



Universidad Zaragoza

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

**Deflexión de la luz por
agujeros negros de Kerr**

Autor:

Javier Ramos Ortega

Director:

Eduardo Follana Adín

Curso 2023-2024

Índice general

Introducción y objetivos	1
1. Modelos aproximados	3
1.1. Masa estática	3
1.2. Masa en rotación	6
2. Agujeros negros	9
2.1. Métrica de Schwarzschild	9
2.2. Métrica de Kerr	11
3. Trazado de rayos	15
3.1. Ecuaciones diferenciales y algoritmos	15
3.2. Renderizado de imágenes	18
Conclusión	21
Bibliografía	22
A. Contexto histórico	25

Von Stund' an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu
Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden
soll Selbständigkeit bewahren.¹

—HERMANN MINKOWSKI (1908)

Oh leave the Wise our measures to collate.
One thing at least is certain, light has weight.
One thing is certain and the rest debate.
Light rays, when near the Sun, do not go straight.

—ARTHUR EDDINGTON (1919)

Time is dead and meaning has no meaning.

—BILL CIPHER

¹«A partir de ahora, el espacio y el tiempo por separado deben hundirse entre las sombras y sólo una especie de unión entre ambos debe preservar su independencia».

Introducción y objetivos

Desde la caída de una manzana hasta el movimiento de los astros, la gravedad actúa en cada rincón del universo. Ésta es la conclusión a la que llegó Isaac Newton tras justificar las leyes de Kepler con su ley de gravitación universal:

La gravedad² ocurre en todos los cuerpos y es proporcional a la cantidad de materia existente en cada uno [...] e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia [...] entre sus centros.³

A pesar del éxito de su teoría, la naturaleza de esta *acción a distancia* resultaba inexplicable; y si afectaba o no a la luz, un misterio. Hubieron de pasar más de doscientos años para que una nueva teoría revelase una visión más profunda y completa de la gravedad.

El principio de causalidad⁴ y el de equivalencia⁵ fueron las ideas clave que llevaron a Albert Einstein a desarrollar la relatividad general a principios del siglo XX. Según esta teoría la gravedad no es una fuerza, sino una consecuencia de la *curvatura* del espacio y el tiempo alrededor de los cuerpos masivos. La luz seguirá una trayectoria recta, pero sobre una geometría curvada.

Una de las predicciones más sorprendentes de la relatividad general son los agujeros negros: cuerpos celestes en los que la geometría del espacio-tiempo es tan extrema que nada, ni siquiera la luz, puede escapar de su interior.⁶ El objetivo de este trabajo es analizar cómo se curva la luz cuando pasa cerca de un agujero negro; y en particular, estudiar qué efectos tiene la rotación del mismo sobre esta deflexión.

Se comenzará analizando el problema mediante distintos métodos aproximados: gravedad clásica, métricas a primer orden e incluso gravitomagnetismo. Estos resultados nos permitirán ganar intuición sobre el problema. A continuación se emplearán las geometrías exactas que describen el espacio-tiempo alrededor de agujeros negros estáticos y en rotación. Por último, se implementará un algoritmo de trazado de rayos basado en las expresiones exactas que nos permita evaluar la bondad de las soluciones aproximadas.

Además, se ha buscado elaborar un documento que resulte accesible y atractivo para todos los públicos. El lector/a especialista seguirá todos los razonamientos, el principiante aprenderá cosas nuevas y el público general encontrará ideas e ilustraciones sorprendentes.

²En latín *gravitas*, que significa «peso».

³Fragmento traducido del *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Newton, 1687).

⁴Por el que nada puede propagarse más rápido que la luz.

⁵Un sistema en caída libre inmerso en un campo gravitatorio es puntualmente indistinguible de otro sobre el que no actúa la fuerza gravitatoria.

⁶Puede leerse más sobre la historia de los agujeros negros en el [Apéndice A](#).

Nociones de relatividad general

Las ecuaciones de campo de Einstein (1) relacionan la curvatura del espacio-tiempo ($R_{\mu\nu}$) con su contenido en energía-momento ($T_{\mu\nu}$). Al resolverlas se obtiene la métrica ($g_{\mu\nu}$) que describe la geometría del espacio-tiempo. Los haces de luz seguirán las trayectorias dadas por la ecuación geodésica (2) y el intervalo de espacio-tiempo nulo: $d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

$$\frac{d^2x^\sigma}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (2)$$

Notación

Para los cálculos de relatividad general emplearemos la signatura $(+, -, -, -)$ y unidades naturales. Tomaremos la velocidad de la luz (c) y la constante gravitacional (G) iguales a la unidad. Esto simplificará en gran medida las expresiones aunque también limitará la capacidad del análisis dimensional.

$$[c] = \frac{L}{T} \equiv 1, \quad [G] = \frac{L^3}{M \cdot T^2} = \frac{L}{M} \equiv 1, \quad \therefore L = T = M. \quad (3)$$

En este sistema de unidades el tiempo, la longitud y la masa tienen la misma dimensión, es decir, podrían medirse con las mismas unidades. Pero como en este trabajo la única masa relevante es la del agujero negro (M), la tomaremos como unidad. De esta forma, las distancias y los tiempos pasan a ser también adimensionales. Pueden recuperarse sus unidades con las siguientes expresiones:

$$\hat{L} = \frac{GM}{c^2}, \quad \hat{T} = \frac{\hat{L}}{c} = \frac{GM}{c^3}. \quad (4)$$

Por ejemplo, si se toma la masa solar (M_\odot), la unidad de tiempo será $\sim 5 \mu s$ y la de longitud ~ 1.5 km, la mitad de su radio de Schwarzschild (r_s). Combinando ambas expresiones las unidades naturales del momento angular serán: GM^2/c .

Además, en algunas ocasiones emplearemos la constante angular *tau*. Se define τ como el cociente entre el perímetro de una circunferencia y su radio⁷, es decir: $\tau \equiv 2\pi = 6.2831853\dots$ Puede diferenciarse del tiempo propio (τ) por el contexto.

También emplearemos siglas para referirnos a algunos conceptos recurrentes, como por ejemplo: relatividad general (RG) o agujero negro (AN). La sigla aparecerá entre paréntesis junto al concepto antes de empezar a usarse.

⁷Puede encontrarse más información sobre esta constante en [El Manifiesto Tau](#).

Modelos aproximados

1.1. Masa estática

El desarrollo histórico sobre la deflexión de la luz por acción de la gravedad supone una masa estática por simplicidad, pero también por ignorancia de los posibles efectos de la rotación. Comenzaremos analizando el problema desde el punto de vista clásico para compararlo con su solución relativista.

1.1.1. Desviación clásica

En 1704 Newton ya se planteó que la gravedad pudiese curvar los rayos de luz.¹ Casi un siglo después, Henry Cavendish² y Johann von Soldner³ calcularon de forma independiente esta desviación de forma teórica [Wil88].

A continuación realizaremos un cálculo aproximado que coincide a primer orden con los desarrollos de ambos físicos. También servirá de modelo para próximos cálculos.

Consideramos un corpúsculo de luz que pasa a una distancia perpendicular b de un cuerpo masivo. Asumiendo que su desviación es muy pequeña, podemos aproximar su trayectoria $\vec{r}(t)$ a una recta con parámetro de impacto b (Figura 1.1).

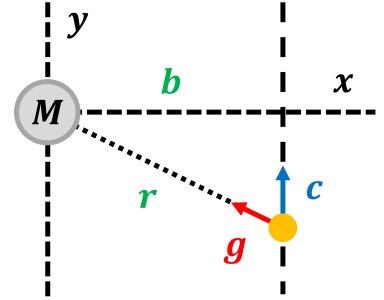


Figura 1.1: Esquema de la trayectoria de un haz de luz próximo a un cuerpo masivo.

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}, \quad \vec{r}(t) \approx b\hat{x} + ct\hat{y}. \quad (1.1)$$

Integrando la aceleración de la gravedad sobre el corpúsculo a lo largo del tiempo obtenemos la variación de velocidad:

$$\Delta\vec{v} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{g} dt = -2 \int_0^{\infty} \frac{gb\hat{x}}{cr} dy = -\frac{2GM}{cb} \hat{x}. \quad (1.2)$$

Y por tanto, el ángulo desviado δ será, a primer orden, el cociente de velocidades:

$$\delta \approx \left| \frac{\Delta\vec{v}}{c} \right| = \frac{2GM}{c^2b} = \frac{r_s}{b}. \quad (1.3)$$

¹Query 1. de su libro *Opticks*.

²El cálculo realizado por Cavendish se publicó completo por primera vez en 2022 [LS22].

³Su artículo fue republicado por P. Lenard en 1921 con el objetivo de desacreditar a Einstein [Jak78].

1.1.2. Desviación relativista

En 1911 Einstein publicó un artículo en el que abordaba el mismo problema empleando su teoría de la relatividad.⁴ A pesar del nuevo punto de vista, el resultado a primer orden coincide con el valor clásico [Ein11]. Veamos su razonamiento:

A partir del principio de equivalencia se puede deducir que el tiempo avanza «más despacio» en las cercanías de un cuerpo masivo. Visto desde la Tierra, la luz se ralentizará al pasar cerca del Sol. La velocidad aparente de la luz en un potencial ϕ , a primer orden en $\Delta\phi$, será:

$$v = c \left(1 + \frac{\Delta\phi}{c^2} \right). \quad (1.4)$$

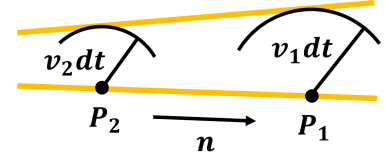


Figura 1.2: Frentes de onda en presencia de un gradiente de velocidad de propagación.

Interpretando la luz como una onda, ésta se curvará en presencia de un gradiente en su velocidad de propagación de acuerdo con el principio de Huygens (Figura 1.2).⁵ Asumiendo que la desviación es pequeña, Einstein deduce el ángulo de deflexión a primer orden:

$$\delta \approx \frac{1}{c} \int \frac{\partial v}{\partial n} ds = \frac{2}{c^2} \int_0^\infty \frac{GMb}{r^3} dy = \frac{r_s}{b}. \quad (1.5)$$

Resulta sorprendente que el tratamiento corpuscular (1.3) y el ondulatorio den el mismo resultado. Sin embargo, ambos son incorrectos, pues sólo consideran la curvatura temporal. Para tener en cuenta la curvatura espacial será necesaria la relatividad general [Gin21].

Relatividad general

Tras publicar su teoría de la relatividad general, Einstein vuelve a calcular el ángulo de deflexión en 1916. Esta vez sí obtiene el resultado correcto [Ein16]. Einstein empleó la métrica a primer orden alrededor de un cuerpo masivo en coordenadas cartesianas. Aquí la escribiremos en coordenadas esféricas para apreciar mejor su simetría.⁶

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2}{r} \right) dt^2 - \left(1 + \frac{2}{r} \right) dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (1.6)$$

La componente temporal de la métrica es responsable de la dilatación temporal, mientras que la componente radial es responsable de la curvatura espacial. Tomando $d\tau = 0$ vemos que la velocidad aparente de la luz en la dirección radial (v_r) es menor que en la tangencial (v_t), que coincide con (1.4).

$$v_r \approx \frac{dr}{dt} \approx 1 - \frac{2}{r}, \quad v_t \approx \frac{d\phi}{dt} r = \sqrt{1 - \frac{2}{r}} \approx 1 - \frac{1}{r}. \quad (1.7)$$

⁴No hay indicación de que Einstein conociera los resultados de J. Soldner cien años anteriores.

⁵Bajo esta interpretación sería posible definir un «índice de refracción» del espacio vacío.

⁶También puede deducirse fácilmente a partir de la métrica de Schwarzschild (2.1).

Para calcular el ángulo de deflexión emplearemos la métrica en coordenadas cartesianas sobre el ecuador ($z = 0$), con $r^2 = x^2 + y^2$. El haz de luz viajará en la dirección y (Figura 1.1) con $d\tau = dx = 0$ y velocidad $v = dy/dt$. Expandimos v en serie de potencias de $1/r$ y calculamos su derivada respecto a x :

$$v = \sqrt{\frac{-g_{tt}}{g_{yy}}} = 1 - \frac{1}{r} - \frac{1}{2r^2} - \frac{y^2}{r^3} - \frac{1}{2r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad (1.8)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x}{r^3} + \frac{x}{r^4} + \frac{3y^2x}{r^5} + \frac{3x}{2r^5} + \dots \quad (1.9)$$

Integrando nuevamente de acuerdo con el principio de Huygens (Figura 1.2) obtenemos:

$$\delta \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{dx} \Big|_{x=b} dy = \frac{2}{b} + \frac{\tau}{4b^2} + \frac{2}{b} + \frac{2}{b^3} = \frac{4}{b} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{b^2}\right). \quad (1.10)$$

Cada uno de los términos de la velocidad (1.8) tiene su correspondiente en δ . Los sumandos $-1/r$ y $-y^2/r^3$ son responsables cada uno de la mitad del ángulo deflectado. El primero por parte de la curvatura temporal y el segundo por la curvatura espacial.

Como puede verse en la Figura 1.3, la deflexión debida a cada término varía de forma distinta a lo largo de la trayectoria del haz de luz. Es casualidad que las integrales de ambas funciones den la misma contribución a la deflexión total.

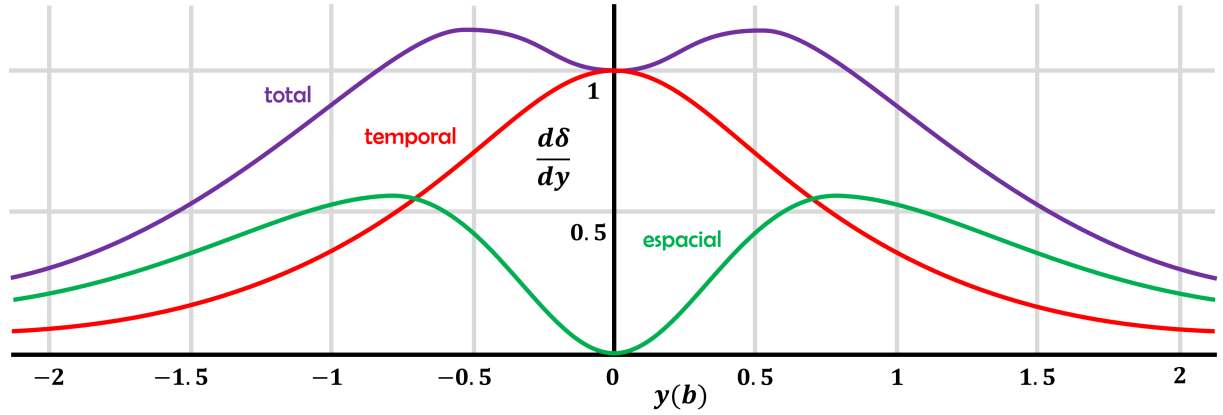


Figura 1.3: Deflexión de la luz a lo largo de su trayectoria. La deflexión total es la suma de la temporal y la espacial. La distancia y está medida en unidades de b .

La deflexión temporal tiene su máximo en el punto más cercano al cuerpo masivo, donde es mayor el gradiente de la dilatación temporal. La deflexión espacial tiene dos máximos, pero es nula en $y = 0$. La suma de las dos tiene también dos máximos, esta vez en $y = \pm b/2$.

1.2. Masa en rotación

El hecho de que la rotación de un cuerpo afecte a su campo gravitatorio es un efecto relativista. Sin embargo, no fue completamente inesperado, pues algo análogo ocurre con el campo electromagnético cuando gira un cuerpo cargado.

1.2.1. Métrica aproximada

Apenas tres años después de que se publicase la teoría de la relatividad general, Josef Lense y Hans Thirring encontraron una solución aproximada para la métrica alrededor de un cuerpo masivo que gira [Bai+20]. Expresando la métrica en coordenadas esféricas encontramos un término adicional no diagonal proporcional al momento angular a :

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2 + \frac{4a \sin^2 \theta}{r} d\phi dt. \quad (1.11)$$

La rotación no afecta a velocidad radial aparente de la luz (1.7), pero sí introduce una perturbación a la tangencial: $\Delta v_t \approx (2a/r^2) \sin \theta$. La luz avanzará ligeramente «más rápido» en el sentido de giro prógrado⁷ y viceversa en el contrario. Como era de esperar, este efecto es máximo en el ecuador ($\sin \theta = 1$) y nulo en los polos.

Nuevamente, para calcular el ángulo de deflexión emplearemos la métrica en coordenadas cartesianas, donde esta vez $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. El eje $+z$ se define en la dirección y sentido del momento angular. Y tomaremos $dx = dz = d\tau = 0$ de forma que el haz viaje en dirección $+y$.

El resultado es idéntico a (1.8) pero con un término adicional: $+2ax/r^3$. Como la deflexión puede ocurrir tanto en el eje x como en el z evaluamos las derivadas de v en ambas direcciones. Las correcciones son:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{dv}{dx} &\approx \frac{2a}{r^3} - \frac{6ax^2}{r^5}, \\ \Delta \frac{dv}{dz} &\approx -\frac{6axz}{r^5}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Integrando ambos resultados obtenemos las correcciones al ángulo deflectado debidas a la rotación del cuerpo masivo. Definiendo el ángulo de impacto β de forma que $x = b \cos \beta$ y $z = b \sin \beta$ tenemos que:

$$\Delta \delta_x \approx \frac{4a}{b^2} - \frac{8ax^2}{b^4} = -\frac{4a}{b^2} \cos(2\beta), \quad \Delta \delta_z \approx -\frac{8axz}{b^4} = -\frac{4a}{b^2} \sin(2\beta). \quad (1.13)$$

⁷Es decir, en el mismo sentido de giro que el cuerpo masivo.

⁸Nótese en (1.13) que δ está definido con signo opuesto a su dirección en el espacio cartesiano.

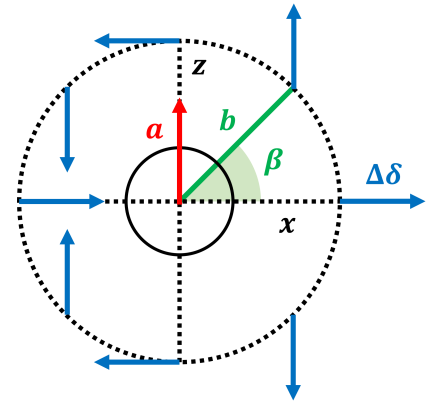


Figura 1.4: Dirección de la deflexión debida al momento angular a según el ángulo de impacto.⁸

La corrección es de segundo orden en $1/b$, por lo que siempre será menor que la contribución de primer orden (1.10) hacia el centro del AN. En la Figura 1.4 se ha representado la dirección de $\Delta\vec{\delta}$ para los distintos β . La corrección es hacia afuera cuando el haz es prógrado ($x > 0$) y hacia adentro en caso contrario.

1.2.2. Gravitomagnetismo

El gravitomagnetismo (GM) da nombre al conjunto de analogías existentes entre las ecuaciones del electromagnetismo (EM) y de la gravitación. Muchos fueron los intentos infructuosos de explicar la precesión anómala del perihelio de Mercurio en base a estas similitudes. En 1918 Thirring logró identificar las ecuaciones del EM con las de la RG para campos débiles y velocidades pequeñas [Thi18]. Empleando este formalismo podremos deducir la corrección $\Delta\vec{\delta}$ de una forma más general e intuitiva.

En el límite de campo débil podemos tomar una perturbación $h_{\mu\nu}$ sobre la métrica del espacio-tiempo plano de Minkowski ($\eta_{\mu\nu}$). De esta forma, las ecuaciones de Einstein (1) se reducen a $\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu}$,⁹ cuya forma es idéntica a las del EM: $\partial^2 A^\alpha = \mu_0 J^\alpha$. Tomando una distribución de materia lenta ($v \ll c$) e imponiendo el gauge de Lorenz se definen los campos vectoriales.¹⁰

$$\vec{E}_G \equiv -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{2c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B}_G \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (1.14)$$

donde los potenciales son $\Phi = \frac{c^2}{4} \bar{h}_{tt}$ y $A_i = \frac{c^2}{2} \bar{h}_{ti}$. Finalmente, podemos escribir las ecuaciones del GM en analogía a las de Maxwell [Bak16]:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_G &= -\frac{\rho}{\varepsilon_g}, & \vec{\nabla} \times \vec{E}_G &= -\frac{1}{2c} \frac{\partial \vec{B}_G}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{B}_G}{2} &= 0, & \vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}_G}{2} &= \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{E}_G}{\partial t} - \frac{\vec{j}}{\varepsilon_g} \right), \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde ρ y $\vec{j} = \rho\vec{v}$ son la densidad y flujo de masa, y $\varepsilon_g = (4\pi G)^{-1}$ es la permitividad gravitatoria. El campo gravitoelectrónico (\vec{E}_G) toma el papel del campo gravitatorio clásico (\vec{g}), mientras que el campo gravitomagnético (\vec{B}_G) aporta la corrección relativista. Por otra parte, a partir de la ecuación geodésica (2) se puede definir la fuerza GM en analogía a la de Lorentz:

$$\vec{F}_G \equiv m\vec{E}_G + 2m\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_G, \quad (1.16)$$

donde vemos que la «carga gravitomagnética» ($2m$) es el doble que la gravitoelectrónica (m). Esto es debido a que la aproximación lineal de la RG requiere un campo de espín 2, pues la fuente de la gravitación es un tensor de segundo orden ($T_{\mu\nu}$).

⁹Donde se define $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^\alpha{}_\alpha$, y $\partial^2 \equiv \partial_\mu\partial^\mu$ es el D'Alembertiano.

¹⁰Pueden definirse de distintas formas. No hay un convenio general establecido.

Al igual que una distribución de carga eléctrica en rotación genera un campo magnético, un cuerpo masivo en rotación generará un campo gravitomagnético a su alrededor. Tomaremos el campo \vec{B}_G generado por un dipolo gravitomagnético¹¹ \vec{a} y la trayectoria aproximada $\vec{r}(t)$ para desviaciones pequeñas (Figura 1.5):

$$\vec{B}_G(\vec{r}) = \frac{-G}{c} \left[\frac{3\hat{r}(\vec{a} \cdot \hat{r}) - \vec{a}}{r^3} \right], \quad (1.17)$$

$$\vec{r}(t) \approx b\hat{x} + vt\hat{y}.$$

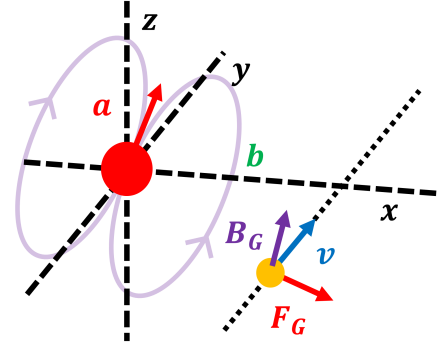


Figura 1.5: Esquema del campo dipolar \vec{B}_G y la fuerza GM sobre una partícula.

La aceleración de la partícula vendrá dada por $\dot{\vec{v}} = 2 \vec{v}/c \times \vec{B}_G$, sin importar su masa (1.16). Podemos integrarla a lo largo de la trayectoria para obtener su desviación:

$$\Delta\vec{\delta} = \frac{\Delta\vec{v}}{c} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{\vec{v}}}{c} dt = \frac{4G}{c^3 b^2} (a_z \hat{x} + a_x \hat{z}), \quad (1.18)$$

donde a_z y a_x son las componentes del momento angular perpendiculares a la trayectoria. Nótese que el resultado no depende de la velocidad de la partícula (v) ni de la componente a_y , paralela a la trayectoria. Veamos si es compatible con la de la sección anterior:

Si realizamos una rotación de coordenadas de ángulo β alrededor del eje y de forma que $a_z > 0$ y $a_x = 0$ obtenemos la expresión parametrizada:

$$\Delta\vec{\delta} = \frac{4Ga}{c^3 b^2} \begin{bmatrix} \cos(2\beta) \\ \sin(2\beta) \end{bmatrix}_{\hat{x}, \hat{z}} \cdot \cos \alpha, \quad (1.19)$$

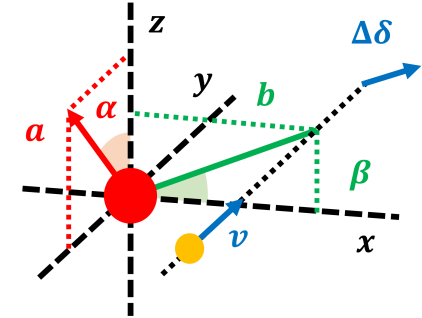


Figura 1.6: Esquema de la deflexión gravitomagnética dados los parámetros de impacto b , β y α .

donde α es el ángulo entre \vec{a} y el plano XZ (Figura 1.6). Si tomamos $\alpha = 0$ recuperamos la expresión (1.13) calculada con RG. Esto nos hace suponer que el nuevo resultado es correcto para todo α . Lo comprobaremos de forma numérica en el [Apartado 3.1.2](#).

Medición experimental

Para hacernos una idea de la magnitud de esta corrección consideraremos el experimento clásico. El parámetro de impacto de un haz de luz que roza el Sol es $b \approx 470\,000$ de forma que la deflexión a primer orden (1.10) queda $\delta \approx 1.75''$. Este valor se ha logrado medir con creciente precisión desde la expedición de A. Eddington de 1919 [Dit+24].

Con un cálculo sencillo se puede estimar que el momento angular del Sol es $a_{\odot} \sim 1$. Y por tanto, la magnitud de la corrección (1.19) es $\Delta\delta \sim 10^{-6}$ segundos de arco, es decir, medio millón de veces más pequeña que el término de primer orden.

¹¹La contribución gravitoelectrónica daría el resultado clásico (1.3).

Agujeros negros

2.1. Métrica de Schwarzschild

La métrica exterior de Schwarzschild describe el espacio-tiempo alrededor de una distribución de masa esférica y estática, es decir, que no rota [Sch16]. Puede emplearse para estudiar la gravedad de planetas, estrellas, y agujeros negros. Usando unidades naturales:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.1)$$

donde la coordenada t representa el tiempo medido por un observador estacionario en el infinito, la coordenada radial r crece con la distancia al origen¹ y $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ es la métrica de la 2-esfera. Mediante cambios de coordenadas pueden encontrarse otras formas de representar la misma métrica, aunque en este trabajo emplearemos la original (2.1), pues es la que mejor refleja el punto de vista de un observador lejano.

El horizonte de eventos² de este agujero negro es perfectamente esférico y su radio se conoce como de Schwarzschild³, $r_s = 2$. Por encima del horizonte se encuentra la esfera de luz con $r_l = 3$; a esta distancia existen órbitas circulares para la luz, aunque son inestables. La órbita circular estable más cercana (ISCO) para cuerpos con masa tiene $r_{isco} = 6$. La singularidad se encuentra en $r = 0$, en el interior del horizonte de eventos (Figura 2.1).

La simetría temporal y esférica implica la conservación de la energía y el momento angular por el teorema de Noether. Tomaremos $\theta = \pi/2$ sin pérdida de generalidad. Resolviendo la ecuación geodésica (2) obtenemos las cantidades conservadas ε y h , que podemos interpretar como energía y momento angular por unidad de masa:

$$\varepsilon = \frac{dt}{d\tau} \left(1 - \frac{2}{r}\right) \equiv \frac{E}{m}, \quad h = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \equiv \frac{L}{m}. \quad (2.2)$$

Con la métrica (2.1) y las ecuaciones (2.2) se puede resolver cualquier geodésica alrededor del agujero negro de Schwarzschild.

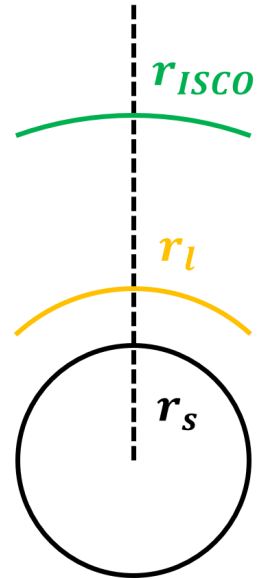


Figura 2.1: Esquema del horizonte, esfera de luz e ISCO de un AN estático según la coordenada r .

¹Nótese que r es sólo una coordenada, no coincide con la distancia radial propia cerca del AN.

²Esta es la superficie que separa el interior del exterior del agujero negro.

³Es una gran coincidencia que este apellido alemán signifique «escudo negro».

2.1.1. Geodésicas y deflexión de la luz

La trayectoria de los rayos de luz está caracterizada por $d\tau = 0$. Como la luz no tiene masa, combinaremos los parámetros ε y h en uno nuevo, el parámetro de impacto:

$$b \equiv \frac{h}{\varepsilon} = \frac{r^3}{r-2} \frac{d\phi}{dt}. \quad (2.3)$$

Es sencillo demostrar que b coincide con la distancia perpendicular entre la dirección del haz de luz y el origen cuando $r \rightarrow \infty$. Sustituyendo el parámetro b en la métrica podemos llegar a la ecuación diferencial de la trayectoria del rayo de luz:

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 = \frac{b^2}{r[r^3 - b^2(r-2)]}. \quad (2.4)$$

Para un haz que llega del infinito, podemos relacionar el radio de su perimelasma⁴ r_0 con su parámetro de impacto (Figura 2.2). Encontramos un radio mínimo en $r_0 = 3$ con $b = 3\sqrt{3} \approx 5.2$ que coincide con el borde de la sombra del agujero negro.⁵

$$\left.\frac{dr}{d\phi}\right|_{r_0} = 0 \quad \longrightarrow \quad b^2 = \frac{r_0^3}{r_0 - 2} \quad (2.5)$$

Para obtener el ángulo barrido por el rayo de luz ($\Delta\phi$) integramos (2.4) desde $r = \infty$ hasta r_0 y multiplicamos por 2, pues la trayectoria es simétrica respecto a r_0 . Cambiando de variable a $q = r_0/r$ y expandiendo en serie de potencias de $1/r_0$ se puede evaluar la integral (2.6). De esta manera obtenemos la expresión (2.7) para el ángulo de deflexión δ en función de r_0 [Bro10].

$$\Delta\phi = 2 \int_{\infty}^{r_0} \frac{d\phi}{dr} dr = 2 \int_0^1 \frac{dq}{\sqrt{1-q^2} \sqrt{1-2/r_0(1-q^3)/(1-q^2)}} = \pi + \delta, \quad (2.6)$$

$$\delta(r_0) = \frac{4}{r_0} + \left(\frac{15}{8}\tau - 4\right) \frac{1}{r_0^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r_0^3}\right) \approx \frac{4}{r_0} + \frac{7.781}{r_0^2} + \dots \quad (2.7)$$

Por último, nos gustaría expresar δ en función de b . Despejando en (2.5) vemos que $r_0(b)$ es una de las raíces de una cúbica reducida. Empleando la fórmula de Viète y expandiendo en serie de potencias de $1/b$ obtenemos:

$$r_0(b) = \frac{2b}{\sqrt{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{-3\sqrt{3}}{b} \right) \right] = b - 1 - \frac{3}{2b} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{b^2}\right). \quad (2.8)$$

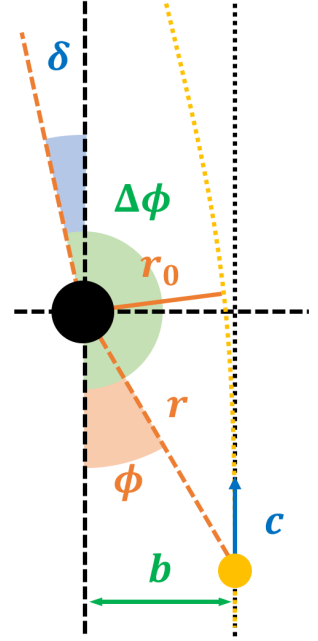


Figura 2.2: Esquema de la deflexión de un haz de luz por un AN.

⁴Punto de una trayectoria más próximo a un AN. Del griego *peri* (cercano) y *melos* (negro).

⁵Analizaremos la sombra con detalle en el [Apartado 3.2.1](#).

Sustituyendo $r_0(b)$ en (2.7) obtenemos finalmente $\delta(b)$ hasta segundo orden. Nótese que el coeficiente del término de primer orden es el mismo en ambos casos, un 4 [KP05].

$$\delta(b) = \frac{4}{b} + \frac{15\tau}{8b^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{b^3}\right) \approx \frac{4}{b} + \frac{11.78}{b^2} + \dots \quad (2.9)$$

El cálculo aproximado (1.10) del capítulo anterior coincide a primer orden con este resultado. El término de segundo orden nos permite mantener la precisión para valores de b menores. Con este método también pueden calcularse términos de orden superior.

2.2. Métrica de Kerr

La métrica de Kerr describe el espacio-tiempo en presencia de un agujero negro en rotación.⁶ Para representarla emplearemos las coordenadas de Boyer-Lindquist (BL) por ser análogas a las originales de Schwarzschild. Además, esta forma de la métrica tiene un único término no diagonal [MG09] [BL67].

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2r}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2ra^2}{\Sigma} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{4ra \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi,$$

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta \equiv r^2 + a^2 - 2r. \quad (2.10)$$

La rotación rompe la simetría esférica de forma que r , θ y ϕ pasan a ser las coordenadas esferoidales oblatas usuales en el espacio euclídeo (2.11). Si tomamos momento angular nulo ($a = 0$) recuperamos la métrica de Schwarzschild en coordenadas esféricas (2.1).

En la Figura 2.3 se representa la estructura del agujero negro de Kerr proyectada sobre un fondo plano de Minkowski:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \phi, \\ y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.11)$$

La singularidad S pasa a tener forma de anillo de radio a y el horizonte de eventos H^+ adquiere forma de esferoide oblato.⁷ A su alrededor aparece una región llamada *ergosfera*, limitada por la superficie estática E^+ , dentro de la cual todas las geodési-

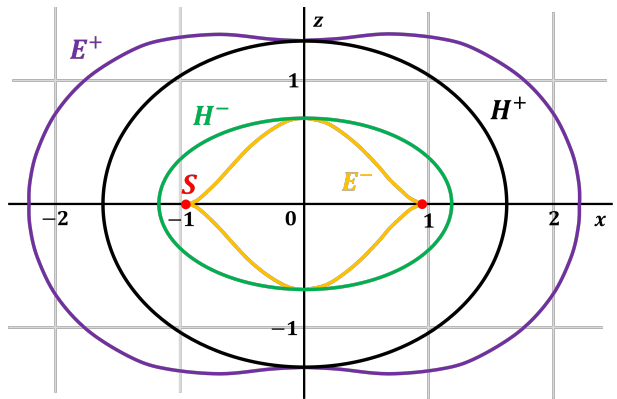


Figura 2.3: Estructura de un agujero negro de Kerr con momento angular $a = 0.95$. Se muestran los límites estáticos E^\pm , los horizontes de eventos H^\pm y la singularidad S .

⁶No es una solución válida para el exterior de otros cuerpos en rotación, pues sus momentos multipolares son distintos. Al contrario que en el caso estático, no es válido el teorema de unicidad de Birkhoff.

⁷La forma real del horizonte no puede describirse en las tres dimensiones euclídeas.

cas giran con el agujero. En la ergosfera nada puede permanecer estacionario respecto al fondo de estrellas. La métrica también indica la existencia de un horizonte interno H^- y una superficie estática interna E^- , aunque no se espera que existan en AN reales [Vis08].

Las coordenadas de los horizontes vienen dadas por $g_{rr} = \infty$, las de los límites estáticos por $g_{tt} = 0$ y la singularidad por $g_{tt} = \infty$:

$$r_H^\pm = 1 \pm \sqrt{1 - a^2}, \quad r_E^\pm = 1 \pm \sqrt{1 - a^2 \cos^2 \theta}, \quad r_S = 0 \text{ y } \theta_S = \pi/2. \quad (2.12)$$

Como se puede apreciar, el horizonte externo y el interno coinciden y desaparecen cuando $|a| = 1$ dejando la singularidad «desnuda». Nunca se ha medido un AN con $|a| \geq 1$ y se creen imposibles.⁸ Trabajaremos siempre con $|a| < 1$ excepto que se diga lo contrario.

La esfera de luz se transforma en una *región de luz*⁹ en la que se puede encontrar un continuo de órbitas cerradas inestables. Las órbitas de menor y mayor radio se encuentran siempre en el ecuador mientras que las intermedias tienen componente polar [Teo03]. Esta asimetría se reflejará en la forma de la sombra del AN (Apartado 3.2.1).

2.2.1. Ecuador de Kerr

El caso más sencillo de deflexión de la luz es el que ocurre enteramente sobre el ecuador del AN. Tomando $\theta = \pi/2$, la métrica (2.10) se simplifica considerablemente:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2}{r}\right) d\phi^2 + \frac{4a}{r} dt d\phi. \quad (2.13)$$

En la Figura 2.4 se muestran las distintas órbitas ecuatoriales en función de a . La rotación hace que las órbitas prógradas se acerquen al AN y que las retrógradas se alejen. En 2.4a las órbitas L^+ y T^+ parecen converger al horizonte en el límite $a \rightarrow 1$, pero esto es sólo un artefacto de las coordenadas de BL. En 2.4b podemos ver que la distancia propia s entre H^+ y L^+ tiende a $\frac{1}{2} \log 3 \approx 0.55$, no se llegan a tocar [BPT72].

Empleando los observadores de momento angular nulo (ZAMOs) obtenemos que la relación entre la coordenada r y el radio euclídeo de la circunferencia propia alrededor del AN (R) sigue la expresión esperada a partir de la métrica:

$$R(r) = \sqrt{-g_{\phi\phi}} = \sqrt{r^2 + a^2 + \frac{2a^2}{r}} \quad \forall r \in (r_H^+, \infty). \quad (2.14)$$

La cintura del horizonte de sucesos mantiene un radio euclídeo $\lim_{r \rightarrow r_H^+} R(r) = 2 \forall a$, proporcional a su masa.¹⁰ Y finalmente, como se aprecia en 2.4b, la región de espacio propio con $R < 3$ crece sin límite cuando $a \rightarrow 1$.

⁸Esta es la hipótesis de censura cósmica: no existen singularidades desnudas.

⁹El físico teórico Kip Thorne la llama *the fire shell*, el caparazón de fuego.

¹⁰Téngase en cuenta que la energía rotacional contribuye notablemente a la masa cuando $a \sim 1$.

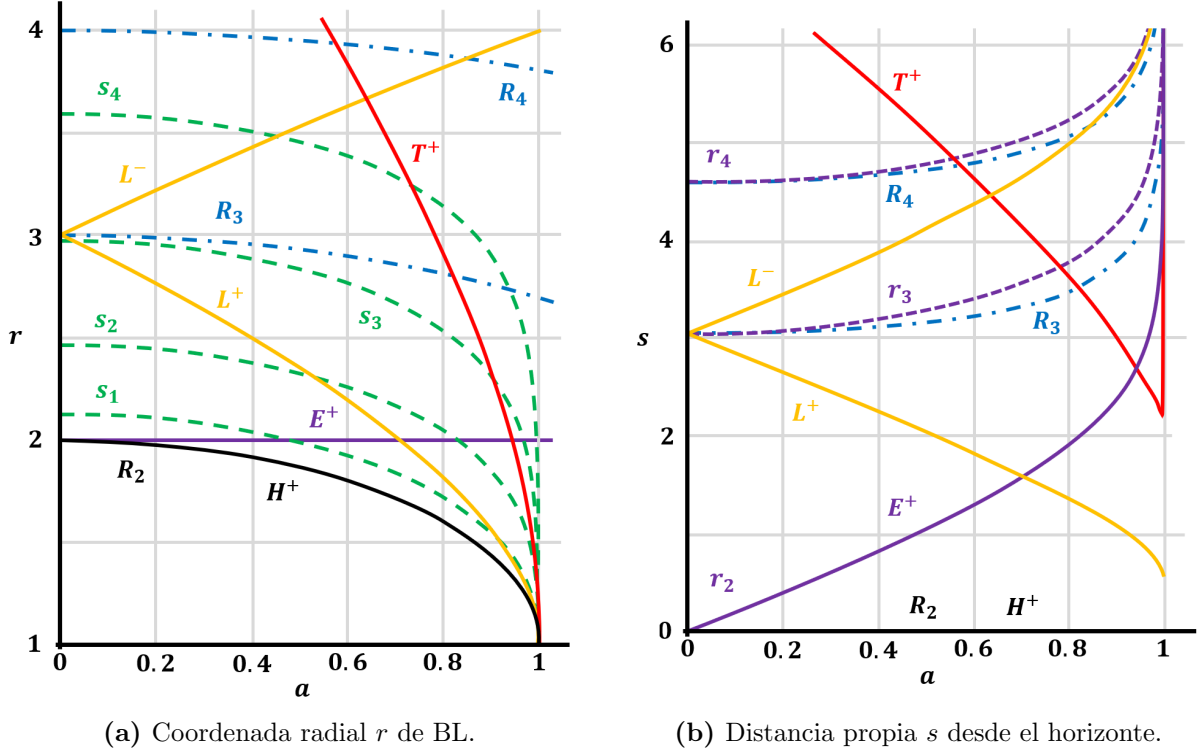


Figura 2.4: Disposición de las órbitas ecuatoriales según el parámetro a . Se muestran las órbitas de la luz L^\pm , la ISCO prógrada T^+ , el horizonte H^+ y el límite estático E^+ . También se comparan las distancias de valores enteros en r , s y R .

En la figura [Figura 2.5](#) se han representado los conos de luz usando la coordenada R (2.14). La velocidad coordenada de la luz viene dada por la distancia entre el origen del cono y cada punto de su elipse. Se observa claramente el comportamiento anisótropo de esta «velocidad aparente» descrito en el [Capítulo 1](#). En la ergosfera el cono de luz está tan inclinado en el sentido prógrado que su vértice queda rezagado. Los ZAMOs giran en torno al AN manteniendo su trayectoria en el centro del cono de luz [CN21]. Téngase en cuenta que éstas observaciones son dependientes de nuestra elección de coordenadas.

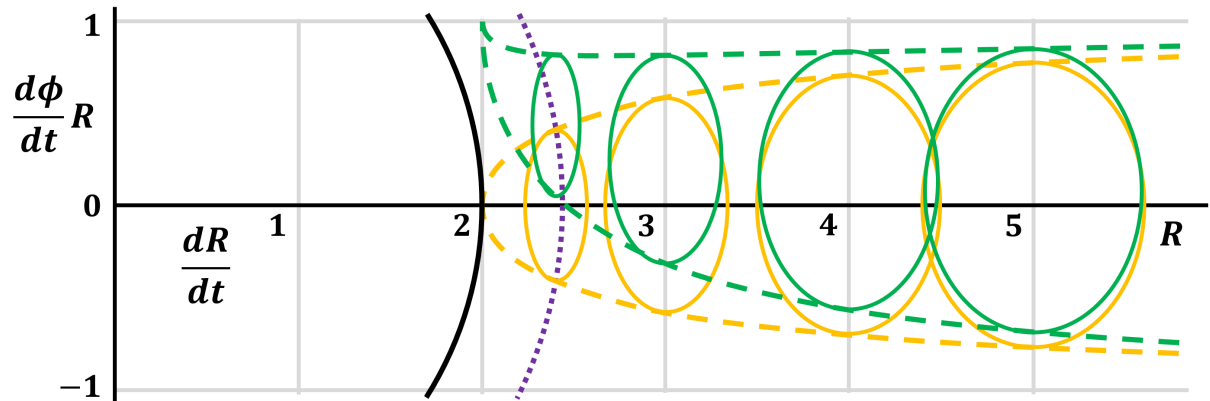


Figura 2.5: Representación de los conos de luz en coordenadas de BL modificadas para distintos valores de R sobre el ecuador de Kerr. En naranja para $a = 0$ (métrica de Schwarzschild) y en verde para la rotación máxima ($a = 1$). El vértice de cada cono está sobre el eje horizontal.

2.2.2. Geodésicas y deflexión de la luz

El cálculo del ángulo de deflexión de la luz sobre el ecuador de la métrica de Kerr es análogo al realizado con Schwarzschild en el [Apartado 2.1.1](#). Empleando la ecuación geodésica obtenemos de nuevo las magnitudes conservadas:

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{2}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} + \frac{2a}{r} \frac{d\phi}{d\tau}, \quad h = \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2}{r}\right) \frac{d\phi}{d\tau} - \frac{2a}{r} \frac{dt}{d\tau}. \quad (2.15)$$

El cociente entre ambas nos permite despejar $d\phi/dt$, que expresado en función del parámetro de impacto $b \equiv h/\varepsilon$ queda:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\left(1 - \frac{2}{r}\right) h + \frac{2a}{r} \varepsilon}{\left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2}{r}\right) \varepsilon - \frac{2a}{r} h} = \frac{\left(1 - \frac{2}{r}\right) b + \frac{2a}{r}}{\left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2}{r}\right) - \frac{2a}{r} b}. \quad (2.16)$$

Sustituyendo (2.16) en la métrica (2.13) con $d\tau = 0$ obtenemos el cociente dr/dt , que combinado con $d\phi/dt$ nos da nuestra ecuación diferencial:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{b(r-2) + 2a}{r^2 + a^2 - 2r} \left(r^2 + \frac{2}{r}(a-b)^2 + a^2 - b^2\right)^{-1/2}. \quad (2.17)$$

Para calcular el ángulo de deflexión de la luz evaluamos la integral análoga a (2.6). Nuevamente, para simplificar el cálculo realizamos el cambio de variable $q = r_0/r$ y dividimos la integral en dos partes iguales. Esta vez ha sido necesario emplear el software [SageMath](#) para calcular la expansión en serie de potencias del integrando.

$$\Delta\phi = 2 \int_0^1 \frac{b \left(1 - \frac{2q}{r_0} + \frac{2aq}{br_0}\right) dq}{\left(1 - \frac{2q}{r_0} + \frac{a^2 q^2}{r_0^2}\right) \sqrt{r_0^2 + \frac{2q^3}{r_0}(a-b)^2 + q^2(a^2 - b^2)}} = \pi + \delta, \quad (2.18)$$

$$\delta(r_0) = \frac{4}{r_0} + \left(\frac{15}{8}\tau - 4(1+a)\right) \frac{1}{r_0^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r_0^3}\right) \approx \frac{4}{r_0} + \frac{7.781 - 4a}{r_0^2} + \dots \quad (2.19)$$

Tomando $dr/d\phi = 0$ en (2.17) encontramos la relación $r_0^3 + (a^2 - b^2)r_0 + 2(a-b)^2 = 0$, que nuevamente podemos resolver expandiendo en serie de potencias la fórmula de Viète:

$$r_0(b) = b - 1 - \frac{a^2 - 4a + 3}{2b} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{b^2}\right). \quad (2.20)$$

Finalmente, sustituyendo $r_0(b)$ en (2.19) obtenemos el ángulo deflectado en función de b :

$$\delta(b) = \frac{4}{b} + \left(\frac{15}{8}\tau - 4a\right) \frac{1}{b^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{b^3}\right) \approx \frac{4}{b} + \frac{11.78 - 4a}{b^2} + \dots \quad (2.21)$$

El parámetro de rotación a afecta de forma lineal al término de segundo orden exactamente como hemos estimado en la [Sección 1.2](#).

Trazado de rayos

En este capítulo llevaremos a cabo la integración numérica de la trayectoria de los rayos de luz. Esto nos permitirá contrastar los resultados analíticos obtenidos previamente y calcular aquellos que no ha sido posible calcular a mano.

3.1. Ecuaciones diferenciales y algoritmos

3.1.1. Geodésicas ecuatoriales

Como ya hemos visto, las geodésicas más sencillas son las que están contenidas en un solo plano, es decir, las pertenecientes al ecuador de la métrica de Kerr y todas las de la métrica de Schwarzschild. Su simplicidad reside en que pueden describirse con un único parámetro de impacto, b .

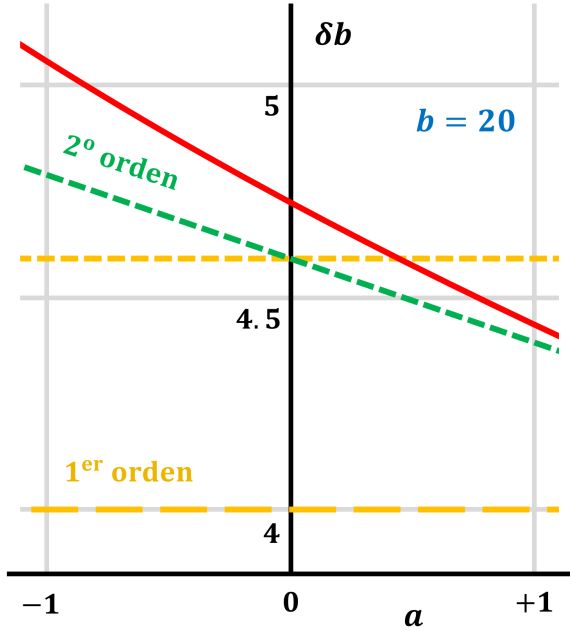
El ángulo deflectado (δ) puede calcularse evaluando numéricamente la integral (2.6) si $a = 0$, o la (2.18) para el caso general. En la Figura 3.1 se representa el resultado numérico obtenido con la calculadora gráfica Desmos, y se compara con los resultados analíticos aproximados de capítulos anteriores.

Para calcular la trayectoria completa de los rayos de luz partiremos de la ecuación diferencial (2.17), que se reduce a (2.4) cuando $a = 0$. El método más directo sería integrar estas ecuaciones, sin embargo no es el óptimo para trayectorias que llegan al infinito, como es nuestro caso. Solventamos esta dificultad con el cambio de variable $u = 1/r$, de forma que el rango de la integral pasa de ser (r_0, ∞) a $(0, u_0)$, que es mucho más sencillo y rápido de integrar numéricamente. En el caso de Schwarzschild quedaría así:

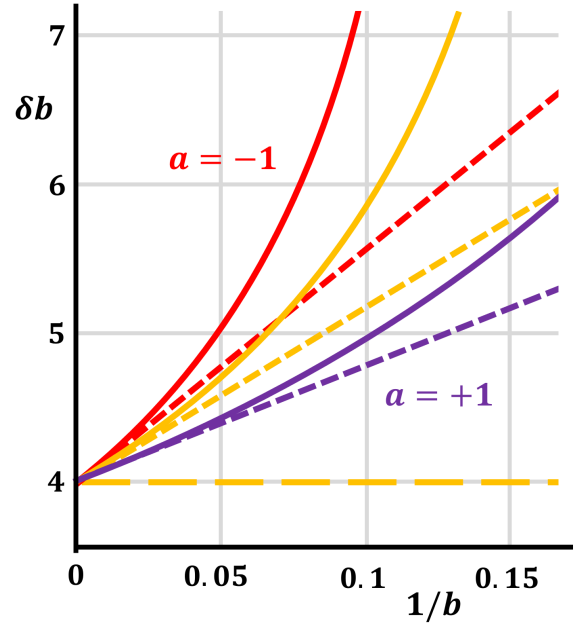
$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{b}{\sqrt{r[r^3 - b^2(r - 2)]}}, \quad \xrightarrow{u=1/r} \quad \frac{d\phi}{du} = \frac{b}{\sqrt{1 - b^2u^2(1 - 2u)}}. \quad (3.1)$$

Se ha implementado un código en C que realiza la integración por el método de los trapecios. El integrando diverge cuando $u = u_0 \equiv 1/r_0$, pero nos aseguramos de evitar ese punto. Este algoritmo reproduce los resultados numéricos de la figura 3.1a con casi 3 cifras significativas, por lo que podemos emplearlo asumiendo ese error.

En la Figura 3.2 se muestran distintas trayectorias ecuatoriales calculadas con dicho código. Fuera del ecuador será necesario emplear un algoritmo más sofisticado.

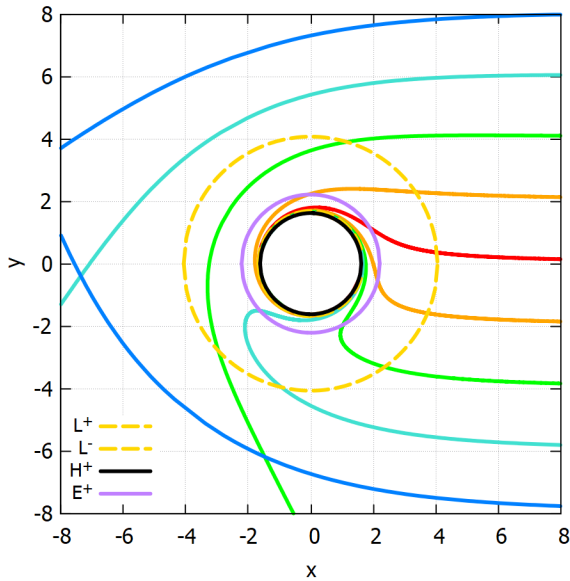


(a) Deflexión con parámetro de impacto $b = 20$ frente al momento angular a . La estimación de primer orden es $\delta b = 4$ mientras que la de segundo orden es lineal en a .

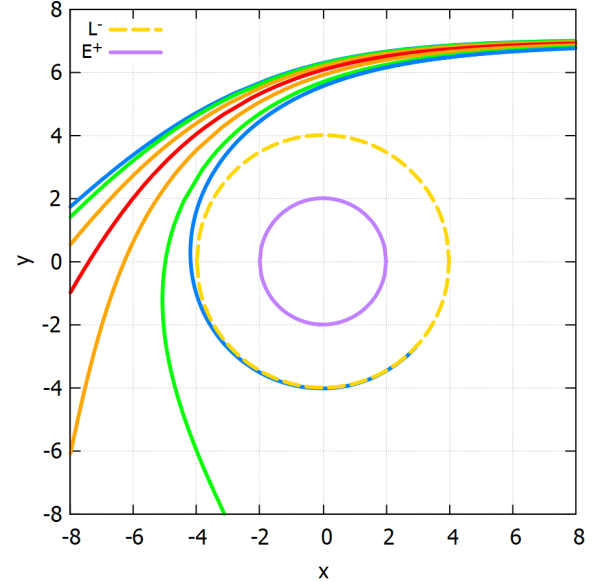


(b) Rotación retrógrada, nula y prógrada con $a = \{-1, 0, +1\}$ respectivamente frente a $1/b$. Las estimaciones a segundo orden son las rectas de mejor ajuste en $1/b \rightarrow 0$.

Figura 3.1: Comparación de las estimaciones a primer orden (1.10) y a segundo orden (2.21) del ángulo deflectado sobre el ecuador. Las líneas continuas se han obtenido integrando numéricamente con la calculadora gráfica Desmos. Todas ellas tienden a $\delta b = 4$ cuando $b \rightarrow \infty$.



(a) Rayos con b par y $a = 0.95$ sobre fondo plano de Minkowski. Se marcan los límites del caparazón de fuego. En la ergosfera todos los haces giran en el sentido del AN respecto al fondo de estrellas.



(b) Rayos con $b = 7$ y $a \in [-1, 1]$ equiespaciados sobre fondo de coordenadas BL. La ergosfera tiene radio constante $r_E = 2 \forall a$. Cuando $a = -1$, el haz tiende a la órbita circular L^- .

Figura 3.2: Trayectorias ecuatoriales de la luz con distintos parámetros de impacto. Integración numérica implementada en C con el método de los trapecios y gráficas realizadas con Gnuplot. Los distintos haces están coloreados de forma simétrica respecto a $b = 0$ y $a = 0$.

3.1.2. Geodésicas generales

Determinaremos las ecuaciones diferenciales que describen el caso general empleando el formalismo lagrangiano [Pu⁺16]. A partir de la métrica de Kerr ($g_{\mu\nu}$) definimos $\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$, donde $\dot{x}^\mu \equiv dx^\mu/d\lambda$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange nos indican la conservación de la energía (E) y el momento angular axial (L_z) del haz de luz:

$$E^2 \equiv \frac{\Sigma - 2r}{\Delta}(\dot{r}^2 + \Delta\dot{\theta}^2) + \Delta\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta, \quad L_z \equiv \frac{(\Sigma\Delta\dot{\phi} - 2arE) \sin^2 \theta}{\Sigma - 2r}. \quad (3.2)$$

A partir de ellas se despejan fácilmente las ecuaciones de movimiento (EdM) de t y ϕ . Esta vez mantendremos todas las EdM separadas y en función del parámetro afín λ para evitar la divergencia de $d\phi/dr$ en r_0 .

$$\dot{t} = E + \frac{2r(r^2 + a^2)E - 2arL_z}{\Sigma\Delta}, \quad \dot{\phi} = \frac{2arE + (\Sigma - 2r)L_z}{\Sigma\Delta \sin^2 \theta}. \quad (3.3)$$

Empleando nuevamente las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden obtener las EdM de los momentos canónicos¹ $p_r = (\Sigma/\Delta)\dot{r}$ y $p_\theta = \Sigma\dot{\theta}$. De esta forma evitaremos dificultades con los signos de \dot{r} y $\dot{\theta}$.

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= \frac{2r(r^2 + a^2)E^2 - \kappa(r - 1) - 2aEL_z}{\Sigma\Delta} - \frac{2p_r^2(r - 1)}{\Sigma}, \\ \dot{p}_\theta &= \frac{\sin(2\theta)}{2\Sigma} \left[\frac{L_z^2}{\sin^4 \theta} - a^2 E^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $\kappa \equiv Q + L_z^2 + a^2 E^2$. La constante de Carter (Q), a diferencia que E y L_z , no se identifica fácilmente en el lagrangiano, pues su simetría no está generada por un vector de Killing usual.² Se puede identificar usando el formalismo de Hamilton–Jacobi, y podemos interpretarla como el cuadrado del momento angular perpendicular cuando $a = 0$.

$$Q \equiv p_\theta^2 + \left[\frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} - a^2 E^2 \right] \cos^2 \theta, \quad \xrightarrow{a=0} \quad Q = L^2 - L_z^2. \quad (3.5)$$

Algoritmo y resultados

Se ha implementado un código en C que empleando las ecuaciones (3.2-3.5) es capaz de trazar la geodésica de cualquier rayo de luz. Para establecer las condiciones iniciales se ha empleado el método descrito en [Pu⁺16]. Los parámetros de impacto para un observador lejano con latitud α son:

$$b_x = \frac{L_z}{\cos \alpha}, \quad b_z = \sqrt{\frac{Q}{E^2} + a^2 \sin^2 \alpha - L_z^2 \tan^2 \alpha}. \quad (3.6)$$

¹El momento canónico se define como: $p_\mu = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}^\mu$.

²Su simetría proviene de un tensor de Killing de segundo orden.

El programa tiene implementado el método Runge-Kutta de cuarto orden con paso adaptativo. Sin embargo, para obtener los resultados siguientes se ha empleado el método de Euler; que a pesar de ser menos preciso, es un orden de magnitud más rápido.

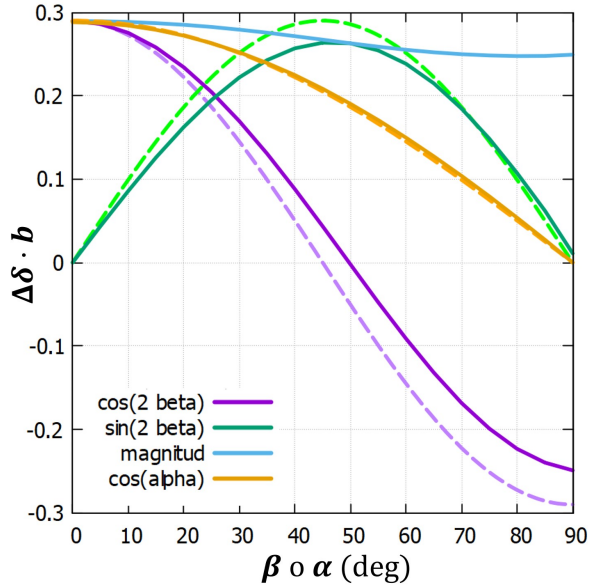


Figura 3.3: Resultados numéricos de la corrección debida a la rotación con $b = 20$ y $a = 1$. Variación de β con $\alpha = 0$ y de α con $\beta = 0$. Predicción a primer orden en a en línea discontinua (1.19).

En la Figura 3.3 se muestran las correcciones al ángulo deflectado debidas a la rotación del AN. Estos resultados numéricos están en casi perfecta concordancia con los deducidos en el Apartado 1.2.2.

Se puede apreciar la forma del coseno y seno de 2β en cada eje, y la del coseno de α en ambos (Figura 1.6). Los parámetros se relacionan de forma que $b^2 = b_x^2 + b_z^2$, $\tan \beta = b_z/b_x$, y α es la misma.

La magnitud de la corrección en este caso debe de ser de $\Delta\delta = 0.29/b$ según los cálculos de la Figura 3.1a. El ajuste es perfecto en toda α y en β pequeño, pero se desvía para β alto. Es posible que esta discrepancia se deba a la imprecisión del código o a algún efecto de segundo orden en a .

3.2. Renderizado de imágenes

Para concluir este trabajo generaremos algunas imágenes «realistas» de agujeros negros empleando los algoritmos de trazado de rayos que hemos implementado. Para evitar simular rayos de luz que no alcanzan al observador se trazan únicamente los que sí lo hacen, pero hacia atrás en el tiempo. Es decir, por cada píxel de la imagen trazaremos un rayo desde el observador hacia el AN, y lo colorearemos acorde con su origen.³

3.2.1. Sombra y sección eficaz

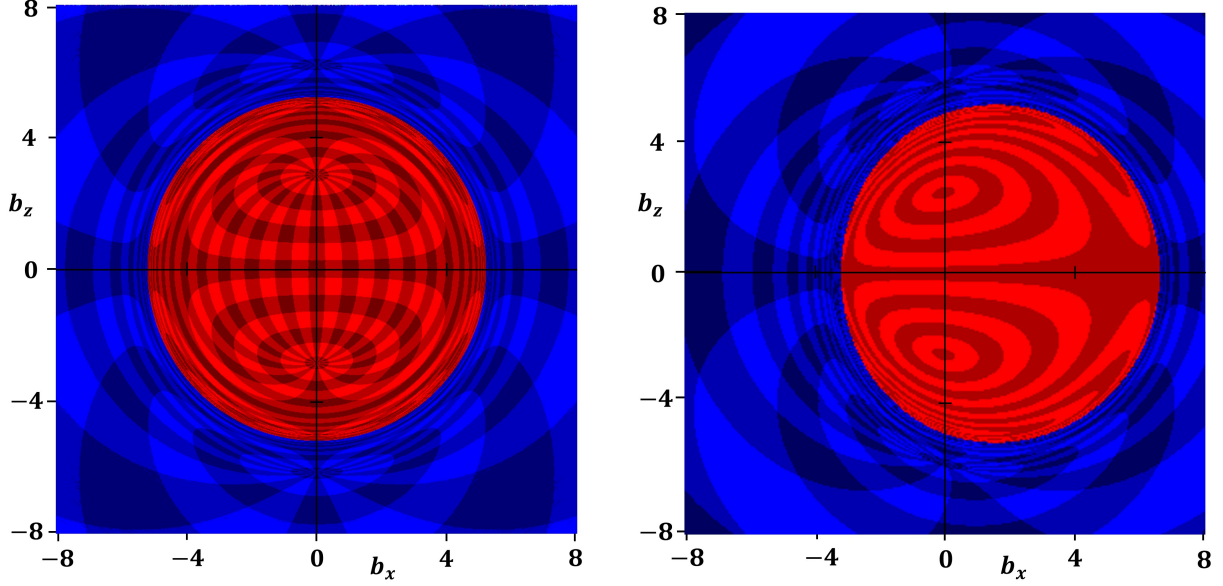
Comenzaremos simulando el punto de vista de un observador lejano en reposo. Este es el caso más sencillo, pues a grandes distancias podemos tomar los parámetros de impacto (b_x y b_z) como coordenadas de la imagen. En la Figura 3.4 se muestran los resultados tras trazar varios cientos de miles de rayos.

Los rayos que se adentran hacia el horizonte de eventos corresponden con direcciones desde las que el observador no verá luz. La silueta que forman en la imagen se conoce como la *sombra*, y corresponde con la sección eficaz de captura. La sombra del AN de Schwarzschild es circular y tiene un radio $b_0 \approx 5.2$, más del doble que su horizonte (Apartado 2.1.1).

³Se ha empleado el código disponible en [Kam17] para generar las imágenes en formato mapa de bits.

La sombra del AN de Kerr (Figura 3.4b) está abombada debido a que la luz puede acercarse más sin ser capturada cuando viaja en sentido prógrado que en el contrario. Su forma coincide en casi 2 cifras significativas con la teoría (Apartado 2.2.2 y [PT22]).

Nótese que la curvatura extrema del espacio-tiempo nos permite observar la «cara oculta» del horizonte de eventos e invierte la imagen del fondo de estrellas (Figura 3.2).



(a) AN de Schwarzschild. Resolución: 800^2 .
Tiempo de renderizado: < 1 segundo.

(b) AN de Kerr con $a = 0.8$. Resolución: 320^2 .
Tiempo de renderizado: > 1 hora.

Figura 3.4: Agujero negro visto desde el ecuador por un observador lejano. En rojo la sombra, en azul el fondo. Las bandas de color separan meridianos y paralelos cada 15° . Integración por el método de Euler. La rotación impide conocer los meridianos sobre el horizonte.

3.2.2. Panorámicas y RV

Por último simularemos el punto de vista de un observador estacionario⁴ próximo a un AN estático. No se ha conseguido replicar los cálculos con el de Kerr por la dificultad de establecer las condiciones iniciales y la lentitud del trazador.

Para relacionar el ángulo de visión γ con el parámetro de impacto (Figura 3.5) debemos tener en cuenta las distancias propias dadas por la métrica (2.1). Usando también (2.3) tenemos:

$$\tan \gamma = r \sqrt{1 - \frac{2}{r}} \cdot \frac{d\phi}{dr}, \quad b = r \left(1 - \frac{2}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin \gamma. \quad (3.7)$$

Las coordenadas celestes del observador (θ, ϕ) se relacionan con γ mediante las reglas del seno y del coseno de la trigonometría esférica. Los resultados se muestran en la Figura 3.6.

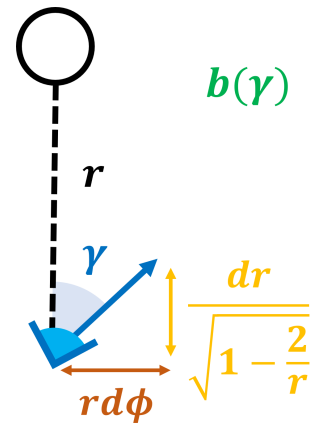


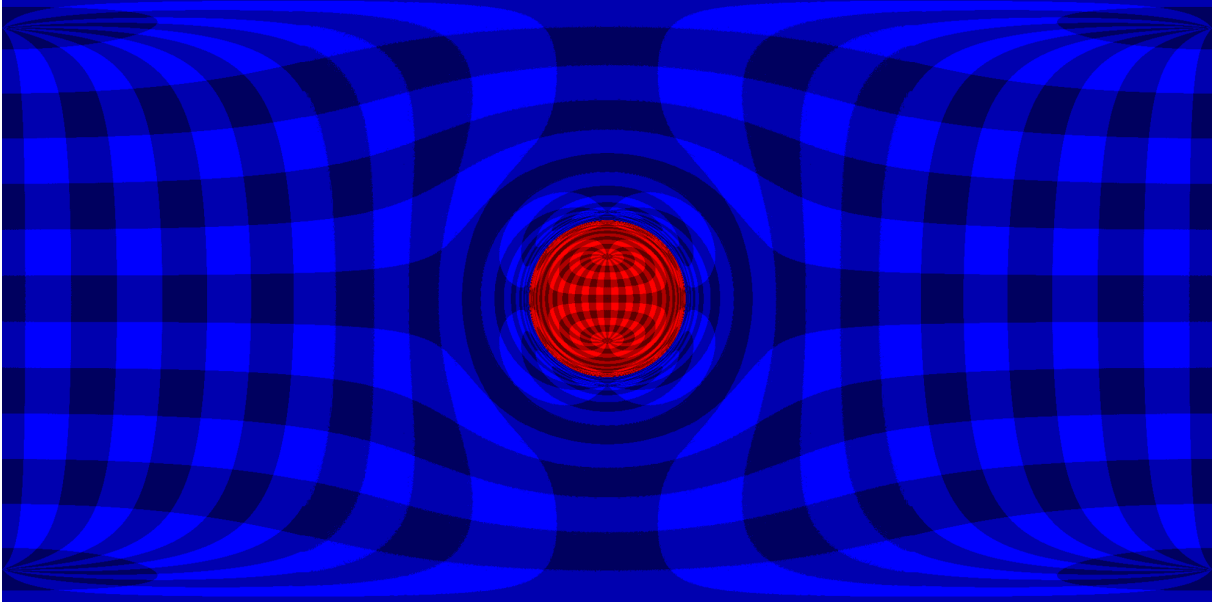
Figura 3.5: Esquema de las condiciones iniciales del rayo.

⁴Es decir, no tendremos en cuenta la aberración relativista de la luz.

CAPÍTULO 3. TRAZADO DE RAYOS

La simetría esférica de la métrica nos permite reducir el problema de dos a una dimension. El trazado de rayos se realiza una sola vez para una lista de valores de $\gamma \in [0, \pi]$, y cada píxel obtiene su ángulo de deflexión interpolando los resultados de la lista.

Las imágenes obtenidas en formato panorámico (2:1) pueden ser interpretadas por la mayoría de programas de visión 360. De esta manera podemos visualizar el AN de forma inmersiva con el ordenador, el móvil e incluso con gafas de realidad virtual.



(a) Con encasillado de referencia sobre el horizonte de eventos y el fondo de estrellas. Las bandas separan meridianos y paralelos cada 15° . Se aprecia el anillo de Einstein alrededor del AN.



(b) Sobre una representación artística de una nebulosa. Se aprecia la imagen invertida de la luz que pasa por detrás del AN. Ilustración original por Tim Barton [Bar].

Figura 3.6: Vista panorámica 360 de un observador estático en la ISCO ($r = 12$) frente a un agujero negro estacionario. Las imágenes cubren la esfera celeste en coordenadas esféricas θ y ϕ . Resolución de 2000×1000 píxeles. Tiempo de generación: ~ 2 segundos.

Conclusión

A lo largo de este trabajo se ha discutido desde multitud de puntos de vista la forma en que la gravedad, y en particular los agujeros negros, curvan la trayectoria de la luz. Además, se han elaborado una veintena de gráficas, esquemas e ilustraciones que acompañan la lectura de este documento.

Con los métodos aproximados empleados en el [Capítulo 1](#) se han reproducido los resultados correctos a primer orden. Entre ellos destaca el método gravito-magnético, pues es intuitivo y novedoso. No se ha encontrado aplicado a este problema en la literatura. En el [Capítulo 2](#) nos hemos adentrado en la geometría de los agujeros negros para comprenderlos con detalle. También hemos obtenido algunas ecuaciones diferenciales y calculado su integral. Este enfoque es más complicado, pero nos asegura expresiones exactas. Finalmente, los métodos de resolución numérica implementados en el [Capítulo 3](#) han permitido verificar los resultados analíticos y generar algunas imágenes «realistas» de agujeros negros con trazado de rayos.

Además de lograr los objetivos enunciados en la introducción, este trabajo ha sido una gran experiencia de aprendizaje. El tema desarrollado ha permitido al autor tanto consolidar como ampliar conocimientos de relatividad general.

Se propone para futuros trabajos obtener las correcciones de orden superior que expliquen las discrepancias de la [Figura 3.3](#). Y, por otra parte, profundizar en los algoritmos de obtención de imágenes con distintas métricas y observadores.

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría dar las gracias a mi tutor por darme la oportunidad de realizar este trabajo. Además, me gustaría agradecer a mis amigos/as y compañeros/as de clase todo su apoyo y compañía durante estos años. ¡Muchas gracias!

Bibliografía

- [Arm] Armagh Observatory and Planetarium. *Professor Ernst Julius Öpik*. Accedido: abril de 2024. URL: <https://www.armagh.space/heritage/armagh-observatory/history/professor-ernst-julius-opik>.
- [Bai⁺20] Joshua Baines y col. *Painleve-Gullstrand form of the Lense-Thirring spacetime*. 2020. arXiv: [2006.14258](https://arxiv.org/abs/2006.14258).
- [Bak16] Athanasios Bakopoulos. «Gravitoelectromagnetism: Basic principles, novel approaches and their application to Electromagnetism». Tesis de mtría. University of Ioannina, oct. de 2016. arXiv: [1610.08357](https://arxiv.org/abs/1610.08357).
- [BPT72] James M. Bardeen, William H. Press y Saul A. Teukolsky. «Rotating Black Holes: Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron Radiation». En: *ApJ* 178 (dic. de 1972), págs. 347-370. DOI: [10.1086/151796](https://doi.org/10.1086/151796).
- [Bar] Tim Barton. *ArtStation: Rubellite Collection*. URL: <https://cosmicspark.artstation.com/>.
- [BL67] Robert H. Boyer y Richard W. Lindquist. «Maximal analytic extension of the Kerr metric». En: *J. Math. Phys.* 8 (1967), pág. 265. DOI: [10.1063/1.1705193](https://doi.org/10.1063/1.1705193).
- [Bro10] Kevin Brown. «Reflections on Relativity». En: <https://www.mathpages.com/rr/s6-03/6-03.htm>. 2010. Cap. 6.3 Bending Light.
- [Col16] LIGO Scientific Collaboration. *GW150914 - The first direct detection of gravitational waves*. Feb. de 2016. URL: <https://www.ligo.org/detections/GW150914.php>.
- [CN21] L. Costa y José Natário. «Frame-Dragging: Meaning, Myths, and Misconceptions». En: *Universe* 7.10 (oct. de 2021), pág. 388. ISSN: 2218-1997. DOI: [10.3390/universe7100388](https://doi.org/10.3390/universe7100388).
- [Dit⁺24] William A. Dittrich y col. «Modern Eddington Experiment 2024 (MEE2024)». En: *Bulletin of the AAS* 56.3 (mar. de 2024). URL: <https://baas.aas.org/pub/2024i3n002>.
- [Ein11] Albert Einstein. «Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes. [Sobre la influencia de la gravedad en la propagación de la luz]». En: *Annalen der Physik* 35 (1911), págs. 898-908. URL: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol3-trans/393>.
- [Ein16] Albert Einstein. «Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. [Los fundamentos de la teoría general de la relatividad]». En: *Annalen der Physik* 49 (1916), págs. 769-822. URL: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6-trans/158>.

- [Fin58] David Finkelstein. «Past-Future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle». En: *Phys. Rev.* 110 (4 mayo de 1958), págs. 965-967. DOI: [10.1103/PhysRev.110.965](https://doi.org/10.1103/PhysRev.110.965).
- [Fow26] R. H. Fowler. «On Dense Matter». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 87.2 (dic. de 1926), págs. 114-122. ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1093/mnras/87.2.114](https://doi.org/10.1093/mnras/87.2.114).
- [Gin21] Jean-Marc Ginoux. «Albert Einstein and the Doubling of the Deflection of Light». En: *Foundations of Science* 27 (feb. de 2021), págs. 1-22. DOI: [10.1007/s10699-021-09783-4](https://doi.org/10.1007/s10699-021-09783-4).
- [Jak78] Stanley L. Jaki. «Johann Georg von Soldner and the gravitational bending of light, with an English translation of his essay on it published in 1801». En: *Foundations of Physics* 8 (dic. de 1978), págs. 927-950. DOI: [10.1007/BF00715064](https://doi.org/10.1007/BF00715064).
- [Kam17] Minhas Kamal. *Stack Overflow: Clean C Code for Bitmap (BMP) Image Generation*. Dic. de 2017. URL: <https://stackoverflow.com/a/47785639/24053663>.
- [KP05] Charles R. Keeton y A. O. Petters. «Formalism for testing theories of gravity using lensing by compact objects: Static, spherically symmetric case». En: *Physical Review D* 72.10 (nov. de 2005). ISSN: 1550-2368. DOI: [10.1103/physrevd.72.104006](https://doi.org/10.1103/physrevd.72.104006).
- [Ker23] R. P. Kerr. «Do Black Holes have Singularities?» En: (2023). arXiv: [2312.00841](https://arxiv.org/abs/2312.00841).
- [LS22] Karl-Heinz Lotze y Silvia Simionato. «Henry Cavendish on gravitational deflection of light». En: *Annalen der Physik* 534.7 (mayo de 2022), pág. 2200102. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.202200102>.
- [Lum79] Jean-Pierre Luminet. «Image of a spherical black hole with thin accretion disk». En: *Astronomy and Astrophysics* 75 (abr. de 1979), págs. 228-235.
- [Lum19] Jean-Pierre Luminet. *An Illustrated History of Black Hole Imaging : Personal Recollections (1972-2002)*. 2019. arXiv: [1902.11196](https://arxiv.org/abs/1902.11196).
- [MOW09] Colin Montgomery, Wayne Orchiston e I. Whittingham. «Michell, Laplace and the origin of the black hole concept». En: *Journal of Astronomical History and Heritage* 12 (ene. de 2009), págs. 90-96. DOI: [10.3724/SP.J.1440-2807.2009.02.01](https://doi.org/10.3724/SP.J.1440-2807.2009.02.01).
- [MG09] Thomas Muller y Frank Grave. «Catalogue of Spacetimes». En: *arXiv* (abr. de 2009). eprint: [0904.4184](https://arxiv.org/abs/0904.4184).
- [OV39] J. R. Oppenheimer y G. M. Volkoff. «On Massive neutron cores». En: *Physical Review* 55.4 (1939), págs. 374-381. DOI: [10.1103/PhysRev.55.374](https://doi.org/10.1103/PhysRev.55.374).
- [PT22] Volker Perlick y Oleg Yu. Tsupko. «Calculating black hole shadows: Review of analytical studies». En: *Physics Reports* 947 (feb. de 2022), págs. 1-39. ISSN: 0370-1573. DOI: [10.1016/j.physrep.2021.10.004](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2021.10.004).

BIBLIOGRAFÍA

- [Pu⁺16] Hung-Yi Pu y col. «Odyssey: A public GPU-based code for general relativistic radiative transfer in Kerr spacetime». En: *The Astrophysical Journal* 820.2 (mar. de 2016), pág. 105. DOI: [10.3847/0004-637x/820/2/105](https://doi.org/10.3847/0004-637x/820/2/105).
- [Sch16] K. Schwarzschild. «Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. [Sobre el campo gravitatorio de una masa puntual según la teoría de Einstein]». En: *Preussischen Akademie der Wissenschaften* 1916 (ene. de 1916), págs. 189-196. arXiv: [physics/9905030](https://arxiv.org/abs/physics/9905030).
- [Teo03] Edward Teo. «Spherical photon orbits around a Kerr black hole». En: *General Relativity and Gravitation* 35 (nov. de 2003), págs. 1909-1926. DOI: [10.1023/A:1026286607562](https://doi.org/10.1023/A:1026286607562).
- [Teu15] Saul A Teukolsky. «The Kerr metric». En: *Classical and Quantum Gravity* 32.12 (jun. de 2015), pág. 124006. ISSN: 1361-6382. DOI: [10.1088/0264-9381/32/12/124006](https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/12/124006).
- [Thi18] Hans Thirring. «Republication of: On the formal analogy between the basic electromagnetic equations and Einstein's gravity equations in first approximation». En: *Phys. Z.* 19 (1918), págs. 204-205. DOI: [10.1007/s10714-012-1451-3](https://doi.org/10.1007/s10714-012-1451-3).
- [Ven23] Brian Ventrudo. *Chandra's Limit*. Feb. de 2023. URL: <https://cosmicpursuits.com/138/chandrasekhar-limit/>.
- [Vis08] Matt Visser. «The Kerr spacetime: A brief introduction». En: (2008). arXiv: [0706.0622](https://arxiv.org/abs/0706.0622).
- [Wil88] Clifford M. Will. «Henry Cavendish, Johann von Soldner, and the deflection of light». En: *American Journal of Physics* 56.5 (mayo de 1988), págs. 413-415. ISSN: 0002-9505. DOI: [10.1119/1.15622](https://doi.org/10.1119/1.15622).

Contexto histórico

Detrás de cada teoría y cada descubrimiento yace siempre un relato fascinante. En opinión del autor, no se puede comprender la física sin conocer su historia y a quienes la escribieron.

Historia de los agujeros negros

La luz como una partícula

En 1704 Isaac Newton ya se planteó que la gravedad pudiese curvar los rayos de luz. En el tercer tomo de su libro *Opticks* escribe: «Do not Bodies act upon Light at a distance, and by their action bend its Rays, and is not this action (cæteris paribus) strongest at the least distance?»

Casi un siglo después, Henry Cavendish y Johann von Soldner calcularon de forma independiente la trayectoria curva de la luz al pasar cerca de un cuerpo masivo [Jak78].

La primera descripción de lo que hoy conocemos como agujeros negros fue dada por el astrónomo y clérigo inglés John Michell en 1783. En su artículo, publicado por la Royal Society, especula sobre la posible existencia de estrellas tan masivas que la velocidad de escape en su superficie supere la de la luz. Un observador distante sería incapaz de ver la luz emitida por la estrella, se trataría de una «estrella oscura».

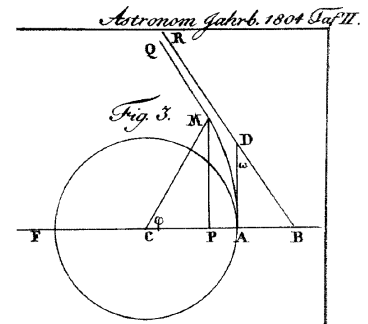


Figura A.1: Reproducción de una figura del artículo de Soldner.

Una década después, en 1796, el matemático y astrónomo francés Pierre-Simon Laplace publicó *Exposition du Système du Monde*. En este libro sobre la física del sistema solar Laplace afirma que «Il est dès lors possible que les plus grands corps lumineux de l'univers puissent, par cette cause, être invisibles»¹ [MOW09].

La luz como una onda

La idea de los agujeros negros cayó en el olvido durante el siglo XIX con el desarrollo de las teorías ondulatorias de la luz. Si la luz era una onda sin masa, no tenía sentido plantearse que le afectara la gravedad Newtoniana.

¹«Es por tanto posible que los cuerpos luminosos más grandes del universo sean, por este motivo, invisibles».

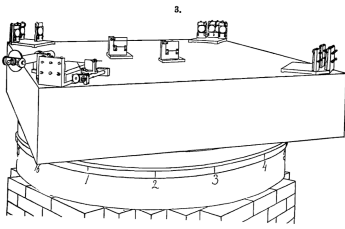


Figura A.2: Interferómetro de Michelson y Morley. Figura del artículo original.

En 1861 James C. Maxwell llegó a la conclusión de que la luz era una onda electromagnética. Como las ecuaciones predecían una única velocidad de propagación se teorizó el éter luminífero, el medio por el que se propaga la luz.

En 1887 Abraham Michelson y Edward Morley llevaron a cabo un experimento de interferometría para medir la velocidad de la Tierra respecto al éter. El experimento no encontró diferencias en la velocidad de propagación de la luz en distintas direcciones y resultó inconclusivo.

Inicios de la relatividad

En 1905, durante su *annus mirabilis*, Albert Einstein publica su teoría de la relatividad especial. Esta teoría elimina la necesidad de un éter a costa de la relatividad galileana. La velocidad de la luz es invariante, pero las distancias y los tiempos son relativos.

Diez años después, en 1915, Einstein publica su teoría de la relatividad general. Describe la gravedad a partir del principio de equivalencia: un sistema acelerado es puntualmente indistinguible de uno inmerso en un campo gravitatorio. Esta equivalencia predice que la trayectoria de la luz debería curvarse en presencia de un cuerpo masivo a pesar de ser una onda.

Apenas un mes después, en 1916, el físico alemán Karl Schwarzschild encuentra la solución exacta de las ecuaciones de Einstein para una masa esférica y estática. Nadie supo interpretar en ese momento el significado de sus singularidades [Sch16].

LIGHTS ALL ASKEW IN THE HEAVENS

Men of Science More or Less
Agog Over Results of Eclipse
Observations.

EINSTEIN THEORY TRIUMPHS

Stars Not Where They Seemed
or Were Calculated to be,
but Nobody Need Worry.

A BOOK FOR 12 WISE MEN

No More in All the World Could
Comprehend It, Said Einstein When
His Daring Publishers Accepted It.

Figura A.3: Noticia en el NYT de 1919.

Evidencias astronómicas

En 1916 el astrónomo Ernst Öpik estimó la densidad la enana blanca *40 Eridani B* en 25 000 veces la del Sol, un valor tan gigantesco que calificó de «imposible» [Arm]. Las enanas blancas debían de estar compuestas de un plasma de electrones en el que los núcleos atómicos podrían juntarse entre ellos más que en la materia ordinaria.

Arthur Eddington se preguntó qué ocurriría cuando la estrella se enfriase y sus electrones se detuvieran. En 1926 el físico-químico R. H. Fowler resolvió el misterio aplicando el recién descubierto principio de exclusión de Pauli y la estadística de Fermi-Dirac. Los electrones ejercen una presión de degeneración que mantiene a la estrella estable [Fow26].

Tres años después los físicos W. Anderson y E. C. Stoner notaron la existencia de un límite superior a la masa de una enana blanca. En 1931, el joven físico indio Chandrasekhar calculó este límite para una estrella en equilibrio hidrostático. Sus argumentos encontraron

APÉNDICE A. CONTEXTO HISTÓRICO

la oposición de muchos de sus contemporáneos, como A. Eddington o Lev Landau, quienes argumentaban que un mecanismo desconocido evitaría el colapso [Ven23].

En 1933, tan sólo dos años después de que James Chadwick descubriera el neutrón, Walter Baade y Fritz Zwicky propusieron la existencia de las extrellas de neutrones para explicar el origen de las supernovas.

Por encima del límite de Chandrasekhar la enana blanca colapsaría en una estrella de neutrones. En 1939 se calculó el límite de Tolman–Oppenheimer–Volkoff que de forma análoga limita la masa máxima de este remanente estelar. Ese mismo año, Einstein publicó un artículo argumentando que los agujeros negros eran imposibles [OV39].

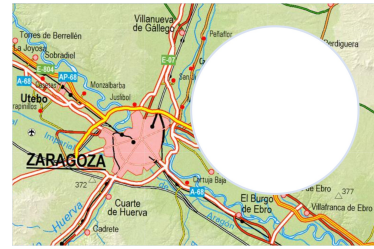


Figura A.4: Las estrellas de neutrones condensan una masa solar en un diámetro de 20 km. Mapa del Instituto Geográfico Nacional.

La edad dorada

Pasada ya la Segunda Guerra Mundial, en 1958, David Finkelstein fue el primero en reconocer la singularidad esférica como un *horizonte de eventos*. El término fue bautizado por W. Rindler dos años antes en un artículo sobre horizontes cosmológicos [Fin58].

El nombre *agujero negro* fue popularizado por John Wheeler tras sugerírselo un estudiante cansado de escucharle decir «gravitationally completely collapsed object» en una charla en 1967. Es posible que el Agujero Negro de Calcuta, un calabozo en el que se encerraron a prisioneros de guerra ingleses, inspirase el nombre a principios de los 60.

En 1963, casi medio siglo después de la solución de Schwarzschild, Roy Kerr encontró la solución exacta para un agujero negro en rotación [Teu15]. Cuatro años después, Jocelyn Bell descubre los púlsares, fuentes pulsantes de radio que resultaron ser estrellas de neutrones giratorias. Finalmente, a principios de los 70, *Cygnus X-1* se convirtió en el primer objeto reconocido como un agujero negro real.



Figura A.5: Primera fotografía simulada de un agujero negro [Lum79].

Durante estos años Bardeen, Bekenstein, Carter, and Hawking originaron la termodinámica de los agujeros negros equiparando su superficie con la entropía. La analogía se completó en 1974, cuando Stephen Hawking mostró que la teoría cuántica de campos predecía que los agujeros negros deberían emitir radiación térmica.

La ergosfera recibió su nombre del griego *ergon* (trabajo) pues es posible extraer energía del AN desde su interior. Para ello puede emplearse el proceso de Penrose o la dispersión superradiante. Esto inspiró el mecanismo de Blandford–Znajek, que explica la formación de los chorros relativistas en los cuásares. Podría llegar a emplearse como una fuente de energía o para construir un agujero negro bomba.

APÉNDICE A. CONTEXTO HISTÓRICO

El trabajo de W. Israel, B. Carter y D. Robinson originó la hipótesis de *no-pelo*, que asegura que los agujeros negros están descritos únicamente por su masa, su carga eléctrica y su momento angular. Penrose propuso la hipótesis de censura cósmica, por la que no se espera encontrar singularidades desnudas, sin un horizonte que las cubra.

Penrose y Hawking demostraron que según la relatividad general siempre habrá una singularidad en el interior de un agujero negro, sin importar su origen. Esto haría necesaria una teoría cuántica de la gravedad para estudiar su centro. Sin embargo, físicos como Roy Kerr argumentan que la demostración es incompleta [Ker23].

La primera visualización de un agujero negro sobre un fondo de estrellas fue llevada a cabo por L. Palmer, M. Pryce and W. Unruh en 1978, aunque no publicaron sus resultados [Lum19]. El mismo año, de forma independiente, J.-P. Luminet publicó la primera imagen simulada de un AN con disco de acreción (Figura A.5).

El nuevo milenio

En 2016, los interferómetros LIGO anunciaron la primera medición de ondas gravitacionales, producidas por la fusión de dos agujeros negros. Desde entonces se han detectado numerosas coalescencias inaugurando una nueva forma de estudiar el cosmos [Col16].

Finalmente, en 2019, el Telescopio del Horizonte de Eventos (EHT) publicó la primera imagen directa de un agujero negro. Este consiste en un conjunto de telescopios que con interferometría de muy larga base simulan ser uno del tamaño de la Tierra.

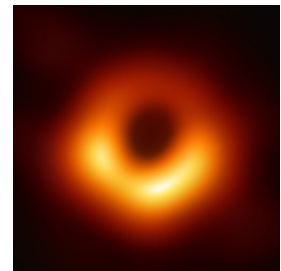


Figura A.6: Imagen de M87* tomada por el EHT.

Misterios sin resolver

Aún quedan muchas cuestiones abiertas acerca de la gravedad y los agujeros negros. La investigación presente y futura intenta resolverlas. Estas son algunas de ellas:

- Se desconoce el origen microscópico de la gravedad. Existen propuestas como teoría de cuerdas y gravedad cuántica de bucles, pero carecen de evidencia experimental.
- La paradoja de la información. ¿Qué ocurre con todo lo que cae en los agujeros negros? Muchas propuestas distintas intentan resolverla.
- Los agujeros negros supermasivos son demasiado grandes. ¿Han crecido hasta su tamaño o son primordiales del big bang? ¿Cómo? ¿Por qué?
- Los agujeros negros podrían ser parte de la materia oscura del universo.