



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Propagación de rumores en redes de orden superior

Autor:

Gaspar LLoret Gutiérrez-Colón

Directores:

Yamir Moreno Vega

Alberto Aleta Casas

Junio 2024

Índice

1. Introducción	1
2. Base teórica general	2
2.1. Adaptación del Modelo SIR para rumores	2
2.2. Redes y simulaciones	4
2.3. Redes elegidas	4
3. Redes de Primer Orden	5
3.1. Redes de Watts-Strogatz	5
3.1.1. Introducción a las Redes de Watts-Strogatz	5
3.1.2. Configuración del Modelo	7
3.1.3. Resultados	7
3.2. Redes de Barbási-Albert	9
3.2.1. Introducción a las Redes de Barbási-Albert	9
3.2.2. Configuración del Modelo	11
3.2.3. Resultados	12
3.3. Comparación de Redes de Primer orden y Conclusiones: Watts-Strogatz y Barbasi-Albert	13
4. Redes de Orden Superior: Random Networks con Clustering de Newman	15
4.1. Redes de Orden Superior	15
4.2. Random Networks con Clustering de Newman	16
4.3. Propagación de rumores en Random Networks con Clustering de Newman	18
4.4. Configuración de la Red	19
4.5. Resultados	21
5. Resultados y Conclusiones	23
5.1. Resultados Clave en Redes de Primer Orden	23
5.2. Resultados Clave en Redes de orden Superior	24
5.3. Conclusiones	24
6. Referencias	25

1. Introducción

Vivimos en una sociedad altamente interconectada, donde diariamente recibimos centenares de inputs informativos de diferente tipo, que nos llega a través de nuestro entorno. Esta información la recibimos por parte de nuestros grupos de amigos, familia, entorno laboral o por parte de nuestros contactos en cualquiera de las múltiples redes sociales que usamos. Mucha de esta información es falsa, a medias o totalmente, y es conocida como rumores. Estos rumores no son eternos, ya que se acaba sabiendo que son falsos y dejan de propagarse, pero perduran un tiempo, y pueden llegar a ser muy perjudiciales. Es por ello que su estudio es tan importante.

El objetivo principal de este trabajo es examinar la propagación de rumores en redes de orden superior, utilizando como base fundamental el estudio preliminar de redes de primer orden. Este enfoque nos permite establecer un punto de referencia comparativo y facilita una comprensión más profunda de cómo los rumores se propagan a través de diferentes tipos de redes y de como estas y sus mecanismos se asemejan a las redes que se pueden encontrar en el mundo real.

Para analizar la propagación de rumores, este estudio se basará en un enfoque de simulación que se asemeja a los modelos epidemiológicos del tipo SIR (Susceptible-Infectious-Recovered), aplicado al contexto de redes sociales y de comunicación. En este modelo, los individuos dentro de la red se clasifican en tres categorías en función de su estado respecto a un rumor: ignorantes (susceptibles, que no han escuchado el rumor), spreaders (infectados, que están propagando activamente el rumor) y stiflers (recuperados, que conocen el rumor pero han dejado de propagarlo).

En particular, nos centraremos en la proporción final de stiflers, ya que esta métrica indica la cobertura o alcance del rumor dentro de la red, ofreciendo una medida de cuántos individuos han sido informados al final del proceso. Este análisis no se enfoca en la velocidad de propagación, sino más bien en la extensión y saturación del rumor, bajo la hipótesis de que ciertos mecanismos de propagación en redes de orden superior pueden incrementar la proporción de stiflers siempre que la red no se sature demasiado rápidamente.

Esta metodología nos permitirá explorar las características de diferentes topologías de redes y proporcionar una visión comparativa sobre cómo las propiedades estructurales de las mismas pueden influir en la propagación de información. En las redes de primer orden, tales como las redes de Watts-Strogatz y Barabási-Albert, la propagación puede ser influenciada significativamente por la topología de la red. Por eso examinaremos 2 tipos diferentes de redes de primer orden. Sin embargo, estos modelos no capturan completamente la dinámica de las interacciones grupales que son más prevalentes en escenarios sociales reales, donde los rumores no solo se propagan de uno a uno, sino a través de grupos de individuos.

El enfoque en redes de orden superior para estudiar la propagación de rumores responde a la naturaleza social de este fenómeno, en el que las interacciones grupales juegan un papel crítico, a diferencia de los procesos de propagación de enfermedades, que tienen un carácter biológico. La transmisión de un rumor puede ocurrir en diversos contextos: desde conversaciones individuales hasta discusiones en grupos de amigos o a través de plataformas online de redes sociales. Estas dinámicas grupales, donde los individuos se influyen mutuamente, son cruciales para entender

cómo se propaga un rumor.

Para abordar esta complejidad, este estudio se centrará en redes de orden superior que incorporan elementos de clustering, como las redes aleatorias con clustering de Newman. Estas redes no solo facilitan la simulación de las interacciones dentro de pequeños grupos sino que también permiten explorar cómo la estructura de estas conexiones afecta la propagación del rumor. Al emplear estas topologías, se espera identificar patrones de difusión que destacan el papel de las agrupaciones y la conectividad entre grupos en la dinámica de los rumores.

Este trabajo ha sido estructurado de manera que cada una de estas 3 redes mencionadas, tiene su propia introducción, análisis teórico, explicación del experimento y conclusiones. Más adelante, las conclusiones se agruparán para formar conclusiones de las redes de primer orden en conjunto, y después de todas las redes analizadas en general. Se ha decidido adoptar esta metodología debido a que la explicación teórica de todas las redes, luego la explicación de los 3 experimentos más luego las 3 conclusiones de golpe puede resultar pesado y lioso para el lector.

La hipótesis central de este trabajo es que los mecanismos de propagación en redes de orden superior aumentarán el número final de stiflers (individuos informados que ya no propagan el rumor). Este fenómeno se estudiará a través de la observación de la proporción de stiflers al final de un proceso de propagación, considerando esta métrica como un indicativo de cuánta parte de la red ha sido alcanzada por el rumor. Importante destacar, la velocidad de propagación no será un foco de este trabajo, sino la extensión final de la propagación en términos de cobertura dentro de la red.

Esta introducción pretende sentar las bases para explorar en detalle tanto las redes de primer orden como las de orden superior, proporcionando un análisis comparativo que destaque cómo las diferencias estructurales entre estos tipos de redes pueden influir en la dinámica de propagación de rumores.

2. Base teórica general

2.1. Adaptación del Modelo SIR para rumores

El modelo SIR clásico usado en epidemiología, es un tipo de modelo matemático utilizado para describir la dinámica de las infecciones dentro de una población. Es ampliamente empleado en epidemiología para estudiar cómo se propagan las enfermedades contagiosas a través de las interacciones entre individuos. El acrónimo SIR representa tres categorías distintas en las que se puede clasificar a los individuos de una población durante el brote de una enfermedad:

- **Susceptible (S):** Son aquellos individuos que no han sido infectados pero son susceptibles a contraer la enfermedad.
- **Infectado (I):** Individuos infectados que transmiten la enfermedad a los susceptibles.
- **Recuperado (R):** Individuos recuperados de la infección, adquiriendo inmunidad, por lo que ya no pueden infectarse ni propagar la infección.

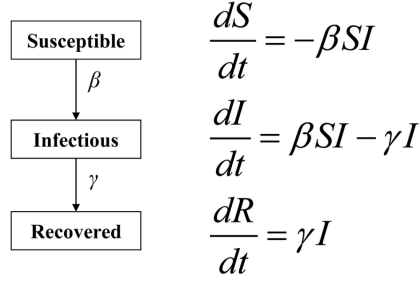


Figura 1: Esquema y formalismo matemático del modelo SIR [1].

El modelo utiliza un conjunto de ecuaciones diferenciales para representar cómo cambian estos grupos a lo largo del tiempo, basándose en tasas de contacto, transmisión y recuperación. La dinámica esencial que modela el SIR es la transferencia de individuos de una categoría a otra, comenzando por susceptibles que han estado en contacto con infectados se convierten en infectados con una cierta probabilidad β , y de ahí, a medida que pasa el tiempo, estos se recuperan con una probabilidad γ , pasando al grupo de recuperados. Este modelo no solo ayuda a entender el comportamiento de las epidemias sino también a predecir su evolución y a evaluar diferentes estrategias de control, como la vacunación o el distanciamiento social, para mitigar su impacto.

En el caso del modelo usado en este trabajo también hay 3 categorías:

- **Ignorantes (ϕ):** Son aquellos individuos que no son conocedores del rumor.
- **Spreaders (ψ):** Individuos que conocen el rumor y estan dispuestos a propagarlo.
- **Stiflers (s):** Individuos que conocen el rumor y que no solo no van a transmitirlo si no que van a ayudar a combatirlo.

En el caso de los rumores el mecanismo de propagación funciona un poco diferente que el mecanismo del modelo SIR. Las principales diferencias son que en el modelo de propagación de rumores, para que un individuo que es spreader se convierta en stifler, este necesita entrar en contacto con un stifler o con otro spreader. Nombraremos (λ) la probabilidad de transmisión del rumor, es decir, de que un ignorante se convierta en spreader por contacto con un spreader, y declararemos $1/(\alpha)$ la probabilidad de que un stifler se convierta en un stifler. Seguidamente una guía de todas las posibles conversiones y sus probabilidades:

$$\begin{array}{ll} \psi + \phi \longrightarrow \psi + \psi & \text{con probabilidad } \lambda \\ \psi + s \longrightarrow s + s & \text{con probabilidad } 1/\alpha \\ \psi + \psi \longrightarrow s + \psi & \text{con probabilidad } 1/\alpha \end{array}$$

Usando la aproximación del campo medio (mean-field approximation) y suponiendo una conectividad homogénea de la red, la evolución temporal de ignorantes, spreaders y stiflers está

descrita por el siguiente conjunto simple de ecuaciones [2]:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\lambda\psi(t)\phi(t) \quad (1)$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \lambda\psi(t)\phi(t) - \frac{1}{\alpha}\phi(t)[\phi(t) + s(t)]\phi(t) \quad (2)$$

donde $s(t)$ se obtiene por la condición de normalización $s(t) = 1 - \psi(t) - \phi(t)$. La dinámica del sistema lo hace evolucionar hasta el estado $\phi(\infty) = 0$, en el cual el sistema se congela.

También es importante que las condiciones iniciales para cualquier modelo usado en este trabajo serán las mismas: se empezará con todos los nodos de la red como ignorantes menos uno (aleatorio) que será spreader.

2.2. Redes y simulaciones

En este estudio, utilizamos grafos para representar la propagación de rumores en redes, ya que ofrecen un marco matemático y visual para estructurar interacciones y conexiones entre individuos. Los grafos son útiles para modelar dinámicas complejas de red de manera computacionalmente eficiente y conceptualmente clara, facilitando tanto el análisis teórico como las simulaciones.

Para simular la propagación de rumores se han creado programas de Python específicamente diseñados para cada red. La mayor complicación de estos códigos se halla en la parte del proceso de propagación, en el análisis estadístico de los datos y en generar suficientes veces cada red para cada situación para que la varianza sea mínima. Para la creación del grafo que se usa como red base de la propagación se ha empleado la biblioteca NetworkX de Python, que permite la creación y manipulación de estructuras de redes complejas. A través de estos grafos y gracias a los programas creados, asignamos estados como ignorante, propagador y stifler a los nodos y aplicamos reglas de transición basadas en sus conexiones. Estas simulaciones nos ayudan a observar el desarrollo y los efectos de la propagación de rumores bajo diversas condiciones y parámetros de red.

El tamaño de la red, denotado por N , se selecciona considerando los objetivos del estudio y las restricciones computacionales. Optamos por un N que puede variar entre 10^3 y 10^5 , equilibrando la precisión de la simulación con la capacidad de cómputo disponible. Este rango proporciona una base realista para representar grandes poblaciones y asegura la fiabilidad de los resultados obtenidos en el estudio.

2.3. Redes elegidas

En este estudio sobre la propagación de rumores, se seleccionaron tres tipos de redes por sus características estructurales distintivas que influyen en la dinámica de los rumores: las redes Watts-Strogatz (WS), Barabási-Albert (BA), y las redes con clustering de Newman. Las redes WS, ajustadas a $p = 1$, permiten explorar la difusión en una configuración de red aleatoria,

sin los clústeres típicos de un mundo pequeño. Las redes BA, con su estructura con nodos hub, facilitan el estudio del impacto de individuos altamente conectados en la propagación de rumores. Finalmente, las redes de Newman, que modelan comunidades cerradas mediante triángulos, ofrecen una perspectiva sobre cómo las interacciones dentro de grupos densos afectan la transmisión de información. Cada modelo se seleccionó no solo por su relevancia teórica sino también por su aplicabilidad en escenarios reales, proporcionando una base sólida para comparar la difusión de rumores en diversas estructuras sociales.

3. Redes de Primer Orden

3.1. Redes de Watts-Strogatz

3.1.1. Introducción a las Redes de Watts-Strogatz

Las redes de Watts-Strogatz (WS), introducidas por Duncan Watts y Steven Strogatz en 1998 [8], representan un modelo intermedio entre las redes regulares y las redes aleatorias. Este modelo se distingue por su capacidad de capturar el fenómeno de *mundo pequeño*, que es prevalente en muchas redes sociales y otros tipos de redes tanto en la naturaleza como en estructuras tecnológicas. La generación de una red WS comienza con un anillo de nodos n , cada uno conectado con sus k vecinos más próximos. Posteriormente, se reconectan aleatoriamente los enlaces con una probabilidad p , introduciendo “atajos” que pueden disminuir significativamente la distancia media entre los nodos en la red.

En las redes de Watts-Strogatz (WS), el uso de una baja probabilidad de reconexión p resulta en una reducción significativa del diámetro de la red, facilitando conexiones rápidas entre nodos, un fenómeno que refleja los “seis grados de separación” típicos de las redes sociales reales. Estas redes también presentan un alto coeficiente de agrupamiento, especialmente con valores bajos de p , lo que simula grupos sociales estrechamente vinculados. Este alto nivel de agrupamiento aumenta la robustez de la red, permitiendo que siga funcionando eficazmente incluso cuando algunos nodos fallan, garantizando que la propagación de información o rumores continúe a pesar de interrupciones en la red.

Dado el objetivo que se tiene en este trabajo, se decidió usar $p=1$, ya que al usar una red WS, reproduce mucho mejor una red de contactos real que con cualquier otra probabilidad. De esta manera se obtiene una red totalmente aleatoria de la cual se sabe el número promedio de aristas $\langle k \rangle$. Ya sabiendo esto podemos conocer el número total de enlaces que configuran esta red:

$$E = \frac{n\langle k \rangle}{2} \quad (3)$$

Es importante conocer el coeficiente de agrupamiento, que es el que mide la tendencia de los nodos a formar clústeres o triángulos en la red. Para una red aleatoria simple, el coeficiente de agrupamiento se puede aproximar por la siguiente fórmula:

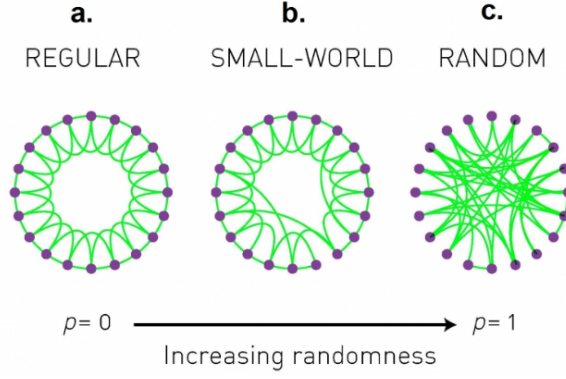


Figura 2: Redes Watts-Strogatz y el efecto de cambiar la probabilidad de reconexión de los nodos [3].

$$C \approx \frac{\langle k \rangle}{n} \quad (4)$$

También sabiendo los principios básicos de esta red podemos conocer los formalismos matemáticos que rijen la estadística de la red, como por ejemplo la distribución de grado, que sabemos que sigue una distribución de Poisson:

$$P(k) \approx \frac{\langle k \rangle^k e^{-\langle k \rangle}}{k!} \quad (5)$$

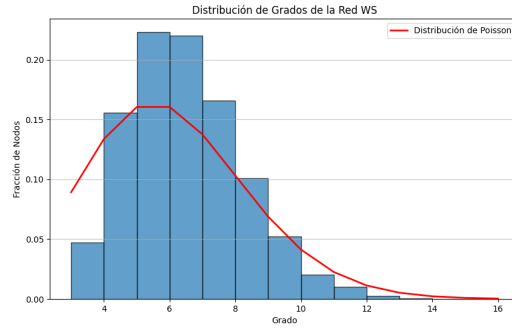


Figura 3: Distribución de grados de conexión en los nodos de una red Watts-Strogatz y la comparación con una distribución Poissoniana.

Como podemos ver en la Figura 3, la distribución de grado de una red WS sigue una distribución de probabilidad Poissoniana. Se puede ver claramente como sigue la forma, aunque en el pico de la distribución, el histograma supera con creces a la distribución teórica. Esto es debido a la falta de muestras, ya que solo llega hasta grado 14. Esto es muy importante de destacar, ya que esta característica en concreto de este tipo de distribuciones, es el que hace que en redes WS no haya hubs (nodos con muchísimas más conexiones que todos los otros nodos). Este descenso tan brusco a partir del pico generado por el grado medio es debido al factorial que se usa como

denominador, y puede ser explicado utilizando la aproximación de Stirling en la fórmula de la distribución Poissoniana:

$$k! \approx \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k \quad (6)$$

$$P(k) \approx \frac{\langle k \rangle^k e^{-\langle k \rangle}}{k!} \longrightarrow P(k) = \frac{e^{-\langle k \rangle}}{\sqrt{2\pi k}} \left(\frac{e\langle k \rangle}{k}\right)^k \quad (7)$$

En el momento que k supera el valor de $e\langle k \rangle$, el descenso del valor de $P(k)$ es tan brusco que la probabilidad de que existan nodos con un grado mucho mayor al grado medio se vuelve despreciable. Esta característica es la que imposibilita la existencia de los hubs característicos de las redes reales.

3.1.2. Configuración del Modelo

Para la simulación de la propagación de rumores en redes de Watts-Strogatz (WS), se implementó un modelo computacional en Python que clasifica a cada nodo dentro de la red en uno de tres posibles estados: ignorante, propagador y stifler. Los parámetros fundamentales empleados en las simulaciones incluyen la probabilidad de propagación (λ), establecida en 1, garantizando que cada contacto entre un propagador y un ignorante resulte en una transmisión exitosa del rumor. La probabilidad de que un propagador se convierta en stifler (α) se varió de 0.1 a 1 en incrementos de 0.1, lo que ajusta la frecuencia con la que los propagadores cesan en su actividad tras contactar a otro propagador o a un stifler.

La red WS se generó con parámetros específicos que incluyen el número de nodos (N), el número de vecinos iniciales (k), y la probabilidad de reconexión (p). Se empleó una matriz de adyacencia para modelar las interacciones entre los nodos, facilitando así la simulación de la dinámica de la red.

El proceso de simulación inicia con la mayoría de nodos configurados como ignorantes, a excepción de uno, que asume el rol de propagador inicial. Este propagador tiene la posibilidad de convertir a sus vecinos ignorantes en propagadores según una probabilidad λ , y de transformarse en stifler dado el contacto con otro propagador o un stifler, con probabilidad $1/\alpha$. El proceso concluye cuando no quedan propagadores activos, señalando el cese del rumor.

Los resultados son analizados para explorar la influencia de λ y α en la propagación y en la distribución final de stiflers. Este análisis ayuda a entender cómo las configuraciones de la red y las características del modelo afectan la dinámica de propagación de rumores. Estos fundamentos son cruciales para las discusiones en secciones posteriores que comparan los hallazgos con modelos teóricos existentes.

3.1.3. Resultados

Se generó una red de Watts-Strogatz con los siguientes parámetros:

- Número total de nodos (N): 10,000.
- Número promedio de vecinos por nodo (k): 6.
- Probabilidad de reconexión (p): 1, lo que efectivamente transforma la red en una red aleatoria debido a la alta probabilidad de reconexión.

Estos parámetros aseguran que la red tenga un alto grado de aleatoriedad, similar a muchas redes sociales en las que los usuarios pueden conectarse con una gran variedad de otros usuarios sin restricciones geográficas o sociales significativas.

El modelo utilizado clasifica a cada nodo en uno de tres estados: ignorante, propagador o stifler. Inicialmente, todos los nodos se configuran como ignorantes, excepto por un único nodo seleccionado al azar que se establece como propagador inicial. La probabilidad de propagación del rumor (λ) se fijó en 1, indicando que cada contacto entre un propagador y un ignorante resultará con certeza en la conversión del ignorante a propagador.

El proceso se repite hasta que no quedan propagadores, momento en el cual la simulación termina y se recopilan los datos finales de estado para cada nodo. El objetivo de este análisis es obtener la proporción final de stiflers en las simulaciones una vez el proceso haya acabado, a la que llamaremos R_{WS} .

α	1	2	3	4	5	6	7	8
R_{WS}	0.8273	0.9514	0.9842	0.9946	0.9981	0.9993	0.9997	0.9999
Std. Dev.	0.0052	0.0024	0.0013	0.0007	0.0004	0.0002	0.0001	0.0001

Tabla 1: Valores de R_{WS} y sus desviaciones estándar para diferentes valores de α .

Estos datos han sido obtenidos promediando los valores finales de 200 redes por α , y su fiabilidad esta respaldada por el artículo [2] de Yamir Moreno sobre propagación de epidemias en redes complejas, en donde obtienen los mismos valores de stiflers para la misma red con las mismas condiciones.

Como se puede ver en la Tabla 1, a mayor α , más le cuesta a los spreaders convertirse en stiflers, y más tiempo tienen para esparcir el rumor. Por lo cual, a medida que crece α , el valor de la proporción final de stiflers se acerca más a 1 y su desviación estándar disminuye, ya que cada vez, el rumor llega a más nodos. Que el rumor será más difícil de frenar, no significa que su propagación sea más lenta. Es importante recordar que debido a que no hay mecanismo de olvido (que un stifler se pueda convertir en ignorante), y de que los spreaders entre ellos se pueden convertir en stiflers, el fin del rumor es inevitable. Es por eso que por muy alto que sea el valor de α , y por lo tanto, por mucho que le cueste a un spreader convertirse en un stifler, es inevitable que el rumor llegué a su fin.

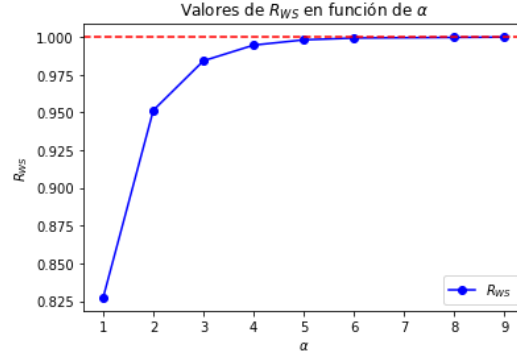


Figura 4: Porcentaje final de stiflers en una red WS en función de α .

3.2. Redes de Barabási-Albert

3.2.1. Introducción a las Redes de Barabási-Albert

Las redes de Barabási-Albert (BA) representan un modelo clave en el estudio de sistemas complejos y redes, especialmente conocidas por su capacidad para generar distribuciones de grado que siguen una ley de potencia, lo que las categoriza dentro de las redes libres de escala (scale-free). Este modelo fue introducido por Albert-László Barabási y Réka Albert en 1999 [7], basándose en dos mecanismos fundamentales: crecimiento y conexión preferencial. En este tipo de redes, se empieza con m_0 nodos iniciales, y se van añadiendo nuevos nodos a la red. Cada nuevo nodo se une a m nodos ya existentes en la red. Estos nuevos nodos se conectan a los nodos ya existentes con una probabilidad que es proporcional al número de conexiones que uno de estos nodos anteriores ya tiene, favoreciendo así la formación de “hubs” o nodos altamente conectados.

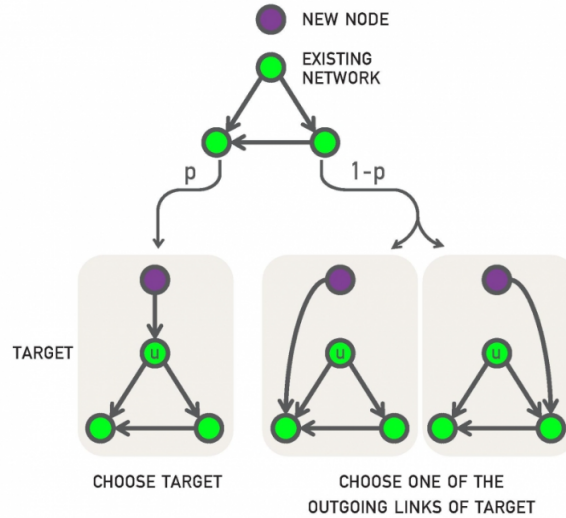


Figura 5: Ejemplo de la creación de una red Barbas-Albert[3].

En el modelo BA, la probabilidad Π de que un nuevo nodo se conecte a un nodo existente i es proporcional al grado k_i del nodo existente, y se formaliza como:

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

Esta regla de conexión preferencial implica que los nodos con más conexiones tienen una probabilidad mayor de recibir nuevas conexiones, lo que favorece la formación de hubs.

Las redes BA son cruciales para entender cómo las interacciones en grandes sistemas tienden a no ser uniformes o aleatorias, sino que algunos nodos actúan como centros neurálgicos con una cantidad significativamente mayor de conexiones. Estos hubs tienen un impacto desproporcionado en la dinámica de la red, incluyendo la robustez y la vulnerabilidad a ataques o fallos. Además, las redes BA muestran un diámetro pequeño (fenómeno de “mundo pequeño”), lo que implica que la mayoría de los nodos pueden ser alcanzados desde cualquier otro nodo a través de solo unos pocos pasos, a pesar del tamaño grande de la red.

Una de las propiedades más notables del modelo BA es que la distribución de grado $P(k)$ sigue una ley de potencia, es decir, la probabilidad de que un nodo tenga un grado k disminuye como una función de k elevado a una potencia negativa. Para redes suficientemente grandes, esta distribución de grado se aproxima a:

$$P(k) \sim k^{-\gamma} \quad (8)$$

En el modelo Barabási-Albert, γ es un parámetro fundamental que caracteriza la distribución de grado de la red. Específicamente, γ es el exponente de la ley de potencia que describe cómo la probabilidad $P(k)$ de que un nodo tenga un grado k decrece con el aumento de k . Para muchas redes reales y en particular para las redes BA, este exponente α tiene un valor típico alrededor de 3, lo que refleja una caída rápida en la probabilidad de encontrar nodos con grados muy altos.

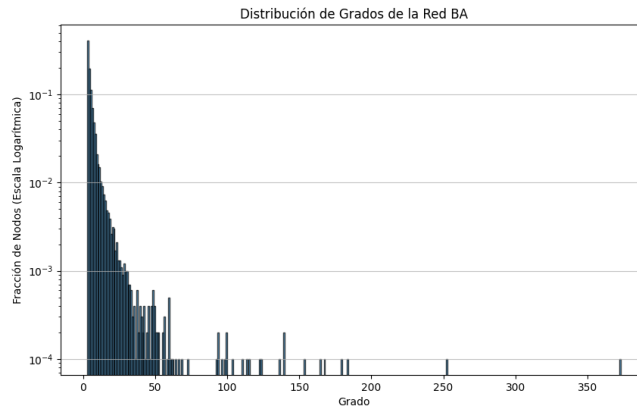


Figura 6: Distribución de grado de una red Barabasi-Albert usada para el estudio.

La Figura 6 sirve para representar como es la distribución de grados de una red BA. Se

puede apreciar como la mayoría de nodos solo tienen una conexión, mientras que en la misma red coexiste un nodo con alrededor de 400 conexiones y otro de 250. Estos últimos serían los conocidos como hubs.

Aún con esta distribución, si se quiere saber el grado promedio de una red de Barabási-Albert, solo hace falta multiplicar por 2 el número de conexiones que cada nuevo nodo realiza al ser agregado a la red:

$$\langle k \rangle = 2m \quad (9)$$

El grado de un nodo $k_i(t)$ en el tiempo t puede aproximarse considerando el momento t_i en el que el nodo i fue añadido a la red. La fórmula que describe esta evolución es:

$$k_i(t) \approx m \left(\frac{t}{t_i} \right)^\beta \quad (10)$$

donde m es el número de conexiones que cada nuevo nodo realiza al ser agregado, y $\beta = 1/2$. Esto muestra cómo los nodos más antiguos tienden a tener más conexiones debido al mecanismo de preferencia de conexión.

Además, el número total de enlaces E en una red BA con t nodos se puede determinar fácilmente. Dado que cada nuevo nodo se conecta con m nodos ya existentes, el número total de enlaces en la red es:

$$E(t) = mt \quad (11)$$

Las redes de Barabási-Albert son fundamentales para analizar la propagación de rumores debido a su estructura única, que incluye nodos hub con muchas conexiones que pueden acelerar significativamente la difusión de información. Estos hubs son esenciales para comprender cómo la información y la desinformación pueden persistir y volverse virales en redes sociales.

Estudiar estas redes permite desarrollar estrategias dirigidas para combatir la desinformación, enfocándose en los hubs para controlar efectivamente la dispersión de rumores. Además, este análisis ofrece insights sobre la optimización de campañas de información, asegurando que alcanzan extensivamente a través de comunidades altamente conectadas, lo cual es crucial para manejar la dinámica de información en nuestra sociedad interconectada.

3.2.2. Configuración del Modelo

La simulación utiliza una red BA, generada y analizada siguiendo estos parámetros:

- Número de nodos (N): Cualquier selección entre 10^3 y 10^5 nodos servirá para asegurar que la red sea amplia, representando así un sistema complejo y manteniendo la simulación computacionalmente viable.
- Número inicial de nodos (m_0): Este parámetro define el número de nodos en la red inicial antes de comenzar a añadir nodos adicionales según el mecanismo de conexión preferencial.

Este valor inicial puede influir en la topología inicial de la red y en la eficiencia de la propagación inicial del rumor.

- Número de conexiones por cada nuevo nodo (m): Cada nuevo nodo se conecta con m nodos existentes en la red. Este parámetro es crucial porque determina la densidad de conexiones y la rapidez con la que un nodo recién añadido se integra en la estructura de la red.

En el modelo empleado, se establece la probabilidad de transmisión del rumor (λ) en 1, asegurando que cada interacción entre un propagador y un ignorante resulte en una transmisión efectiva del rumor. El parámetro α , que regula la conversión de propagadores a stiflers, es variado para explorar cómo diferentes predisposiciones de los nodos para cesar de propagar influyen la dinámica de la red. Este enfoque es esencial para comprender cómo la estructura de la red de Barabási-Albert, especialmente la presencia de hubs, junto con los parámetros de la simulación, afectan la propagación del rumor. El objetivo es observar cómo un mecanismo de propagación de rumores impacta en una red caracterizada por nodos centrales prominentes, ofreciendo insights sobre la eficacia y velocidad de la difusión de información en contextos sociales complejos.

3.2.3. Resultados

La metodología de simulación empleada para estudiar la propagación de rumores utilizó una red de Barabási-Albert, configurada con parámetros específicos para reflejar una estructura de red libre de escala típica de muchas redes sociales digitales. La simulación se implementó en Python, utilizando la biblioteca NetworkX, que ofrece funciones predefinidas para generar redes de Barabási-Albert.

Se generó una red de Barabási-Albert con los siguientes parámetros:

- Número total de nodos (N): 10,000.
- Número inicial de nodos (m_0): 3.
- Número promedio de conexiones por cada nuevo nodo (m): 3.

En este estudio se implementa un modelo de red libre de escala con alta conectividad, permitiendo interacciones entre nodos sin restricciones significativas. Los nodos se clasifican en tres categorías: ignorantes, propagadores o stiflers. Inicialmente, todos los nodos son configurados como ignorantes, excepto por uno seleccionado aleatoriamente que se establece como el propagador inicial. La probabilidad de propagación del rumor, denotada por λ , se fija en 1, garantizando que cualquier interacción entre un propagador y un ignorante convertirá al último en propagador. El proceso se perpetúa hasta que no quedan propagadores activos, culminando con la recopilación de la proporción final de stiflers, indicada como R_{BA} . Este valor refleja el alcance total del rumor al finalizar la simulación.

Estos datos han sido obtenidos promediando los valores finales de 200 redes por α . En este caso vuelve a ocurrir que los datos se ven respaldados por el artículo de Yamir Moreno sobre

α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R_{BA}	0.3763	0.6542	0.7676	0.8379	0.8759	0.9052	0.9235	0.9363	0.9461	0.9537
Std. Dev.	0.1151	0.0812	0.0949	0.0596	0.0623	0.0040	0.0035	0.0030	0.0030	0.0027

Tabla 2: Valores de R_{BA} y sus desviaciones estándar para diferentes valores de α .

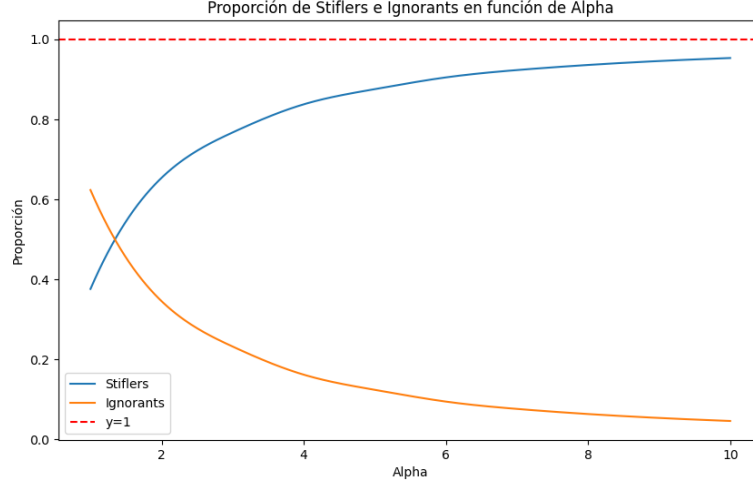


Figura 7: Proporción de Stiflers e Ignorants en una red Barabasi-Albert en función de α .

propagación de epidemias en redes complejas, donde para las mismas condiciones obtiene los mismos resultados aquí obtenidos.

Como se observa, a medida que va aumentando α , el valor de la proporción final de Stiflers se acerca más a 1 y su desviación estándar disminuye. Esto se debe a que a mayor valor de α , más le cuesta al rumor frenarse y a más nodos llega. Como se puede apreciar, para la primera α , el porcentaje de Ignorants es mayor que el de Spreaders, algo que solo se ve en este caso concreto de esta α en esta red. Este bajo porcentaje de Stiflers en esta primera α es debido a la gran conectividad de los nodos en esta red, pero esto es algo que se discutirá en el siguiente apartado, cuando se puedan extraer más conclusiones gracias a la comparación entre redes de primer orden.

3.3. Comparación de Redes de Primer orden y Conclusiones: Watts-Strogatz y Barabasi-Albert

Se ha decidido comparar estas dos redes en un apartado especial, ya que de las 3 redes que se analizarán, son las más comparables entre sí, ya que las 2 son de primer orden.

En el análisis de cómo se propagan los rumores, las redes de Watts-Strogatz (WS) y Barabási-Albert (BA) revelan importantes diferencias estructurales que afectan la difusión de la información. Las WS, con su alta agrupación y caminos cortos, permiten una diseminación efi-

ciente de información dentro de grupos locales densos, mientras que las BA, caracterizadas por nodos dominantes (hubs), pueden acelerar o contener la propagación de rumores dependiendo de la activación de estos hubs. Estas diferencias son clave para diseñar estrategias de comunicación efectivas: en WS, una estrategia uniforme sería apropiada, mientras que en BA, concentrarse en los hubs sería esencial. Este análisis resalta la importancia de seleccionar el modelo de red adecuado basado en los objetivos del estudio y la naturaleza del sistema.

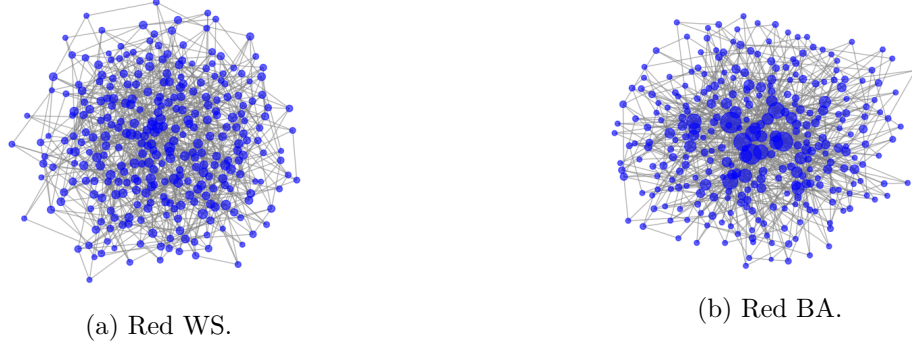


Figura 8: Red WS y red BA de 300 nodos cada una, con el tamaño de los nodos proporcional a su número de conexiones.

En la Figura 8 se muestran claramente los 2 tipos de redes, con solo 300 nodos cada una y con el tamaño de los nodos proporcional a su número de conexiones para facilitar su visualización. Es fácil de observar que la red WS es una red bastante homogénea, donde la mayoría de nodos tienen el mismo número de conexiones, mientras que la red BA está controlada por unos pocos nodos centrales que acaparan la gran mayoría de conexiones mientras los otros nodos tienen pocas. Una vez recordadas y visualizadas las características de cada red, se pasa a ver los resultados numéricos de cada una y a compararlos:

α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R_{WS}	0.8273	0.9514	0.9842	0.9946	0.9981	0.9993	0.9997	0.9999	0.9999	0.9999
R_{BA}	0.3763	0.6542	0.7676	0.8379	0.8759	0.9052	0.9235	0.9363	0.9461	0.9537

Tabla 3: Valores de R_{BA} y R_{WS} para diferentes valores de α .

Al comparar las proporciones finales de stiflers, R , en redes de Watts-Strogatz y Barabási-Albert para diferentes valores de α , observamos una diferencia significativa en cómo las estructuras de red influyen en la dinámica de propagación de rumores. Los datos numéricos revelan que en las redes WS se alcanza rápidamente una alta proporción de stiflers, aproximándose a 1 incluso para valores bajos de α . Esto destaca la eficiencia de las redes WS en dispersar rápidamente el rumor a través de sus conexiones densas y homogéneas.

Por otro lado, las redes BA muestran una propagación más gradual del rumor, con R incrementando más lentamente a medida que α aumenta. Esto se debe a la influencia de los hubs en

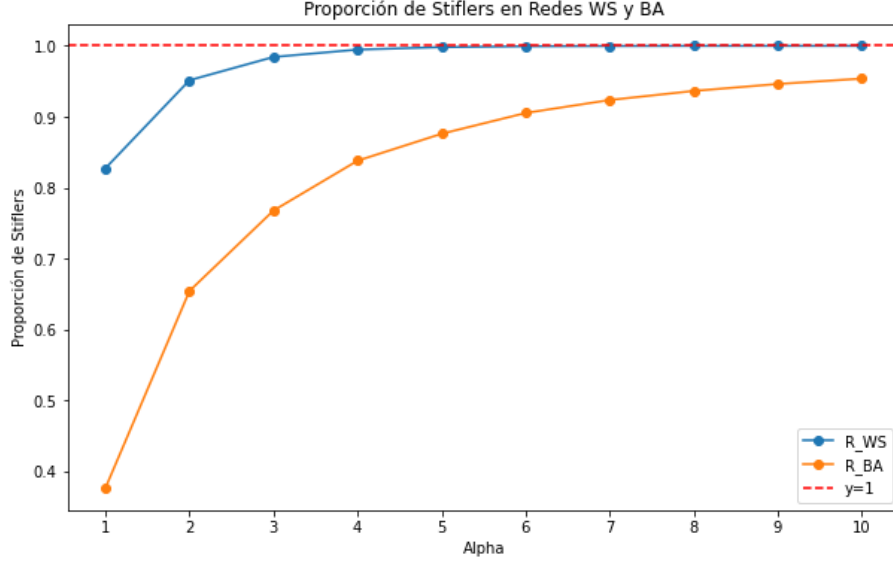


Figura 9: Comparación de la proporción final de stiflers entre una red WS y una red BA.

estas redes, donde unos pocos nodos altamente conectados pueden acelerar significativamente o inhibir la propagación del rumor. Estos datos indican que en valores bajos de α , cuando es fácil para los stiflers parar el rumor, que la red este tan conectada juega en contra de la propia propagación. Esto es algo un poco contraintuitivo. Esta característica hace que las estrategias de intervención en redes BA deban enfocarse en estos nodos clave para ser efectivas.

Cualquier comparación previa sin conocimiento de los resultados finales de las dos redes se destaca por haber sobrevalorado el poder propagador de los hubs, y infravalorar la poca capacidad que tiene una red WS para parar un rumor una vez ya ha empezado. Estos resultados enfatizan la importancia de comprender las características estructurales de las redes al diseñar estrategias de comunicación y manejo de información. Elegir el modelo de red adecuado para un contexto específico puede ser crucial para optimizar la diseminación de información y controlar la propagación de rumores o desinformación en sistemas basados en redes.

4. Redes de Orden Superior: Random Networks con Clustering de Newman

4.1. Redes de Orden Superior

En el estudio de la propagación de rumores, las redes de orden superior ofrecen una representación avanzada que captura interacciones entre múltiples entidades, proporcionando una comprensión más profunda de la dinámica social y otros sistemas complejos. A diferencia de las redes tradicionales que se limitan a relaciones binarias, estas redes incorporan interacciones de grupos más grandes, lo que es crucial para fenómenos como la toma de decisiones grupales o la

propagación de rumores, donde la influencia se extiende más allá de simples pares de individuos.

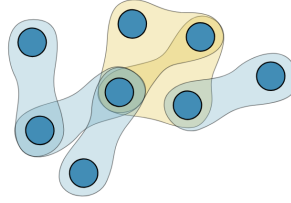


Figura 10: Ejemplo de red de orden superior (hipergrafo) [4].

En el estudio de la propagación de rumores, las redes de orden superior son clave porque los rumores suelen difundirse mediante interacciones grupales, no solo individuales. Los complejos simpliciales, usados en este análisis, permiten modelar todas las interacciones posibles dentro de un grupo, revelando cómo los rumores se intensifican o disminuyen en las comunidades. Este enfoque brinda nuevas perspectivas sobre el impacto de las interacciones complejas en la dinámica de los rumores, ayudando a desarrollar estrategias de comunicación más efectivas en nuestra sociedad interconectada.

4.2. Random Networks con Clustering de Newman

Un complejo simplicial es fundamental en topología y geometría computacional para explorar espacios topológicos y estructuras complejas. Funciona como una herramienta robusta para analizar interconexiones y dimensiones múltiples en datos. En teoría de grafos, extiende la noción básica de grafos, incorporando elementos como triángulos y otros polítopos, facilitando un análisis más detallado de cómo los nodos se interconectan más allá de las simples conexiones punto a punto.

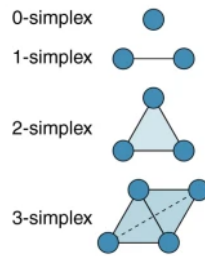


Figura 11: Ejemplos de simplices [5].

Para este estudio, se emplean las redes aleatorias con clustering de Newman, un tipo específico de complejo simplicial que captura con precisión las estructuras sociales complejas mediante la inclusión de un alto nivel de clustering. Esta característica es esencial para reflejar cómo los grupos densamente interconectados impactan en las dinámicas sociales. A diferencia de los grafos tradicionales, los complejos simpliciales, especialmente en el formato de Newman, permiten un

análisis profundo de la cohesión grupal al facilitar la formación de triángulos (2-simplex), lo que proporciona una representación más precisa de las interacciones y la estructura social.

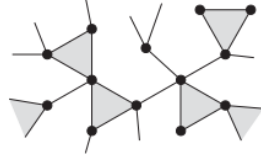


Figura 12: Ejemplo esquemático de la red con clustering de Newman usada [6].

El artículo de M.E.J. Newman sobre grafos aleatorios con clustering [6] presenta un modelo que incorpora explícitamente el clustering, conocido como Random Networks con Clustering de Newman. Este modelo aborda la propiedad de transitividad típica en redes sociales, tecnológicas y biológicas, mejorando las redes aleatorias tradicionales de Erdős-Rényi que suelen tener un coeficiente de clustering bajo, poco representativo de muchas redes reales donde los nodos tienden a agruparse más. El modelo de Newman introduce un mecanismo para fomentar la formación de triángulos al añadir enlaces entre vecinos de nodos conectados, lo que incrementa el clustering y lo hace más representativo de las estructuras de redes sociales reales.

En el modelo de Random Networks con Clustering de Newman, cada nodo se asigna ciertos valores de s (número de enlaces simples) y t (número de triángulos), que definen su participación en la estructura de la red. Se propone asignar a cada nodo una s o una t siguiendo una distribución de Poisson, centrada en un valor medio elegido de forma arbitraria. Este enfoque resulta en una doble distribución de Poisson para la distribución conjunta de grados $p_{s,t}$, como se detalla en el artículo de Newman. Se define el grado k de un nodo como $k = s + 2t$.

La probabilidad $p_{s,t}$ de que un nodo tenga s enlaces simples y t triángulos se expresa como:

$$p_{s,t} = \frac{e^{-\lambda_s} \lambda_s^s}{s!} \times \frac{e^{-\lambda_t} \lambda_t^t}{t!} \quad (12)$$

donde λ_s y λ_t son los parámetros de las distribuciones de Poisson para enlaces simples y triángulos, respectivamente. Esta elección modela los enlaces y triángulos como eventos independientes y aleatorios centrados alrededor de medias específicas, proporcionando variabilidad pero con una distribución definida.

La función generadora de la distribución de grados $G_0(x, y)$ para esta red es:

$$G_0(x, y) = \exp(\lambda_s(x - 1) + \lambda_t(y - 1)) \quad (13)$$

Esta función es clave para simplificar el cálculo de muchas propiedades estadísticas de la red. Se utiliza para derivar la distribución de grado p_k y para calcular el tamaño de la componente gigante S , que es la fracción de nodos en el componente conectado más grande de la red:

$$p_k = \sum_{s+2t=k} p_{s,t} \quad (14)$$

$$S = 1 - G_0(u, v^2) \quad (15)$$

donde u y v son soluciones de un sistema de ecuaciones derivadas del modelo que involucran la función generadora y las distribuciones de grado y triángulo. Aunque para el objetivo de este trabajo, conviene que la componente gigante contenga todos los nodos en ella, para así poder lograr unos resultados de la propagación lo más reales posibles. Si hubiese nodos que no formasen parte de la componente gigante, estos nunca podrían ser infectados, o de empezar ahí la propagación, el componente gigante nunca podría ser infectado.

Al elegir este método de asignar s y t según una distribución de Poisson, permite una incorporación elegante y matemáticamente manejable de la variabilidad en los enlaces y triángulos de cada nodo. Impacta directamente en propiedades estructurales clave de la red, como la conectividad y la formación de clusters, ofreciendo un marco robusto para explorar dinámicas complejas en redes modeladas con este enfoque.

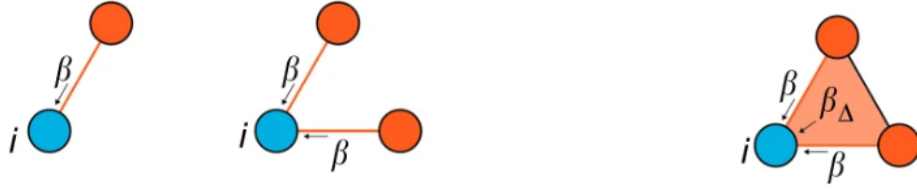
4.3. Propagación de rumores en Random Networks con Clustering de Newman

El objetivo de usar redes de orden superior es ver como afecta la creencia del grupo a un individuo. En este caso es como afecta cuando 2 nodos del triángulo son spreaders y el tercero es ignorante. Para ello se ha creado el parámetro β . En el modelo implementado para la propagación de rumores, el parámetro β juega un rol crucial modificando la probabilidad de propagación dentro de los triángulos cerrados, esto es, cuando tres nodos están interconectados. Este enfoque captura el efecto de la presión de grupo o el refuerzo de comportamientos por la repetida influencia entre nodos conectados.

Cuando un nodo propagador intenta influir en un vecino ignorante, la probabilidad base de convertir este vecino en propagador es λ . Sin embargo, si ambos nodos, junto con un tercero, forman un triángulo y el tercer nodo también es propagador, la probabilidad de propagación se incrementa, ajustándose mediante la fórmula $2\lambda + \beta$. Este incremento refleja la influencia combinada de dos propagadores y la adición de β , que actúa como un factor que refleja un aumento en la probabilidad debido a la dinámica de grupo dentro del triángulo.

El parámetro β se emplea para evaluar cómo los triángulos influyen en la propagación de rumores. Un valor alto de β sugiere que los triángulos facilitan significativamente la dispersión del rumor, lo que puede acelerar y ampliar su alcance en redes con muchos triángulos. Por el contrario, un β bajo indica que los triángulos tienen poco efecto en la propagación, quizás debido al escepticismo en grupos cerrados. Este estudio se concentra en la función positiva de β y no considera valores negativos.

En resumen, β permite investigar cómo la estructura de pequeños grupos afecta la trans-



(a) Propagación en red de primer orden.

(b) Propagación en la red de orden superior usada.

Figura 13: Porceso de infección en redes de diferente orden. El símbolo β de esta imagen en este trabajo es λ , y β_Δ es lo que en este trabajo se llama β [5].

misión de información en redes más amplias, destacando la importancia de las configuraciones locales en las dinámicas globales de difusión de rumores y la eficacia de las campañas informativas.

4.4. Configuración de la Red

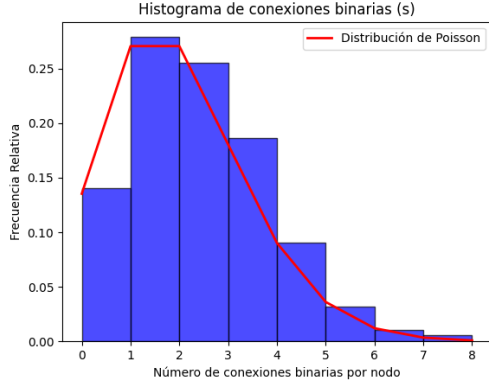
Para la configuración de la red aleatoria con clustering, se empleó la función *random clustered graph* de NetworkX para generar una red que reflejara el nivel deseado de clustering basado en la secuencia de grados conjunta. Aún usando esta función, se generó una *joint degree sequence*, que es una secuencia de pares de grados s y t que se usará para dar estos grados a cada nodo, usando dos conjuntos de datos obtenidos de distribuciones Poissonianas, representando los nodos que formarían parejas (s) y triángulos (t):

- Para parejas (s): Se utilizó una distribución Poissoniana con media de 2, indicando que, en promedio, cada nodo tendría dos enlaces para formar parejas.
- Para triángulos (t): Se utilizó una distribución Poissoniana con media de 1000, sugiriendo una alta propensión de los nodos a formar triángulos, reflejando un nivel elevado de clustering. Este número en comparación con s es exageradamente alto, pero esto se hace para conseguir una red con un clustering muy elevado y que la presencia de triángulos sea muy elevada y su contribución a la propagación sea relevante y apreciable en los resultados finales para poder ser estudiada.

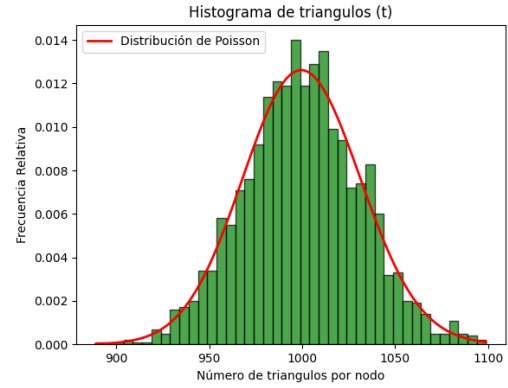
Estas son las distribuciones de parejas y triángulos para una red de 2000 nodos en la que se ha utilizado las distribuciones mencionadas anteriormente:

Se puede ver con facilidad como las 2 distribuciones se ajustan a una distribución Poissoniana. Ahora toca ver como la función de distribución de grado también adopta la forma de una distribución Poissoniana, como se puede apreciar en la Figura 14.

La Figura 15, que es la distribución de grados de la red, también se ajusta a una distribución de probabilidad Poissoniana ya que en términos de distribuciones de probabilidad, la suma de dos variables aleatorias de Poisson independientes también sigue una distribución de Poisson. La media de la nueva distribución será la suma de las medias de las distribuciones originales. Por lo tanto, si $X \sim \text{Poisson}(\mu_a)$ y $Y \sim \text{Poisson}(\mu_b)$, entonces $Z = X + Y$ seguirá una distribución



(a) Histograma de número de conexiones binarias por nodo.



(b) Histograma de número de triángulos por nodo.

Figura 14: Histogramas reflejando las distribuciones Poissonianas de s y t .

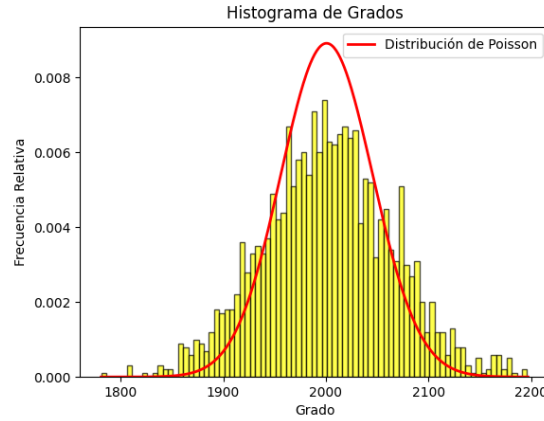


Figura 15: Histograma de la distribución de grados de una red de 2000 nodos con una joint sequence con medias $(2,1000)$.

$\text{Poisson}(\mu_a + \mu_b)$. También hace falta recordar, que aquí la media es 2002 y no 1002, ya que 1000 es la media de número de triángulos por nodo, que eso significa una media de 2000 conexiones por nodo.

Parámetros de la Red y Simulación

Para esta simulación hace falta destacar los parámetros de red que son importantes para los resultados, tener clara cual es su función y saber como se irán usando:

- **N (Número de Nodos):** Para esta red se ha seleccionado estudiar grafos de 2000 nodos. Se seleccionó un tamaño adecuado para la escala del estudio, permitiendo simulaciones detalladas sin comprometer el rendimiento computacional, ya que dado el n .

- **Lambda (λ):** Controla la probabilidad base de propagación del rumor entre nodos adyacentes no triangulares. Se irá variando a medida que se vayan haciendo diferentes simulaciones.
- **Beta (β):** Modifica la probabilidad de propagación dentro de los triángulos, aumentando cuando dos propagadores influyen conjuntamente sobre un ignorante. Se irá variando a medida que se vayan haciendo diferentes simulaciones.
- **Alphas (α):** Probabilidad de que un propagador se convierta en stifler al interactuar con otros propagadores o stiflers. Al centrarnos en como afectaba la propagación el fenómeno de beta, se ha decidido fijar el valor de α a $\alpha=1$.
- **Número de Runs por Red:** Define cuántas veces se repite la simulación por cada red. Este parámetro es directamente proporcional a la desviación estandard, y por lo tanto, a la fiabilidad de nuestras conclusiones. Para cada conjunto de lambda y alfa, se ha repetido la simulacion 50 veces.

Ajustar bien estos parámetros, garantiza que la red modelada sea adecuada para estudios de propagación de rumores en entornos que simulan características de redes sociales o sistemas similares con alto grado de clustering.

4.5. Resultados

Para evaluar la influencia de los grupos, en particular de los triángulos, en la propagación de rumores, se realizó un estudio utilizando distintos valores de λ y β . Se varió λ de 0.1 a 1 en incrementos de 0.1 y β de 0 a 1 en incrementos de 0.05, dada la menor familiaridad con el efecto de β en la propagación. La red analizada tiene un coeficiente de agrupamiento medio de 0.63, lo que indica una alta probabilidad de que los vecinos de un nodo estén conectados entre sí. Dada la extensión de los datos recolectados, se ha preferido simplemente mostrarlos graficados y no en una tabla. En este apartado se mostrarán los resultados con gráficos que ilustran los resultados obtenidos, destacando cómo los triángulos influyen en la dinámica de propagación del rumor en la red.

Los porcentajes finales de stiflers obtenidos una vez acabado el proceso de propagación del rumor para las diferentes λ s y β s son los siguientes:

La desviación estándar media de los resultados obtenidos es de 0.02 para la primera landa. A medida que landa va aumentando esta desviación estándar va bajando. Observando la Figura 16 se pueden sacar las siguientes conclusiones:

- Para λ bajas el valor de β es muy relevante, ya que aumenta en en gran medida el porcentaje final de stiflers a medida que va creciendo β .
- A medida que va creciendo λ el valor de beta va perdiendo relevancia.

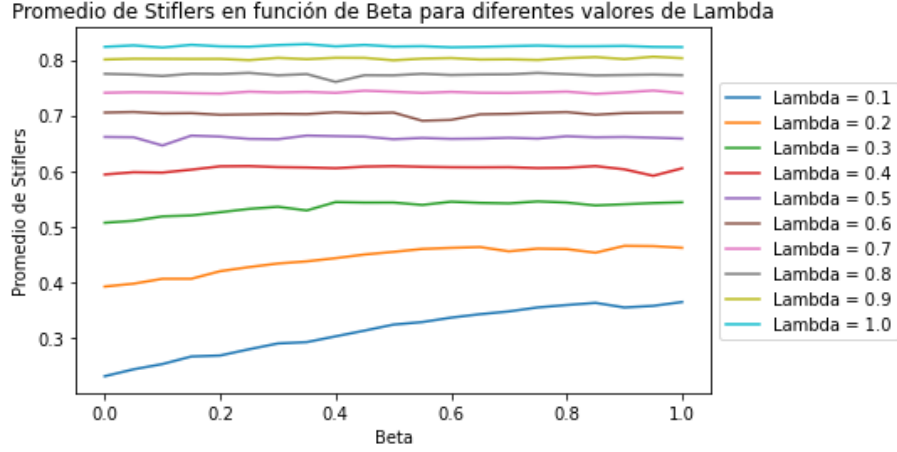


Figura 16: Porcentaje final de stiflers para diferentes λ s a medida que se aumenta β .

- Para λ s iguales o mayores a 0.5, el valor de β es irrelevante. El porcentaje final de stiflers tomará un valor constante diferente para cada λ que no se verá inmutado por los diferentes valores de β .
- Para valores altos de λ , el valor del porcentaje final de stiflers es el de una red totalmente aleatoria, como podría ser una red Erdős–Rényi o cualquier otro tipo de red aleatoria.

Se podría sacar la conclusión de que a medida que se aumenta λ , la proporción final de stiflers se va acercando desaceleradamente al límite al que puede llegar una red aleatoria. Para mostrar esto es mejor enseñar la siguiente gráfica:

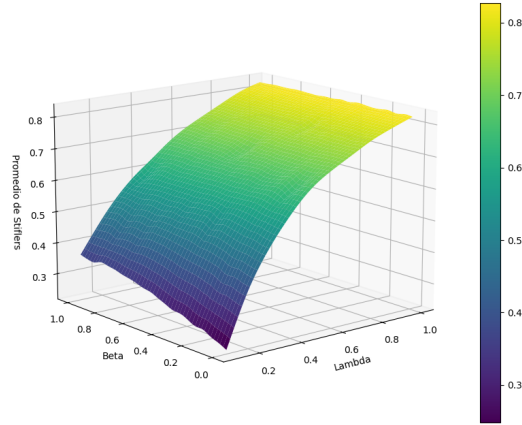


Figura 17: Plano representativo del porcentaje final de stiflers para diferentes λ s a medida que se aumenta β .

La conclusión más importante que se puede sacar de estos resultados es acerca de los mecanismos de propagación grupales. Viendo los resultados se puede concluir que en redes los cuáles haya una gran influencia directa, es decir, que el rumor sea fácilmente propagable en una con-

versación entre un solo spreader con un solo ignorante, los mecanismos de propagación grupales, aunque puedan existir, no serán relevantes para la estadística final de la propagación. Aunque es también importante remarcar, que en ambientes donde los individuos confían muy poco en los otros individuos, es decir, donde la probabilidad de propagación uno a uno sea muy baja, estos mecanismos de propagación grupal tienen muchísima importancia.

5. Resultados y Conclusiones

En este trabajo, hemos explorado la propagación de rumores en redes de primer orden, como las de Barbási-Albert y las de Watts-Strogatz, y en redes de orden superior, enfocándonos específicamente en redes aleatorias con clustering de Newman. A través de nuestras simulaciones, hemos analizado cómo los parámetros α ($1/\alpha$ es la probabilidad de que se detenga el rumor), λ (la probabilidad de propagación del rumor) y β (que modifica la probabilidad de propagación dentro de triángulos) influyen en la dinámica de propagación en este tipo de redes. Nuestro objetivo central era el estudio de redes de orden superior, pero este análisis no habría sido completado con éxito sin antes haber hecho un estudio previo de las redes de primer orden.

Es por eso que se van a dividir las conclusiones en redes de primer orden y en conclusiones para redes de orden superior, para luego obtener una conclusión final acerca de la utilización de este tipo de redes en el estudio de la propagación de rumores.

5.1. Resultados Clave en Redes de Primer Orden

1. **Diferencias en la Propagación del Rumor:** Nuestras simulaciones revelan una marcada diferencia en la dinámica de propagación de rumores entre las redes BA y WS. Las redes WS, debido a su alta clustering y caminos característicamente cortos entre nodos, facilitan una propagación más rápida y uniforme del rumor, alcanzando una saturación de stiflers más rápidamente en comparación con las redes BA.
2. **Influencia de Nodos Hub en Redes BA:** En las redes BA, la presencia de nodos hub con un alto grado de conectividad centraliza la propagación de rumores, lo que puede tanto acelerar como limitar la propagación, dependiendo de si estos nodos clave actúan como spreaders o stiflers. Si un hub ha sido spreader, en un momento u otro, este pasará a ser stifler, y ayudará de manera mucho más rápida y eficiente a frenar el rumor que cualquier otro nodo. Es por eso que en redes BA vemos que cuesta más hacer llegar el rumor a todos los nodos. Este fenómeno contrasta con la distribución más homogénea de grados en redes WS, donde la información se disemina mucho más y por eso cuesta también más frenar el rumor.
3. **Resiliencia ante Cambios de Parámetros:** Las redes WS muestran una mayor resiliencia a los cambios en los parámetros de propagación, manteniendo un nivel relativamente constante de difusión independientemente de las variaciones en la probabilidad de contagio,

ya que desde un principio, el porcentaje de stiflers final es muy elevado. Por otro lado, las redes BA son más sensibles a estos cambios, donde pequeñas variaciones en la probabilidad de propagación pueden resultar en grandes fluctuaciones en el número de stiflers.

5.2. Resultados Clave en Redes de orden Superior

1. **Influencia de λ y β :** Los resultados indican que la probabilidad base de propagación, λ , tiene un efecto significativo en la velocidad y alcance de la propagación del rumor. Conforme λ incrementa, la red tiende a alcanzar rápidamente una saturación de stiflers, independientemente del valor de β . Esto sugiere que en redes de alta conectividad, pequeños incrementos en la probabilidad de propagación pueden facilitar rápidamente la difusión completa del rumor.
2. **Relevancia de β en diferentes contextos de λ :** Cuando λ es bajo, el parámetro β demuestra tener un efecto considerable en aumentar la probabilidad de conversión de ignorantes a propagadores dentro de triángulos. Sin embargo, para valores altos de λ , el impacto de β disminuye, lo que indica que la propagación es eficiente incluso sin el refuerzo de interacciones grupales.
3. **Transitividad y Clustering:** En redes altamente conectadas, donde los coeficientes de clustering sean elevados, siempre habrá un gran número de estas formaciones triangulares (o de orden incluso superior). Es por eso que en este tipo de redes es muy importante tener en cuenta los mecanismos de propagación en grupo, ya que puede jugar un papel crucial en la propagación de información y rumores. La estructura de la red facilita que los rumores se propaguen más rápidamente debido a la formación frecuente de triángulos.

5.3. Conclusiones

En este trabajo, hemos explorado detalladamente la propagación de rumores en redes de primer y orden superior, identificando características fundamentales y diferencias entre los modelos de redes de Watts-Strogatz y Barabási-Albert, así como en redes con clustering de Newman. A través de las simulaciones hechas, confirmamos que las redes de Barabási-Albert, con su heterogeneidad en la distribución de grados y la formación de hubs, presentan una dinámica de propagación que se ajusta más a patrones observados en redes reales comparado con las redes de Newman o de Watts-Strogatz. Esta última, aunque tal como se ha usado en este trabajo, es útil para estudiar redes aleatorias con ciertas propiedades especiales, no refleja la existencia de nodos altamente conectados que frecuentemente influyen en dinámicas sociales y de información.

Además, hemos descubierto que los mecanismos de propagación que dependen de la configuración de la red, como aquellos influenciados por el parámetro β en nuestro modelo, son críticos en redes con alta conectividad y baja probabilidad de propagación del rumor. Esto es especialmente relevante en el contexto de redes altamente clusterizadas como las descritas por Newman, donde los efectos de grupo pueden inhibir o acelerar la propagación dependiendo de la

estructura subyacente del cluster. De esta red se puede destacar como no se ajusta perfectamente a las redes que existen en el mundo real, ya que no deja de tratarse de una red aleatoria, pero se le pueden aplicar mecanismos de propagación muy propios del mundo real, como las influencias de grupo.

Finalmente, estas investigaciones subrayan la importancia de seleccionar el modelo de red adecuado para estudiar fenómenos específicos. Comprender las características estructurales y dinámicas de diferentes modelos de redes no solo ayuda a mejorar las estrategias de intervención en redes sociales y tecnológicas, sino que también ofrece insights críticos sobre cómo la información se disemina a través de diversos sistemas. Esto demuestra que, aunque las redes de Barabási-Albert proporcionan un marco más realista para la mayoría de las aplicaciones, o las redes con clustering de Newman proporcionan una estructura a la que se le pueden aplicar métodos de propagación más cercanos a los que tenemos en el mundo real, la elección del modelo debe basarse siempre en la naturaleza exacta del sistema y el fenómeno bajo estudio.

6. Referencias

1. Paula M. Luz, Claudio J. Struchiner, Alison P. Galvani *Modeling Transmission Dynamics and Control of Vector-Borne Neglected Tropical Diseases. PLOS Neglected Tropical Diseases*, 4(10):e761 (2010).
2. Y. Moreno, R. Pastor-Satorras, A. Vespignani. *Efficiency and reliability of epidemic data dissemination in complex networks. Physical Review E*, 69, 055101(R) (2004).
3. Albert-László Barabási *Network Science*. Cambridge University Press, 2016.
4. F. Battiston, E. Amico, A. Barrat, G. Bianconi, G. F. de Arruda, B. Franceschiello, I. Iacopini, S. Kéfi, V. Latora, Y. Moreno, M. M. Murray, T. P. Peixoto, F. Vaccarino and G. Petri. *The physics of higher-order interactions in complex systems Nature Physics*, (2021).
5. I. Iacopini, G. petri, A. Barrat and V. Latora *Simplicial models of social contagion. Nature Communications* 10, 2485 (2019).
6. M. E. J. Newman *Random Graphs with Clustering Physical Review Letters*, PRL 103, 058701 (2009).
7. Albert-László Barabási and R. Albert *Emergence of scaling in random networks. Science*, 286(5439), 509-512 (1999).
8. Duncan J. Watts and Steven Strogatz *Collective dynamics of 'small-world' networks Nature*, 393, 440-442 (1998).