Álgebras de Lie: Teoremas de Engel y Lie

Diego Laborda Gutiérrez
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Alberto Carlos Elduque Palomo
12 de junio de 2024

Resumen

Alrededor de 1870, Marius Sophus Lie (1842-1899) empezó a estudiar ecuaciones diferenciales desde el punto de vista de la teoría de grupos, basándose en el trabajo de Évariste Galois y Carl Gustav Jacobi. De aquí surgen los conceptos de grupos de Lie, las álgebras de Lie y la importante relación entre estos dos a través de la aplicación exponencial. Desde entonces, la teoría de Lie de simetrías continuas se ha estudiado extensivamente y se ha aplicado a todo tipo de ámbitos. Dentro de las matemáticas se ha aplicado, por ejemplo, en los sistemas de ecuaciones diferenciales y la geometría; mientras que también ha resultado ser muy útil fuera de las matemáticas, en campos como la robótica, la física de partículas y la mecánica cuántica.

Las álgebras de Lie se pueden estudiar como consecuencia de su relación con los grupos de Lie y sus generadores infinitesimales, que es la forma en la que las definió Lie. Sin embargo, también pueden ser estudiadas a parte, sin tocar el lenguaje de estos grupos y las transformaciones continuas. Este trabajo tiene como objetivo dar esta teoría y así mostrar los importantes teoremas de Engel y Lie, que son herramientas fundamentales en el estudio de álgebras de Lie.

En el primer capítulo, definimos las álgebras de Lie y estudiamos sus propiedades, centrándonos en los conceptos de resolubilidad y nilpotencia. Con esta teoría, podemos proponer y demostrar en el segundo capítulo los teoremas de Engel y Lie. El teorema de Engel generaliza el hecho de que un endomorfismo nilpotente en un espacio vectorial de dimensión finita tiene siempre una matriz coordenada triangular, mientras que el teorema de Lie extiende el resultado de que los endomorfismos que conmutan en un cuerpo algebraicamente cerrado comparten un vector propio común.

Veremos finalmente en el tercer capítulo la descomposición de Jordan-Chevalley de endomorfismos y la semisimplicidad de álgebras de Lie, conceptos con los que podemos mostrar los criterios de Cartan para resolubilidad y semisimplicidad. Estos criterios son unas de las primeras consecuencias de los teoremas de Engel y Lie y nos permiten distinguir si un álgebra es resoluble o si es semisimple realizando solo cálculos sencillos con la forma de Killing.

Summary

Around 1870, Marius Sophus Lie (1842-1899) began to study differential equations from the point of view of group theory, based on Évariste Galois' and Carl Gustav Jacobi's work. It is from this study that the concepts of Lie groups, Lie algebras and their important relation through the exponential map arise from. Since then, Lie's theory of continuous symmetries has been extensively studied and applied to all kinds of fields. In mathematics, it has been applied, for example, in differential equation systems and geometry; while it has also been very useful outside mathematics, in fields like robotics, particle physics and quantum mechanics.

Lie algebras can be studied as a consequence of their relation with Lie groups and their infinitesimal generators, which is the way Lie defined them. However, they can also be studied on their own, without the language of these groups and that of continuous transformations. This thesis aims to give this theory and to use it to show Engel's and Lie's theorems, which are fundamental tools in the study of Lie algebras.

In the first chapter, we define Lie algebras and study their properties, focusing on the concepts of solvability and nilpotency. With this theory, we can pose and prove Engel's and Lie's theorems in the second chapter. Engel's theorem generalizes the fact that a nilpotent endomorphism in a finite dimensional vector space always has a triangular matrix with respect to some base, while Lie's theorem extends the result which says that commuting endomorphisms over an algebraically closed field share a common eigenvector.

Finally, we will see the Jordan-Chevalley endomorphism decomposition and the semisimplicty of Lie algebras, concepts with which we can show Cartan's criteria of solvability and semisimplicty. These criteria are some of the first consequences of Engel's and Lie's theorems and allow us to distinguish whether an algebra is solvable or whether it is semisimple with just a few calculations with Killing's form.

Índice general

Capítulo 1

Álgebras de Lie

1.1. Primeras definiciones y proposiciones

Definición 1.1. Llamamos *álgebra de Lie* a un espacio vectorial L sobre un cuerpo F dotado de una operación binaria $[\cdot,\cdot]: L\times L \to L$ llamada *corchete* o *conmutador* que cumple las siguientes propiedades:

- Es bilineal.
- Cumple que $[xx]=0\ \forall x\in L$.
- Cumple la *identidad de Jacobi*:

$$[x[yz]]+[y[zx]]+[z[xy]]=0 \quad \forall x,y,z\in L$$

Cuando sea necesario, se incluirá una coma en el conmutador para separar claramente los dos elementos. Las álgebras de Lie son un ejemplo de álgebras no asociativas.

Nótese que si $\operatorname{char} F\neq 2$, la segunda propiedad es equivalente a que el corchete es anticonmutativo:

$$[xy]=-[yx] \quad \forall x,y\in L$$

En el caso en que $\operatorname{char} F=2$, $[xx]=0$ implica que $[xy]=[yx]$, pero el converso no es cierto

Ejemplo 1.1. Podemos considerar el conjunto $M_n(\mathbb{R})$ de matrices reales $n\times n$. Con la suma y producto por escalares, este forma un espacio vectorial de dimensión n^2 sobre $\mathbb{R}$. Para dos matrices A,B, se puede definir el conmutador $[AB]=AB-BA$. Podemos probar que $M_n(\mathbb{R})$ es un álgebra de Lie con esta operación:

Primero, es inmediato ver que $[AA]=A^2-A^2=0\ \forall A\in M_n(\mathbb{R})$. Esto significa que el corchete es anticonmutativo. Podemos aprovecharnos de esto y probar que el corchete es bilineal probando solo que es lineal para uno de sus lados: Sean $A,B,C\in M_n(\mathbb{R})$ y $a,b\in\mathbb{R}$, tenemos que

$$[aA+bB,C]=(aA+bB)C-C(aA+bB)=a(AC-CA)+b(BC-CB)=a[AC]+b[BC]$$

Por último, probar la identidad de Jacobi requiere fuerza bruta:

$$\begin{aligned}[A[BC]]+[B[CA]]+[C[AB]] &= [A,BC-CB]+[B,CA-AC]+[C,AB-BA]=\\ &=[A,BC]-[A,CB]+[B,CA]-[B,AC]+[C,AB]-[C,BA]=\\ &=ABC-BCA-ACB+CBA+BCA-CAB-\\ &-BAC+ACB+CAB-ABC-CBA+BAC=0\end{aligned}$$

Por lo que $M_n(\mathbb{R})$ es un álgebra de Lie con este conmutador. Este álgebra la denotamos como $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Si sustituimos $\mathbb{R}$ por un cuerpo F cualquiera, escribimos en vez $\mathfrak{gl}(n,F)$.

Definición 1.2. Un subespacio $K \subseteq L$ es una *subálgebra* de L si está cerrado bajo la operación del corchete. Es decir, si $[xy] \in K\ \forall x, y \in K$. Cualquier subálgebra es, en sí, un álgebra de Lie. Esto lo denotaremos como $K \leq L$ y $K < L$ si $K \neq L$.

Ejemplo 1.2. Dado el espacio de matrices $\mathfrak{gl}(n,F)$ del ejemplo anterior, es fácil ver que las matrices triangulares superiores forman un subespacio.

El producto de matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior, luego el conmutador $[AB] = AB - BA$ de dos matrices triangulares superiores también es triangular superior. Esto es, el espacio de matrices triangulares superiores $n \times n$ es una subálgebra del espacio $\mathfrak{gl}(n,F)$ y a su vez es también un álgebra de Lie. Esta subálgebra la denotamos $\mathfrak{t}(n,F)$.

Lo mismo sucede para las matrices diagonales y las triangulares superiores estrictas, es decir, las triangulares superiores que tienen ceros en la diagonal. Las subálgebras de estas matrices se denotan $\mathfrak{d}(n,F)$ y $\mathfrak{n}(n,F)$ respectivamente. También podemos encontrar la subálgebra de matrices de traza nula, denotada $\mathfrak{sl}(n,F)$.

La Definición 1.1 es una definición algo abstracta. En el estudio de álgebras de Lie, es más común tratar con álgebras *lineales*, muy similares a las de los Ejemplos 1.1 y 1.2:

Proposición 1.1. *Dado cualquier espacio vectorial V sobre un cuerpo F, el conjunto de endomorfismos de V, $\operatorname{End} V$, dotado del operador corchete $[xy] = xy - yx$ es un álgebra de Lie. (Recordamos que el producto de endomorfismos se hace mediante composición)*

Demostración.

Como la combinación lineal de transformaciones lineales es también una transformación lineal, sabemos que $\operatorname{End} V$ es un espacio vectorial. Tenemos que probar que la operación dada cumple las propiedades de la Definición 1.1, pero esta demostración es igual al Ejemplo 1.1.

La única diferencia surge en el caso en el que $\operatorname{char} F = 2$ y el corchete ya no es anticonmutativo, sino conmutativo. Aún así, el resultado es el mismo. □

Este álgebra en particular es muy importante en el estudio de álgebras de Lie. Recibe el nombre de *álgebra general lineal* de V y se denota $\mathfrak{gl}(V)$. Se dice que cualquiera de sus subálgebras es un álgebra *lineal*. Notamos que este corchete es la razón por la que también llamamos “conmutador” a la operación, pues dos endomorfismos x e y conmutan con respecto a la composición si y solo si $[xy] = 0$.

Si V es de dimensión finita n y fijamos una base suya $e_1, \ldots, e_n$, podemos escribir la matriz coordenada de cada endomorfismo en $\mathfrak{gl}(V)$ con respecto a esta base. Así, obtenemos también una base de $\mathfrak{gl}(V)$ formada por los endomorfismos correspondientes a las matrices e_{ij}, que tienen 0 en todas sus entradas excepto por un 1 en la entrada ij. Dada una base, hablaremos indistintamente de los endomorfismos de $\mathfrak{gl}(V)$ y estas matrices coordenadas. Si δ_{ij} es 1 si $i = j$ ó 0 si no, la conmutación de estas matrices sigue la siguiente fórmula:

$$[e_{ij}e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$$

Esto nos permite identificar $\mathfrak{gl}(V)$ con el álgebra $\mathfrak{gl}(n,F)$ del Ejemplo 1.1, así como encontrar las subálgebras $\mathfrak{t}(V)$, $\mathfrak{n}(V)$ ó $\mathfrak{d}(V)$.

Comentario. La subálgebra $\mathfrak{sl}(n,F)$ se conoce como el *álgebra especial lineal*. Es una de las *álgebras clásicas*, junto a las *álgebras simplécticas* $\mathfrak{sp}(n,F)$ y las *álgebras ortogonales* $\mathfrak{so}(n,F)$. Estas álgebras y $\mathfrak{gl}(n,F)$ comparten nombre con los conocidos grupos clásicos, como el grupo general lineal $GL(n,F)$, de matrices invertibles; el grupo especial lineal $SL(n,F)$ de matrices con determinante 1; el grupo simpléctico $Sp(n,F)$; o el grupo ortogonal especial $SO(n,F)$, de matrices ortogonales de determinante 1.

Sin embargo, notamos que las condiciones de los endomorfismos de estas álgebras no son iguales a las de sus grupos correspondientes. Por ejemplo,

- Las matrices de $\mathfrak{gl}(n,F)$ pueden ser singulares, pero no las de $GL(n,F)$.
- Las matrices de $\mathfrak{sl}(n,F)$ tienen traza 0 mientras que las matrices de $SL(n,F)$ deben tener determinante 1.

- Las matrices de $SO(n,F)$ son ortogonales con determinante 1, pero $A \in \mathfrak{so}(n,F)$ si $A+A^T=0$.

Podemos intuir que la relación entre álgebras y grupos es "exponencial", pues parece que si una matriz A está en un álgebra, e^A estará en el grupo correspondiente:

- Si $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, A tendrá que $\det e^A \neq 0$ y $e^A \in GL(n,\mathbb{R})$.
- La fórmula de Jacobi nos muestra que $\det e^A = e^{\operatorname{Tr} A}$, luego si $\operatorname{Tr} A = 0$ y $A \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, tendremos que $\det e^A = e^{\operatorname{Tr} A} = 1$ y $e^A \in SL(n,\mathbb{R})$.
- Si $A \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ tiene $A+A^T=0$, A conmuta con A^T y $e^A(e^A)^T = e^{A+A^T} = e^0 = I$, luego e^A será ortogonal y con determinante 1, pues tendremos que $\det e^A = e^{\operatorname{Tr} A} = e^0 = 1$, luego $e^A \in SO(n,\mathbb{R})$.

En general, en el estudio de *grupos de Lie*, tenemos la *aplicación exponencial*: una aplicación más general que la exponencial de matrices y que relaciona los grupos de Lie con álgebras de Lie correspondientes.

Al igual que en la teoría de grupos, podemos estudiar los *homomorfismos* entre álgebras: aplicaciones que respetan la operación del conmutador.

Definición 1.3. Definimos los homomorfismos de álgebras de Lie al igual que los homomorfismos de grupos: Sean L, M álgebras de Lie, la aplicación lineal $\phi : L \to M$ es un *homomorfismo* si

$$\phi([xy]) = [\phi(x)\phi(y)] \ \forall x,y \in L$$

Y, como es usual, un homomorfismo es un *monomorfismo* si es inyectivo; un *epimorfismo* si es suprayectivo; y un *isomorfismo* si es biyectivo. Tendremos que $\phi(L)$ es un álgebra de Lie, así que $\phi(L) \leq M$.

Existen teoremas (Teoremas de Ado e Iwasawa) que demuestran que toda álgebra de Lie de dimensión finita es isomorfa a algún álgebra lineal, pero estos teoremas se escapan del alcance de este trabajo.

Ejemplo 1.3. Si fijamos un elemento de un álgebra de Lie $x \in L$, podemos definir el endomorfismo *adjunto* de x

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{ad} x \colon & L & \longrightarrow & L \\ & y & \longmapsto & [xy] \end{array}$$

de forma que $\operatorname{ad} x \in \mathfrak{gl}(L)$. También podemos considerar la aplicación ad de la forma

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{ad} \colon & L & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(L) \\ & x & \longmapsto & \operatorname{ad} x \end{array}$$

Esta aplicación se conoce como la *representación adjunta* de L. Podemos probar que ad es un homomorfismo de álgebras de Lie. Sean $x,y,z \in L$ y $a,b \in F$, se ve fácilmente que ad es lineal:

$$\operatorname{ad}(ax+by)(z) = [ax+by,z] = a[xz]+b[yz] = a \operatorname{ad} x(z) + b \operatorname{ad} y(z)$$

Como esto se cumple para cualquier $z \in L$, tenemos que $\operatorname{ad}(ax+by) = a \operatorname{ad} x + b \operatorname{ad} y$. Veamos ahora que ad preserva el conmutador:

$$\begin{aligned} [\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y](z) &= (\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y - \operatorname{ad} y \operatorname{ad} x)(z) = \operatorname{ad} x \operatorname{ad} y(z) - \operatorname{ad} y \operatorname{ad} x(z) = \\ &= [x[yz]] - [y[xz]] = -[[yz]x] - [[zx]y] = [[xy]z] = \operatorname{ad}[xy](z) \end{aligned}$$

Así que $[\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y] = \operatorname{ad}[xy]$, luego ad es un homomorfismo. La representación adjunta es además, como dice su nombre, un ejemplo de una *representación*:

Definición 1.4. Una *representación* de un álgebra de Lie L es un homomorfismo $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ con V un espacio vectorial cualquiera.

Veamos ejemplos de álgebras sencillas, de dimensión baja. En el caso de dimensión 2, tenemos solo dos tipos de álgebra:

Ejemplo 1.4. Podemos considerar un álgebra L de dimensión 2 sobre un cuerpo F. Es decir, de la forma $L = \langle x, y \rangle$. Si consideramos que el corchete de este álgebra cumple las condiciones necesarias, solo queda por escoger el valor de $[xy]$ para caracterizar el álgebra.

En el caso de que $[xy] = 0$, todo conmutador es nulo y el álgebra es trivial, veremos más adelante que esto significa que el álgebra es *abeliana*.

Si $[xy] \neq 0$, tendrá que ser una combinación lineal de x e y, así que podemos escribir $[xy] = \alpha x + \beta y$ para algunos $\alpha, \beta \in F$ escalares. Entonces, tendremos que

$$[x, \alpha x + \beta y] = \alpha[xx] + \beta[xy] = \alpha\beta x + \beta^2 y$$

Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $\beta \neq 0$ (en caso contrario, basta con intercambiar los papeles de x e y). Por lo tanto, podremos escribir $a, b \in L$ tales que $a := \beta^{-1}x$ y $b := \alpha x + \beta y$. Estos dos nuevos elementos son linealmente independientes y tienen que

$$[ab] = \left[\beta^{-1}x, \alpha x + \beta y\right] = \alpha x + \beta y = b$$

Es decir, tenemos elementos de $a, b \in L$ tales que $L = \langle a, b \rangle$ y $[ab] = b$. Esto significa que toda álgebra de dimensión 2 será de esta forma (será isomorfa a esta L) o será trivial (isomorfa al álgebra anterior con $[xy] = 0$). Decimos entonces que, salvo isomorfismos, existen solo dos álgebras de Lie de dimensión 2.

En cuanto pasamos a dimensión 3, el número de álgebras crece y además depende de la característica del cuerpo F. Veamos algunas de estas álgebras:

Ejemplo 1.5. Entre las álgebras clásicas podemos encontrar álgebras como $\mathfrak{sl}(2, F)$ y $\mathfrak{n}(3, F)$ que son de dimensión 3. También podemos considerar el álgebra $L = \langle x, y, z \rangle$ con $[xy] = z$ y $[xz] = [yz] = 0$. Basta la siguiente operación para comprobar que este corchete cumple la propiedad de Jacobi y que L es realmente un álgebra con este corchete:

$$[x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] = [x0] + [y0] + [zz] = 0$$

Este álgebra se conoce como el *álgebra de Heisenberg*, que lleva el nombre del físico Wernel Heisenberg y, junto al *grupo de Heisenberg*, tiene varias aplicaciones incluyendo la mecánica cuántica. Es posible ver que este álgebra es isomorfa a $\mathfrak{n}(3, F)$ y que, en característica 2, también será isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, F)$.

1.2. Ideales

Definimos los *ideales* de un álgebra de forma similar a los ideales de anillos o a los subgrupos normales:

Definición 1.5. Una subálgebra $I \leq L$ es un *ideal* de L si

$$[xy] \in I \quad \forall x \in L, \forall y \in I$$

Toda álgebra de Lie contiene dos ideales triviales: el ideal que cuenta solo con el elemento nulo y denotamos como 0; y la misma álgebra L. Cualquier otro ideal será *propio*. Denotaremos entonces $I \trianglelefteq L$ e $I \triangleleft L$ si $I \neq L$.

Definición 1.6. Dado $K \subseteq L$ un subespacio de L, el conjunto

$$N_L(K) := \{x \in L \mid [xy] \in K \ \forall y \in K\}$$

se conoce como *normalizador* de K. Es claro que K es un ideal si $N_L(K) = L$. La propiedad de Jacobi nos asegura que $N_L(K)$ es una subálgebra de L.

Al igual que con los ideales de anillos y los subgrupos normales, estos ideales están directamente relacionados con los núcleos de homomorfismos:

Proposición 1.2. *El núcleo de un homomorfismo* $\ker\phi := \{x \in L \mid \phi(x) = 0\}$ *es un ideal de L.*

Demostración.
Sean $x, y \in L$ tales que $\phi(x) = 0$, es decir, $x \in \ker\phi$. Tendremos que

$$\phi([xy]) = [\phi(x)\phi(y)] = [0\phi(y)] = 0$$

Luego $[xy] \in \ker\phi$ y $\ker\phi$ es una subálgebra y un ideal. □

Ejemplo 1.6. Sea $n < \infty$, tenemos el álgebra especial lineal $\mathfrak{sl}(n,F) \leq \mathfrak{gl}(n,F)$ formada por las matrices de traza nula.

Sean $x \in \mathfrak{sl}(n,F)$ e $y \in \mathfrak{gl}(n,F)$. Tenemos que $\mathrm{Tr}x = 0$ y que $\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)\ \forall a,b \in \mathfrak{gl}(n,F)$ luego $\mathrm{Tr}[xy] = \mathrm{Tr}(xy) - \mathrm{Tr}(yx) = 0$. Esto significa que $[xy] \in \mathfrak{sl}(n,F)$ y que $\mathfrak{sl}(n,F)$ es un ideal de $\mathfrak{gl}(n,F)$.

Son muy importantes en el estudio de álgebras de Lie el *centro* y el *álgebra derivada* de un álgebra, que son similares a sus análogos en la teoría de grupos.

Definición 1.7. El *centro* de L se define como

$$Z(L) := \{x \in L \mid [xy] = 0\ \forall y \in L\}$$

Tenemos entonces que $Z(L) = \ker \mathrm{ad}$. Un álgebra de Lie con $Z(L) = L$ ó $[xy] = 0\ \forall x,y \in L$ se dice *abeliana*.

En característica diferente de 2, el centro de las álgebras de Lie funciona de la misma manera que el centro en la teoría de grupos, pues $[xy] = [yx]$ es equivalente a que $[xy] = 0$ y los elementos en el centro de un álgebra de Lie conmutan con el resto con respecto al conmutador. En el caso de las álgebras lineales, esto también significa que los elementos x e y conmutan con respecto a la composición, pues $[xy] = xy - yx = 0$ es equivalente a que $xy = yx$.

Ejemplo 1.7. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F, podemos considerar el centro de $\mathfrak{gl}(V)$, que será el conjunto de endomorfismos $x \in \mathfrak{gl}(V)$ que conmutan con cualquier otro endomorfsimo con respecto al conmutador y a la composición.

Para ver qué forma tiene este conjunto, podemos considerar un endomorfismo $x \in Z(\mathfrak{gl}(V))$. Si x no tiene ningún vector propio, podemos dar un endomorfismo $y \in \mathfrak{gl}(V)$ tal que $y(v) = v$ e $yx(v) = \lambda v$ para algún $v \in V$ y $\lambda \in F$. Luego,

$$x(v) = xy(v) = yx(v) = \lambda v$$

Por contradicción, x siempre tendrá algún vector propio $v \in V$ con valor propio correspondiente $\lambda \in F$. Sea ahora $z \in \mathfrak{gl}(V)$ cualquier otro endomorfismo, tendremos que

$$xz(v) = zx(v) = z(\lambda v) = \lambda z(v)\ \forall z \in \mathfrak{gl}(V)$$

Ahora, para $w \in V$ un vector cualquiera, siempre podemos encontrar un endomorfismo $z_w \in \mathfrak{gl}(V)$ tal que $z_w(v) = w$. Luego,

$$x(w) = xz_w(v) = \lambda z_w(v) = \lambda w\ \forall w \in V$$

Esto significa que $x = \lambda I$ donde I es el endomorfismo identidad. Por lo tanto, los elementos de $Z(\mathfrak{gl}(V))$ son múltiplos del endomorfismo identidad. Además, los múltiplos del endomorfismo identidad siempre conmutan con cualquier endomorfismo, luego $Z(\mathfrak{gl}(V))$ es exactamente el subespacio formado por los múltiplos del endomorfismo identidad.

Ejemplo 1.8. Si consideramos $\mathfrak{d}(n,F)$, el álgebra lineal formada por las matrices diagonales, podemos dar una base de matrices e_{ii} con $i = 1,\dots,n$. El conmutador de dos de estas matrices e_{ii} y e_{jj} con $i \neq j$ es

$$[e_{ii}e_{jj}] = \delta_{ij}e_{ij} - \delta_{ji}e_{ji} = 0$$

Luego $[xy] = 0\ \forall x,y \in \mathfrak{d}(n,F)$, $Z(\mathfrak{d}(n,F)) = \mathfrak{d}(n,F)$ y $\mathfrak{d}(n,F)$ es un álgebra abeliana.

Definición 1.8. El *álgebra derivada* o *álgebra conmutador* de L se define como el subespacio generado por los *conmutadores* (los elementos de la forma $[xy]$):

$$[LL] := \langle [xy] \mid x,y \in L \rangle$$

Este subespacio se denota $[LL]$ ó L'.

Ejemplo 1.9. Como vimos en el Ejemplo 1.6, si $x \in \mathfrak{sl}(n,F)$ e $y \in \mathfrak{gl}(n,F)$, entonces $\mathrm{Tr}[xy] = 0$. Sin embargo, es inmediato ver que esto es cierto para endomorfismos $x,y \in \mathfrak{gl}(n,F)$ cualesquiera. Por lo tanto, tenemos que $[\mathfrak{gl}(n,F)\,\mathfrak{gl}(n,F)] \leq \mathfrak{sl}(n,F)$.

Podemos dar la base de $\mathfrak{sl}(n,F)$ dada por las matrices e_{ij} con $i \neq j$ y las matrices $h_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1}$ para $i = 1,\dots,n-1$. Veamos que todas estas matrices están en $[\mathfrak{gl}(n,F)\,\mathfrak{gl}(n,F)]$:

- Si $i \neq j$, podemos tomar otro índice k cualquiera y tener que

  $$[e_{ik}e_{kj}] = \delta_{kk}e_{ij} - \delta_{ij}e_{kk} = e_{ij}$$

  Luego $e_{ij} \in [\mathfrak{gl}(n,F)\,\mathfrak{gl}(n,F)]$.

- Sea h_i, tenemos que

  $$[e_{i,i+1}e_{i+1,i}] = \delta_{i+1,i+1}e_{ii} - \delta_{ii}e_{i+1,i+1} = e_{ii} - e_{i+1,i+1} = h_i$$

  Luego $h_i \in [\mathfrak{gl}(n,F)\,\mathfrak{gl}(n,F)]$.

Por lo tanto, $\mathfrak{sl}(n,F) \leq [\mathfrak{gl}(n,F)\,\mathfrak{gl}(n,F)]$ y, por doble contenido, $[\mathfrak{gl}(n,F)\,\mathfrak{gl}(n,F)] = \mathfrak{sl}(n,F)$.

Ejemplo 1.10. Sean $\mathfrak{t} := \mathfrak{t}(n,F)$, $\mathfrak{n} := \mathfrak{n}(n,F)$ y $\mathfrak{d} := \mathfrak{d}(n,F)$. Tenemos que $\mathfrak{t} = \mathfrak{d} \oplus \mathfrak{n}$. Podemos considerar una base de $\mathfrak{t}$ dada por las matrices e_{ij} con $j \geq i$. Si $l > k$, tenemos que $e_{kl} \in \mathfrak{n}$ y que, dado cualquier i,

$$[e_{ii}e_{kl}] = \delta_{ik}e_{il} - \delta_{li}e_{ki}$$

Si $i = k$, entonces $e_{il} = e_{kl}$. Si $l = i$, $e_{ki} = e_{kl}$. Luego, $[e_{ii}e_{kl}] \in \mathfrak{n}$. En particular, $[e_{ii}e_{il}] = e_{il}$ si $l \neq i$. Esto es, los endomorfismos en la base de $\mathfrak{n}$ se pueden escribir como conmutadores de $\mathfrak{t}$, luego todo endomorfismo en $\mathfrak{n}$ es suma de conmutadores de $\mathfrak{t}$; y $\mathfrak{n} \leq [\mathfrak{t}\mathfrak{t}]$.

Tenemos que $[\mathfrak{t}\mathfrak{t}] = [\mathfrak{d}\mathfrak{d}] \oplus [\mathfrak{d}\mathfrak{n}] \oplus [\mathfrak{n}\mathfrak{n}]$. Sin embargo, ya vimos que $\mathfrak{d}$ es abeliana, luego $[\mathfrak{d}\mathfrak{d}] = 0$. Por lo recién visto, $[\mathfrak{d}\mathfrak{n}] \leq \mathfrak{n}$; y $[\mathfrak{n}\mathfrak{n}] \leq \mathfrak{n}$ por definición, así que $[\mathfrak{t}\mathfrak{t}] = [\mathfrak{d}\mathfrak{n}] \oplus [\mathfrak{n}\mathfrak{n}] \leq \mathfrak{n}$. Entonces, por doble contenido, $[\mathfrak{t}\mathfrak{t}] = \mathfrak{n}$.

Proposición 1.3. *El centro y el álgebra derivada de cualquier álgebra L son ideales.*

Demostración.
Por definición, $[LL]$ es un subespacio de L. Sean $x \in [LL]$ e $y \in L$, inmediatamente $[xy] \in [LL]$, por ser este un conmutador de dos elementos de L. Luego $[LL]$ es una subálgebra y un ideal.

Ver que el centro de L es un ideal es también inmediato, puesto que es el núcleo de ad. □

A parte de estos dos ideales fundamentales, veamos a continuación los conjuntos $I+J$, $I \cap J$ y $[IJ]$ para $I,J \trianglelefteq L$ y cómo estos son ideales también.

Proposición 1.4. *Sean $I,J \trianglelefteq L$ ideales, los siguientes conjuntos son también ideales:*

- *La suma* $I+J := \{x+y \mid x \in I, y \in J\}$.
- *La intersección* $I \cap J$.
- *El conjunto conmutador* $[IJ] := \langle [xy] \mid x \in I, y \in J \rangle$.

Nótese que el álgebra derivada $[LL]$ es un caso particular de este último conjunto.

Demostración.

- El conjunto $I+J$ es claramente un subespacio vectorial de L. Sean $x \in I, y \in J$ y $z \in L$, tenemos $[x+y,z] = [xz]+[yz]$, que son elementos de I y J respectivamente, luego $[x+y,z] \in I+J$. Por lo tanto, $I+J$ es un ideal de L.

- Sean $x \in I \cap J$ e $y \in L$, es claro que $[xy] \in I$ por ser x un elemento de I; y por el mismo razonamiento $[xy] \in J$. Luego $[xy] \in I \cap J$ y este es un ideal.

- Sean $x \in I, y \in J$ y $z \in L$, la identidad de Jacobi nos dice que

$$[[xy]z] = -[[zx]y] - [[yz]x]$$

  Ahora, como I es un ideal, $[zx] \in I$. Análogamente, $[yz] \in J$. Luego ambos $[[zx]y]$ y $[[yz]x]$ son conmutadores de un elemento en I y otro en J, luego pertenecen a $[IJ]$. Como este es un espacio vectorial por definición, $[[xy]z]$ también pertenece a $[IJ]$.

  Sea ahora un elemento arbitrario $a \in [IJ]$, podemos escribirlo como

$$a = [x_1y_1]+[x_2y_2]+\cdots[x_ny_n],\ x_i \in I, y_i \in J$$

  Por la linealidad del conmutador, $[az]$ será suma de elementos de la forma que acabamos de ver, luego $[az] \in [IJ]$ y este es un ideal. □

Proposición 1.5. *Sea $I \trianglelefteq L$, el conjunto cociente L/I es un álgebra de Lie con la operación natural $[x+I, y+I] = [xy]+I$.*

Demostración.
Hace falta probar que la operación está bien definida: Sean $x,y,z \in L$ tales que $x-y \in I$, es decir, $x+I = y+I$. Tendremos que $[x-y,z] \in I$, luego

$$[x+I,z+I] = [xz]+I = ([yz]-[yz]+[xz])+I = ([yz]+[x-y,z])+I = [yz]+I = [y+I,z+I]$$

Por lo que no hay problemas con la operación dada (problemas que podrían darse si I fuese solo una subálgebra y no un ideal). Tras probar esto, las propiedades necesarias para que L/I sea un álgebra de Lie vienen inmediatamente de las propiedades de L. □

1.3. Resolubilidad y nilpotencia

De forma similar a la teoría de Galois, podemos estudiar álgebras de Lie resolubles o nilpotentes, las cuales muestran propiedades interesantes y fundamentales para toda la teoría de álgebras de Lie. Empezamos con un lema casi inmediato que nos servirá para estudiar las propiedades de estas álgebras:

Lema 1.1. *Sean $I,J,K \trianglelefteq L$ ideales con $K \leq J$, entonces $[IK] \leq [IJ]$.*

Demostración.
Sean $x \in I$, $y \in K$, que tienen $[xy] \in [IK]$. Es claro que $y \in J$, luego $[xy] \in [IJ]$. Esto se cumplirá también para cualquier combinación lineal de conmutadores, luego $[IK] \leq [IJ]$. □

Definición 1.9. Sea L un álgebra de Lie, se define la *serie derivada* $L^{(0)}, L^{(1)}, L^{(2)}, \ldots$ como la serie de ideales de L con $L^{(0)} = L$ y $L^{(i+1)} = \left[L^{(i)}L^{(i)}\right]$. Se dice que L es *resoluble* si $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $L^{(n)} = 0$.

Ejemplo 1.11. A cada una de las matrices e_{ij} de $\mathfrak{gl}(n,F)$, podemos asignarle un *nivel* de $j-i$ para indicar su distancia a la diagonal principal. Los matrices diagonales e_{ii} tendrán nivel 0 mientras que e_{24} tendrá nivel 2 y e_{32} tendrá nivel -1. Podemos decir entonces que $\mathfrak{t}(n,F)$ está generada por las matrices e_{ij} de nivel 0 o más mientras que las matrices en la base de $\mathfrak{n}(n,F)$ tienen niveles 1 o más.

Si conmutamos dos de estas matrices e_{ij}, e_{kl} con nivel m o más, tenemos

$$[e_{ij}e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}, \quad j-i \geq m,\ l-k \geq m$$

Si $j = k$ y $\delta_{jk} = 1$, tenemos que $l-j \geq m$ y podemos sumar las desigualdades para obtener que $l-i \geq 2m$, que será el nivel de e_{il}. Lo mismo pasa si $l = i$ y $\delta_{li} = 1$, en cuyo caso el nivel de e_{kj} tendrá $j-k \geq 2m$. Esto es, $[e_{ij}e_{kl}]$ es suma de matrices con nivel $2m$ o más.

Si consideramos la serie derivada de $L = \mathfrak{t}(n,F)$, tenemos que $L^{(1)} = \mathfrak{n}(n,F)$ según el Ejemplo 1.10. $\mathfrak{n}(n,F)$ está generada por matrices de nivel 1 o más. Luego, por lo que acabamos de enseñar, tendremos que $L^{(2)} = [\mathfrak{n}(n,F)\mathfrak{n}(n,F)]$ está generada por matrices de nivel 2 o más. De nuevo, esto significa que las matrices base de $L^{(3)}$ tienen nivel 4 o más. En general, $L^{(i+1)}$ está generada por matrices de nivel 2^i o más. Entonces, $L^{(m+1)} = 0$ si $2^m > n$, lo cual es siempre posible para m suficientemente grande. Esto es, $L = \mathfrak{t}(n,F)$ es resoluble y también lo es $\mathfrak{n}(n,F)$.

Proposición 1.6. *Se tienen las siguientes propiedades de la resolubilidad:*

a) Si L es resoluble, también lo son sus subálgebras e imágenes mediante homomorfismos.

b) Si $I \trianglelefteq L$ y L/I son resolubles, también lo es L.

c) Si $I, J \trianglelefteq L$ son resolubles, también lo es $I+J$.

Demostración.

a) Queremos probar que, si $K \leq L$, $K^{(i)} \subseteq L^{(i)}$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Supongamos que esto es cierto para todo $j \leq i$, luego el Lema 1.1 nos asegura que

$$K^{(i+1)} = \left[K^{(i)}K^{(i)}\right] \leq \left[K^{(i)}L^{(i)}\right] \leq \left[L^{(i)}L^{(i)}\right] = L^{(i+1)}$$

Tendremos entonces que, si $L^{(n)} = 0$, $K^{(n)} = 0$, luego K también es resoluble.

Sea ahora ϕ un homomorfismo de L cualquiera y $M = \phi(L)$. Veamos que $\phi(L^{(i)}) = M^{(i)}$. Supongamos que esto es cierto para todo $j \leq i$, luego

$$\begin{aligned} M^{(i+1)} &= \left[M^{(i)}M^{(i)}\right] = \left\langle [ab] \;\middle|\; a,b \in M^{(i)} \right\rangle = \left\langle [\phi(x)\phi(y)] \;\middle|\; x,y \in L^{(i)} \right\rangle = \\ &= \left\langle \phi\left([xy]\right) \;\middle|\; x,y \in L^{(i)} \right\rangle = \phi\left(\left\langle [xy] \;\middle|\; x,y \in L^{(i)} \right\rangle\right) = \phi\left(L^{(i+1)}\right) \end{aligned}$$

Luego es claro que M es resoluble si L lo es.

b) Si $(L/I)^{(n)} = 0$, entonces $L^{(n)} \leq I$. Esto es cierto porque $\pi\left(L^{(n)}\right) = (L/I)^{(n)}$ según lo recién demostrado con π la proyección de L a L/I, que es un epimorfismo.

Como $L^{(n)} \leq I$, $L^{(n)}$ es resoluble y también lo es L.

c) Los teoremas de homomorfismos de grupos pueden traducirse al lenguaje de álgebras de Lie. El tercero nos indica que $I+J/J$ es isomorfo a $I/I\cap J$. Como $I/I\cap J$ es la proyección de I, es resoluble y también lo es $I+J/J$. (b) nos asegura entonces que $I+J$ es resoluble. $\square$

Definición 1.10. Sea L un álgebra de Lie, se define la *serie central descendente* $L^0, L^1, L^2, \ldots$ como la serie de ideales de L con $L^0 = L$ y $L^{i+1} = [LL^i]$ $\forall i \geq 1$. Se dice que L es *nilpotente* si $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $L^n = 0$.

Ejemplo 1.12. Si consideramos $L = \mathfrak{n}(n,F)$, podemos ver que este álgebra es nilpotente. Sean e_{ij} y e_{kl} con $j-i \geq 1$ y $l-k \geq m$, entonces $[e_{ij}e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$. Si $j = k$, entonces $l-j \geq m$ y el nivel de e_{il} tiene $l-i \geq m+1$. Si $l = i$, entonces el nivel de e_{kj} es $j-k \geq m+1$. Es decir, $[e_{ij}e_{kl}]$ es suma de matrices con nivel $m+1$ o más.

Por lo tanto, $L^1 = [\mathfrak{n}(n,F)\mathfrak{n}(n,F)]$ está generada por matrices de nivel 2 o más, L^2 está generada por matrices de nivel 3 o más, L^3 está generada por matrices de nivel 4 o más... En general, L^i está generada por matrices de nivel $i+1$ o más. En cuanto tengamos L^m con $m+1 > n$, tendremos que $L^m = 0$, luego $\mathfrak{n}(n,F)$ es nilpotente.

Lema 1.2. *Para cada $i \in \mathbb{N}$, $L^{(i)} \leq L^i$. En particular, toda álgebra nilpotente es resoluble.*

Demostración.

Supongamos que esto es cierto para todo $j \leq i$. Entonces, por el Lema 1.1,

$$L^{(i+1)} = \left[L^{(i)}L^{(i)}\right] \leq \left[LL^{(i)}\right] \leq \left[LL^i\right] = L^{i+1}$$

Por lo que se cumple para todo $i \in \mathbb{N}$. Si L es nilpotente, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $L^n = 0$. Luego, $L^{(n)} \leq L^n = 0$ y L es resoluble. □

El recíproco no es cierto, pues tenemos álgebras que son resolubles pero no nilpotentes:

Ejemplo 1.13. Sea de nuevo $L = \mathfrak{t}(n,F)$, tenemos que $L^1 = [\mathfrak{t}(n,F)\mathfrak{t}(n,F)] = \mathfrak{n}(n,F)$ como ya vimos, pero $L^2 = [\mathfrak{t}(n,F)\mathfrak{n}(n,F)] = \mathfrak{n}(n,F) = L^1$. Esto significa que $L^i = \mathfrak{n}(n,F) \neq 0\ \forall i \geq 1$, luego $\mathfrak{t}(n,F)$ es resoluble pero no nilpotente.

Ejemplo 1.14. De forma parecida, podemos considerar el álgebra $L = \langle x,y \rangle$ del Ejemplo 1.4 con el conmutador tal que $[xy] = y$. Tenemos que $[LL] = \langle y \rangle$ y que $L^{(2)} = [\langle y \rangle \langle y \rangle] = 0$, luego L es resoluble. Sin embargo, $L^2 = [L\langle y \rangle] = \langle y \rangle$, luego $L^i = \langle y \rangle \neq 0\ \forall i \geq 1$, así que este álgebra no es nilpotente.

Proposición 1.7. *Se tienen las siguientes propiedades de la nilpotencia:*

a) Si L es nilpotente, también lo son sus subálgebras e imágenes mediante homomorfismos.

b) Si $L/Z(L)$ es nilpotente, también lo es L.

c) Si $L \neq 0$ es nilpotente, entonces $Z(L) \neq 0$.

Demostración.

a) Análogo a la demostración en la Proposición 1.6.

b) Si $(L/Z(L))^n = 0$ y π es el homomorfismo proyección sobre $Z(L)$, entonces $\pi(L^n) = (L/Z(L))^n = 0$ y $L^n \leq Z(L)$. Por lo tanto, $L^{n+1} = [LL^n] \leq [LZ(L)] = 0$ por las propiedades del centro. Esto es, L es nilpotente.

c) Si $L^{n-1} \neq 0$ y $L^n = 0$, tenemos $[LL^{n-1}] = 0$. Esto es lo mismo que $L^{n-1} \leq Z(L)$, luego $Z(L) \neq 0$. □

Si $L \leq \mathfrak{gl}(V)$, los elementos de L son endomorfismos de V, que tienen su propio concepto diferente de nilpotencia. A primera vista no parece que la nilpotencia de L esté relacionada con la nilpotencia de los endomorfismos, pero el Teorema de Engel nos muestra esta relación.

Capítulo 2

Teoremas de Engel y Lie

Estudiaremos a partir de aquí solamente las álgebras de Lie de dimensión finita o las álgebras lineales sobre espacios vectoriales de dimensión finita. La mayoría de los siguientes resultados y demostraciones requieren esta condición, aunque el caso de dimensión infinita es también interesante.

2.1. Teorema de Engel

Lema 2.1. *[Hum72, pág. 12] Sea $x \in \mathfrak{gl}(V)$ un endomorfismo nilpotente, entonces* $\operatorname{ad} x$ *es nilpotente.*

Demostración.
Sean $\lambda_x, \rho_x \in \mathfrak{gl}(V)$ las translaciones por x por la izquierda y la derecha respectivamente:

$$\lambda_x(y) = xy, \quad \rho_x(y) = yx$$

Estos endomorfismos conmutan y tienen $\operatorname{ad} x = \lambda_x - \rho_x$. Si $n \in \mathbb{N}$ verifica que $x^n = 0$, entonces λ_x y ρ_x son también nilpotentes con $\lambda_x^n = \rho_x^n = 0$. Tenemos que

$$(\operatorname{ad} x)^{2n-1} = (\lambda_x - \rho_x)^{2n-1} = \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{2n-1-i} \binom{2n-1}{i} \lambda_x^i \rho_x^{2n-1-i}$$

Para cualquier i, ó $i \geq n$ ó $2n-1-i \geq n$, luego $\lambda_x^i \rho_x^{2n-1-i} = 0$ y $(\operatorname{ad} x)^{2n-1} = 0$. □

Todo endomorfismo nilpotente tiene un vector propio con valor propio 0. El siguiente teorema nos indica que este vector puede ser común para todos los endomorfismos si son todos nilpotentes:

Teorema 2.1. *[Hum72, pág. 12] Sea $L \leq \mathfrak{gl}(V)$ con $V \neq 0$. Si todos los elementos de L son endomorfismos nilpotentes, entonces $\exists v \in V$ no nulo tal que $x(v) = 0 \; \forall x \in L$.*

Demostración.
El teorema es obvio si $\dim L = 0$, en cuyo caso el único endomorfismo en L es el nulo. Supongamos que el teorema se aplica para cualquier álgebra de dimensión menor que $\dim L$. Sea $K < L$, tenemos $\operatorname{ad} K \leq \mathfrak{gl}(L)$, donde los elementos de $\operatorname{ad} K$ actúan sobre L, luego también actúan sobre L/K.

Como $\operatorname{ad} K$ es la imagen de K mediante ad, tiene dimensión menor o igual que $\dim K < \dim L$. Además, los endomorfismos en $\operatorname{ad} K$ son nilpotentes por el lema anterior. Entonces podemos aplicar la hipótesis de inducción, que nos dice que $\exists z \in L$ tal que $z + K \neq 0 + K$ y $\operatorname{ad} x(z+K) = 0 + K \; \forall x \in K$. Esto es, $z \notin K$ y $[xz] \in K \; \forall x \in K$. Esto significa que $K < N_L(K)$ y que $K \oplus \langle z \rangle$ es también una subálgebra. Si asumimos que K es una subálgebra maximal, tendremos que $L = K \oplus \langle z \rangle$ y que $N_L(K) = L$, luego K es un ideal.

El subespacio $W := \{v \in V \mid x(v) = 0 \; \forall x \in K\}$ es no nulo por la hipótesis de inducción. Sean $x \in K$ y $w \in W$, tenemos que

$$xz(w) = zx(w) - [zx](w) = 0$$

ya que $x(w) = 0$ y $[zx] \in K$ por ser K ideal, luego $[zx](w) = 0$ también.

Por lo tanto, $z(W) \subseteq W$. Como z es un endomorfismo nilpotente de W, tiene un vector propio $v \in W$ no nulo con valor propio 0. Es decir, $z(v) = 0$ y, finalmente, $x(v) = 0 \; \forall x \in L$. $\square$

Con este teorema, podemos probar el Teorema de Engel:

Teorema 2.2 (de Engel)**.** *[Hum72, pág. 12] Sea L un álgebra de Lie, L será nilpotente si y solo si todos sus elementos son* ad*-nilpotentes (sus adjuntos son nilpotentes).*[1]

Demostración.

Tenemos que la imagen de $\operatorname{ad}x$ para cualquier $x \in L$ está contenida en $[LL] = L^1$, luego la imagen de $(\operatorname{ad}x)^2$ está contenida en $[LL^1] = L^2$. En general, $(\operatorname{ad}x)^i(L) \leq L^i$. Si L es nilpotente con $L^n = 0$, entonces $(\operatorname{ad}x)^n(L) = 0$. Luego $\operatorname{ad}x$ es nilpotente para cualquier $x \in L$ si L es nilpotente.

Supongamos ahora que los elementos de L son ad-nilpotentes. Si $\dim L = 1$, L es automáticamente nilpotente. Supongamos que el teorema se cumple para cualquier álgebra con dimensión menor que L. El álgebra $\operatorname{ad}L \leq \mathfrak{gl}(L)$ satisface las condiciones del teorema anterior, luego existe $x \in L$ no nulo tal que $[Lx] = 0$, así que $x \in Z(L) \neq 0$. El álgebra $L/Z(L)$ es de dimensión menor que L y sus elementos también son ad-nilpotentes. La hipótesis de inducción nos dice que $L/Z(L)$ es nilpotente, luego L también lo es según la Proposición 1.7. $\square$

Veamos un corolario del Teorema de Engel, específicamente del Teorema 2.1, sobre *banderas*:

Definición 2.1. Una *bandera* de un espacio vectorial V con $\dim V = n < \infty$ es una sucesión creciente de subespacios $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ donde $\dim V_i = i$. Diremos que un endomorfismo $x \in \operatorname{End} V$ *estabiliza la bandera* si $x(V_i) \subseteq V_i \; \forall i$.

Corolario 2.1. *[Hum72, pág. 13] Dadas las mismas condiciones que en el Teorema 2.1, existe una bandera V_i estabilizada por L (todos los elementos $x \in L$ estabilizan la misma bandera). Aún más, tendremos que $x(V_i) \subseteq V_{i-1} \; \forall x \in L, \; \forall i$.*

Demostración.

Si $\dim V = 0$ ó 1, el corolario es inmediatamente cierto. Supongamos que se cumple para todos los espacios vectoriales de dimensión menor que $\dim V = n$. El Teorema 2.1 nos asegura que $\exists v \in V$ no nulo tal que $x(v) = 0 \; \forall x \in L$. Escribiremos entonces $V_1 = \langle v \rangle$, que cumplirá que $x(V_1) = V_0 = 0$.

Sea $W := V/\langle v \rangle$, la inclusión $L \leq \mathfrak{gl}(V)$ induce un homomorfismo ϕ dado por

$$\begin{array}{rcl} \phi : L & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(W) \\ x & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \phi(x) : W & \longrightarrow & W \\ w + \langle v \rangle & \longmapsto & x(w) + \langle v \rangle \end{array} \end{array}$$

Entonces, $\phi(L)$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(W)$ con elementos nilpotentes. Como $\dim W < \dim V$, aplicamos la hipótesis de inducción y existe una bandera $0 = W_0 \subset \cdots \subset W_{n-1} = W$ estabilizada por $\phi(L)$ con $\phi(x)(W_i) \subseteq W_{i-1} \; \forall x \in L, \; \forall i$. Estos subespacios son de la forma $W_i = U_i/\langle v \rangle$ con U_i subespacios de L que contienen a $\langle v \rangle$ y tienen $x(U_i) \subseteq U_{i-1} \; \forall x \in L$. Entonces, podemos continuar la bandera con $V_i = U_{i-1}$ para $i = 2, \ldots, n$, de forma que está estabilizada por L y tiene $x(V_i) \subseteq V_{i-1} \; \forall x \in L, \; \forall i$. $\square$

[1] Una versión del Teorema de Engel aparece por primera vez en una carta que escribe Friedrich Engel a Wilhelm Killing en el 20 de julio de 1890. En esta carta, Engel muestra que, dada un álgebra de *rango de Killing* 0 y de dimensión finita, es posible encontrar una base $x_1, \ldots, x_k \in L$ del álgebra tal que $[x_i x_j] \in \langle x_{j+1}, \ldots, x_k \rangle \; \forall i \leq j$ bajo ciertas condiciones. Esto implicaría que $L^j \subseteq \langle x_{j+1}, \ldots, x_k \rangle \; \forall j$, luego L sería nilpotente.

Que el rango de Killing de un álgebra sea 0 es equivalente a que sus elementos sean todos ad-nilpotentes, así que podemos ver como esta forma del teorema es casi equivalente a la nuestra.

Al siguiente año Karl Arthur Umlauf, un estudiante de Engel, demuestra rigurosamente en su tesis doctoral que toda álgebra de rango 0 es nilpotente basándose en el trabajo de Engel. [Haw00, págs. 168-177]

Podemos construir una base de V completando las bases de V_i, empezando por v como base de V_1 y siguiendo la bandera. Este corolario nos afirma que, con respecto a esta base, todos los elementos de L tienen matriz coordenada triangular estrictamente superior.

El Teorema 2.1, el Teorema de Engel y este corolario son los tres equivalentes y diferentes fuentes usan el nombre "Teorema de Engel" para referirse a cualquiera de ellos.

Ejemplo 2.1. Consideremos ahora $V = F^3$ y $L = \mathfrak{n}(3,F) \leq \mathfrak{gl}(V)$. Ya comprobamos en el Ejemplo 1.12 que este álgebra es nilpotente. Podemos dar una base para L formada por los endomorfismos

$$e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El Teorema 2.1 nos asegura que existe un vector $v \in V$ no nulo tal que $x(v) = 0 \ \forall x \in L$. Es inmediato ver que $v = e_1$ (el primer vector de la base canónica de V) cumple esto, pues cualquier matriz triangular estrictamente superior envía e_1 a 0. Veamos también que se cumple el Corolario 2.1 y que es posible encontrar una bandera de V de la forma $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 = V$ con $x(V_i) \subseteq V_{i-1} \ \forall x \in L$.

Hallar esta bandera es inmediato, pues está dada por la base con respecto a la cual las matrices de L son triangulares estrictamente superiores. En este caso ya lo son, por definición, con respecto a esta base, así que la bandera es $0 \subset \langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = V$. Que $x(V_i) \subseteq V_{i-1} \ \forall x \in L$ se da automáticamente por la forma de estas matrices, pero podemos comprobar a mano como se da el caso: Podemos ver que $x(V_2) \subseteq V_1 \ \forall x \in L$:

$$e_{12}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1$$

$$e_{23}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1$$

$$e_{13}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1$$

y que $x(V_3) \subseteq V_2 \ \forall x \in L$:

$$e_{12}(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_2$$

$$e_{23}(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_2$$

$$e_{13}(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_2$$

2.2. Teorema de Lie

El Teorema de Lie es similar al Teorema de Engel, pero necesita que el cuerpo sobre el que trabajamos "se comporte bien". Por esto, en esta sección asumiremos que F es algebraicamente cerrado y tiene característica 0.

Para probar el Teorema de Lie necesitaremos primero un resultado importante relacionado con los *pesos* de un álgebra lineal.

Definición 2.2. Sea L una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ con V un espacio vectorial, un *peso* de L en V es una aplicación lineal $\lambda : L \to F$ tal que el subespacio vectorial

$$V_\lambda = \{v \in V \mid x(v) = \lambda(x)v \ \forall x \in L\}$$

es no nulo. En tal caso, V_λ se llama *espacio peso* de λ.

Lema 2.2 (de Invariancia)**.** *[Neu10, pág. 24] Sean $L \leq \mathfrak{gl}(V)$ y $K \trianglelefteq L$ un ideal. Si λ es un peso de K en V y V_λ el espacio peso de λ con respecto a K, se tiene que $x(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$ $\forall x \in L$. Es decir, L estabiliza V_λ. En particular, si $z \in L$ y $x \in K$, entonces $\lambda([xz]) = 0$ y además, $xz(v) = zx(v)$ $\forall v \in V$.*

Demostración.

Fijamos $z \in L$ y $v \in V$ y definimos $m \in \mathbb{N}$ como el mayor número tal que $v, z(v), z^2(v), \dots, z^{m-1}(v)$ son linealmente independientes. Consideramos los subespacios crecientes $W_i = \langle v, z(v), \dots, z^{i-1}(v) \rangle$ para cada $i \in \mathbb{N}$ que tendrán $W_0 = 0$ y $W_{m+i} = W_m$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Podemos ver que z actúa de W_i a W_{i+1} y, por lo tanto, estabiliza W_m.

Vamos a probar por inducción que, para todo $i = 0, \dots, m-1$ y todo $x \in K$,

$$xz^i(v) = \lambda(x)z^i(v) + w_i, \quad w_i \in W_i$$

Esto es obviamente cierto para $i = 0$, en cuyo caso tenemos $x(v) = \lambda(x)v + w_0$ donde $w_0 = 0$. Tenemos que

$$xz^i(v) = xzz^{i-1}(v) = zxz^{i-1}(v) - [zx]z^{i-1}(v)$$

Por la hipótesis de inducción, $xz^{i-1}(v) = \lambda(x)z^{i-1}(v) + w_{i-1}$ con $w_{i-1} \in W_{i-1}$. Luego,

$$xz^i(v) = z\left(\lambda(x)z^{i-1}(v) + w_{i-1}\right) - [zx]z^{i-1}(v) = \lambda(x)z^i(v) + z(w_{i-1}) - [zx]z^{i-1}(v)$$

Podemos poner $w_i = z(w_{i-1}) - [zx]z^{i-1}(v) \in W_i$, pues $[zx] \in K$ y estabiliza W_i por la hipótesis de inducción.

Hemos dado una base del espacio W_m tal que $xz^i(v) = \lambda(x)z^i(v) + w_i$ con $w_i \in W_i$. Esto implica que $\mathrm{Tr}_{W_m} x = m\lambda(x)$, pues podemos pensar en x como una matriz $m \times m$ actuando sobre W_m de forma que, al escribirla con respecto a la base dada, es triangular superior con elementos diagonales $\lambda(x)$.

Tenemos que z también estabiliza W_m por construcción, luego también podemos pensar en z como una matriz $m \times m$ que tendrá su propia traza. Por las propiedades de la traza, $\mathrm{Tr}_{W_m}([xz]) = 0$.

Entonces, $\mathrm{Tr}_{W_m}([xz]) = m\lambda([xz]) = 0$. Como $\mathrm{char}\, F = 0$, esto implica que $\lambda([xz]) = 0$. Por lo tanto, $[xz](v) = 0$ y $xz(v) = zx(v) - [zx](v) = zx(v)$. Esto implica que L estabiliza V_λ, pues podemos ver que

$$xz(v) = zx(v) = \lambda(x)z(v) \ \forall x \in K$$

Luego $z(v) \in V_\lambda$, así que $z(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$. $\square$

Esté será el único lugar donde utilizaremos la característica de F para demostrar el Teorema de Lie. Podemos ver también que es suficiente que $\dim V < \mathrm{char}\, F$ para que se dé este resultado, pues m no superará $\dim V$.

Ejemplo 2.2. Veamos que pasa si $\dim V \geq \mathrm{char}\, F$. Si V es un espacio vectorial de dimensión 2 sobre un cuerpo de característica 2, podemos fijar una base de V y considerar las matrices $x, y \in \mathfrak{gl}(V)$ tales que

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, tenemos que

$$[xy] = xy - yx = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = y$$

Esto es, $[xy] = y$, luego $L = \langle x,y\rangle$ es un álgebra lineal que es resoluble por lo que vimos en el Ejemplo 1.14. Si tomamos $K = \langle y\rangle \trianglelefteq L$. Podemos ver que la aplicación lineal $\lambda: K \to F$ con $\lambda(y) = 1$ es un peso, pues

$$y\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Luego $V_\lambda = \langle(1,1)\rangle$. Si el Lema de Invariancia se pudiese aplicar aquí, tendríamos que $x(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$, pero vemos que esto no es cierto:

$$x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \notin V_\lambda$$

Luego el Lema de Invariancia no se aplica en este caso.

Teorema 2.3. *[Hum72, pág. 15] Sea L una subálgebra resoluble de $\mathfrak{gl}(V)$. Si $V \neq 0$, entonces $\exists v \in V$ vector no nulo que es un vector propio común de todos los endomorfismos en L.*

Demostración.

El procedimiento para demostrar este teorema es similar al del Teorema 2.1. Si $\dim L = 0$, el teorema es trivial. Supongamos que se cumple para todas las subálgebras de dimensión menor que $\dim L$.

Como L es resoluble, tenemos que $L^{(1)} = [LL] \neq L$. Podemos escoger un subespacio $K \subset L$ tal que $[LL] \subseteq K$ y $L = K \oplus \langle z\rangle$ donde $z \notin K$. K es automáticamente un ideal.

Sabemos que K es resoluble y tiene $\dim K = \dim L - 1$, luego la hipótesis de inducción nos asegura que $\exists v \in V$ vector propio para todo $x \in K$. Esto es, podemos encontrar un peso $\lambda: K \to F$ con $x(v) = \lambda(x)v \ \forall x \in K$. Sea entonces el espacio peso $W := V_\lambda = \{w \in V \mid x(w) = \lambda(x)w \ \forall x \in K\} \neq 0$, el lema anterior nos asegura que, para cualquier $x \in K$,

$$xz(w) = zx(w) = \lambda(x)z(w) \ \ \forall w \in W$$

Luego $z(w) \in W$ y $z(W) \subseteq W$.

Como F es algebraicamente cerrado y z actúa sobre W, podemos encontrar un vector propio $v \in W$ no nulo de z, que también será vector propio de todo $x \in K$ y los múltiplos de z. Es decir, v será vector propio común de todo elemento de L. □

Teorema 2.4 (de Lie)**.** *[Hum72, pág. 16] Sea L una subálgebra resoluble de $\mathfrak{gl}(V)$. Entonces, L estabiliza alguna bandera de V.*[2]

Demostración.

La demostración del teorema es prácticamente igual a la del Corolario 2.1. Volvemos a usar inducción sobre $\dim V$, siendo el teorema obviamente cierto si $\dim V = 0$ ó 1. Por el teorema anterior, $\exists v \in V$ no nulo que es vector propio común de todo $x \in L$. Luego el subespacio $V_1 = \langle v\rangle$ está estabilizado por L.

De nuevo tenemos la imagen $\phi(L)$ construida de la misma manera que antes, pero ahora es una subálgebra resoluble de $\mathfrak{gl}(W)$. Por hipótesis de inducción, existe una bandera $0 = W_0 \subset \cdots \subset W_{n-1} = W$ estabilizada por $\phi(L)$ con $W_i = U_i/\langle v\rangle$, $\langle v\rangle \subseteq U_i \subseteq L$. Luego la bandera de V dada por $V_0 = 0$, $V_1 = \langle v\rangle$ y $V_i = U_{i-1}$ para $i = 2,\ldots,n$ está estabilizada por L. □

De la misma forma que en el Corolario 2.1, podemos construir una base de V siguiendo esta bandera estabilizada, de forma que todos los elementos de L tienen matriz coordenada triangular superior con respecto a esta base. De nuevo, el Teorema 2.3 y el Teorema 2.4 son equivalentes y el nombre “Teorema de Lie” podría utilizarse para cualquiera de los dos dependiendo del contexto.

Como hemos visto, este teorema no es tan fuerte como el Teorema de Engel y no se cumple para cuerpos de característica prima menor o igual a $\dim V$. Veamos algunos contraejemplos:

[2] Lie demostró el equivalente a este teorema para subálgebras de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ en un lenguaje más cercano a operadores diferenciales y grupos de Lie. Específicamente, muestra en su *Theorie der Transformationsgruppen I* (1880) que si $L \leq \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ es resoluble, se puede “reducir a una forma triangular”. Esto es, podemos encontrar banderas de ideales de L estabilizados por $\operatorname{ad} L$, lo que veremos en el Corolario 2.2. [Haw00, pág. 91]

Ejemplo 2.3. Podemos ver de nuevo qué pasa para el espacio vectorial V del Ejemplo 2.2 y el álgebra $L = \langle x, y\rangle$. V es de dimensión 2, así que una bandera de V será de la forma $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 = V$ donde V_1 será de la forma $V_1 = \langle v\rangle$ con $v \in V$ no nulo. Como $L(V_1) \subseteq V_1$, tendremos que $x(v) = \lambda v$ e $y(v) = \mu v$ para escalares $\lambda, \mu \in F$. Si $v = (a,b)$, tendremos que

$$x(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda a = 0 \\ \lambda b = b \end{cases}$$

$$y(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu a \\ \mu b \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \mu a = b \\ \mu b = a \end{cases}$$

Puesto que $v \neq 0$, sabemos que a y b no son simultáneamente nulos, luego el segundo sistema nos indica que a y b son ambos no nulos. Por lo tanto, vemos en el primer sistema que $\lambda = 1$, luego $a = 0$. Esto es una contradicción, así que L no puede estabilizar ninguna bandera de V.

Ejemplo 2.4. Veamos que este contraejemplo anterior se generaliza fácilmente a cualquier característica $\operatorname{char} F = p > 0$. Consideramos de nuevo un álgebra $L = \langle x, y\rangle$ de dimensión 2 con $[xy] = y$. Si tenemos un espacio vectorial $V = \langle v_1, \ldots, v_p\rangle$ de dimensión p sobre F, podemos escribir la representación $\rho \colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ con

$$\rho(x) \colon v_i \longmapsto i v_i, \quad \rho(y) \colon v_i \longmapsto v_{i+1}, \; \forall i = 1, \ldots, p$$

donde $v_0 := v_p$ y $v_{p+1} = v_1$. Vemos que $\rho(x)$ y $\rho(y)$ desempeñan los papeles de x e y del ejemplo anterior respectivamente. Para ver que esta es una representación, podemos comprobar que $[\rho(x)\rho(y)] = \rho([xy])$:

$$\begin{aligned} \rho(x)\rho(y)(v_i) &= \rho(x)(v_{i+1}) = (i+1)v_{i+1} \\ \rho(y)\rho(x)(v_i) &= \rho(y)(i v_i) = i v_{i+1} \\ [\rho(x)\rho(y)](v_i) &= (i+1)v_{i+1} - i v_{i+1} = v_{i+1} = \rho(y)(v_i) = \rho([xy])(v_i) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $[\rho(x)\rho(y)] = \rho([xy])$ y ρ es una representación.

De nuevo, este álgebra es resoluble por el Ejemplo 1.14. Si se cumpliese el Teorema de Lie para $\rho(L)$, en particular el Teorema 2.3, encontraríamos un vector propio $v \neq 0$ común de $\rho(x)$ y $\rho(y)$. Sin embargo, es claro que los vectores propios de $\rho(x)$ son exactamente los v_i y sus múltiplos, todos con diferentes valores propios. Luego, cualquier vector propio de $\rho(x)$ tiene que ser múltiplo de algún v_i. Vemos entonces que $\rho(y)$ no puede tener vectores propios en común con $\rho(x)$.

Ejemplo 2.5. Otro ejemplo similar que podemos considerar es el del álgebra de Heisenberg del Ejemplo 1.5 con $L = \langle x, y, z\rangle$, $[xy] = z$ y $[xz] = [yz] = 0$ sobre un cuerpo con $\operatorname{char} F = p > 0$. Ahora, consideramos la representación $\rho \colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ con $V = \langle v_1, \ldots, v_p\rangle$ dada por

$$\rho(x) \colon v_i \longmapsto v_{i-1}, \quad \rho(y) \colon v_i \longmapsto i v_{i+1}, \quad \rho(z) \colon v_i \longmapsto v_i, \; \forall i = 1, \ldots, p$$

donde ahora $v_0 = v_{p+1} := 0$. Es claro que $\rho(z)$ conmuta con $\rho(x)$ y $\rho(y)$ por ser el endomorfismo identidad, luego

$$[\rho(x)\rho(z)] = [\rho(y)\rho(z)] = 0$$

Además, tenemos que

$$\begin{aligned} \rho(x)\rho(y)(v_i) &= \rho(x)(i v_{i+1}) = i v_i \\ \rho(y)\rho(x)(v_i) &= \rho(y)(v_{i-1}) = (i-1)v_i \\ [\rho(x)\rho(y)](v_i) &= i v_i - (i-1)v_i = v_i = \rho(z)(v_i) = \rho([xy])(v_i) \end{aligned}$$

Luego $[\rho(x)\rho(y)] = \rho([xy])$ y ρ es una representación.

Como probamos en el Ejemplo 1.11, $\mathfrak{n}(3,F)$ es resoluble, luego también lo es L. Si se cumpliese el Teorema 2.3 para este álgebra, tendríamos un vector propio $v \neq 0$ común para $\rho(x)$, $\rho(y)$ y $\rho(z)$, pero de nuevo se puede ver que el único vector propio de $\rho(y)$ es v_p, que no es vector propio de $\rho(x)$.

Veamos ahora una de las primeras aplicaciones de los Teoremas de Engel y de Lie.

Corolario 2.2. *Un álgebra de Lie L cualquiera es resoluble si y solo si* $[LL]$ *es nilpotente.*

Demostración.
Es claro que si $[LL] = L^1$ es nilpotente, es resoluble, luego también lo es L. Para probar el converso, podemos aplicar la representación adjunta para tener que $\operatorname{ad} L$ es resoluble. Por el Teorema de Lie, $\operatorname{ad} L$ estabiliza una bandera en L de la forma $0 = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_n = L$ con $\dim L_i = i$.

Sea una base de L asociada a esta bandera, las matrices con respecto a esta base de $\operatorname{ad} L$ son triangulares superiores y están en $\mathfrak{t}(n,F)$, luego las matrices de $[\operatorname{ad} L, \operatorname{ad} L] = \operatorname{ad}_L[L,L]$ son triangulares superiores estrictas y están en $\mathfrak{n}(n,F)$ (usamos la notación ad_L para especificar que esta es la representación adjunta de L y no de $[LL]$). Por lo tanto, $\operatorname{ad}_L x$ y $\operatorname{ad}_{[LL]} x$ son nilpotentes para cada $x \in [LL]$, luego el Teorema de Engel nos asegura que $[LL]$ es nilpotente. $\square$

Capítulo 3

Los criterios de Cartan

Entre las primeras consecuencias de los Teoremas de Engel y de Lie encontramos los criterios de Cartan para resolubilidad y semisimplicidad. Seguiremos suponiendo en este capítulo que el cuerpo F es algebraicamente cerrado y de característica 0 y que trabajamos en dimensión finita.

3.1. La descomposición de Jordan-Chevalley y el criterio de resolubilidad

Para empezar, estudiamos propiedades de los endomorfismos, particularmente la *descomposición de Jordan-Chevalley*:

Definición 3.1. Decimos que un endomorfismo $s \in \operatorname{End} V$ es *semisimple* si las raíces de su polinomio mínimo son todas distintas o, lo que es lo mismo (puesto que F es algebraicamente cerrado), si es diagonalizable. La suma de endomorfismos semisimples es también semisimple si son simultáneamente diagonalizables, es decir, si conmutan. Además, si s estabiliza un subespacio $W \subseteq V$, la restricción $s|_W$ es también semisimple.

Si escribimos un endomorfismo $x \in \operatorname{End} V$ como $x = s + n$ para endomorfismos $s, n \in \operatorname{End} V$ tales que s es semisimple, n es nilpotente y $[sn] = 0$, esto se conoce como la *descomposición de Jordan-Chevalley* de x.

Esta descomposición es una forma de generalizar la forma canónica de Jordan, en la que casi se diagonaliza un endomorfismo y se expresa, dada cierta base, como una matriz con valores propios en la diagonal principal (la parte semisimple) y algunos unos en la diagonal secundaria (la parte nilpotente).

Proposición 3.1. *[Hum72, págs. 17-18] Dado cualquier endomorfismo $x \in \operatorname{End} V$, tenemos que:*

1. *La descomposición de Jordan-Chevalley $x = s + n$ existe y es única.*
2. *Si $A \subseteq B \subseteq V$ son subespacios tales que $x(B) \subseteq A$, entonces $s(B) \subseteq A$ y $n(B) \subseteq A$ también.*
3. *Si $x = s + n$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de x, $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} s + \operatorname{ad} n$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de $\operatorname{ad} x \in \operatorname{End}(\operatorname{End} V)$.*

Demostración.

1. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$ los distintos valores propios de x, podemos escribir V como suma directa de los m subespacios fundamentales generalizados de x:

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m, \quad V_i := \{v \in V \mid \exists r \in \mathbb{N} \text{ t.q. } (x - \lambda_i I)^r(v) = 0\}$$

Podemos definir $s \in \operatorname{End} V$ tal que $s|_{V_i} = \lambda_i I \; \forall i$, que es claramente semisimple. Ahora, sea $n := x - s$ y $v \in V_i$ para algún i, es claro que para un r suficientemente grande,

$$n^r(v) = (x - s)^r(v) = (x - \lambda_i I)^r(v) = 0$$

Luego n es nilpotente. Al ser s un múltiplo del endomorfismo identidad en cada V_i, su restricción $s|_{V_i}$ conmuta con cualquier endomorfismo de V_i, así que s conmuta con x y, por lo tanto, con n. Luego hemos encontrado una descomposición de Jordan-Chevalley $x = s + n$.

Para ver que esta descomposición es única, podemos considerar otra descomposición $x = s' + n'$ con s' semisimple, n' nilpotente y $[s'n'] = 0$. Como s' es semisimple, tenemos otra descomposición de V en m' subespacios $V = V_1' \oplus \cdots \oplus V_{m'}'$ donde $s'|_{V_i'} = \mu_i I \; \forall i$ para ciertos escalares distintos $\mu_i \in F$. Tenemos que x y s' también conmutan, pues $[s'x] = [s', s' + n'] = [s'n'] = 0$. Luego, si $v \in V_i'$, tenemos que

$$[s'x](v) = s'x(v) - xs'(v) = s'x(v) - \mu_i x(v) = 0 \Longrightarrow s'x(v) = \mu_i x(v)$$

Luego $x(v_i) \in V_i'$ y x estabiliza cada subespacio V_i'. Ahora, si $v_i \in V_i'$, vemos que la restricción $n'|_{V_i'}$ es nilpotente y $n'(v_i) = (x - s')(v_i) = (x - \mu_i I)(v_i)$, así que V_i' está contenido en el subespacio fundamental generalizado de x correspondiente a μ_i. Esto significa que este subespacio fundamental generalizado es no vacío y se corresponde a uno de los valores propios de x, que debe coincidir con μ_i. Esto implica que los valores propios λ_i y los escalares μ_i coinciden; que los subespacios V_i y V_i' coinciden; y que $s = s'$. Inmediatamente, tenemos entonces que $n = n'$ y que estas dos descomposiciones son iguales, así que la descomposición de Jordan-Chevalley es única.

2. Si x estabiliza B, tenemos el endomorfismo $x|_B$, cuyos valores propios son también valores propios de x. Si los valores propios de $x|_B$ son $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$, tenemos la descomposición en subespacios fundamentales generalizados

$$B = B_1 \oplus \cdots B_m, \quad B_i := \{v \in B \mid \exists r \in \mathbb{N} \text{ t.q. } (x - \lambda_i I)^r(v) = 0\}$$

Si V_i es el subespacio fundamental generalizado de V correspondiente al valor propio λ_i, tenemos que $B_i = B \cap V_i$, así que $B = (B \cap V_1) \oplus \cdots \oplus (B \cap V_m)$. Como $s|_{V_i} = \lambda_i I$, tenemos que $s(B \cap V_i) \subseteq B \cap V_i \; \forall i$, luego $s(B) \subseteq B$. Esto significa que $s|_B$ es un endomorfismo semisimple de B, así que $x|_B = s|_B + n|_B$ es la descomposición de Jordan-Chevalley de $x|_B$, lo que se cumplirá para cualquier subespacio $B \subseteq V$ estabilizado por x.

Ahora, si $\lambda_i \neq 0$, $x|_{V_i}$ y $s|_{V_i}$ son biyectivas, luego $s(B \cap V_i) = B \cap V_i = x(B \cap V_i)$. Si $\lambda_i = 0$, entonces $s(B \cap V_i) = 0 \subseteq x(B \cap V_i)$. En cualquier caso, $s(B \cap V_i) \subseteq x(B \cap V_i)$, luego $s(B) \subseteq x(B) \subseteq A$ y $n(B) = (x - s)(B) \subseteq A$.

3. Es claro que $\operatorname{ad} n$ es nilpotente por el Lema 2.1 y que $[\operatorname{ad} s, \operatorname{ad} n] = \operatorname{ad}[sn] = 0$, luego solo queda probar que $\operatorname{ad} s$ es semisimple en $\operatorname{End}(\operatorname{End} V)$. Sean ahora $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$ los valores propios de s respetando multiplicidad, podemos dar una base $v_1, \ldots, v_m$ de V tal que $s(v) = \lambda_i v_i \; \forall i$, podemos considerar la base $\{E_{ij}\}$ de $\mathfrak{gl}(V)$ con $E_{ij}(v_k) = \delta_{jk} v_i \; \forall i, j, k$. Entonces, para cada k,

$$[sE_{ij}](v_k) = sE_{ij}(v_k) - E_{ij}s(v_k) = \delta_{jk}s(v_i) - \lambda_k E_{ij}(v_k) = (\lambda_i - \lambda_k)\delta_{jk}v_i = (\lambda_i - \lambda_j)\delta_{jk}v_i$$

Luego $[sE_{ij}] = \operatorname{ad} s(E_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}$, lo que significa que $\operatorname{ad} s$ es diagonal con respecto a esta base y semisimple. □

Notamos que estas propiedades son independientes de la característica de F, así que se cumplirán también en característica prima.

Ejemplo 3.1. Sea $x \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$ el endomorfismo dado por la matriz

$$x = \begin{pmatrix} 1+i & -1 & -1 \\ i & 0 & -1 \\ 1-i & -1+i & i \end{pmatrix}$$

En este caso, podemos encontrar la descomposición de Jordan-Chevalley de x obteniendo primero la forma canónica de Jordan. Encontramos el polinomio característico de x para hallar sus valores propios:

$$\det(\lambda I - x) = \det \begin{pmatrix} \lambda-1-i & 1 & 1 \\ -i & \lambda & 1 \\ -1+i & 1-i & \lambda-i \end{pmatrix} = \lambda^3 - (1+2i)\lambda^2 - (1-2i)\lambda + 1 = (\lambda-1)(\lambda-i)^2$$

Tenemos valores propios 1 e i, con multiplicidades 1 y 2 respectivamente. Vamos a tener dos subespacios fundamentales generalizados, uno de dimensión 1 para el valor propio 1 y otro de dimensión 2 para el valor propio i. Si x fuese diagonalizable, ya habríamos encontrado la descomposición de Jordan-Chevalley con $s = x$ y $n = 0$. Si x no fuese diagonalizable, la multiplicidad geométrica del valor propio i sería 1 y no coincidiría con la algebraica. Para comprobar esto, podemos estudiar el polinomio mínimo de x, que divide al característico y tiene las mismas raíces pero con menores o iguales multiplicidades. Por esto, el polinomio mínimo debe de ser $(\lambda-1)(\lambda-i)$ ó $(\lambda-1)(\lambda-i)^2$. En el primer caso, x es diagonalizable, pero vemos que esto no es posible porque este polinomio no anula x:

$$(x-I)(x-iI) = \begin{pmatrix} i & -1 & -1 \\ i & -1 & -1 \\ 1-i & -1+i & -1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ i & -i & -1 \\ 1-i & -1+i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i & 1-i & 1-i \\ -1+i & 1-i & 1-i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Esto significa que x no es diagonalizable y podemos encontrar una base de $\mathbb{C}^3$ dada por vectores v_1, v_2, v_3 tales que

$$(x-I)(v_1) = 0, \quad (x-iI)(v_2) = 0, \quad (x-iI)(v_3) = v_2$$

Podemos comprobar que la siguiente base cumple estas condiciones:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (x-I)(v_1) = \begin{pmatrix} 1+i & -1 & -1 \\ i & 0 & -1 \\ 1-i & -1+i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x-iI)(v_2) = \begin{pmatrix} 1+i & -1 & -1 \\ i & 0 & -1 \\ 1-i & -1+i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (x-iI)(v_3) = \begin{pmatrix} 1+i & -1 & -1 \\ i & 0 & -1 \\ 1-i & -1+i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, tenemos la forma canónica de Jordan $y = m^{-1}xm$ donde m es la matriz de cambio de base con columnas v_1, v_2, v_3:

$$y = m^{-1}xm = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La parte semisimple de x se corresponde con la diagonal de y, mientras que la parte nilpotente es la formada por los unos en la diagonal secundaria:

$$x = s+n, \quad s = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} m^{-1}, \quad n = m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} m^{-1}$$

Es claro que s es semisimple pues es diagonal con respecto a la base v_1, v_2, v_3, mientras que n es nilpotente porque tiene forma triangular estricamente superior en esta base. Tenemos que

$$\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&i&0\\0&0&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&i&0\\0&0&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&i&0\\0&0&i\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&i\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&i\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Luego $[sn]=m0m^{-1}=0$ y esta es la descomposición de Jordan-Chevalley de x.

Utilizando la descomposición de Jordan-Chevalley, podemos demostrar el *criterio de Cartan*, una de las primeras consecuencias más importantes de los Teoremas de Engel y de Lie. Para esto, mostramos primeros los siguientes resultados:

Lema 3.1. *[Hum72, pág. 19] Sean un espacio vectorial V y los subespacios $A\subseteq B\subseteq \mathfrak{gl}(V)$. Entonces, dado el subespacio $M:=\{x\in\mathfrak{gl}(V)\mid [xB]\subseteq A\}$, tendremos que $x\in M$ será nilpotente si $\operatorname{Tr}(xy)=0\ \forall y\in M$.*

Demostración.
Sea $x\in M$ con $\operatorname{Tr}(xy)=0\ \forall y\in M$, $m=\dim V$ y $\lambda_1,\dots,\lambda_m\in F$ los valores propios (respetando multiplicidad) de la parte semisimple de $x=s+n$. Queremos ver que estos λ_i son nulos, lo que significará que $s=0$ y x es nilpotente. Para esto, consideramos primero el *subcuerpo primo* de F como la intersección de todos los subcuerpos de F, el cual será siempre (en característica 0) isomorfo a los racionales $\mathbb{Q}$ y es el subcuerpo generado por 1. Por esto, denotaremos este subcuerpo como $\mathbb{Q}$ también. Podemos ver F como un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ y definir entonces el subespacio $E\subseteq F$ tal que $E=\mathbb{Q}\lambda_1+\dots+\mathbb{Q}\lambda_m$.

Podemos estudiar el *dual* de E, E^*, que se define como el conjunto de aplicaciones lineales de la forma $f\colon E\to\mathbb{Q}$ y es un espacio vectorial. Tenemos que E^* es de la misma dimensión que E, pues para una base $\mu_1,\dots,\mu_r$ de E, podemos dar una base de E^* formada por las aplicaciones $f_i(\mu_j)=\delta_{ij}\ \forall i,j$. Vemos entonces que $\lambda_1=\dots=\lambda_m=0$ si y solo si la única aplicación $f\in E^*$ es la nula.

Supongamos entonces que $f\neq 0$. Sea $v_1,\dots,v_m$ una base de V tal que $s(v_i)=\lambda_i v_i\ \forall i$. La Proposición 3.1 nos afirma que $[xB]=\operatorname{ad}x(B)\subseteq A$ implica que $[sB]=\operatorname{ad}s(B)\subseteq A$.

Sea $y\in\mathfrak{gl}(V)$ tal que $y(v_i)=f(\lambda_i)v_i$, podemos encontrar el polinomio de interpolación $p(X)\in F[X]$ tal que $p(0)=0$ (es decir, sin término independiente) y $p(\lambda_i-\lambda_j)=f(\lambda_i-\lambda_j)\ \forall i,j$. Este polinomio tendrá que $\operatorname{ad}y=p(\operatorname{ad}s)$. Como p no tiene término independiente, esto significa que $[yB]=\operatorname{ad}y(B)$ también está contenido en A, pues su imagen es suma de imagenes de $\operatorname{ad}s$, luego $y\in M$.

Con respecto a la base $v_1,\dots,v_m$, la matriz coordenada de s es diagonal y la de x es triangular, ambas con entradas diagonales λ_i, mientras que y es diagonal con entradas $f(\lambda_i)$. Por lo tanto, como $y\in M$, tendremos que $\operatorname{Tr}(xy)=\sum f(\lambda_i)\lambda_i=0$. Como f es lineal sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ y $f(\lambda_i)\in\mathbb{Q}$, tendremos que

$$f(\operatorname{Tr}(xy))=\sum_{i=1}^{m} f(f(\lambda_i)\lambda_i)=\sum_{i=1}^{m} f(\lambda_i)^2=0$$

Como $f(\lambda_i)\in\mathbb{Q}$, esto implica que $f(\lambda_i)=0\ \forall i$ y que $f=0$. Por contradicción, deberemos tener que $\lambda_1=\dots=\lambda_m=0$, que $s=0$ y que $x=n$ es nilpotente. □

Proposición 3.2. *[Hum72, pág. 20] Un álgebra lineal $L\leq\mathfrak{gl}(V)$ será resoluble si y solo si tiene que $\operatorname{Tr}(xy)=0\ \forall x\in[LL],\ \forall y\in L$.*

Demostración.
Si suponemos que $\operatorname{Tr}(xy)=0\ \forall x\in[LL]$, $\forall y\in L$, podemos aplicar el lema anterior para $A=[LL]$, $B=L$ y $M=\{x\in\mathfrak{gl}(V)\mid[xL]\subseteq[LL]\}$. Primero tendremos que ver que $\operatorname{Tr}(xy)=0\ \forall y\in M$, no solo si $y\in L$. Para esto podemos utilizar las propiedades de la traza: Sean $u,v\in L$ e $y\in M$, tenemos que

$$\operatorname{Tr}([uv]y)=\operatorname{Tr}(uvy-vuy)=\operatorname{Tr}(vyu-yvu)=\operatorname{Tr}([vy]u)=0$$

Sabemos que $\mathrm{Tr}([vy]u) = 0$, pues $[vy] \in [LL]$ por ser y elemento de M. Como $x \in [LL]$ se puede escribir como suma de conmutadores $[uv]$, esto significa que $\mathrm{Tr}(xy) = 0\ \forall y \in M$ para cada $x \in [LL]$, luego el lema anterior nos indica que x es nilpotente. Así que cada $x \in [LL]$ es ad-nilpotente por el Lema 2.1 y $[LL]$ es nilpotente por el Teorema de Engel. Finalmente, esto significa que L es resoluble.

Recíprocamente, si L es resoluble, $[LL]$ es nilpotente y tenemos de nuevo una base con respecto a la cual la matriz coordenada de un $y \in L$ es triangular superior y la de un $x \in [LL]$ es triangular superior estricta. Por lo tanto, xy es también triangular superior estricta con respecto a esta base y $\mathrm{Tr}(xy) = 0$. □

Definición 3.2. La aplicación $\kappa\colon L \times L \longrightarrow F$ dada por $\kappa(x,y) := \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y)$ se conoce como la *forma de Killing*. Es una aplicación simétrica y bilineal. Además, tiene que $\kappa([xy],z) = \kappa(x,[yz])\ \forall x,y,z \in L$, pues

$$\kappa([xy],z) = \mathrm{Tr}([\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y]\,\mathrm{ad}\,z) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,x\,[\mathrm{ad}\,y\,\mathrm{ad}\,z]) = \kappa(x,[yz])$$

por el cálculo en la demostración anterior.

Teorema 3.1 (Criterio de Cartan de resolubilidad)**.** *[Hum72, pág. 20] Sea L un álgebra de Lie, L será resoluble si y solo si $\kappa(x,y) = 0\ \forall x \in [LL],\ \forall y \in L$.*

Demostración.

Podemos aplicar la representación adjunta, que tendrá que $[\mathrm{ad}\,L\,\mathrm{ad}\,L] = \mathrm{ad}[LL]$ y $\ker\mathrm{ad} = Z(L)$, que es un álgebra abeliana y resoluble. Luego, L será resoluble si y solo si lo es también $L/Z(L)$. Este cociente es isomorfo a $\mathrm{ad}\,L$ por el primer teorema de homomorfimos y la proposición anterior nos dice que $\mathrm{ad}\,L$ será resoluble si y solo si $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y) = 0\ \forall x \in [LL],\ \forall y \in L$, así que queda demostrado el teorema. □

Este criterio nos permite simplificar la comprobación de la resolubilidad de un álgebra. En vez de calcular la serie derivada, solo tenemos que realizar unos cálculos sencillos de álgebra lineal. Por la bilinealidad de la forma de Killing, vemos que solo hace falta comprobar que $\kappa(x,y) = 0$ para x elementos de una base de $[LL]$ e y elementos de una base de L para aplicar el criterio de Cartan. Lo mismo sucede para $\mathrm{Tr}(xy)$ en la Proposición 3.2.

Se puede demostrar que todos estos resultados se aplican también a cuerpos que no son algebraicamente cerrados. Para esto, habría que extender el cuerpo a una clausura algebraica, lo que se escapa del alcance de este trabajo.

Veamos algunos ejemplos de cómo se aplica este criterio:

Ejemplo 3.2. Si consideramos $L = \mathfrak{t}(n,F)$, tenemos $[LL] = \mathfrak{n}(n,F)$ y ya razonamos en el Ejemplo 1.11 que L es resoluble. Como vimos al final de la Proposición 3.2, si $x \in \mathfrak{n}(n,F)$ e $y \in \mathfrak{t}(n,F)$, entonces $\mathrm{Tr}(xy) = 0$, así que podemos ver cómo funciona el criterio de Cartan en este caso.

Ejemplo 3.3. Veamos un caso más abstracto: Sea $L = \langle x,y,z \rangle$ con $[xy] = z$, $[xz] = y$ e $[yz] = 0$, podemos ver que L forma un álgebra de Lie.

$$[x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] = [x0] - [yy] + [zz] = 0$$

Tenemos que $L^{(1)} = [LL] = \langle y,z \rangle$ y que $L^{(2)} = 0$, luego L es resouble. Para ver cómo se aplica el criterio de Cartan, estudiamos los adjuntos como matrices en $\mathfrak{gl}(L)$ con respecto a la base x,y,z:

$$\mathrm{ad}\,x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}\,y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}\,z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para $[LL]$ tenemos la base y,z, así que comprobamos la forma de Killing para cada combinación de estas dos bases.

$$\kappa(x,y)=\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\right]=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0$$
$$\kappa(x,z)=\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=0$$
$$\kappa(y,y)=\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\right]=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0$$
$$\kappa(y,z)=\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0$$
$$\kappa(z,z)=\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0$$

Luego $\kappa(a,b)=0\ \forall a\in L,\ \forall b\in[LL]$. Los tres últimos cálculos han sido triviales, pues tenemos que $L^{(2)}=[\langle y,z\rangle,\langle y,z\rangle]=0$.

Ejemplo 3.4. Sea ahora $L=\mathfrak{sl}(2,F)$, podemos tomar la base dada en el Ejemplo 1.9 con $L=\langle e_{12},e_{21},h\rangle$, donde $h:=e_{11}-e_{22}$. Tendremos los siguientes conmutadores:

$$\begin{aligned}
&[e_{12}e_{21}]=e_{11}-e_{22}=h\\
&[e_{12}h]=[e_{12}e_{11}]-[e_{12}e_{22}]=-e_{12}-e_{12}=-2e_{12}\\
&[e_{21}h]=[e_{21}e_{11}]-[e_{21}e_{22}]=e_{21}+e_{21}=2e_{21}
\end{aligned}$$

Ya mencionamos en el Ejemplo 1.9 que este álgebra será isomorfa a $\mathfrak{n}(3,F)$ si $\operatorname{char}F=2$, en cuyo caso $[e_{12}h]=[e_{21}h]=0$. Si $\operatorname{char}F\neq 2$, vemos que todas las matrices de la base son resultado de algún conmutador, así que sabemos que $L^{(1)}=[LL]=L$ y L no es resoluble. Dada la base e_{12},e_{21},h tenemos los siguientes adjuntos:

$$\mathrm{ad}\,e_{12}=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \mathrm{ad}\,e_{21}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad \mathrm{ad}\,h=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Como $[LL]=L$, el criterio de Cartan nos indica que L será resoluble si y solo si $\kappa(x,y)=0\ \forall x,y\in L$. Vemos que esto es falso para $x=y=h$:

$$\kappa(h,h)=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,h\,\mathrm{ad}\,h)=\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}=8$$

También es falso para $x=e_{12}$ e $y=e_{21}$:

$$\kappa(e_{12},e_{21})=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,e_{12}\,\mathrm{ad}\,e_{21})=\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\-1&0&0\end{pmatrix}\right]=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}=4$$

3.2. Radicales y el criterio de semisimplicidad

El segundo criterio de Cartan relaciona la forma de Killing y la semisimplicidad de un álgebra.

Definición 3.3. Dada un álgebra de Lie L, llamamos *radical* de L a la suma todos los ideales resolubles de L y lo denotamos como $R(L)$. Por la Proposición 1.6, $R(L)$ es también un ideal resoluble. Además, será el ideal resoluble maximal. Diremos que L es *semisimple* si $R(L) = 0$.

Definición 3.4. Dada una forma simétrica bilineal $\beta : L \times L \longrightarrow F$, llamamos *radical* de β al conjunto

$$S := \{x \in L \mid \beta(x,y) = 0\, \forall y \in L\}$$

Decimos que β es *no degenerada* si $S = 0$. En el caso de la forma de Killing, el radical de κ es un ideal, pues $\kappa([xy],z) = \kappa(x,[yz])\ \forall x,y,z \in L$.

Teorema 3.2 (Criterio de Cartan de semisimplicidad)**.** *[Hum72, pág. 22] Sea L un álgebra de Lie, L es semisimple si y solo si κ es no degenerada.* [1]

Demostración.

Sean L semisimple con $R(L) = 0$ y S el radical de κ. Por definición, $\kappa(x,y) = 0\ \forall x \in S,\ \forall y \in L$. En particular $\kappa(x,y) = 0\ \forall x \in S,\ \forall y \in [SS]$. La Proposición 3.2 nos dice entonces que $\mathrm{ad}_L S$ es resoluble, pues $\kappa(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_L x \, \mathrm{ad}_L y)$. Para ver que esto significa que S es resoluble, podemos considerar el primer teorema de homorfismos, que dice que el homorfismo $\mathrm{ad}_L|_S : S \to L$ tiene que $\mathrm{ad}_L S$ es isomorfo a $S/\ker \mathrm{ad}_L|_S$. Por lo tanto, $S/\ker \mathrm{ad}_L|_S$ es resoluble y $\ker \mathrm{ad}_L|_S$ es abeliano, así que podemos ver que S es resoluble según la Proposición 1,6. Luego $S \subseteq R(L) = 0$ por la maximalidad de $R(L)$ y κ es no degenerada.

Recíprocamente, supongamos que $S = 0$. Si $I \trianglelefteq L$ es un ideal cualquiera y tenemos $x \in I$ e $y \in L$, entonces $\mathrm{ad}\,x(L) \subseteq I$ y $\mathrm{ad}\,x(I) \subseteq [II]$. Lo mismo sucederá con $\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y$, luego $(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y)^2(L) \subseteq [II]$. Si I es abeliano, es decir, $[II] = 0$, entonces $(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y)^2 = 0$. Esto significa que $\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y$ es nilpotente, luego sus valores propios son todos nulos y $\kappa(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y) = 0$.

Esto implica que $\kappa(x,y) = 0\ \forall x \in I, y \in L$, luego $I \subseteq S = 0$ e $I = 0$. Es decir, no existen ideales abelianos en L excepto 0, luego 0 es el único ideal resoluble, pues un ideal resoluble más grande tendría un ideal abeliano no nulo como su penúltimo ideal de su serie derivada. Por lo tanto, $R(L) = 0$ y L es semisimple. □

El criterio de Cartan de resolubilidad nos indica que $R(L) = L$ si y solo si $[LL] \subseteq S$, mientras que este segundo criterio dice que $R(L) = 0$ si y solo si $S = 0$ y que $S \subseteq R(L)$. Por esto y por sus nombres, podría parecer que el radical de L y el radical de κ son el mismo conjunto. Sin embargo, este no es el caso en general:

Ejemplo 3.5. Podemos considerar de nuevo el álgebra $L = \langle x,y,z \rangle$ del Ejemplo 3.3. Este álgebra era resoluble, luego $R(L) = L$. Además, de la forma de Killing solo faltaba calcular $\kappa(x,x)$:

$$\kappa(x,x) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,x) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Vemos entonces que la forma de Killing κ será nula para cualquier combinación de elementos de esta base excepto para $\kappa(x,x) = 2$ si $\mathrm{char}\, F \neq 2$. Luego, sabemos que el radical de κ será $S = \langle y,z \rangle \neq L$.

[1] Élie Cartan, utilizando el trabajo de Killing, atacó la semisimplicidad de las álgebras de Lie usando su *forma de Cartan* ψ_2, que es proporcional a la forma de Killing. Este define primero las álgebras semisimples con la no degeneración de ψ_2 en vez de la suma directa de álgebras simples; y muestra en su tesis doctoral *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus* (1894) este criterio y el de resolubilidad. [Haw00, págs. 205-206]

En el caso de los endomorfismos, un endomorfismo semisimple se puede escribir como suma directa de endomorfismos *simples*, los que dejan invariantes solo al subespacio nulo y al espacio total. En un cuerpo algebraicamente cerrado, estos son solo las matrices 1×1, luego vemos que los endomorfismos semisimples son diagonalizables.

La semisimplicidad de un álgebra de Lie no está directamente relacionada con la de los endomorfismos. En general, los objetos matemáticos *semisimples* son los que se pueden escribir como suma de objetos *simples*, aunque esta no es la definición que hemos dado para álgebras semisimples.

Por otro lado, un álgebra de Lie es *simple* si no es abeliana y no tiene ideales propios. Para acabar, podemos mostrar que, en característica 0, un álgebra semisimple sí es suma de álgebras simples:

Teorema 3.3. *[Hum72, pág. 23] Un álgebra de Lie L es semisimple si y solo si se puede escribir como suma directa de ideales simples únicos.*

Demostración.

Supongamos que L es semisimple. Si L no tiene ideales propios, es inmediatamente simple, pues sabemos que L es no abeliana ya que $[LL] = 0$ implicaría que L es un ideal resoluble mayor que $R(L)$. Entonces, L tiene un ideal propio mínimo I. Podemos definir el *ortogonal* de este ideal como

$$I^\perp := \{x \in L \mid \kappa(x,y) = 0 \, \forall y \in I\}$$

Por las propiedades de κ, este conjunto es también un ideal. Además, $I \cap I^\perp$ es un ideal resoluble por el Criterio de Cartan de resolubilidad, por lo que es 0 y tenemos la suma directa $L = I \oplus I^\perp$. Sea entonces $L_1 := I$, L_1 y $L_1^\perp$ son semisimples, pues cualquiera de sus ideales son ideales de L. Además, L_1 es simple por su minimalidad, pues no contendrá ideales propios. Tenemos L escrita como suma directa de un álgebra simple L_1 y otra semisimple $L_1^\perp$, así que podemos seguir descomponiendo $L_1^\perp$ de la misma manera para obtener $L = L_1 \oplus L_2 \oplus L_2^\perp$ con L_2 simple y $L_2^\perp$ semisimple. Por inducción sobre $\dim L$, obtenemos la descomposición $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ en ideales simples.

Para ver que esta descomposición es única, podemos pensar en un ideal simple no nulo $I \trianglelefteq L$ cualquiera, que tiene que $[IL] = [IL_1] \oplus \cdots \oplus [IL_n]$ es no nulo, pues $Z(L) = 0$. Por otro lado, $[IL] = I$ por ser I simple, así que solo uno de los conmutadores $[IL_i]$ es no nulo. En caso contrario, I sería suma directa de más de un ideal y no sería simple. Por lo tanto, $[IL_i] = I \subseteq I \cap L_i$, luego $I \subseteq L_i$ e $I = L_i$ por la simplicidad de L_i. Entonces, no existen ideales simples diferentes de $L_1, \ldots, L_n$ y la descomposición $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ es única.

Recíprocamente, si podemos escribir $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ con L_i ideales simples, podemos pensar en un ideal abeliano $J \trianglelefteq L$. Entonces, $[JL_i]$ es un ideal abeliano de L_i, así que será nulo por ser L_i simple. Luego $[JL] = [JL_1] \oplus \cdots \oplus [JL_n] = 0$ y $J \subseteq Z(L)$. Por otro lado, tenemos que $Z(L) = Z(L_1) \oplus \cdots \oplus Z(L_n) = 0$ por la simplicidad de cada L_i, así que $J = 0$ y L es semisimple. $\square$

Bibliografía

[Hum72] James E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. New York, NY: Springer, 1972.

[Jac79] Nathan Jacobson. *Lie Algebras*. New York, NY: Dover, 1979.

[SW86] D. H. Sattinger y O. L. Weaver. *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics*. New York, NY: Springer, 1986.

[Ser87] Jean-Pierre Serre. *Complex Semisimple Lie Algebras*. New York, NY: Springer, 1987.

[Ser92] Jean-Pierre Serre. *Lie Algebras and Lie Groups. 1964 Lectures given at Hardvard University*. Berline, Heidelberg: Springer, 1992.

[Haw00] Thomas Hawkins. *Emergence of the Theory of Lie Groups*. New York, NY: Springer, 2000.

[EW06] Karin Erdmann y Mark J. Wildon. *Introduction to Lie Algebras*. London: Springer, 2006.

[Neu10] Max Neunhöffer. *Lie Algebras*. Disponible en `http://www.math.rwth-aachen.de/~Max.Neunhoeffer/Teaching/liealg/liealg2011.pdf`. 2010.