \Gamma(E)$$

¹Traducción directa de lo que se denomina como *cocycle conditions* en inglés.

$$\alpha(X, Y, Z, \dots) \mapsto (\alpha(X, Y, Z, \dots)) : M \rightarrow E$$

tal que es lineal en cada entrada y es anti-simétrico bajo permutaciones en las entradas.

Al conjunto de p -formas sobre el fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$, lo denotaremos como $\Lambda^p(M, E)$.

Definición B.1.2 (Conexión sobre un fibrado). Una conexión ∇ sobre un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$ es un operador

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

que es

- tensorial (i.e., $C^\infty(M, \mathbb{C})$ -lineal) en la primera entrada, i.e.

$$\nabla_{fX}\psi = f\nabla_X\psi,$$

- y satisface la regla de Leibniz en la segunda entrada, i.e.,

$$\nabla_X(\psi f) = (\nabla_X\psi)f + \psi \cdot X(f)$$

para $\psi \in \Gamma(E)$ y $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$.

Por completitud, mencionar que dado una sección $s \in \Gamma(E)$, $\nabla s := \nabla(\cdot, s) \in \Lambda^1(M, E)$ es una 1-forma con valores en la fibra E (a cada campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, le asigna una sección $\nabla_X s$).

Además, el espacio de conexión de un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$ es un espacio afín con el espacio vectorial subyacente

$$\Lambda^1(M, \text{End}(E)) \cong \Gamma(T^*M \otimes \text{End}(E)),$$

i.e.

- si ∇^1 y ∇^2 son dos conexiones sobre E , entonces,

$$\eta := \nabla^2 - \nabla^1 \in \Lambda^1(M, \text{End}(E))$$

y

- recíprocamente, si ∇^1 es una conexión sobre E y $-\eta \in \Lambda^1(M, \text{End}(E))$, entonces

$$\nabla^2 := \nabla^1 + \eta$$

es otra conexión.

Dado el fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$ de rango r y el atlas de fibrado $(U_\alpha, \underline{s}_\alpha)_{\alpha \in I}$. Se puede definir el concepto de conexión localmente sobre un abierto $U_\alpha \subset M$.

Definición B.1.3 (1-forma de conexión). Una 1-forma de conexión de una conexión ∇ sobre E con respecto al sistema local \underline{s} en U_α es una 1-forma con valores en las matrices $r \times r$

$$\Theta_\alpha \in \Lambda^1(U_\alpha, \text{Mat}(r \times r, \mathbb{C}))$$

sobre U_α definido como

$$\nabla_{\underline{s}_\alpha} = \underline{s}_\alpha \cdot \Theta_\alpha.$$

Escribiendo el sistema local como

$$\underline{s}_\alpha = (s_1^\alpha, \dots, s_r^\alpha), \quad (\text{B.1.1})$$

donde $s_i \in \Gamma|_U(E)$, esta fórmula tiene la forma

$$\nabla s_j^\alpha = \sum_{i=1}^r s_i^\alpha \cdot \Theta_{ij} \in \Lambda^1(U, E), \quad (\text{B.1.2})$$

donde $\Theta_{ij}^\alpha \in \Lambda^1(U, \mathbb{C})$ son los coeficientes de la forma de conexión Θ_α .

Se puede interpretar la forma de conexión Θ_α de una conexión ∇ respecto a un sistema local \underline{s} como la diferencia a la conexión trivial respecto a una trivialización. Más concretamente, bajo una trivialización Φ_α , la conexión ∇ se mapea a una conexión

$$d + \Theta_\alpha$$

en el fibrado trivial $U_\alpha \times \mathbb{C}^r$.

La 1-forma de conexión será importante en cuantización geométrica, ya que, será el encargado de que la estructura simpléctica de la variedad diferenciable correspondiente al espacio de fases se acople correctamente con el fibrado con el que dotaremos.

B.2. Estructura Hermítica

Una *estructura hermítica* sobre un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$ es un producto interno hermítico (\cdot, \cdot) en las fibras que es suave en el sentido de $E \rightarrow \mathbb{C} : v \mapsto (v, v)$ es una función diferenciable. Se dice que es *compatible* con la conexión ∇ si para par de secciones $s, s' \in \Gamma(E)$ y todo campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$X(s, s') \triangleq d(s, s')(X) = (\nabla_X s, s') + (s, \nabla_X s').$$

Un fibrado vectorial dotado de una estructura hermítica, lo llamaremos, naturalmente, fibrado vectorial hermítico.

B.3. Curvatura de una conexión

Definición B.3.1 (Curvatura). Sea ∇ la conexión de un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$. La curvatura R^∇ de ∇ es

$$R^\nabla(X, Y)\psi = \nabla_X \nabla_Y \psi - \nabla_Y \nabla_X \psi - \nabla_{[X, Y]}\psi,$$

donde $\psi \in \Gamma(E)$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Equivalentemente, $R^\nabla(X, Y)$ es el operador (\mathbb{C} -)lineal sobre $\Gamma(E)$ dado por

$$R^\nabla(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}.$$

La curvatura R^∇ es un campo tensorial sobre M y por tanto, es C^∞ -lineal en todas sus entradas.

Corolario B.3.1. *El tensor de curvatura R^∇ es una 2-forma alternada con valores en el fibrado de endomorfismos sobre E , i.e.*

$$R^\nabla \in \Lambda^2(M, \text{End}(E)) := \Gamma(\Lambda^2(T^*M) \otimes \text{End}(E)) \subset \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E^* \otimes E),$$

donde $\Lambda^2(T^*M) \subset T^*M \otimes T^*M$ denota al fibrado de campos tensoriales $(0, 2)$ alternados.

Veamos cómo podemos tratar la curvatura de una conexión localmente (i.e., dada una trivialización o sistema local). Recordemos que una conexión ∇ sobre un fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ respecto a un sistema local \underline{s} en $U \subset M$ está dado por

$$\nabla_{\underline{s}} = \underline{s} \cdot \Theta \tag{B.3.1}$$

donde $\Theta \in \Lambda^1(U, \text{Gl}(r, \mathbb{C}))$ es la forma de conexión.

Análogamente, la curvatura viene descrita localmente por

$$R^\nabla_{\underline{s}} = \underline{s} \cdot \omega \tag{B.3.2}$$

en términos de una 2-forma $\omega \in \Lambda^2(U, \text{Gl}(r, \mathbb{C}))$ evaluada sobre matrices.

Definición B.3.2 (Forma de curvatura). $\omega \in \Lambda^2(U, \text{Mat}(r \times r, \mathbb{C}))$ se denomina *forma de curvatura* de ∇ respecto al sistema local \underline{s} .

Lema B.3.2. *La forma de curvatura respecto al sistema local \underline{s} viene dado por*

$$\omega = d\Theta + \Theta \wedge \Theta. \tag{B.3.3}$$

Demostración. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} R^\nabla(X, Y)\underline{s} &= \nabla_X \nabla_Y \underline{s} - \nabla_Y \nabla_X \underline{s} - \nabla_{[X, Y]}\underline{s} \\ &= \underline{s}(\theta(X)\theta(Y) - \theta(Y)\theta(X) - \underbrace{(X(\theta(Y)) + Y(\theta(X)) + \theta([X, Y]))}_{d\theta(X, Y)}) = \\ &= \underline{s}(d\theta + \theta \wedge \theta)(X, Y). \end{aligned}$$

□

Mencionar que, para el caso en el que el fibrado vectorial tenga rango 1, como sucederá a partir de ahora, Θ toma valores en el espacio conmutativo $End(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$, lo que produce que $\Theta \wedge \Theta = 0$ haciendo que $\omega = d\Theta$.

Lo último que veremos para fibrados vectoriales generales es la forma en que transforman las formas de conexión y de curvatura tras cambios de trivialización. Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial con un atlas de fibrado $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_\alpha$ con los sistemas locales \underline{s}_α correspondientes. Sean $\underline{s}, \underline{s}'$ dos sistemas locales y g el cociclo correspondiente al cambio de sistema, i.e.

$$\underline{s}' = g \cdot \underline{s}. \quad (\text{B.3.4})$$

Entonces, las formas de conexión y de curvaturas de ambas trivializaciones están relacionadas de la siguiente manera

$$\Theta' = g^{-1}\Theta g + g^{-1}dg, \quad (\text{B.3.5})$$

$$\omega' = g^{-1}\omega g. \quad (\text{B.3.6})$$

Nótese que la forma de curvatura tiene carácter tensorial a diferencia de la forma de conexión.

B.4. Fibrados de línea y conexiones

Un fibrado de línea es un caso particular de fibrado vectorial, en concreto, es un fibrado vectorial complejo unidimensional. Todas las nociones estudiadas para fibrados vectoriales son fácilmente aplicables a fibrados de línea. El hecho de que la fibra sea unidimensional, hace que la forma de conexión tome valores en \mathbb{C} que es conmutativo; esto nos permitirá simplificar ciertos cálculos más adelante. A continuación, repasaremos brevemente la noción de sección y de conexión para fibrados de línea como un caso particular de lo visto anteriormente, no nos detendremos mucho en esto.

Definición B.4.1 (Fibrado de línea complejo hermítico). Un *fibrado de línea complejo hermítico* es un fibrado vectorial (complejo) $L \xrightarrow{\pi} M$ de rango 1 con conexión ∇ dotado de una estructura hermítica (i.e. un producto interno hermítico (\cdot, \cdot) compatible con ∇).

En este espacio, una trivialización local (U, Φ) está determinada por la denominada *sección del vacío* $u = \Phi(\cdot, e^{i\phi}) \in \Gamma(L)$, con $\Phi \in \mathbb{R}$ que es un elemento no nulo. Esto simplifica mucho el tratamiento, ya que, permite caracterizar localmente cualquier sección del fibrado de línea con una función compleja suave $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$.

En fibrados de línea $L \xrightarrow{\pi} M$, una conexión ∇ y una sistema local \underline{s} , las expresiones de las formas de conexión y de curvatura se simplifican con el hecho de que el fibrado tiene rango 1. La 1-forma de curvatura $\Theta \in \Lambda^1(M, End(1 \times 1, \mathbb{C})) \cong \Lambda^1(M, \mathbb{C})$, es decir, la forma de curvatura una 1-forma puro, en el sentido, que es una forma diferencial. Además, la 2-forma de curvatura $\omega = d\Theta$ viene dado por la diferencial exterior aplicado a la forma de conexión (el término del producto exterior de la Ecuación (B.3.3) se anula por la conmutatividad de \mathbb{C} ya mencionada)

Algunas cuestiones de análisis funcional

En esta sección se pretende introducir las nociones de análisis funcional necesarias para trabajar en el marco de la física cuántica.

C.1. Espacios de Hilbert

Sea \mathcal{H} un espacio vectorial sobre \mathbb{C} . Un mapa $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ es llamado producto escalar sobre \mathcal{H} si:

1. Es lineal en la segunda variable,
2. es hermítico-simétrico, i.e. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3. es definido positivo, i.e. $\langle \psi, \psi \rangle \geq 0$, para todo $\psi \in \mathcal{H}$, con $\langle \psi, \psi \rangle = 0$ si, y solo si, $\psi = 0$.

Definición C.1.1. El espacio vectorial \mathcal{H} equipado con el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ lo llamamos espacio de Hilbert si es completo.

Definición C.1.2. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Una secuencia $(\phi_n)_{n \in I} \subset \mathcal{H}$ es llamado una secuencia ortogonal si $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{i,j}$.

Definición C.1.3. Una secuencia ortogonal $(\phi_n)_{n \in I} \subset \mathcal{H}$ es una base ortonormal si para todo $\psi \in \mathcal{H}$,

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \phi_i, \psi \rangle \phi_i \quad (\text{C.1.1})$$

Definición C.1.4. Un **espacio vectorial topológico** V es un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} (donde \mathbb{K} suele ser \mathbb{R} o \mathbb{C}) que está dotado de una topología tal que las siguientes operaciones

son continuas:

1. **Adición:** La función $+$: $V \times V \rightarrow V$ definida por $(x, y) \mapsto x + y$ es continua con respecto a la topología producto en $V \times V$.

2. **Multiplicación escalar:** La función \cdot : $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ definida por $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ es continua con respecto a la topología producto en $\mathbb{K} \times V$.

Definición C.1.5. Un espacio topológico se dice que es separable si contiene un subconjunto denso numerable.

Proposición C.1.1. *Un espacio de Hilbert es separable si, y solo si, contiene una base ortonormal.*

Demostración. Dada una base ortonormal $(\phi_n)_{n \in I} \subset \mathcal{H}$, el conjunto

$$\text{span}_{\mathbb{P}+i\mathbb{P}}\{\phi_n | n \in \mathbb{N}\} := \left\{ \sum_{j=1}^N (a_j + ib_j)\phi_j \mid N \in \mathbb{N}, a_j, b_j \in \mathbb{P} \right\}$$

es un subconjunto denso de \mathcal{H} y es contable. La otra dirección se puede probar usando el método de Gram-Schmidt. \square

C.2. Operadores no acotados

Teorema C.2.1 (Teorema de Riesz). *Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{H}'$. Entonces, existe un único $\psi_T \in \mathcal{H}$ tal que:*

$$T(\phi) = \langle \psi_T, \phi \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall \phi \in \mathcal{H}. \quad (\text{C.2.1})$$

Demostración. Véase teorema 4,1 de [17]. \square

Definición C.2.1. Sean X, Y dos espacios normados¹. Un operador $L : X \rightarrow Y$ entre X e Y se dice que es acotado si existe un $C < \infty$ tal que:

$$\|Lx\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X. \quad (\text{C.2.2})$$

Proposición C.2.2. *Sean X, Y dos espacios normados. Sea $\mathcal{B}(X, Y)$ el conjunto de operadores lineales acotados de X a Y . Sea:*

$$\|L\|_{\mathcal{B}(X, Y)} := \sup \|x\|_X = 1 \|Lx\|_Y. \quad (\text{C.2.3})$$

¹Un espacio de Hilbert es un espacio normado definiendo la norma $\|\cdot\| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Entonces, $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(X,Y)}$ define una norma sobre $\mathcal{B}(X,Y)$. Además, si Y es completo entonces, $\mathcal{B}(X,Y)$ es también completo, por tanto, es un espacio de Banach.

Demostración. Véase proposición 3,63 de [17]. □

Teorema C.2.3. Sean X, Y dos espacios normados. sea $L : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. L es continuo en 0,
2. L es continuo,
3. L es acotado.

Demostración. Véase teorema 3,68 de [17]. □

Es decir, si un operador lineal es continuo, entonces también es acotado.

Teorema C.2.4 (Extensión de operadores lineales acotados densamente definidos). Sea $Z \subset X$ un subespacio denso de un espacio normado X y sea Y un espacio de Banach². Sea $L : Z \rightarrow Y$ lineal y acotado³. Entonces, L admite una única extensión lineal y acotada $\tilde{L} \in \mathcal{B}(X, Y)$ con $\tilde{L}|_Z = L$ y

$$\|\tilde{L}\|_{\mathcal{B}(X,Y)} = \|L\|_{\mathcal{B}(Z,Y)} \quad (\text{C.2.4})$$

Demostración. Véase teorema 3,66 de [17]. □

Definición C.2.2. Un operador no acotado⁴ A sobre \mathcal{H} es una aplicación lineal de un subespacio denso $\text{Dom}(A) \subset \mathcal{H}$ a \mathcal{H} .

Proposición C.2.5. Tómesese la aplicación:

$$J : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}', \quad \psi \mapsto J\psi := \langle \psi, \cdot \rangle. \quad (\text{C.2.5})$$

J es una aplicación lineal. Además, J es una isometría:

$$\|J\psi\|_{\mathcal{H}'} = \|\psi\|_{\mathcal{H}}. \quad (\text{C.2.6})$$

²Un espacio de Hilbert es un espacio de Banach porque es normado y completo.

³Luego también continuo.

⁴Tomando $\text{Dom}(A) = \mathcal{H}$, el operador estará acotado. Es un abuso de notación común en la literatura.

Definición C.2.3. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (operador acotado). Se define el operador adjunto $A^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definido como:

$$A^* = J^{-1}AJ. \quad (\text{C.2.7})$$

Proposición C.2.6. Para $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, se tiene

$$\langle \phi, A\psi \rangle = \langle A^*\phi, \psi \rangle, \quad \forall \psi, \phi \in \mathcal{H}. \quad (\text{C.2.8})$$

Esta relación define unívocamente A^* .

Demostración. Véase proposición 4,5 de [17]. □

Definición C.2.4. Un operador acotado $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es autoadjunto si $A^* = A$

Hasta aquí, hemos visto cómo se define el operador adjunto de un operador acotado. Sin embargo, nuestros observables serán, en general, no acotados, por lo que necesitamos una noción hermiticidad y autoadjuntez para operadores no acotados.

Definición C.2.5 (Operador no acotado). Un operador no acotado es un par $(A, D(A))$ de un subespacio $D(A) \subset \mathcal{H}$ junto a un operador lineal $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$. Si $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$, decimos que el operador está densamente definido.

Definición C.2.6. Un operador no acotado $(A, D(A))$ es simétrico si para todo $\psi, \phi \in D(A)$, se tiene que

$$\langle \psi, A\phi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle A\psi, \phi \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (\text{C.2.9})$$

Definición C.2.7 (Operador adjunto). Sea A un operador densamente definido sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Entonces, el dominio $D(A^*)$ del operador adjunto A^* está definido como:

$$D(A^*) := \{\psi \in \mathcal{H} \mid \exists \eta \in \mathcal{H}, \text{ t.q. } \langle \psi, A\phi \rangle = \langle \eta, \phi \rangle, \forall \phi \in D(A)\}. \quad (\text{C.2.10})$$

Como $D(A)$ está densamente definido, η está unívocamente definido y definimos, para todo $\psi \in D(A^*)$:

$$A^* : D(A^*) \rightarrow \mathcal{H}, \quad \phi \mapsto A^*\phi := \eta. \quad (\text{C.2.11})$$

Observación C.2.7. Por el teorema C.2.1, la definición del dominio $D(A^*)$ anterior es equivalente a

$$D(A^*) := \{\psi \in \mathcal{H} \mid \phi \mapsto \langle \psi, A\phi \rangle, \text{ es continuo en } D(A)\}. \quad (\text{C.2.12})$$

Proposición C.2.8. El operador $(A^*, D(A^*))$ es lineal (no necesariamente densamente definido), y:

$$\langle \phi, A\psi \rangle = \langle A^*\phi, \psi \rangle \quad \forall \phi \in D(A^*), \psi \in D(A). \quad (\text{C.2.13})$$

Demostración. Inmediato a partir de la definición C.2.7. □

Definición C.2.8 (Operador autoadjunto). Sea $(A, D(A))$ un operador lineal densamente definido. Si $D(A^*) = D(A)$ y $A^* = A$ se cumple en $D(A)$, entonces, decimos que el operador $(A, D(A))$ es autoadjunto.

Definición C.2.9 (Resolvente, conjunto resolvente y espectro). Sea $(T, D(T))$ un operador lineal sobre \mathcal{H} . Definimos el conjunto resolvente de T como:

$$\rho(T) := \{z \in \mathbb{C} \mid (T - z) : D(T) \rightarrow \mathcal{H} \text{ es una biyección y tiene inversa continua.}\}. \quad (\text{C.2.14})$$

Para $z \in \rho(T)$ definimos el resolvente de T en z como:

$$R_z(T) := (T - z)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \quad (\text{C.2.15})$$

El espectro de T se define como el complemento del conjunto resolvente:

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T). \quad (\text{C.2.16})$$

Observación C.2.9. Un operador simétrico T es autoadjunto si, y solo si, $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Demostración. Véase Remark 5,11 de [17]. □

Algunos aspectos algebraicos

Definición D.0.1 (Álgebra). Sea $(V_{\mathbb{K}}, +)$ un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{K} . Un \mathbb{K} -álgebra es una terna $\mathcal{A} = (V_{\mathbb{K}}, +, \phi)$ donde ϕ es una operación bilineal

$$\phi : V \times V \rightarrow V,$$

es la operación ϕ la que determina el tipo de álgebra: conmutativa, asociativa, Lie, etc.

Se dice que un álgebra \mathcal{A} es un **álgebra con unidad (álgebra unital)** si ella tiene unidad, es decir, existe un elemento $1 \in \mathcal{A} (1 \neq 0)$ tal que $\phi(x, 1) = \phi(1, x) = x \quad (x \in \mathcal{A})$.

Definición D.0.2 (Ideal de un álgebra). Sea \mathcal{A} un álgebra, el subconjunto $J \subset \mathcal{A}$ es un **ideal por la izquierda (por la derecha)** de \mathcal{A} si $x \in \mathcal{A}$ y $y \in J \Rightarrow \phi(x, y) \in J$ ($\phi(y, x) \in J$). Si J es ideal por la izquierda y por la derecha diremos que es un **ideal**. Se dice que un ideal J es **propio** si $J \neq \mathcal{A}$. Un ideal propio que no está contenido en ningún otro ideal propio se denomina **ideal maximal**.

Definición D.0.3 (Centro de un álgebra). Sea \mathcal{A} un álgebra, el conjunto

$$Z(\mathcal{A}) = \{c \in \mathcal{A} \mid \phi(c, a) = \phi(a, c), \forall a \in \mathcal{A}\},$$

se denomina **centro** del álgebra \mathcal{A} .

Definición D.0.4 (Derivación de un álgebra). Sea $(V_{\mathbb{K}}, +, \phi)$ un álgebra. Llamamos *derivación de un álgebra* a cualquier aplicación lineal

$$D : (V_{\mathbb{K}}, +, \phi) \rightarrow (V_{\mathbb{K}}, +, \phi),$$

que satisface la regla de Leibniz, i.e.

$$D(\phi(a, b)) = \phi(D(a), b) + \phi(a, D(b)) \quad \forall a, b \in V_{\mathbb{K}}.$$

Definición D.0.5. Un **álgebra de Jordan** J es un espacio vectorial real dotado de una operación \circ y una operación \cdot asociativa que satisface que $\forall a, b \in J$:

- \circ es conmutativo: $a \circ b = b \circ a$
- $a \circ (b \circ a^2) = (a \circ b) \circ a^2$ donde $a^2 := a \cdot a$

Definición D.0.6 (Álgebra de Lie). Un *álgebra de Lie* sobre un cuerpo \mathbb{K} es un espacio vectorial \mathfrak{g} equipado con una operación binaria $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, llamada *corchete de Lie*, que satisface las siguientes propiedades:

1. **Bilinealidad:** Para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$[x + \alpha y, z] = [x, z] + \alpha[y, z] \quad \text{y} \quad [z, x + \alpha y] = [z, x] + \alpha[z, y]$$

2. **Antisimetría:** Para todo $x, y \in \mathfrak{g}$:

$$[x, y] = -[y, x]$$

3. **Identidad de Jacobi:** Para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

Definición D.0.7 (Morfismo de álgebras de Lie). Sea $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$ y $(\mathfrak{h}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{h}})$ dos álgebras de Lie sobre un cuerpo \mathbb{K} . Un *morfismo de álgebras de Lie* es una aplicación lineal $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. **Linealidad:** Para todos $x, y \in \mathfrak{g}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha\phi(x) + \beta\phi(y)$$

2. **Preservación del corchete de Lie:** Para todos $x, y \in \mathfrak{g}$:

$$\phi([x, y]_{\mathfrak{g}}) = [\phi(x), \phi(y)]_{\mathfrak{h}}$$

Definición D.0.8 (Álgebra de Poisson). Un **álgebra de Poisson** es un espacio vectorial $(V_{\mathbb{K}}, +)$ sobre el cuerpo \mathbb{K} dotada de dos productos bilineales, \cdot y $\{\cdot, \cdot\}$, que tienen las siguientes propiedades:

- El producto \cdot forma una \mathbb{K} -álgebra asociativa.
- El producto $\{\cdot, \cdot\}$, el corchete de Poisson, forma un álgebra de Lie.

- El corchete de Poisson actúa como una derivación del producto asociativo \cdot . De forma que para tres elementos x, y, z en el álgebra, se tiene que $\{x, y \cdot z\} = \{x, y\} \cdot z + y \cdot \{x, z\}$.

Definición D.0.9. Un **álgebra de Lie-Jordan** es un espacio lineal X dotado de dos aplicaciones \circ y $[\cdot, \cdot]$ tal que:

- (X, \circ) es un álgebra de Jordan
- $(X, [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Lie
- $\forall x \in X, [x, \cdot] : X \rightarrow X$ es una derivación del álgebra de Jordan, i.e.

$$[x, y \circ z] = [x, y] \circ z + y \circ [x, z] \quad \forall y, z \in X.$$

- Además, ambas estructuras no son asociativas, pero sus correspondientes asociadores son proporcionales, i.e., $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ que satisface que $\forall a, b, c \in \mathcal{A}^R$,

$$a \circ (b \circ c) - (a \circ b) \circ c = \lambda([a, [b, c]] - [[a, b], c]).$$

Definición D.0.10. Un **espacio de Banach** es un espacio vectorial normado y completo con la métrica definida por su norma

Definición D.0.11. Se dice que \mathcal{A} es un **álgebra de Banach** si en \mathcal{A} está definida una norma para el cual \mathcal{A} es un espacio de Banach y, además,

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

Definición D.0.12. Un álgebra de Lie-Jordan X que es un espacio de Banach se llama **álgebra de Lie-Jordan-Banach (LJB)**

Los LJB álgebras son cruciales ya que son los objetos que capturarán los operadores físicamente más relevantes cuando describamos un sistema físico por una C^* -álgebra. Presentemos la noción de C^* -álgebra.

Definición D.0.13 ($*$ -álgebra). Un álgebra \mathcal{A} se denomina **$*$ -álgebra** si en \mathcal{A} está definida una aplicación $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ que satisface las siguientes condiciones ($\forall x, y \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}$):

- $(x^*)^* = x$,
- $(x + y)^* = x^* + y^*$,

- $(xy)^* = x^*y^*$,
- $(x)^* = \bar{\lambda}x^*$.

La aplicación $*$ se denomina **involución**. Si $x^* = x$, entonces se dice que el elemento x de la $*$ -álgebra es **hermítico**.

Definición D.0.14 (C^* -álgebra). Un álgebra de Banach que es una $*$ -álgebra se denomina C^* -álgebra si para todo elemento x de la misma se cumple la igualdad $\|x^*x\| = \|x\|^2$.

Proposición D.0.1. *El álgebra de Banach $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de todos los operadores lineales acotados que actúan en un espacio de Hilbert \mathcal{H} con la operación de paso al operador adjunto como involución es una C^* -álgebra.*

A continuación, vemos que el conjunto de observables de una C^* -álgebra (es decir, los elementos hermíticos del álgebra) tendrá una estructura de álgebra de Lie-Jordan-Banach.

Teorema D.0.2. *Sea \mathcal{A} una C^* -álgebra con la involución $*$ y la norma $\|\cdot\|$. Consideremos el subconjunto de elementos autoadjuntos reales*

$$\mathcal{A}^R = \{x \in \mathcal{A} \mid a^* = a\},$$

y definamos sobre este las siguientes operaciones:

$$a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba) \quad [a, b] = \frac{-i}{\kappa}(ab - ba).$$

Entonces, $(\mathcal{A}^R, \circ, [\cdot, \cdot], \|\cdot\|)$ es un álgebra de Lie-Jordan-Banach.

Por otro lado, dado un álgebra de LJB, podemos considerar su complexificación y definir una C^* -álgebra que tenga al álgebra original como subálgebra hermítica.

Teorema D.0.3. *Dado un álgebra LJB \mathcal{A}^R , si consideramos su complexificación como un espacio lineal \mathcal{A}^C , y la operación:*

$$a \cdot_{\kappa} b = a \circ b + i\kappa[a, b],$$

el conjunto $(\mathcal{A}^C, \cdot_{\kappa}, \|\cdot\|)$ se vuelve una C^* -álgebra para todo valor de $\kappa \in \mathbb{R}$.

A continuación, se enunciará el Teorema de Gelfand-Naimark el cual emplea la construcción de Gelfand-Naimark-Segal (GNS) para su demostración. Antes de eso, necesitamos definir ciertos conceptos.

Dada una C^* -álgebra \mathcal{A} , definiremos los estados del mismo, para ello, recurriremos al dual de la C^* -álgebra \mathcal{A}^* . Antes, definimos una norma en \mathcal{A}^* empleando la norma definida sobre \mathcal{A} ,

$$\|\omega\| = \sup\{|\omega(a)|, \|a\| = 1\}.$$

Esto nos permite introducir la noción de positividad que emplearemos en la definición de los estados. Dado $\omega \in \mathcal{A}^*$ decimos que es definido positivo si

$$\omega(a^*a) \geq 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Definición D.0.15 (Estado). Un **estado** de una C^* -álgebra se define como un funcional lineal definido positivo sobre \mathcal{A} con norma igual a uno.

Definición D.0.16 (Representación). Se denomina **representación** de una C^* -álgebra \mathcal{A} a un par (π, \mathcal{H}) , donde $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un morfismo y \mathcal{H} un espacio de Hilbert.

Se dice que la representación es **cíclica** si existe un vector $\Omega \in \mathcal{H}$ para el cual la variedad lineal $\pi(\mathcal{A})\Omega$ es densa en \mathcal{H} ; en ese caso, Ω se denomina **vector cíclico**. Una representación π es **no degenerada** si $\{\pi(x)a \mid x \in \mathcal{A}; a \in \mathcal{H}\}$ es denso en \mathcal{H} . En particular, una representación cíclica es no degenerada.

Teorema D.0.4 (Teorema de Gelfand-Naimark). *Sea \mathcal{A} una C^* -álgebra, entonces, \mathcal{A} es isométricamente $*$ -isomorfa a una C^* -subálgebra del álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de todos los operadores lineales acotados en cierto espacio de Hilbert \mathcal{H} .*

Proposición D.0.5. *Toda representación π no degenerada es suma directa de representaciones cíclicas*

Dada la C^* -álgebra \mathcal{A} , denotando como $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ el conjunto de estados de \mathcal{A} , la **construcción Gelfand-Naimark-Segal (GNS)** consiste en lo siguiente:

1. Dado $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, definimos la forma sesquilineal $(\cdot, \cdot)_0^\omega$ en \mathcal{A} como

$$(A, B)_0^\omega := \omega(A^*B).$$

Como ω es un estado, esta forma es semidefinida positiva. Su espacio nulo

$$\mathcal{N}_\omega = \{A \in \mathcal{A} \mid \omega(A^*A) = 0\}$$

es un ideal por izquierda en \mathcal{A} .

2. La forma $(\cdot, \cdot)_0^\omega$ se proyecta sobre el producto interno $(\cdot, \cdot)_\omega$ en el cociente $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$. Si $V_\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ es la proyección canónica, entonces, por definición

$$(V_\omega A, V_\omega B)_\omega := (A, B)_0^\omega.$$

El espacio de Hilbert \mathcal{H}_ω es la clausura de $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega \subset \mathcal{H}_\omega$ por

$$\pi_\omega(A)V_\omega B := V_\omega AB;$$

se sigue que π_ω es continuo. Por tanto, $\pi_\omega(A)$ puede extenderse por continuidad a todo \mathcal{H}_ω .

3. El vector cíclico se define como $\Omega_\omega = V_\omega \mathbb{I}$, por tanto,

$$(\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega) = \omega(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

C^* -álgebra clásica y cuántica

En este capítulo, se hará una descripción más rigurosa de las C^* -álgebras de los sistemas clásicos y cuánticos y su extensión a sistemas híbridos.

E.1. C^* -álgebra clásica

Un sistema clásico tiene definido un espacio de fases \mathcal{M}_C que tendrá estructura de variedad diferenciable, donde cada punto de la variedad corresponde a un *estado* del sistema; por otro lado, los observables serán funciones complejas de clase $C^\infty(\mathcal{M}_C)$ definidas sobre la variedad. De esta manera, para definir la C^* -álgebra correspondiente a un sistema clásico, por simplicidad, se toma el conjunto de funciones complejas de soporte compacto definidos sobre \mathcal{M}_C , $C_C(\mathcal{M}_C) = \{f : K \subset \mathcal{M}_C \rightarrow \mathbb{C} \mid K \text{ compacto}\}$. Para dotar al conjunto de estructura de C^* -álgebra buscamos dotarlo de una estructura de álgebra de Lie-Jordan-Banach, y, a continuación, hacer su complexificación para obtener la C^* -álgebra clásica. Para ello, emplearemos:

- el álgebra con el producto punto a punto \cdot_C
- la conjugación compleja como involución $f^*(x) = \overline{f(x)}$,
- la norma del supremo $\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathcal{M}_C\}$.

Por un lado, es inmediato comprobar que el conjunto $\mathcal{A}_C = C_C(\mathcal{M}_C, \mathbb{C})$ tiene estructura de álgebra de Banach y este conjunto contendrá los observables (acotados) físicos del sistema clásico¹. Por otro lado, la estructura de álgebra de Jordan se la dotamos considerando el producto punto a punto como el producto de Jordan y, como el álgebra \mathcal{A}_C es conmutativo, considerando un producto de Lie que se anula. Este álgebra se puede obtener como un límite de la estructura formal donde el producto punto a punto hace el papel de producto de Jordan y la estructura de Lie viene dado por

¹La condición de compacidad no introduce limitaciones físicas.

el corchete de Poisson sobre $C_C^\infty(\mathcal{M}_C)$ que es un subconjunto denso de $C_C(\mathcal{M}_C)$.

Para ver que nuestro álgebra \mathcal{A}_C con las anteriores estructuras es un álgebra de Lie-Jordan-Banach, necesitamos revisar si se cumplen las condiciones de compatibilidad (ver Definición D.0.9):

- La estructura de Lie define una derivación de la estructura de Jordan que se satisface por ser un álgebra de Poisson
- La proporcionalidad de los asociadores no se cumple ya que el producto de Jordan es asociativo pero el álgebra de Poisson no lo es². Sin embargo, tomando el corchete de Poisson canónico sobre el espacio de fases simpléctico \mathcal{M}_C podemos definir una familia de álgebras de Lie de la forma

$$\{a, b\}_\lambda := -i\lambda\{a, b\},$$

que define un corchete de Poisson trivial en el límite $\lambda \rightarrow 0$.

Por tanto, la familia de álgebras $(C_C(\mathcal{M}), \cdot_C, \{\cdot, \cdot\}_\lambda)$ define una LJB trivial en el límite $\lambda \rightarrow 0$; denotemos este LJB como \mathcal{A}^R . Empleando el Teorema D.0.3 podemos obtener la C^* -álgebra cuyo producto vendrá dado por:

$$a \cdot_C b = a \circ b + \lambda\{a, b\} \quad \text{con} \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (\text{E.1.1})$$

E.2. C^* -álgebra cuántica

Consideremos, por simplicidad, el álgebra de operadores acotados $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} respecto a la composición, el adjunto hermítico como involución $A^* = A^\dagger$ y la norma del operador A :

$$\|A\| = \sup\{\|A\phi\|, \quad \phi \in \mathcal{H}, \|\phi\| = 1\}. \quad (\text{E.2.1})$$

Por la Proposición D.0.1, $\mathcal{A}_Q = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una C^* -álgebra. Este C^* -álgebra contiene el conjunto de observables, que corresponden al subconjunto de operadores autoadjuntos:

$$L = \{A \in \mathcal{A}_Q \mid A^\dagger = A\}.$$

Podemos dotar al conjunto L de una estructura de Lie-Jordan-Banach empleando el Teorema D.0.2 considerando:

- El álgebra de Jordan definido simetrizando el producto asociativo de \mathcal{A}_Q :

$$A \circ_Q B = \frac{1}{2}(A \cdot_Q B + B \cdot_Q A),$$

²Debido a la identidad de Jacobi que cumple el corchete de Poisson.

- El álgebra de Lie definido por la parte antisimétrica multiplicado por el elemento imaginario i :

$$[A, B] = -\frac{i}{2\hbar}(A \cdot_Q B - B \cdot_Q A).$$

Ambas operaciones son compatibles entre sí en el sentido de la Definición [D.0.9](#) y, dotado de la norma de la Ecuación [\(E.2.1\)](#), L tiene una estructura de álgebra de Lie-Jordan-Banach. El Teorema [D.0.3](#) nos permite recuperar el producto de la C^* -álgebra como una combinación de los productos de Jordan y de Lie con $\kappa = \hbar$:

$$A \cdot_Q B = A \circ_Q B + i\hbar[A, B].$$

Formalismo de Koopman-von Neumann

En esta sección introducimos el formalismo de Koopman-von Neumann (KvN) y se expone cómo obtiene este una representación de los observables clásicos sobre un espacio de Hilbert.

Consideremos un sistema estadístico clásico asociado a una medida simpléctica Ω y una densidad ρ . Consideremos la ecuación de Liouville (2.1.10).

Definimos el espacio de Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathcal{M}, d\Omega)$ de funciones de cuadrado integrable sobre \mathcal{M} a partir de la medida simpléctica:

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{M}, d\Omega) = \left\{ f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathcal{M}} \bar{f}f d\Omega < \infty \right\}, \quad (\text{F.0.1})$$

junto con su producto escalar

$$\langle f|g \rangle := \int_{\mathcal{M}} \bar{f}g d\Omega \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^2(\mathcal{M}, d\Omega). \quad (\text{F.0.2})$$

En particular, la función de onda $\phi_\rho \in \mathcal{L}^2(\mathcal{M}, d\Omega)$ que cumple que

$$\rho = \bar{\phi}_\rho \phi_\rho = |\phi_\rho|^2, \quad (\text{F.0.3})$$

representa el estado de nuestro sistema estadístico clásico en términos del espacio de Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathcal{M}, d\Omega)$; de esta manera, el cuadrado del módulo de la función de onda ϕ_ρ será la densidad de probabilidad del sistema. Este resultado se asemeja a lo que se tiene en una teoría cuántica donde el módulo al cuadrado de la función de onda está directamente relacionado con la probabilidad de una partícula de hallarse en cierto estado. De la ecuación (F.0.3) se extrae que la densidad de probabilidad clásica ρ no es negativa y que no depende de la fase de la función de onda; estas dos propiedades se perderán, en general, cuando usemos el formalismo de Koopman-van Hove (ver sección 2.3).

Consideremos el flujo hamiltoniano clásico dado por el hamiltoniano $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $F_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$:

$$(x^i(t), p_i(t)) = F_t(x^i(0), p_i(0)) \quad t \in \mathbb{R},$$

definido por la ecuación dinámica

$$\frac{d}{dt}F_t = (X_h \circ F_t).$$

Veremos que el operador $U_t(\psi) := \psi \circ F_t$ en $\mathcal{L}^2(\mathcal{M}, d\Omega)$ es unitario y define un grupo uniparamétrico fuertemente continuo¹ (véase definición F.0.1) si X_h es completo².

Definición F.0.1 (Grupo uniparamétrico fuertemente continuo). Una familia $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, de operadores unitarios $U(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ denota el conjunto de operadores lineales y acotados sobre \mathcal{H} , es llamado grupo uniparamétrico fuertemente continuo si:

1. $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $t \mapsto U(t)$ es fuertemente continuo.
2. $U(t+s) = U(t)U(s)$ para todo t, s , además, $U(0) = \mathbb{I}_{\mathcal{H}}$.

Proposición F.0.1. Dado un hamiltoniano $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y $F : \mathbb{R} \rightarrow (\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M})$; $F(t) =: F_t$ su flujo hamiltoniano asociado y X_H es completo (véase definición A.3.2), entonces, el operador

$$U : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{L}^2(\mathcal{M}, d\Omega))$$

$$t \mapsto U_t; \quad U_t\psi = \psi \circ F_t, \quad \forall \psi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{M}, d\Omega)$$

es unitario³ y define un grupo uniparamétrico fuertemente continuo.

Demostración. En primer lugar, demostraremos que el operador U_t es unitario. La sobreyectividad es consecuencia de que U_t es biyectivo para cualquier t por ser X_H completo, ya que, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$U_{-t}U_t = U_tU_{-t} = U_{t-t} = U_0 = \mathbb{I} \quad \Rightarrow \quad U_t^{-1} = U_{-t}.$$

Además, para cualquier $\psi \in \mathcal{H} := \mathcal{L}^2(\mathcal{M}, d\Omega)$ y $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|U_t\psi\|^2 &= \int_{\mathcal{M}} \overline{(\psi \circ F_t)}(\psi \circ F_t) d\Omega = \int_{\mathcal{M}} \overline{(\psi(F_t(x)))}(\psi(F_t(x))) d\Omega(x) \stackrel{y:=F_t(x)}{=} \\ &\int_{\mathcal{M}} \overline{(\psi(y))}(\psi(y)) d\Omega(F_{-t}(y)) \stackrel{F_t^* \omega = \omega}{=} \int_{\mathcal{M}} \overline{(\psi(y))}(\psi(y)) d\Omega(y) = \|\psi\|^2. \end{aligned} \quad (\text{F.0.4})$$

Concluyendo que U_t es unitario $\forall t \in \mathbb{R}$.

¹Strongly continuous one-parameter group (SCOPUG)

²Véase definición A.3.2

³Nótese que $\forall t \in \mathbb{R}$, U_t es un operador lineal y continuo (luego, también acotado) sobre $\mathcal{L}^2(\mathcal{M}, d\Omega)$, por tanto, omitiremos el dominio del mismo que es todo el espacio de Hilbert.

Para probar que $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es fuertemente continuo, tomemos cualquier $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{M}, d\Omega)$ y veamos si $t \mapsto U_t\psi$ es continuo en $\mathcal{L}^2(\mathcal{M}, d\Omega)$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \|U_t\psi - U_{t_0}\psi\| &= \lim_{t \rightarrow t_0} \|\psi \circ F_t - \psi \circ F_{t_0}\| = \lim_{t \rightarrow t_0} (\|U_t\psi\| + \|U_{t_0}\psi\| - 2 \cdot \operatorname{Re}(\langle U_t\psi | U_{t_0}\psi \rangle)) = \\ &= \underbrace{\lim_{t \rightarrow t_0} (\|U_t\psi\| + \|U_{t_0}\psi\|)}_{=\|U_{t_0}\psi\|} - 2 \cdot \underbrace{\lim_{t \rightarrow t_0} \operatorname{Re}(\langle U_t\psi | U_{t_0}\psi \rangle)}_{=\|U_{t_0}\psi\|} = 0, \end{aligned} \quad (\text{F.0.5})$$

por el Teorema de Convergencia Dominada.

Finalmente, el operador U es un homomorfismo heredado del flujo hamiltoniano, es decir, para $t, s \in \mathbb{R}$, $U_{t+s}\psi = \psi \circ F_{t+s} = \psi \circ F_s \circ F_t = (U_t \circ U_s)\psi$. Además, $U_0 = Id$ donde con Id denotamos la función identidad. \square

El hecho de que el flujo hamiltoniano define una evolución unitaria nos sirve para asegurar la existencia de un operador autoadjunto que sea su generador; este hecho es consecuencia del Teorema de Stone:

Teorema F.0.2 (Teorema de Stone). *Sea U_t un grupo débilmente⁴ continuo uniparamétrico. Sea $H : D(H) \rightarrow \mathcal{H}$ el generador de U_t definido por:*

$$D(H) = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(U_t\psi - \psi) \text{ existe}\} \quad (\text{F.0.6})$$

y por

$$H\psi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{i}{\hbar}(U_t\psi - \psi) \quad \forall \psi \in D(H). \quad (\text{F.0.7})$$

Entonces, $(H, D(H))$ es autoadjunto y $U_t = e^{-iHt}$.

Demostración. Ver capítulo 10,2 de [14]. \square

A este generador lo llamaremos operador de Koopman-von Neumann y se define de la siguiente manera:

Definición F.0.2 (Operador de Koopman-von Neumann). Dada una carta⁵ del atlas de Darboux, se define localmente el *operador de Koopman* como el operador diferencial de primer orden dado por:

$$\hat{L} = -i \left(\frac{\partial h}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial h}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q^k} \right). \quad (\text{F.0.8})$$

sobre el dominio⁶ $D(\hat{L}) = H^1(\mathcal{M})$.

⁴La continuidad débil es menos exigente que la continuidad fuerte, ya que la topología fuerte es más fina que la débil sobre un espacio de Banach.

⁵ $(U, \psi = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n))$.

⁶Donde $H^1(\mathcal{M})$ es el espacio de Sobolev de orden 1 que es denso en $\mathcal{L}^2(\mathcal{M}, d\Omega)$.

Proposición F.0.3. *El operador de Koopman $(\hat{L}, D(\hat{L}))$ es un operador autoadjunto que genera el grupo uniparamétrico fuertemente continuo U_t , i.e.*

$$U_t = e^{-i\hat{L}t}.$$

Demostración. Para demostrar que el operador de Koopman es autoadjunto y que genera el grupo uniparamétrico U_t , comenzaremos empleando el Teorema de Stone para obtener un generador de U_t y luego veremos que, efectivamente, se trata del operador de Koopman.

En primer lugar, caractericemos el dominio del operador H dado por la Ecuación (F.0.6). Para ello, nótese que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U_t \psi - \psi}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi \circ F_t - \psi}{t} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi \circ F_t) = d\psi \circ F'_0 = \\ &= d\psi \circ X_h \circ \underbrace{F_0}_{=Id} = d\psi \left(\frac{\partial h}{\partial p_i}, -\frac{\partial h}{\partial q^j} \right), \end{aligned} \quad (\text{F.0.9})$$

que existe si $d\psi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{M}, d\Omega)$, es decir, $\psi \in H^1(\mathcal{M})$. Por tanto,

$$D(H) = H^1(\mathcal{M}). \quad (\text{F.0.10})$$

En cuanto a cómo actúa H sobre $D(H)$, tomamos la Ecuación (F.0.7):

$$\begin{aligned} H\psi &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{i}{\hbar} (U_t \psi - \psi) = i \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi \circ F_t) = i d\psi \left(\frac{\partial h}{\partial p_i}, -\frac{\partial h}{\partial q^j} \right) = \\ &= -i \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_j} \frac{\partial h}{\partial q^j} - \frac{\partial \psi}{\partial q^i} \frac{\partial h}{\partial p_i} \right) = \underbrace{-i \left(\frac{\partial h}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} \right)}_{=\hat{L}} \psi = \hat{L}\psi. \end{aligned} \quad (\text{F.0.11})$$

Por tanto, vemos que el operador $(H, D(H))$ es el operador de Koopman, y, por el Teorema de Stone⁷ (Teorema F.0.2), este último es autoadjunto y generador del grupo uniparamétrico U_t . \square

En este punto podemos asegurar que dado cualquier $\psi_0 \in D(\hat{L})$, y $\psi(t)$ la solución de la ecuación de Schrödinger

$$i\partial_t \psi(t) = \hat{L}\psi(t), \quad (\text{F.0.12})$$

con $\psi(0) = \psi_0$, entonces, $\psi(t) = U_t \psi_0 = e^{-i\hat{L}t}$. Mencionar que esto se puede extender a todo valor inicial en $\mathcal{L}^2(\mathcal{M}, d\Omega)$ ya que $D(U_t) = \mathcal{L}^2(\mathcal{M}, d\Omega)$.

Esta solución $\psi(t)$ recupera la ecuación de Liouville que nos da la dinámica clásica de ρ si empleamos la Ecuación (F.0.3). Sin embargo, es importante mencionar el hecho de que el operador de Koopman-von Neumann, no pertenece al álgebra de observables clásicos, ya que, es un operador derivativo.

⁷Recordemos que continuidad fuerte implica continuidad suave.

Por tanto, la dinámica que genera (U_t) es un automorfismo externo al álgebra (al contrario de lo que pasa en mecánica cuántica).

Lo anterior se puede extender a cualquier transformación canónica sobre el espacio de fases, tal y como lo hizo Koopman en su artículo original [15].

Cuantización geométrica

G.1. Condición de integrabilidad de Weil

Dada una variedad simpléctica (\mathcal{M}, ω) , la existencia de un fibrado tangente precuantizado $\pi : L \rightarrow \mathcal{M}$ no está garantizada. La condición para su existencia se llama *condición de integrabilidad de Weil*. Primero introduciremos una condición que nos permitirá adquirir más intuición de lo que significa dicha condición pero que no se puede aplicar cuando la variedad no conexas, y a continuación daremos la condición más general en términos de grupos de cohomología de de Rham.

Una condición (C1) necesaria siempre pero suficiente solo para variedades conexas es que la forma simpléctica ha de satisfacer:

$$\int_{\Sigma} \omega \in 2\pi\hbar \in \mathbb{Z} \quad (\text{G.1.1})$$

para toda 2-superficie cerrada $\Sigma \subset \mathcal{M}$.

La condición más general (C2) es que la clase de $\omega/2\pi\hbar$ en $H^2(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ ha de estar en la imagen de $H^2(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$, es decir, los coeficientes del espacio vectorial de 2-formas cerradas pero no exactas son enteros. Más detalles en [7].

Proposición G.1.1. *Existe un fibrado de línea Hermítico $L \rightarrow \mathcal{M}$ y una conexión ∇ sobre L con curvatura $\frac{i}{\hbar}\omega$ si, y solo si, (C2) se cumple.*

Demostración. Véase [22] □

Para entender el origen de esta condición, nos centraremos en la condición (C1) que nos permitirá tener una intuición geométrica más clara de la condición de integrabilidad; por tanto, nos restringimos a variedades conexas.

Supongamos que el fibrado de línea $L \rightarrow \mathcal{M}$ existe. El *transporte paralelo* de una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$, $t \mapsto \gamma(t)$, con las condiciones iniciales $\gamma(0) = m \in \mathcal{M}$, $\gamma(1) = m' \in \mathcal{M}$ y $\tilde{\psi}_0 \in T_m\mathcal{M}$, es la única sección $\psi = \tilde{\psi}_s \in \Gamma(L)$ tal que $(\psi \circ \gamma)(0) = \tilde{\psi}_0$ y

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\psi = 0 \quad (\text{G.1.2})$$

G.2. Cuantización

En precuantización, el espacio de Hilbert es demasiado grande para representar el espacio de fases físico. Esto puede solucionarse admitiendo solamente secciones paralelas respecto a una polarización sobre la variedad simpléctica. Mencionar que este *modus-operandi* unifica diferentes técnicas de cuantización que aparentemente eran independientes.

La idea bajo esta definición es la siguiente: dada una precuantización sobre \mathcal{M} , $L \rightarrow \mathcal{M}$ cuya conexión es proporcional al potencial simpléctico, consideramos las funciones constantes f a través de P , que satisfacen $X(f) = df(X) = 0$, $\forall X \in P$. Tomamos también aquellas secciones $s \in \Gamma(L)$ que sean paralelas sobre P , es decir, tales que $\nabla_X s = 0$, $\forall X \in P$. La pregunta que nos hacemos es si el operador precuantizado $\mathbb{P}(f)$ preserva la polarización o no, en el sentido siguiente:

$$\nabla_X s = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_X \tilde{f}s = 0. \quad (\text{G.2.1})$$

$$\begin{aligned} \nabla_X \tilde{f}s &= \nabla_X(-i\hbar\tilde{f} + f)s = -i\hbar\nabla_X\nabla_{X_f}s + X(f)s + f\nabla_X s = -i\hbar\nabla_X\nabla_{X_f}s = \\ &= -i\hbar\nabla_{X_f}\nabla_X s - [\nabla_X, \nabla_{X_f}]s = -i\hbar[\nabla_X, \nabla_{X_f}]s \end{aligned} \quad (\text{G.2.2})$$

Por tanto, necesitamos que $[\nabla_X, \nabla_{X_f}] = 0$. Pero, usando la definición de la curvatura,

$$\frac{i}{\hbar}\omega(X, X_f) = [\nabla_X, \nabla_{X_f}] - \nabla_{[X, X_f]} \quad (\text{G.2.3})$$

las derivadas covariantes solo conmutarán si la curvatura y $\nabla_{[X, X_f]}s$ se anulan. Como P es un subespacio Lagrangiano, $\omega|_P = 0$ quedando únicamente pedir que:

$$\nabla_{[X, X_f]}s = 0, \quad (\text{G.2.4})$$

condición que se cumple, por hipótesis si

$$[X, X_f] \in P. \quad (\text{G.2.5})$$

Definición G.2.1 (Cuantización). Una cuantización de una variedad simpléctica (\mathcal{M}, ω) es una precuantización $L \rightarrow \mathcal{M}$ junto a la elección de una polarización $P \in T\mathcal{M}$ sobre \mathcal{M} . El espacio de Hilbert \mathcal{H}_P de secciones polarizadas de cuadrado integrable de L contiene las P -funciones de onda del sistema cuántico.

El producto escalar del espacio \mathcal{H}_P no se ha especificado, ya que depende del tipo de variedad de base que estemos cuantizando; si es de Kähler, un espacio cotangente, etc. Para más detalles véase [7].

Apéndice **H**

Resultados auxiliares

H.1. Sistemas clásicos

Proposición H.1.1. *Para toda función suave $f, g, h \in C^\infty(\mathcal{M})$ sobre \mathcal{M} , se tiene que*

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (\text{H.1.1})$$

y que

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}. \quad (\text{H.1.2})$$

Demostración. La ecuación (H.1.1) se cumple por la antisimetría de la forma simpléctica. La ecuación (H.1.2) se cumple gracias a la regla de Leibniz del producto de la derivada exterior; tomamos la definición de X_{gh} dada por la ecuación (2.1.1):

$$0 = d(gh) + \omega(X_{gh}, \cdot) = \underbrace{d(g)}_{=-\omega(X_g, \cdot)} h + g \underbrace{d(h)}_{=-\omega(X_h, \cdot)} + \omega(X_{gh}, \cdot) = \omega(-h \cdot X_g - g \cdot X_h + X_{gh}, \cdot) \quad (\text{H.1.3})$$

como ω es no degenerado, $X_{gh} = X_g h + g X_h$. Por tanto, por la $C^\infty(\mathcal{M})$ -bilinealidad de ω , se tiene el resultado que se buscaba. \square

Proposición H.1.2. *Para toda función suave $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ sobre \mathcal{M} , se tiene que*

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad (\text{H.1.4})$$

Demostración. Véase Proposición 21,10 de [14]. \square

H.1.1. Campos vectoriales hamiltonianos

La forma simpléctica nos define un isomorfismo¹ entre fibrados

$$\Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(T^*\mathcal{M}) \cong \Lambda^1(\mathcal{M}); \quad X \mapsto -\omega(X, \cdot)$$

entre los campos vectoriales y las 1-formas. Elementos de $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ correspondientes a 1-formas exactas se denominan *campos vectoriales globalmente hamiltonianos* y aquellos correspondientes a 1-formas cerradas, *campos vectoriales localmente hamiltonianos*. Esta relación puede expresarse mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{Im}(d) & \hookrightarrow & \text{Ker}(d) & \hookrightarrow & \Lambda^1(\mathcal{M}) & \xrightarrow{d} & \Lambda^2(\mathcal{M}) \\ & & \nearrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & C^\infty(\mathcal{M}) & \longrightarrow & A(\mathcal{M}) & \hookrightarrow & A_0(\mathcal{M}) & \hookrightarrow & \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \end{array}$$

Aquí, $A(\mathcal{M})$ es el conjunto de campos vectoriales globalmente hamiltonianos y $A_0(\mathcal{M})$ el conjunto de campos vectoriales localmente hamiltonianos; $\text{Im}(d) \subset \Lambda^1(\mathcal{M})$ la imagen de la derivada exterior d (las 1-formas exactas), y $\text{Ker}(d) \subset \Lambda^1(\mathcal{M})$ el conjunto de 1-formas cerradas. La flecha horizontal $C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow A(\mathcal{M})$ es el mapa que asigna a cada función $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ un campo vectorial $X_f \in A(\mathcal{M}) \subset \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ globalmente hamiltoniano de la siguiente forma:

$$df + \omega(X_f, \cdot) = 0. \quad (\text{H.1.5})$$

Observación H.1.3. Dada la correspondencia entre funciones $C^\infty(\mathcal{M})$ y campos globalmente hamiltonianos, denotaremos que $X_f \in A(\mathcal{M})$ es el campo hamiltoniano correspondiente al observable f si se cumple la ecuación (2.1.1).

H.2. Precuantización geométrica

Teorema H.2.1. *Sea $H \in C^\infty(\mathcal{M} \times \mathbb{R})$ el hamiltoniano de un sistema clásico descrito por el espacio de fases \mathcal{M} , y sea \mathbb{P} la precuantización descrita anteriormente. Sea $F \in C^\infty(\mathcal{M})$ un observable clásico precuantizado. Entonces la precuantización es una representación del álgebra de Poisson $(C^\infty(\mathcal{M} \times \mathbb{R}), \{\cdot, \cdot\})$ como operadores $(\Theta(\mathcal{H}), [\cdot, \cdot])$, i.e.*

$$\mathbb{P}(\{H, F\}) = -\frac{i}{\hbar}[\mathbb{P}(H), \mathbb{P}(F)], \quad \forall F, G \in C^\infty(\mathcal{M} \times \mathbb{R}).$$

Demostración. En primer lugar, recordemos que la precuantización de un observable clásico viene dado por la Ecuación (2.3.3). Calculemos ahora $[\mathbb{P}(H), \mathbb{P}(F)]$:

$$[\mathbb{P}(H), \mathbb{P}(F)] = -\hbar^2 \underbrace{[\nabla_{X_H}, \nabla_{X_F}]}_{(1)} - i\hbar \underbrace{[\nabla_{X_H}, F]}_{(2)} - i\hbar \underbrace{[H, \nabla_{X_F}]}_{(3)}.$$

¹También conocido como la aplicación musical y denotada por \flat .

Sea $\psi = \tilde{\psi}_{\underline{s}} \in \Gamma(L)$,

$$(1) : [\nabla_{X_H}, \nabla_{X_F}] \psi = \nabla_{X_H} \nabla_{X_F} \psi - \nabla_{X_F} \nabla_{X_H} \psi = R^\nabla(X_H, X_F) \psi + \nabla_{[X_H, X_F]} \psi =$$

$$\frac{i}{\hbar} \underbrace{\omega(X_H, X_F)}_{=\{H, F\}} + \frac{i}{\hbar} \theta([X_H, X_F]) \psi + d\tilde{\psi}([X_H, X_F])_{\underline{s}},$$

$$(2) : [\nabla_{X_H}, F] \psi = dF(X_H) \psi = -\{H, F\} \psi,$$

$$(3) : [H, \nabla_{X_F}] \psi = -dH(X_F) \psi = -\{H, F\} \psi.$$

Juntando las expresiones,

$$[\mathbb{P}(H), \mathbb{P}(F)] \psi = i\hbar \left(-\{H, F\} \psi - \theta([X_H, X_F]) \psi + i\hbar d\tilde{\psi}([X_H, X_F])_{\underline{s}} + \{H, F\} \psi + \{H, F\} \psi \right)$$

$$= i\hbar \left(\{H, F\} \psi + \theta([X_H, X_F]) \psi - i\hbar d\tilde{\psi}(X_{\{H, F\}})_{\underline{s}} \right) = i\hbar \left(\{H, F\} \psi + \underbrace{\theta(X_{\{H, F\}}) \psi - i\hbar d\tilde{\psi}(X_{\{H, F\}})_{\underline{s}}}_{=-i\hbar \nabla_{X_{\{H, F\}}} \psi} \right).$$

Concluimos que

$$-\frac{i}{\hbar} [\mathbb{P}(H), \mathbb{P}(F)] = -i\hbar \nabla_{X_{\{H, F\}}} + \{H, F\} = \mathbb{P}(\{H, F\}).$$

□

Proposición H.2.2. *Dada una variedad simpléctica (\mathcal{M}_C, ω) y una función $f \in C^\infty(\mathcal{M}_C, \mathbb{R})$, y la precuantización \mathbb{P} anteriormente descrita, entonces, el operador no acotado $(\mathbb{P}(f), C_C(\mathcal{M}_C))$ es simétrico (hermítico con dominio denso).*

Demostración. En primer lugar, $C_C(\mathcal{M}_C)$ es denso sobre $\mathcal{L}^2(L)$. En segundo lugar, para demostrar que $\mathbb{P}(f)$ es simétrico, tomemos $\psi = \tilde{\psi}_{\underline{s}}, \phi = \tilde{\phi}_{\underline{s}} \in C_C(\mathcal{M}_C)$:

$$\langle \psi, \mathbb{P}(f) \phi \rangle = \int_{\mathcal{M}_C} (\psi, \mathbb{P}(f) \phi) d\Omega = \int_{\mathcal{M}_C} (\psi, -i\hbar \nabla_{X_f} \phi + f \phi) d\Omega =$$

$$= -i\hbar \int_{\mathcal{M}_C} (\psi, d\tilde{\phi}|_p(X_f)_{\underline{s}}) d\Omega + \int_{\mathcal{M}_C} \underbrace{(\psi, \theta_p(X_f) \phi)}_{(\theta_p(X_f) \psi, \phi)} d\Omega + \int_{\mathcal{M}_C} \underbrace{(\psi, f \phi)}_{(\bar{f} \psi, \phi)} d\Omega$$

$$= -i\hbar \underbrace{\int_{\mathcal{M}_C} d_{X_f}(\psi, \phi) d\Omega}_{\psi, \phi \in C_C(\mathcal{M}_C)} \overset{0}{=} -i\hbar \int_{\mathcal{M}_C} (d\tilde{\psi}|_p(X_f)_{\underline{s}}, \phi) d\Omega +$$

$$+ \int_{\mathcal{M}_C} (\theta_p(X_f) \psi, \phi) d\Omega + \int_{\mathcal{M}_C} (\bar{f} \psi, \phi) d\Omega \underset{\text{si } f \text{ real}}{=} \langle \mathbb{P}(f) \psi, \phi \rangle.$$

□

Corolario H.2.3. *Para que la densidad de probabilidad clásica no dependa de la fase de la función de onda y sea positiva definida, se debe cumplir la siguiente condición:*

$$\operatorname{div}(\mathcal{J}\theta R_C) = i\hbar\{R_C, S_C\} \quad (\text{H.2.1})$$

donde $R_C \in C^\infty(\mathcal{M}_C, \mathbb{R}^+)$, $S_C \in C^\infty(\mathcal{M}_C, \mathbb{R})$ tales que $\phi = \sqrt{R_C}e^{iS_C/\hbar}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, vamos a separar el módulo y la fase de la función de onda; escribiremos

$$\phi = \sqrt{R_C}e^{iS_C/\hbar},$$

donde $R \in C^\infty(\mathcal{M}_C, \mathbb{R}^+)$, $S_C \in C^\infty(\mathcal{M}_C, \mathbb{R})$. Introduciendo esto en la Ecuación (2.3.11), se tiene

$$\rho = R_C - \operatorname{div}(\mathcal{J}\theta R_C) + i\hbar\{\sqrt{R_C}e^{-iS_C/\hbar}, \sqrt{R_C}e^{iS_C/\hbar}\}.$$

Dado que

$$\{\sqrt{R_C}e^{-iS_C/\hbar}, \sqrt{R_C}e^{iS_C/\hbar}\} = i\frac{2R_C}{\hbar}\{\sqrt{R_C}, S_C\} = \frac{i}{\hbar}\{R_C, S_C\},$$

obtenemos

$$\rho = R_C - \operatorname{div}(\mathcal{J}\theta R_C) - \{R_C, S_C\}. \quad (\text{H.2.2})$$

Estamos fijando la fase de la función de onda con la siguiente ecuación

$$\operatorname{div}(\mathcal{J}\theta R_C) = -\{R_C, S_C\} \quad (\text{H.2.3})$$

□

Proposición H.2.4. *Dados un observable clásico $f \in C^\infty(\mathcal{M}_C)$, su observable precuantizado $\mathbb{P}(f)$ asociado² al potencial simpléctico θ , un estado $\psi = \tilde{\psi} \cdot \underline{s} \in \Gamma(L)$ y un cambio de fases dado $\psi' = e^{i\varphi/\hbar}\psi$, donde $\varphi \in C^\infty(\mathcal{M}_C, \mathbb{R})$, entonces, el observable precuantizado transforma de la siguiente manera:*

$$\mathbb{P}(f)(\psi') = e^{i\varphi/\hbar}\mathbb{P}(f)'(\psi), \quad (\text{H.2.4})$$

donde $\mathbb{P}(f)'$ es el operador precuantizado de f asociado al potencial simpléctico $\theta' = \theta + d\varphi$.

Demostración. Dada una trivialización local, sean $\psi = \tilde{\psi} \cdot \underline{s} \in \Gamma(L)$ con \underline{s} la sección del vacío relacionada con dicha trivialización, y $\psi' = e^{i\varphi/\hbar}\psi$, donde $\varphi \in C^\infty(\mathcal{M}_C, \mathbb{R})$ la sección resultante del cambio de fase dada por φ . Tomando el observable clásico $f \in C^\infty(\mathcal{M}_C)$ del enunciado y su operador precuantizado correspondiente $\mathbb{P}(f) = -i\hbar\nabla_{X_f} + f$ siendo ∇ la conexión asociada al

²En el sentido de que la 1-forma de la conexión del observable precuantizado está dada por el potencial simpléctico siguiente.

potencial simpléctico θ , veamos cómo cambia el valor de $\mathbb{P}(f)(\psi)$ bajo dicho cambio de fase. Para ello, calculamos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(f)(\psi') &= \mathbb{P}(f)(e^{i\varphi/\hbar}\tilde{\psi}_{\underline{s}}) = -i\hbar\nabla_{X_f}(e^{i\varphi/\hbar}\psi) + f \cdot e^{i\varphi/\hbar}\psi = \\
&= -i\hbar X_f(e^{i\varphi/\hbar}\psi) - i\hbar e^{i\varphi/\hbar} X_f(\tilde{\psi})_{\underline{s}} - i\hbar e^{i\varphi/\hbar} \left(\frac{i}{\hbar}\right) \theta(X_f)\psi + f e^{i\varphi/\hbar}\psi = \\
&= -i\hbar \left(\frac{i}{\hbar}\right) e^{i\varphi/\hbar} X_f(\varphi)\psi - i\hbar e^{i\varphi/\hbar} \underbrace{X_f(\tilde{\psi})_{\underline{s}}}_{=d\varphi(X_f)} + e^{i\varphi/\hbar} \theta(X_f)\psi + f \cdot e^{i\varphi/\hbar}\psi = \\
&= e^{i\varphi/\hbar} \underbrace{\left(-i\hbar X_f(\tilde{\psi})_{\underline{s}} + \overbrace{(\theta + d\varphi)}^{=\theta'}(X_f)\psi + f\psi \right)}_{=-i\hbar\nabla'_{X_f}\psi + f\psi} = e^{i\varphi/\hbar} \mathbb{P}(f)'(\psi) \quad (\text{H.2.5})
\end{aligned}$$

□

H.3. Teorema de Gleason

El Teorema de Gleason nos permitirá asociar una matriz densidad a cada estado físico. Cuando hacemos la representación GNS de una C^* -álgebra, los estados de la misma serán medidas definidas sobre un espacio de Hilbert; es aquí donde entra en juego el Teorema de Gleason, que nos asegura que dada una de estas medidas, existirá una matriz densidad asociada (véase el artículo original de Gleason [12])

Teorema H.3.1 (Gleason). *Sea μ una medida en los subespacios cerrados de un espacio (real o complejo) de Hilbert separable \mathcal{H} de dimensión al menos tres. Existe un operador autoadjunto semidefinido positivo T tal que todo subespacio cerrado A de \mathcal{H}*

$$\mu(A) = \text{Tr}(TP_A), \quad (\text{H.3.1})$$

donde P_A es la proyección ortogonal de \mathcal{H} sobre A .

H.4. Dinámica híbrida no unitaria

Proposición H.4.1. *Dada una variedad simpléctica conexa (\mathcal{M}_C, ω) , una precuantización sobre (\mathcal{M}_C, ω) con conexión ∇ cuya 1-forma de conexión es $i\theta/\hbar$, y una función hamiltoniana $H \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$. Entonces, existe una función $S_H : \mathcal{M}_C \rightarrow \mathbb{R}$ que define una fase y cumple*

$$X_H(S_H) = dS_H(X_H) = \theta(X_H) \Rightarrow (\theta - dS_H)(X_H) = 0, \quad (\text{H.4.1})$$

donde γ_m^H es la curva integral de X_H con condición inicial $\gamma_m^H(0) = m$.

Demostración. Definiremos la función $\tilde{S}_H : \mathcal{M}_C \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\tilde{S}_H(m, t) = \int_0^t \theta\left(\frac{d\gamma_m^H(\tau)}{d\tau}\right) d\tau,$$

donde γ_m^H es la curva integral de X_H con condición inicial $\gamma_m^H(0) = m$.

Y consideraremos la función $S_H : \mathcal{M}_C \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{S}_H = \Phi_t^*(S_H) = S_H \circ \Phi_t \Rightarrow S_H = \tilde{S}_H \circ \Phi_{-t},$$

donde $\Phi_t : \mathcal{M}_C \rightarrow \mathcal{M}_C$ es el flujo hamiltoniano asociado al campo X_H .

Por construcción, se cumple que

$$\begin{aligned} [X_H(S_H)](m) &= [dS_H(X_H)](m) = \left. \frac{d\tilde{S}_H}{dt} \right|_{t=0} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \theta\left(\frac{d\gamma_m^H(\tau)}{d\tau}\right) d\tau \right) \right|_{t=0} = \theta\left(\frac{d\gamma_m^H(t)}{dt}\right) \Big|_{t=0} = [\theta(X_H)](m). \end{aligned}$$

Esto prueba el resultado.

Para comprobar que la función \tilde{S}_H es una fase bien definida, debemos comprobar que para curvas cerradas, esta fase contribuye con múltiplos de $2\pi\hbar$. Recordemos la condición de integrabilidad de Weil (véase sección E.2) que cumple θ al ser definido por una prequantización que, como \mathcal{M}_C es conexo, nos basta considerar la condición (C1) dada por la ecuación (E.2).

Tomando una curva cerrada $\gamma_m^H : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, $\gamma_m^H(0) = \gamma_m^H(1)$, la condición de Weil mencionada nos asegura que

$$\tilde{S}_H(1) = 2\pi k\hbar \tilde{S}_H(0), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{H.4.2}$$

□