Trabajo de Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Cálculo estocástico y valoración de derivados financieros

Autor: José Ortega Moya

Directores: Francisco Gaspar Lorenz y Gerardo Sanz Sáiz
Departamentos de Matemática Aplicada y Métodos Estadísticos

Summary

Quantitative Finance is a field within the financial industry that involves the development, validation, and implementation of mathematical models. It encompasses a wide variety of branches, including risk assessment (credit, market, liquidity, etc.), asset valuation, value adjustment (XVAs) to account for risk effects, and algorithmic trading. This Bachelor Thesis is an introduction to financial derivatives pricing and its mathematical tools, particularly stochastic calculus. We will focus on stock options and the Black-Scholes-Merton valuation model.

Derivatives are financial products whose value depends on another asset, known as the underlying asset. Two of the most relevant derivatives are futures and options. Futures are agreements between two parties to buy or sell an asset at a certain date for a certain price, while options are contracts that give the holder the right to buy (call option) or sell (put option) an asset at a certain date for the strike price. Since the value of these products depends on another asset with an unknown future price, mathematical models are required.

The models used to describe the evolution of the prices of the underlying assets are stochastic and rely on Probability and Measure Theory. For this reason, we first define the concept of conditional expectation and filtrations, which are mathematical tools that enable us to track the information available at each moment and make future estimations based on it. Afterwards, stochastic processes are defined as an indexed collection of random variables, and some useful properties are presented. These processes describe the time evolution of prices and capture the unpredictability of the markets.

We will focus especially on a type of process called martingales and particularly on Brownian Motion, which models a continuous random walk. This process has interesting characteristics; for example, the difference between the values of the Brownian motion is normally distributed with variance equal to the time difference. Additionally, the increments between disjoint time intervals are independent random variables. It also has infinite total variation, and its quadratic variation is equal to the time.

To study time evolutions and profits, it is often necessary to integrate with respect to the price function. However, the use of stochastic processes in our models instead of usual functions (with bounded total variation) means that the Lebesgue-Stieltjes integral is not well-defined, and an extension is needed. This results in the stochastic integral, which is first defined for simpler processes and then generalized through the convergence of sequences, analogous to the Lebesgue integral.

Moreover, some interesting properties of the stochastic integral are presented, including Itô's Isometry, which relates the expectation of the stochastic integral to the expectation of the Lebesgue Integral, and Itô's Lemma, which is the equivalent of the Chain Rule in stochastic calculus. The stochastic integral implies the existence of stochastic integral equations, usually treated with differential notation.

Once the mathematical tools are introduced, we finally can present the Black-Scholes-Merton (BSM) model, which is mainly characterised by an underlying asset prices, S_t, that follows a Gometric Brownian Motion, in other words, that satisfies the followiing Stochastic Differential Equation

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

where μ is called rate of return, σ, is called volatility and W_t is a Brownian mmotion. The model also assumes the exitence of a risk-free rate of interest r and no transaction commissions.

To price derivatives, it is useful to construct another probability space, called the risk-neutral probability, where the current value of the underlying assets becomes a martingale. With additional considerations, this property enables us to price the derivative as the conditional expectation of the present value of the option's payoff at the expiration date, given the present information. By applying this property, we then prove the formulas for the prices of call and put options and forward contracts.

Following this, we present a risk hedging strategy called delta hedging, which is based on the BSM model and the existence of a replicating portfolio that has at every time the same value as an option contract.

Finally, the main limitations of the BSM model are presented, including the implied volatility, which is the value that the volatility should have so that the BSM prices match the actual market prices. When this value is computed, it is found to be a non-constant function of the strike price, rather it has a smile or skew shape.This fact violates the BSM hypothesis, and many financial professionals and mathematicians have made significant efforts to incorporate this effect into their models, some of which we introduce at the end of the text.

Índice

1. Introducción y objetivos

Las finanzas cuantitativas son un campo de estudio de gran actualidad y de alta aplicabilidad en la industria, sus ramas son variadas y tratan asuntos como la gestión de diferentes riesgos (mercado, crédito, liquidez...), la valoración de activos, ajustes a la valoración (XVAs) para incluir el efecto de riesgos o métodos de *trading* algorítmico [1]. Algo que tienen en común todas estas ramas es su objetivo común de modelar, afrontar y, en caso de ser posible, aprovechar la incertidumbre propia de los mercados.

El inicio de este campo se puede situar en el año 1900 con la Tesis de Louis Bachelier, "*Théorie de la spéculation*" [2], bajo la dirección de Henri Poincaré, trabajo que constituye el primer intento serio de valoración de opciones mediante procesos estocásticos. Sin embargo, los resultados de Bachelier no fueron suficientemente satisfactorios y hubo que esperar hasta 1973, cuando Fisher Black, Myron Scholes [3] y Robert C. Merton [4] publicaron su modelo de valoración de opciones, el cual tuvo un impacto incalculable en el desarrollo de los mercados de derivados.

El objetivo de este trabajo es presentar las bases matemáticas que fundamentan una gran parte de las finanzas cuantitativas, con un especial interés en la valoración de derivados financieros, así como presentar el modelo de Black-Scholes-Merton y sus principales resultados.

2. El problema de la valoración de derivados financieros

2.1. Breve introducción a las matemáticas financieras

El principio fundamental en matemáticas financieras es el *valor temporal del dinero* [5, 6]. Cuando se estudia una inversión, no tiene el mismo valor un euro hoy que dentro de un año, y esto se debe a dos factores principalmente:

- **Los flujos de caja en diferentes instantes de tiempo tienen diferente valor relativo:** Si se recibe un capital en el presente, este se puede invertir y obtener una rentabilidad en el futuro. Por tanto, recibir la misma cantidad en el futuro supone un coste de oportunidad que se refleja en un menor valor actual.
- **La incertidumbre de los flujos de caja:** Toda inversión conlleva unos riesgos, por ejemplo, de impago o que la rentabilidad no sea la esperada. Esta incertidumbre se debe tener en cuenta a la hora de valorar una inversión.

De esta manera, se considera que el valor presente, C_0, de una cantidad futura, C_n, que se tendrá dentro de n años, se puede calcular mediante una tasa de actualización r.

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+r)^n}. \tag{2.1}$$

En este texto se trabajará generalmente con tasas actualización y de interés compuestas de manera continua, es decir,

$$C_0 = C_n e^{-rn}. \tag{2.2}$$

Otro concepto financiero fundamental para este trabajo es el de *arbitraje* [7-9], en secciones posteriores se dará una formulación matemática en el contexto de un modelo de mercado, pero en términos conceptuales, es una estrategia de inversión que permite aprovechar ineficiencias del mercado para conseguir beneficios sin arriesgar capital. Veamos un ejemplo: supongamos que existen dos mercados en los que un cierto activo cotiza a precios diferentes, entonces un posible arbitrajista[1] podría comprar barato y vender caro simultáneamente en los diferentes mercados, consiguiendo un beneficio sin arriesgar capital.

Oportunidades como la anterior son raras[2] en los mercados reales, ya que, si el mercado es lo suficientemente eficiente, se corrigen por sí solas: en la situación anterior, este arbitrajista trataría de sacar todo el beneficio posible de esta oportunidad, generando un aumento de demanda en el mercado donde se vende barato y un aumento de oferta donde se vende caro, haciendo que los precios suban en el primero y bajen en el segundo hasta igualarlos. En los mercados reales existen instituciones financieras, como los *hedge funds*, que están constantemente en busca de estas situaciones mediante el uso de herramientas computacionales sofisticadas y *trading* de alta frecuencia con grandes volúmenes de capital, de forma que las oportunidades de arbitraje desaparecen rápidamente y, para el resto de agentes del mercado, es como si nunca hubieran existido.

Debido a lo anterior, a la hora de valorar un instrumento financiero se toma como principio la **no existencia del arbitraje**, teniendo como consecuencia que dos instrumentos que tengan flujos de caja idénticos deban tener precios iguales. Cabe mencionar que, aunque esta es una hipótesis razonable en la mayor parte de casos, se han dado situaciones en las que este principio ha fallado [10, 11], especialmente ante situaciones de crisis financiera, cuando la falta de liquidez impide que los arbitrajistas inviertan con apalancamiento, es decir, mediante deuda, y corrijan las ineficiencias del mercado, las finanzas cuantitativas están construidas sobre este principio y en este texto no entraremos en la discusión de esta situaciones. Un ejemplo sencillo de valoración de un bono en ausencia de arbitraje se puede consultar en el Anexo A.1.

2.2. Derivados financieros

En los mercados financieros se opera con multitud de productos, entre ellos son destacables los *derivados financieros*, que son aquellos cuyo valor depende del precio de otro activo, denominado *activo subyacente*. Algunos de los más famosos [9] son los *futuros*, los cuales son contratos que obligan a comprar o vender una cantidad fijada del activo subyacente en una fecha concreta y a un precio preestablecido y las *opciones*, las cuales son similares pero eliminan la obligación, sólo dan opcionalidad. Dada la importancia de este producto en el trabajo se define a continuación el concepto de *opción europea*.

Definición 2.2.1 (Opción *call*/*put* europea)**.** Una opción *call* europea es un contrato que da al comprador derecho, pero no obligación, de comprar un activo subyacente en una fecha de vencimiento fijada y a un precio de ejercicio (*strike*) preestablecido. Una opción *put* es análoga pero da derecho a la venta.

De esta forma, un comprador que actúe de forma razonable, ejercerá la opción de compra cuando el precio del activo subyacente en la fecha de ejercicio sea mayor que el precio *strike* (comprando

[1] A veces denominados *arbitrageurs*, del francés.

[2] A menudo se pueden observar situaciones que *aparentemente* ofrecen oportunidades de arbitraje, pero el beneficio real desaparece cuando se consideran comisiones, tasas y otros sobrecostes inevitables.

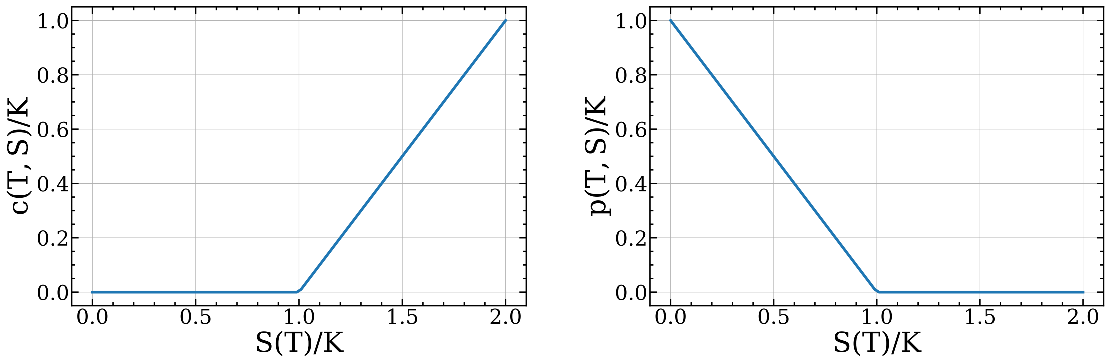
más barato) y una opción de venta cuando el precio sea menor que el *strike* (vendiendo más caro). De esta manera, se pueden formular los beneficios de estas opciones:

Definición 2.2.2 (Función de beneficio de una opción)**.** Sea $S : [0, T] \longrightarrow [0, +\infty)$ la función del precio del activo subyacente desde el momento de la contratación de una opción *call* con *strike* K hasta la fecha de ejercicio T. Se define la función de beneficio (*payoff*) como:

$$c(T, S) := \text{máx}(S(T) - K, 0). \tag{2.3}$$

Respectivamente para una opción *put*:

$$p(T, S) := \text{máx}(K - S(T), 0). \tag{2.4}$$



(a) Opción *call*.

(b) Opción *put*.

Figura 2.1: Funciones de beneficio de opciones europeas.

Naturalmente, la función de beneficio de la opción debe coincidir con su valor a tiempo T. Se puede intuir la dificultad para valorar este tipo de instrumentos financieros, puesto que, a diferencia de los bonos, los flujos de caja son función del precio de otro activo, el cual fluctúa según su oferta y demanda en los mercados y el valor $S(T)$ es desconocido en el momento de la contratación. Esta es la razón por la que se recurre a modelos matemáticos para describir la evolución del activo subyacente y tratar de obtener valoraciones que, en el marco de estos modelos, no permitan arbitraje. En el Anexo A.2 se puede consultar una introducción al modelo binomial de un paso, el modelo más simple de valoración sin arbitraje.

3. Cálculo estocástico

En esta sección se van a presentar los elementos del cálculo condicional de esperanzas, procesos estocásticos y se va a definir la integral estocástica. Para el desarrollo de esta sección son necesarios algunos resultados de Teoría de la Medida y Probabilidad, de los cuales se puede encontrar un resumen en el Anexo B.

3.1. Esperanza condicional

Para la modelización de la evolución del valor de los activos financieros es esencial el concepto de esperanza condicional y sus principales propiedades, las cuales se presentan a continuación.

Definición 3.1.1 (Esperanza)**.** Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria con valores en $[0, +\infty)$, se define la esperanza de X como su integral (en el sentido de Lebesgue) respecto a la medida $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{E}X = \int_\Omega X(\omega)\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \tag{3.1}$$

Sea X una variable aleatoria real y sean $X^+ = \max(0, X)$ y $X^- = \max(0, -X)$, se define su esperanza como

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}X^+ - \mathbb{E}X^-, \tag{3.2}$$

siempre y cuando no se ocurra que $\mathbb{E}X^+ = \mathbb{E}X^- = \infty$, caso en el cual se dice que la esperanza de X no existe. Si $\mathbb{E}|X| < \infty$, se dice que X es integrable.

Por otra parte, es de gran relevancia el concepto de independencia de σ-álgebras.

Definición 3.1.2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sean $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_1$ dos σ-álgebras sobre Ω. Se dice que $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son *independientes* si para todo $A_1 \in \mathcal{G}_1$ y $A_2 \in \mathcal{G}_2$, se cumple que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2).$$

Una variable aleatoria X es independiente de una σ-álgebra $\mathcal{G}$ si la σ-álgebra engendrada por X, $\sigma(X)$, y $\mathcal{G}$ son independientes. Así mismo, dos variables aleatorias son independientes si sus respectivas σ-álgebras engendradas lo son.

Definición 3.1.3. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y una variable aleatoria real tal que $\mathbb{E}|X| < \infty$, sea $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una σ-álgebra . La esperanza condicional ($\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$) de X respecto de $\mathcal{G}$ es la única (salvo diferencias en conjuntos de probabilidad nula) variable aleatoria que cumple:

(I) $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ es $\mathcal{G}$-medible y

(II) para todo $A \in \mathcal{G}$

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X\mathrm{d}\mathbb{P}. \tag{3.3}$$

Nota 3.1.4. La esperanza condicional está bien definida: existe y es única casi seguramente. Supongamos primero que $X \geq 0$, entonces podemos definir la medida positiva sobre $(\Omega, \mathcal{G})$

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A X\mathrm{d}\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{G}.$$

Es claro que $\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$, luego $\mathbb{Q}$ es absolutamente continua respecto a $\mathbb{P}$ ($\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$). Dado que $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son medidas finitas, entonces, por el Teorema de Radon-Nikodym (B.15), existe una función $Z : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{G}$-medible y tal que

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A Z \mathrm{d}\mathbb{P},$$

por tanto Z cumple las condiciones de la definición. Si $X \in \mathbb{R}$, se aplica el razonamiento a X^+ y X^-, obteniendo Z^+ y Z^- y se deduce $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = Z^+ - Z^-$. Se hace notar que X no es necesariamente $\mathcal{G}$-medible, mientras que Z sí lo es.
Sean Y y Z dos variables aleatorias cumpliendo las condiciones de la definición. Como son $\mathcal{G}$-medibles, entonces $W := Z - Y$ es $\mathcal{G}$-medible. Por otra parte, $(0, +\infty), (-\infty, 0] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, luego $B := W^{-1}((0, +\infty)) \in \mathcal{G}$ y $C := W^{-1}((-\infty, 0]) \in \mathcal{G}$. Además $B \cup C = \Omega$, por tanto

$$\begin{aligned}\int_\Omega |Z - Y| \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_B (Z - Y)\mathrm{d}\mathbb{P} - \int_C (Z - Y)\mathrm{d}\mathbb{P} = \\ &= \left(\int_B Z\mathrm{d}\mathbb{P} - \int_B Y\mathrm{d}\mathbb{P}\right) - \left(\int_C Z\mathrm{d}\mathbb{P} - \int_C Y\mathrm{d}\mathbb{P}\right) = \\ &= \left(\int_B X\mathrm{d}\mathbb{P} - \int_B X\mathrm{d}\mathbb{P}\right) - \left(\int_C X\mathrm{d}\mathbb{P} - \int_C X\mathrm{d}\mathbb{P}\right) = 0 - 0 = 0,\end{aligned}$$

lo que implica que $Z = Y$ casi seguro y así $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ es única.

Proposición 3.1.5 (Propiedades de la esperanza condicional)**.** *Sean X e Y variables aleatorias reales e integrables y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una σ-álgebra.*

(a) Si $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathbb{E}[c_1 X + c_2 Y|\mathcal{G}] = c_1 \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + c_2 \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}],$$

(b) si X es $\mathcal{G}$-medible y $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ es una sub-σ-álgebra, entonces $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|G]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$,

(c) si X es $\mathcal{G}$-medible, entonces $\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$. En particular, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$.

(d) si X es independiente de $\mathcal{G}$, entonces $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}X$.

Demostración. (a) Se deduce de la linealidad de la integral y la definición de esperanza condicional de X e Y.

(b) Por definición $\int_A \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}]\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\mathrm{d}\mathbb{P}$ para todo $A \in \mathcal{H}$. Pero $A \in \mathcal{G}$ también, luego $\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]\mathrm{d}\mathbb{P}$. Y como $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$ es $\mathcal{H}$-medible, queda probado el resultado.

(c) En primer lugar, $X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ es $\mathcal{G}$-medible por ser producto de dos funciones medibles. A partir de aquí aplicamos el denominado *método estándar*. Primero supongamos que $X = \mathbb{1}_B$ con $B \in \mathcal{G}$, entonces

$$\int_A X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{A\cap B} \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{A\cap B} Y\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A XY\mathrm{d}\mathbb{P} \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

Si ahora $X = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{B_i}$ es una función simple medible con $c_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces aplicando la linealidad de la integral se tiene el resultado. A continuación, si X e Y son no negativas, se puede aproximar por funciones simples medibles crecientes $X_n \nearrow X$ y aplicando el Teorema de la Convergencia Monótona (B.9) dos veces:

$$\begin{aligned}\int_A X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]\mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_A \lim_{n\to\infty} X_n\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]\mathrm{d}\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty}\int_A X_n\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]\mathrm{d}\mathbb{P} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_A X_nY\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \lim_{n\to\infty} X_nY\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A XY\mathrm{d}\mathbb{P}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Y finalmente, para X e Y variables aleatorias reales cualesquiera, se aplica la linealidad de la integral y lo anterior a $X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = X^+\mathbb{E}[Y^+|\mathcal{G}] + X^-\mathbb{E}[Y^-|\mathcal{G}] - X^+\mathbb{E}[Y^-|\mathcal{G}] - X^-\mathbb{E}[Y^+|\mathcal{G}]$, donde todas las funciones del lado derecho son no negativas.

(d) Sea $A \in \mathcal{G}$, entonces

$$\int_A X\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega X\cdot \mathbb{1}_A\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}\mathbb{1}_A = \mathbb{E}X\cdot\mathbb{P}(A) = \int_\Omega \mathbb{E}X\cdot\mathbb{1}_A\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}X\mathrm{d}\mathbb{P},$$

donde la tercera igualdad se debe a la independencia de X y $\mathbb{1}_A$ y las demás son aplicaciones directas de las definiciones de integral sobre A y esperanza.

□

Otras propiedades y características de la esperanza condicional se pueden encontrar en [8, 12].

3.2. Procesos estocásticos

A partir de este momento se entenderá que siempre tratamos con un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Con el objetivo de modelizar las fluctuaciones de los precios de un determinado activo subyacente y de un derivado, debemos definir un objeto matemático adecuado para este fin. Diremos que $X = (X_t)_{t\in I}$ es un *proceso estocástico* si es una colección de variables aleatorias, es decir, para cada $t \in I$, X_t es una variable aleatoria. Generalmente el índice t se interpretará como el tiempo, de manera que X representa la evolución temporal de un proceso que incluye aleatoriedad. Además el conjunto de índices I puede ser discreto o continuo. Por otra parte, nos referiremos como *realizaciones* de un proceso estocástico a las aplicaciones $t \mapsto X_t(\omega)$ que se obtienen al fijar $\omega \in \Omega$.

Para completar el modelo, necesitamos una herramienta que nos permita distinguir de qué información disponemos en cada momento de tiempo, esto serán las filtraciones.

Definición 3.2.1. Sea Ω un conjunto no vacío. Supongamos que para cada $t \in I \subseteq \mathbb{R}^+$ existe una σ-álgebra $\mathcal{F}_t$. Además, si para cada s tal que $0 \le s \le t$ se tiene que $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, entonces se dice que la colección $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ es una filtración.

Definición 3.2.2. Sea X un proceso estocástico real, diremos que es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ si para todo $t \in I$, X_t es $\mathcal{F}_t$-medible. Se define la filtración natural $(\mathscr{G}_t)_t$ de X como $\mathscr{G}_t = \sigma(X_s, s \le t)$.

Nota 3.2.3. La filtración natural es la filtración más pequeña posible para que X sea un proceso estocástico adaptado, por ello $\mathcal{F}_t \subseteq \mathscr{G}_t$ para todo $t \in I$, para cualquier filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ a la que esté adaptado el proceso.

Ejemplo 3.2.4 (Filtración del modelo binomial)**.** Consideremos un modelo del precio de una acción en bolsa tal que en el tiempo inicial su valor es S_0 y, en n tiempos discretos, aumenta en un factor u con una probabilidad p o disminuye en un factor d, con probabilidad $q = 1 - p$, es decir,

$$\mathbb{P}[S_{t_i} = uS_{t_{i-1}}] = p, \quad \mathbb{P}[S_{t_i} = dS_{t_{i-1}}] = q.$$

Consideraremos el espacio de probabilidad con $\Omega = \{u, d\}^n$, es decir, el conjunto de n-tuplas en las que cada elemento vale u o d, tomaremos $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ y la probabilidad será la inducida por la definición del proceso. La filtración que consideramos en este caso es aquella que para cada $t_i \in I$, contiene la información sobre la realización del proceso que ha ocurrido en tiempos pasados. Por ejemplo, en el primer instante de tiempo se resuelve el primer valor que toma el precio, por tanto se sabe si

$$\omega \in A_u = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega, \quad x_1 = u\}, \quad o \quad \omega \in A_d = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega, \quad x_1 = d\}.$$

Así $\mathcal{F}_{t_1} = \{\emptyset, \Omega, A_u, A_d\}$. Para el segundo tiempo tendremos más información y se habrá resuelto si ω pertenece a A_{uu}, A_{ud}, A_{du} o A_{dd}, donde estos elementos son los conjuntos de Ω tal que las dos primeras componentes tienen los valores dados por el subíndice, así

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{t_2} = \sigma(A_{uu}, A_{ud}, A_{du}, A_{dd}) = \{&\emptyset, \Omega, A_u, A_d, A_{uu}, A_{ud}, A_{du}, A_{dd}, A^c_{uu}, A^c_{ud}, A^c_{du}, A^c_{dd},\\ &A_{uu} \cup A_{du}, A_{dd} \cup A_{ud}, A_{uu} \cup A_{dd}, A_{ud} \cup A_{du}\}\end{aligned}$$

De esta manera se van ampliando las σ-álgebras de la filtración hasta que en el tiempo final se resuelve toda la información y $\mathcal{F}_{t_n} = \mathcal{F}$.

Con la herramienta de las filtraciones, la esperanza condicional toma un significado muy relevante, pues es la mejor estimación respecto a la norma L^2 de una variable aleatoria futura dado el conocimiento que se tiene actualmente [13].

De cara al estudio de los procesos estocástico en función del tiempo, necesitaremos que cumplan otra condición relacionada con la medibilidad de estos.

Definición 3.2.5. Un proceso estocástico $X = (X_t)_{t \in [0,T]}$ se dice que es *progresivamente medible* si para cada $u \in [0, T]$, la función $(t, \omega) \in [0, u] \times \Omega \mapsto X_t(\omega)$ es medible respecto a la σ-álgebra producto $\mathcal{B}([0, u]) \otimes \mathcal{F}_u$, donde $\mathcal{B}([0, u])$ denota la σ-álgebra boreliana.

Esta condición se puede asegurar en muchas ocasiones mediante la aplicación del siguiente resultado, cuya demostración se puede encontrar en [14].

Proposición 3.2.6. *Sea X un proceso estocástico real y adaptado. Si todos las realizaciones del proceso son continuas a derecha, entonces X es progresivamente medible.*

Uno de los procesos estocásticos continuos más relevantes es el movimiento Browniano, que describe una trayectoria aleatoria como se puede ver en la Figura 3.1, donde se representa la simulación de algunas realizaciones y un histograma de las distribución en el instante final. Nótese que en este texto se emplea la convención $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ para denotar la distribución normal con media μ y varianza σ^2.

Definición 3.2.7 (Movimiento Browniano)**.** Un proceso estocástico real, adaptado y con todas sus realizaciones continuas es un Movimiento Browniano $(W_t)_{t \geq 0}$ si cumple:

(I) $W_0 = 0$ casi seguramente (c.s),

(II) Para cada $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ y

(III) $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

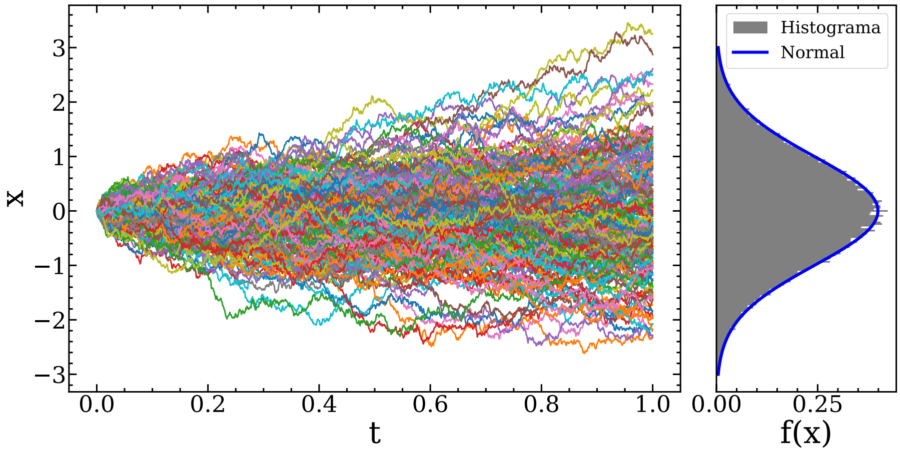


Figura 3.1: Simulación de movimiento Browniano. Se representan 200 trayectorias y un histograma formado con 100000.

Observación 3.2.8. El movimiento Browniano es progresivamente medible por ser continuo y, en particular, continuo a derecha.

Proposición 3.2.9. *Sea $(W_t)_{t\geq 0}$ un Movimiento Browniano y sean $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_N$ cualesquiera, entonces los incrementos $W_{t_1} - W_{t_0}$, $W_{t_2} - W_{t_1}$, ..., $W_{t_N} - W_{t_{N-1}}$ son variables aleatorias independientes.*

Demostración. Sea $j = 0, \ldots N-2$, como W_{t_j} es $\mathcal{F}_{t_j}$-medible y $\mathcal{F}_{t_j} \subseteq \mathcal{F}_{t_{j+1}}$, entonces W_{t_j} es $\mathcal{F}_{t_{j+1}}$-medible. Como además, $W_{t_{j+1}}$ es $\mathcal{F}_{t_{j+1}}$-medible, se tiene que $W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$ es $\mathcal{F}_{t_{j+1}}$-medible, luego $\sigma(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \subseteq \mathcal{F}_{t_{j+1}}$. Para cualquier $i = j+1, \ldots, N-1$, $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ es independiente de $\mathcal{F}_{t_i}$ y $\mathcal{F}_{t_{j+1}} \subseteq \mathcal{F}_{t_i}$, entonces es independiente de $\mathcal{F}_{t_{j+1}}$ y así, necesariamente, es independiente de $\sigma(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$. $\square$

Existe una clase de procesos estocásticos muy relevante en la que la mejor estimación (en norma L^2) de cualquier valor futuro es el valor presente, son las martingalas.

Definición 3.2.10. Un proceso estocástico real $M = \{(M_t)_{t\in I}\}$ es una *martingala* si M_t es integrable para cada $t \in [0, T]$ y para todo $s \leq t$

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s.$$

Proposición 3.2.11. *El movimiento Browniano es una martingala.*

Demostración. Sean $0 \leq s \leq t$, entonces $\mathbb{E}[W_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t + W_s - W_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[W_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s] + W_s = 0 + W_s$, donde la segunda igualdad se debe a la linealidad del operador esperanza y la tercera a que W_s es $\mathcal{F}_s$-medible y $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$. $\square$

Definición 3.2.12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se define la variación total de f en el intervalo $[a, b]$ como:

$$V_b^a f = \sup_{\pi \in \Pi} \sum_{i=0}^{n_\pi - 1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|, \tag{3.5}$$

donde el supremo se realiza sobre el conjunto de las particiones finitas de $[a, b]$, $\Pi = \{\pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n_\pi - 1}, t_{n_\pi}\} : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n_\pi - 1} < t_{n_\pi} = b\}$.

Definición 3.2.13. Sea X un proceso estocástico. Se define su variación cuadrática $\langle X \rangle$ como el proceso

$$\langle X \rangle_t := \lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=0}^{n_\pi - 1} |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^2, \quad \text{en probabilidad},$$

donde $\|\pi\| = \max_{1 \leq k \leq n_\pi} |t_k - t_{k-1}|$, $\pi \in \Pi$.

Se puede calcular ahora las variaciones total y cuadrática del movimiento Browniano.

Proposición 3.2.14. *Sea $(W_t)_{t \geq 0}$ un movimento Browniano. Se tiene que $V_a^b(W) = \infty$ c.s. y $\langle W \rangle_t = t$.*

Demostración. Dada una partición π de $[0, t]$, consideremos

$$Q_\pi(t) = \sum_{i=0}^{n_\pi - 1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2,$$

y notemos que

$$\mathbb{E}|W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2 = \mathbb{V}ar[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}] = t_{i+1} - t_i.$$

Se tiene entonces que la esperanza del proceso es

$$\mathbb{E}[Q_\pi(t)] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n_\pi - 1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2\right] = \sum_{i=0}^{n_\pi - 1} \mathbb{E}|W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2 = \sum_{i=0}^{n_\pi - 1} t_{i+1} - t_i = t. \tag{3.6}$$

Por otra parte, desarrollando la varianza del cuadrado de los incrementos,

$$\mathbb{V}ar\left[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right] = \mathbb{E}\left[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^4\right] - 2(t_{i+1} - t_i)\mathbb{E}\left[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right] + (t_{i+1} - t_i)^2. \tag{3.7}$$

No es difícil demostrar (por ejemplo, mediante la función generadora de momentos) que si $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, entonces $\mathbb{E}|Z|^4 = 3\sigma^4$, por lo tanto $\mathbb{E}\left[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^4\right] = 3(t_{i+1} - t_i)^2$ y entonces $\mathbb{V}ar\left[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right] = 2(t_{i+1} - t_i)^2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar(Q_\pi(t)) &= \sum_{i=0}^{n_\pi - 1} \mathbb{V}ar[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] = \sum_{i=0}^{n_\pi - 1} 2(t_{i+1} - t_i)^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n_\pi - 1} 2(t_{i+1} - t_i)\|\pi\| = 2\|\pi\| t \xrightarrow{\|\pi\| \to 0} 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Se tiene así que $Q_\pi(t) \xrightarrow{L^2} t$, lo que implica $Q_\pi(t) \xrightarrow{P} t$. Además, la convergencia en probabilidad implica al existencia de una subsucesión de la anterior que converge casi seguramente.
En cuanto a la variación total, sea $(Q_m(t))_{m=1}^\infty$ la subsucesión convergente casi seguramente y

$$A = \{\omega \in \Omega : \lim_{m \to \infty} Q_m(\omega)(t) = t\},$$

que cumple $\mathbb{P}(A) = 1$. Se tiene que para todo $\omega \in A$

$$\begin{aligned} Q_m(\omega)(t) = \sum_{i=0}^{n_m-1} |W_{t_{i+1}}(\omega) - W_{t_i}(\omega)|^2 \leq \\ \leq \max_{0\leq i\leq n_m-1} |W_{t_{i+1}}(\omega) - W_{t_i}(\omega)| \sum_{i=0}^{n_m-1} |W_{t_{i+1}}(\omega) - W_{t_i}(\omega)|. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por la continuidad del movimiento Browniano y la compacidad del intervalo $[0,t]$, $\max_{0\leq i\leq n_m-1} |W_{t_{i+1}}(\omega) - W_{t_i}(\omega)| \xrightarrow{m\to\infty} 0$, por tanto, tomando límite a ambos lados de la expresión se tiene que necesariamente

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{n_m-1} |W_{t_{i+1}}(\omega) - W_{t_i}(\omega)| = \infty, \quad \omega \in A, \tag{3.10}$$

y por tanto $V_0^t(\omega) = \sup_{\pi\in\Pi} \sum_{i=0}^{n_\pi-1} |W_{t_{i+1}}(\omega) - W_{t_i}(\omega)| \geq \infty$, para todo $\omega \in A$. □

3.3. Integral estocástica

Supongamos que queremos evaluar una estrategia de inversión en bolsa y modeláramos la evolución del precio de la acción con una función $S : [0,T] \to \mathbb{R}^+$ diferenciable. Esta estrategia nos da el número de acciones que debemos poseer en función del tiempo $t \in [0,T]$ y del precio de actual de la acción: $N : [0,T] \times \mathbb{R}^+ \to R$. La forma de calcular el beneficio es integrando respecto del precio:

$$\int_0^T N(S(t),t)dS(t) = \int_0^T N(S(t),t)S'(t)dt.$$

Ahora bien, si quisiéramos hacer lo mismo empleando un proceso estocástico para modelar el precio, dado que, según el resultado 3.2.14, la variación total de un movimiento Browniano es infinita, la integral de Lebesgue-Stieltjes (veáse B.20) respecto al Browniano no está bien definida para cada realización individual. Es por ello que es necesario realizar una extensión del concepto de integral para dar cabida a este tipo de casos, concretamente se hará para un tipo de procesos llamados *procesos de Itô*, que generalizan el movimiento Browniano.

Por otra parte, dado que la variación cuadrática es continua y creciente casi seguramente, sí está definida casi seguramene la integral de Lebesgue-Stieltjes respecto a ella, de hecho, dado que en el caso del Browniano, $\langle W\rangle_t = t$, la integral es la de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$. Esto nos permite definir un espacio de procesos estocásticos particular.

Definición 3.3.1. Sea $W = \{(W_t)_{t\in[a,b]}\}$ un movimiento Browniano dotado de una filtración. Denotamos $\mathscr{L}^*([a,b])$ al espacio de clases de equivalencia de procesos estocásticos progresivamente medibles $X = \{(X_t)_{t\in[a,b]}\}$ tales que

$$\mathbb{E}\int_a^b |X_s|^2 d\langle W\rangle_t = \mathbb{E}\int_a^b |X_s|^2 dt < +\infty. \tag{3.11}$$

Nota 3.3.2. Las clases de equivalencia vienen dadas por los procesos que son indistinguibles, es decir, sus realizaciones son iguales casi seguramente. Como es usual, ignoraremos la noción de clase de equivalencia y simplemente diremos que un proceso pertenece a estos espacios.

Nota 3.3.3. Dado que el espacio $\Omega \times [a, b]$ es de medida finita, la definición 3.3.1 asegura, gracias al Teorema de Fubini (B.17) y a la medibilidad progresiva, que $\int_a^t X_s du$ sea una variable aleatoria bien definida e integrable para todo $t \in [a, b]$.

Para construir la integral estocástica se toma un método similar al de la construcción de la integral de Lebesgue, la cual se define primero para un tipo de funciones más sencillas, llamadas simples. En este caso lo haremos con los llamados *procesos elementales*.

Definición 3.3.4. Un proceso X se llama elemental si tiene la forma

$$X_t = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t),$$

donde $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ y $(\xi_i)_{i=1}^n$ son variables aleatorias tales que $\sup_{i=1,\ldots,n} |\xi_i(\omega)| \leq C < \infty$ para todo $\omega \in \Omega$ y ξ_i es $\mathcal{F}_{t_i}$-medible para cada $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Nótese que los procesos elementales están adaptados por definición y son continuos a derecha, luego son progresivamente medibles. Podemos definir ahora su integral y enunciar algunas de sus propiedades principales.

Definición 3.3.5 (Integral de un proceso elemental)**.** Sea $X \in \mathscr{L}^*([a, b])$ un proceso elemental $X_t = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t)$ con $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, se define su integral:

$$\int_a^b X_t dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

Teorema 3.3.6. *Sea $X \in \mathscr{L}^*([a, b])$ un proceso elemental, entonces*

$$\mathbb{E}\left[\int_a^b X_t dW_t | \mathcal{F}_a\right] = 0, \ y$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_t dW_t\right)^2 |\mathcal{F}_a\right] = \mathbb{E}\left[\int_a^b X_t^2 dt |\mathcal{F}_a\right].$$

En particular, la esperanza de la integral es nula y se tiene la Isometría de Itô

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_t dW_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_a^b X_t^2 dt\right] < \infty. \tag{3.12}$$

Demostración. Sea $X_t = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t)$, como ξ_i es $\mathcal{F}_{t_i}$-medible y $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ es independiente de $\mathcal{F}_{t_i}$ se tiene

$$\mathbb{E}(\xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) | \mathcal{F}_{t_i}) = \xi_i \mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = 0,$$

y además ξ_i^2 y $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2$ son independientes, luego

$$\mathbb{E}(\xi_i^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2) = \mathbb{E}(\xi_i^2) \mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 = \mathbb{E}(\xi_i^2)(t_{i+1} - t_i).$$

Por lo tanto se tiene

$$\mathbb{E}\left[\int_a^b X_t^2 dt\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(\xi_i^2)(t_{i+1} - t_i),$$

y como $X \in \mathscr{L}^*([a,b])$, se tiene las variables ξ_i deben ser de cuadrado integrable. La primera propiedad se deduce por tanto de

$$\mathbb{E}(\xi_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})|\mathcal{F}_a) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})|\mathcal{F}_{t_i})|\mathcal{F}_a] = 0.$$

Por otra parte, consideremos las variables aleatorias $\xi_i\xi_j(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$ con $t_i < t_j$, que son integrables ya que, gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz, a la independencia de $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ y ξ_i y a que estas variables son de cuadrado integrable, se tiene

$$\mathbb{E}[\xi_i\xi_j(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] \leq \sqrt{\mathbb{E}[\xi_i]^2\mathbb{E}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})]^2}\sqrt{\mathbb{E}[\xi_j]^2\mathbb{E}[(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})]^2} < \infty.$$

Por ello, se puede calcular la esperanza condicional

$$\mathbb{E}[\xi_i\xi_j(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})|\mathcal{F}_a] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi_i\xi_j(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})|\mathcal{F}_{t_j}]|\mathcal{F}_a],$$

por lo visto en la demostración de la proposición 3.2.9, $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ es $\mathcal{F}_{t_{i+1}}$-medible y por tanto, $\mathcal{F}_{t_j}$ medible. Así lo anterior es igual a

$$E[\xi_i\xi_j(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\mathbb{E}[(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})]|\mathcal{F}_a] = 0.$$

Ahora se calcula el caso $i = j$,

$$\mathbb{E}[\xi_i^2(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2|\mathcal{F}_a] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi_i^2(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2|\mathcal{F}_{t_i}]|\mathcal{F}_a] = \mathbb{E}[\xi_i^2(t_{i+1} - t_i)|\mathcal{F}_a].$$

Por lo tanto, dado que los términos cruzados se anulan, se tiene

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_t dW_t\right)^2 \middle| \mathcal{F}_a\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^2(t_{i+1} - t_i)\middle|\mathcal{F}_a\right] = \mathbb{E}\left[\int_a^b X_t^2 dt\middle|\mathcal{F}_a\right].$$

□

Para generalizar el concepto de integral estocástica, debemos poder aproximar un proceso por una sucesión de procesos elementales, el siguiente resultado, cuya demostración se puede consultar en [15], lo asegura.

Proposición 3.3.7. *Sea $X \in \mathscr{L}^*([a,b])$, entonces existe una sucesión de procesos elementales $(Y^{(n)})_{n=0}^\infty \subset \mathscr{L}^*([a,b])$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_a^b |X_t - Y_t^{(n)}|^2 dt = 0. \tag{3.13}$$

Definición 3.3.8. Sea $X \in \mathscr{L}^*([a,b])$. Su integral estocástica en $[a,b]$ respecto al Browniano $(W_t)_{t\in[a,b]}$, es la única variable aleatoria $I(X)$ que cumple que, para cada sucesión de procesos elementales $\{Y^{(n)}\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathscr{L}^*([a,b])$ que aproxima a X en el sentido de la proposición 3.3.7, entonces

$$I(X) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b Y_t^{(n)} dW_t,$$

dónde el límite es en el sentido de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Nota 3.3.9. La integral estocástica en $\mathscr{L}^*([a,b])$ está bien definida. Denotemos $I^{(n)} = \int_a^b Y_t^{(n)} dW_t$. La convergencia según la expresión (3.13) implica que la sucesión $Y^{(n)}$ converge a X en el espacio L^2 de la medida producto, por tanto $Y^{(n)}$ es una sucesión de Cauchy, lo cual gracias a la isometría (3.12), significa que $I^{(n)}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y como es un espacio de Hilbert, se tiene que $I^{(n)}$ es convergente, por tanto el límite existe. Si $Y^{(n)}$ y $Z^{(n)}$ son dos sucesiones que aproximan a X, basta construir una sucesión que las intercale para ver que tienen el mismo límite casi seguramente.

Se finaliza esta introducción a la integral estocástica respecto a un proceso Browniano con dos resultados que constituyen sus principales propiedades y cuyas demostraciones se pueden encontrar en [15].

Teorema 3.3.10. *La integral estocástica definida en 3.3.8 hereda las propiedades de la integral de un proceso elemental expuestas en la proposición3.3.6.*

Proposición 3.3.11. *Dado un proceso $X \in \mathscr{L}^*([0,T])$, su integral estocástica vista como proceso $I = \{I_t, \quad t \in [0,T]\}$,*

$$I_t = \int_0^t X_u dW_u,$$

es una martingala.

El objetivo ahora es generalizar esta integral de manera que se pueda realizar respecto a procesos diferentes al Browniano.

Definición 3.3.12. Sea $(W_t)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano con filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ Un proceso de Itô es un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Delta_u dW_u + \int_0^t \Theta_u du, \tag{3.14}$$

donde X_0 no es aleatorio y Δ_u y Θ_u son procesos estocásticos progresivamente medibles tales que

$$\mathbb{E} \int_0^t \Delta_u^2 du < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^t |\Theta_u| du < \infty, \quad t \geq 0.$$

Definición 3.3.13. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Itô y sea $(\Gamma_t)_{t\geq 0}$ un proceso progresivamente medible tal que

$$\int_0^T \Gamma_t^2 \Delta_t^2 dt < \infty \quad y \quad \int_0^T |\Gamma_t \Theta_t| dt < \infty$$

Se define la integral de $(\Gamma_t)_{t\geq 0}$ con respecto a $(X_t)_{t\geq 0}$ como

$$\int_0^T \Gamma_t dX_t = \int_0^T \Gamma_t \Delta_t dW_t + \int_0^T \Gamma_t \Theta_t dt \tag{3.15}$$

La variación de un proceso de Itô se viene dada por el siguiente lema, cuya demostración está en [8].

Lema 3.3.14. *La variación cuadrática del proceso de Itô definido en 3.3.12 es*

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t \Delta_u^2 du. \tag{3.16}$$

En cálculo estocástico, existe un análogo a la regla de la cadena en el cálculo diferencial; se trata del Lema de Itô. Una demostración rigurosa de este resultado se puede encontrar en [14] para el caso en el que la función sólo depende de un proceso estocástico y no del tiempo. Aquí presentaremos una idea de la demostración sin detenernos excesivamente en la justificación de algunos detalles técnicos que involucra.

Teorema 3.3.15 (Lema de Itô). *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Itô y sea $f:[0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^{(2)}$ con derivadas $f_t(t,x)$, $f_x(t,x)$ y $f_{xx}(t,x)$. Entonces, para cada $T>0$, se cumple la igualdad siguiente casi seguramente*

$$\begin{aligned} f(T,X_T) = f(0,X_0) + \int_0^T f_t(t,X_t)dt + \int_0^T f_x(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t,X_t)d\langle X\rangle_t = \\ = f(0,X_0) + \int_0^T f_t(t,X_t)dt + \int_0^T f_x(t,X_t)\Delta_t dW_t + \\ + \int_0^T f_x(t,X_t)\Theta_t dt + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t,X_t)\Delta_t^2 dt. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Demostración. Se considera una partición Π arbitraria $0=t_0<t_1<\cdots<t_m=T$. De esta manera, $f(T,X_T)$ se puede reescribir como:

$$f(T,X_T) = \sum_{k=1}^{m}(f(t_k,X_{t_k}) - f(t_{k-1},X_{t_{k-1}})). \tag{3.18}$$

Y empleando el Teorema de Taylor,

$$\begin{aligned} f(t_k,X_{t_k}) - f(t_{k-1},X_{t_{k-1}}) = & f_t(t_{k-1},X_{t_{k-1}})(t_k-t_{k-1}) + f_x(t_{k-1},X_{t_{k-1}})(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}) + \\ & + \frac{1}{2}f_{xx}(\xi_k,\eta_k)(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})^2 + \frac{1}{2}f_{tt}(\xi_k,\eta_k)(t_{k-1},t_{k-1})^2 + \\ & + f_{tx}(\xi_k,\eta_k)(t_{k-1},t_{k-1})(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}), \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde $(\xi_k,\eta_k) = (t_{k-1},X_{t_{k-1}})\theta_k + (t_k,X_{t_k})(1-\theta_k)$ para algún $\theta_k\in[0,1]$, $k=1,\dots m$.

Introduciendo el desarrollo (3.19) en el sumatorio (3.18) obtenemos que

$$f(T,X_T) = J_1(\Pi) + J_2(\Pi) + J_3(\Pi) + J_4(\Pi) + J_5(\Pi), \tag{3.20}$$

donde $J_i(\Pi)$ son sumatorios asociados con cada sumando del polinomio de Taylor. Comenzamos por el primero, el cual converge a la integral de Lebesgue-Stieltjes de f_t

$$\lim_{|\Pi|\to 0} J_1(\Pi) = \lim_{|\Pi|\to 0}\sum_{k=1}^{m} f_t(t_{k-1},X_{t_{k-1}})(t_k-t_{k-1}) = \int_0^T f_t(t,X_t)dt. \tag{3.21}$$

El segundo término se puede dividir a su vez en otros dos, empleando la definición de proceso de Itô

$$\begin{aligned} J_2(\Pi) = & \sum_{k=1}^{m} f_x(t_{k-1},X_{t_{k-1}})(X_{t_k}-X_{t_{k-1}}) = \\ = & \sum_{k=1}^{m} f_x(t_{k-1},X_{t_{k-1}})\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\Delta_u dW_u + \int_{t_{k-1}}^{t_k}\Theta_u du\right) = J_6(\Pi) + J_7(\Pi). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Y se puede demostrar

$$\lim_{|\Pi|\to 0} J_6(\Pi) = \int_0^T f_x(t,X_t)\Delta_t dW_t. \tag{3.23}$$

Por otra parte, aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada (B.10), se tiene

$$\lim_{|\Pi|\to 0} J_7(\Pi) = \lim_{|\Pi|\to 0} \int_0^T \left(\sum_{k=1}^m f_x(t_{k-1}, X_{t_{k-1}}) \mathbb{1}_{[t_{k-1},t_k)}(t) \right) \Theta_t dt = \int_0^T f_x(t, X_t)\Theta_t dt. \tag{3.24}$$

Las sumas $J_3(\Pi)$ y $J_4(\Pi)$ tienden a 0 cuando el tamaño de la partición tiende a cero pues

$$|J_3(\Pi)| = \left| \sum_{k=1}^m f_{tt}(\xi_k, \eta_k)(t_k - t_{k-1})^2 \right| \leq \|f_{tt}\|_\infty T \max_{1\leq k\leq m} |t_k - t_{k-1}| \xrightarrow{\|\Pi\|\to 0} 0,$$

y

$$|J_4(\Pi)| = \left| \sum_{k=1}^m f_{tx}(\xi_k, \eta_k)(t_k - t_{k-1})(X_{k_t} - X_{t_{k-1}}) \right| \leq \|f_{tx}\|_\infty T \max_{1\leq k\leq m} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}| \xrightarrow{\|\Pi\|\to 0} 0.$$

Queda estudiar el término $J_5(\Pi)$, para el cual se recurre de nuevo a la definición de proceso de Itô y se desarrolla el cuadrado para separarlo en tres sumatorios, de forma que se convierte en

$$J_5(\Pi) = \sum_{k=1}^m f_{xx}(\xi_k, \eta_k) \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \Delta_u dW_u + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Theta_u du \right)^2 = J_8(\Pi) + J_9(\Pi) + J_{10}(\Pi) \tag{3.25}$$

Los dos términos que involucran a Θ tienden a 0,

$$|J_9(\Pi)| \leq 2\|f_{xx}\|_\infty \left| \int_0^T \Theta_u du \right| \max_{1\leq k\leq m} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Delta_u dW_u \right| \xrightarrow{\|\Pi\|\to 0} 0,$$

y

$$|J_{10}(\Pi)| \leq \|f_{xx}\|_\infty \left| \int_0^T \Theta_u du \right| \max_{1\leq k\leq m} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Theta_u du \right| \xrightarrow{\|\Pi\|\to 0} 0.$$

Finalmente, el último término se puede probar, con ayuda de algunos resultados auxiliares que se pueden encontrar en [14], que cumple

$$\lim_{|\Pi|\to 0} J_7(\Pi) = \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{k=1}^m f_{xx}(\xi_k, \eta_k) \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \Delta_u dW_u \right)^2 = \int_0^T f_{xx}(t, X_t)\Delta_t^2 dt.$$

□

A menudo, en analogía al cálculo diferencial tradicional, se emplea una notación diferencial para las expresiones integrales que hemos visto en este capítulo. Por ejemplo, un proceso de Itô como el definido en 3.3.12 se expresaría de la siguiente forma:

$$dX_t = \Delta_t dW_t + \Theta_t dt,$$

teniendo en cuenta la necesidad de especificar la constante de integración X_0. El Lema de Itô también se puede escribir en forma diferencial

$$\begin{aligned} df(t, X_t) =& f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)dX_t dX_t = \\ =& f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)\Delta_t dW_t + f_x(t, X_t)\Theta_t dt + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)\Delta_t^2 dt, \end{aligned} \tag{3.26}$$

dónde se ha empleado la notación $dX_t dX_t := d\langle X\rangle_t = \Delta_t^2 dt$.

4. Modelo de Black-Scholes-Merton

El modelo de Black-Scholes-Merton (BSM) para la valoración de derivados [8, 9, 16] está caracterizado por las siguientes hipótesis:

1. El activo subyacente es una acción y su precio se modela mediante un Movimiento Browniano Geométrico, es decir, satisface la ecuación

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{4.1}$$

donde μ se denomina tasa de retorno instantánea y σ volatilidad, ambos parámetros son constantes.

2. Existe una tasa de interés r constante a la que se puede prestar o pedir prestado dinero sin incurrir en ningún riesgo.

3. No existen comisiones ni costes de transacción y la venta en corto[3] se puede realizar sin coste.

4. Las operaciones se pueden realizar de manera continua.

La solución a la ecuación (4.1) viene dada por:

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right], \tag{4.2}$$

lo cual se demuestra teniendo en cuenta que $S_t = \exp(X_t)$, donde $X_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t = \int_0^t (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) du + \int_0^t \sigma W_t$ es un proceso de Itô y se puede aplicar el Lema de Itô a la función $f(t,x) = e^x$, de forma que

$$\begin{aligned} dS_t = df(t, X_t) = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)dX_t dX_t = S_t dX_t + \frac{1}{2} S_t dX_t dX_t = \\ = S_t \left(\sigma dW_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t dt = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \end{aligned}$$

La solución tiene una distribución log-normal, es decir $\log(S_t)$ se distribuye de forma normal, concretamente

$$\log(S_t) \sim \mathcal{N}\left(\log(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t, \sigma^2 t\right), \tag{4.3}$$

lo cual se deduce de manera directa de las propiedades del movimiento Browniano.

Un modelo financiero requiere también de un proceso de descuento que cumple la función de la tasa de descuento vista en el capitulo introductorio. Dado que el modelo supone una tasa de interés libre de riesgo constante, el proceso de descuento será $D_t = e^{-rt}$. De esta forma el valor presente del precio futuro del activo viene dado por el proceso $D_t S_t = e^{-rt} S_t$. Cabe destacar que la tasa de interés libre de riesgo se aproxima de manera sencilla mediante las tasas de rendimiento de bonos con alta calidad crediticia, por ejemplo los bonos del Tesoro de Alemania o EEUU.

[3] La venta en corto es la operación por la cual se vende un activo que no se posee, para ello se pide prestado y pasado un tiempo determinado se debe devolver. Por ello, la venta en corto es equivalente a tener un número de unidades negativo del activo. Aunque en el modelo BSM no se tengan en cuenta costes, esta operación siempre los conlleva.

4.1. Medida de riesgo neutro

Hasta ahora hemos trabajado en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, en el cual la ecuación (4.1) modela la evolución real de los precios del activo subyacente, por ello $\mathbb{P}$ se denomina medida *de mundo real* [8, 16]. Sin embargo, será de gran utilidad la construcción de una nueva medida sobre el mismo espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definición 4.1.1. Una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ se dice *de riesgo neutro* respecto a una medida de mundo real $\mathbb{P}$ si

(I) $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{P}$ son equivalentes, es decir, son absolutamente continuas una respecto a la otra, y

(II) bajo la medida $\mathbb{Q}$, el precio descontado del subyacente es una martingala:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[D_t S_t | \mathcal{F}_s] = D_s S_s, \quad s \leq t. \tag{4.4}$$

Teorema 4.1.2 (Girsanov, caso particular)**.** *Sea $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un movimiento Browniano con una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$. Sea $\Theta \in \mathbb{R}$. Definiendo*

$$Z_t = \exp\left[-\Theta W_t - \frac{1}{2}\Theta^2 t\right] \;\; y, \tag{4.5}$$

$$\widetilde{W}_t = W_t + \Theta t, \tag{4.6}$$

y denotando $Z = Z_T$. Entonces $\mathbb{E}Z = 1$ y bajo la medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ dada por

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \quad A \in \mathcal{F}, \tag{4.7}$$

el proceso $\widetilde{W}_t$ es un movimiento Browniano.

Demostración. Primero veamos que $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}Z = 1$, teniendo en cuenta que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}Z = \int_\Omega \exp\left[-\Theta W_T - \frac{1}{2}\Theta^2 T\right] d\mathbb{P} = e^{-\frac{1}{2}\Theta^2 T}\int_\Omega \exp\left[-\Theta W_T\right] d\mathbb{P} = e^{-\frac{1}{2}\Theta^2 T}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{-\Theta W_T}\right],$$

y dado que W_T es una variable normal centrada de varianza T, su función generadora de momentos es $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{uW_T}\right] = e^{\frac{1}{2}u^2 T}$, luego tomando $u = -\Theta$ queda claro que $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}Z = 1$.

Veamos que $(\widetilde{W}_t)_{t\in[0,T]}$ es un movimiento Browniano comprobando las condiciones de la definición 3.2.7:

(i) $\widetilde{W}_0 = W_0 + \Theta \cdot 0 = 0$.

(ii) Queremos ver que los incrementos $\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s$ son independientes de $\mathcal{F}_s$ si $s \leq t$, es decir tenemos que probar que $\sigma(\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s)$ es independiente de $\mathcal{F}_s$, recurrimos a la definición de σ-álgebra engenderada por una variable aleatoria real:

$$\sigma(\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s) = \left\{(\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s)^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\} = \left\{(W_t - W_s + \Theta(t-s))^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\},$$

sin embargo, notemos que

$$\begin{aligned}(W_t - W_s + \Theta(t-s))^{-1}(B) &= \{\omega \in \Omega : W_t - W_s + \Theta(t-s) \in B\} = \\ &= \{\omega \in \Omega : W_t - W_s \in B - \Theta(t-s)\},\end{aligned}$$

y como la σ-álgebra de Borel es invariante por traslaciones, $B - \Theta(t-s) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ para todo B boreliano, luego

$$\sigma(\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s) \subseteq \sigma(W_t - W_s).$$

El contenido inverso se puede argumentar análogamente, por tanto $\sigma(\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s) = \sigma(W_t - W_s)$, y por definición de movimiento Browniano, $\sigma(W_t - W_s)$ es independiente de $\mathcal{F}_s$.

(iii) Veamos ahora que $\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, para ello calcularemos la función generadora de momentos bajo esta medida:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{u(\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s)}\right] = \int_\Omega e^{u(\widetilde{W}_t(\omega) - \widetilde{W}_s(\omega))} d\mathbb{Q}(\omega) = \int_\Omega Z(\omega) e^{u(\widetilde{W}_t(\omega) - \widetilde{W}_s(\omega))} d\mathbb{P}(\omega) = \\ = e^{-\frac{1}{2}\Theta^2 T + u\Theta(t-s)} \int_\Omega e^{-\Theta W_T(\omega)} e^{u[W_t(\omega) - W_s(\omega)]} d\mathbb{P}(\omega).\end{aligned} \tag{4.8}$$

Notemos que $W_T = (W_s - W_0) + (W_t - W_s) + (W_T - W_t)$, denotando $X = (W_s - W_0) = W_s$, $Y = (W_t - W_s)$ y $V = (W_T - W_t)$, se tiene que X, Y y V son variables aleatorias independientes, luego

$$\begin{aligned}&\int_\Omega e^{-\Theta W_T(\omega)} e^{u[W_t(\omega) - W_s(\omega)]} d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega e^{-\Theta(X(\omega) + Y(\omega) + V(\omega)) + uY(\omega)} d\mathbb{P}(\omega) = \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{-\Theta X} e^{-\Theta V} e^{(u-\Theta)Y}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{-\Theta X}\right] \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{-\Theta V}\right] \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{(u-\Theta)Y}\right] = \\ &= e^{\frac{1}{2}\Theta^2 s} e^{\frac{1}{2}\Theta^2 (T-t)} e^{\frac{1}{2}(u-\Theta)^2 (t-s)} = \exp\left[\frac{1}{2}\left(-2\Theta u(t-s) + u^2(t-s) + \Theta^2 T\right)\right],\end{aligned} \tag{4.9}$$

y así finalmente, sustituyendo (4.9) en (4.8):

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{u(\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s)}\right] = \exp\left[\frac{1}{2}u^2(t-s)\right],$$

que es la función generadora de momentos de la normal de media 0 y varianza $t-s$. □

Nuestro objetivo ahora es hallar una medida de riesgo neutro con las herramientas que nos aporta el Teorema de Girsanov. En primer lugar, nótese que la medida $\mathbb{Q}$ definida en el Teorema 4.1.2 es absolutamente continua respecto a $\mathbb{P}$ por el Teorema de Lebesgue y además es una medida de probabilidad puesto que $\mathbb{Q}(\Omega) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} Z = 1$. Por otra parte, como $Z_t(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$, se tiene que $\mathbb{P}$ es absolutamente continua respecto a $\mathbb{Q}$. Finalmente, queremos comprobar la propiedad de martingala del precio descontado, para ello calculemos el diferencial de $D_t S_t = e^{-rt} S_t$ mediante la aplicación del Lema de Itô a la función $f(t,x) = e^{-rt}x$, que cumple $f_t(t,x) = -re^{-rt}x$, $f_x(t,x) = e^{-rt}$ y $f_{xx}(t,x) = 0$. Así,

$$\begin{aligned}d(D_t S_t) = d(e^{-rt} S_t) = -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t = -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} S_t(\sigma dW_t + \mu dt) = \\ = e^{-rt} S_t(\mu - r)dt + e^{-rt} S_t \sigma dW_t,\end{aligned} \tag{4.10}$$

definiendo $\Theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$ el Teorema 4.1.2 nos asegura que $d\widetilde{W}_t = dW_t + \Theta dt$ define un movimiento Browniano bajo la medida $\mathbb{Q}$, luego

$$d(D_t S_t) = e^{-rt} S_t \sigma (dW_t + \Theta dt) = e^{-rt} S_t \sigma d\widetilde{W},$$

lo cual implica que $e^{-rt} S_t$ es una martingala respecto a $\mathbb{Q}$ por ser una integral respecto a un movimento Browniano (proposición 3.3.11), por ello $\mathbb{Q}$ es una medida de riesgo neutro.

Por otra parte, es posible expresar la ecuación (4.1) en la medida de riesgo neutro:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t = rS_t dt + \sigma S_t(\Theta dt + dW_t) = rS_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}. \tag{4.11}$$

Por tanto, el proceso sigue siendo un Movimento Browniano Geométrico pero se sustituye la tasa de retorno μ por la tasa de interés libre de riesgo r. Esto tiene una vital importancia, ya que nos permite valorar los derivados sin necesidad de conocer la tasa de retorno de la acción.

4.2. Valoración en riesgo neutro

Un modelo financiero de valoración no debe permitir arbitraje, puesto que se trata de una de las principales hipótesis de la valoración. Veamos cómo se traduce este concepto de forma matemática a los modelos de tiempo continuo.

Definición 4.2.1. Un arbitraje es el proceso X_t del valor de una cartera que cumple $X_0 = 0$ y para algún $T > 0$

$$\mathbb{P}\{X_T \geq 0\} = 1, \quad \mathbb{P}\{X_T > 0\} > 0$$

Proposición 4.2.2. *Si un modelo de mercado tiene una medida de riesgo neutra, entonces no admite arbitraje.*

Demostración. Sea X_t un arbitraje. Como bajo una medida de riesgo neutro, el proceso del valor descontado de una cartera es una martingala,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D_T X_T\right] = D_0 X_0 = 0.$$

Si $\mathbb{P}\{X_T \geq 0\} = 1$, entonces $\mathbb{P}\{X_T < 0\} = 0$, y como $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son equivalentes, $\mathbb{Q}\{X_T < 0\} = 0$. Pero entonces, como $X_T \geq 0$ y $D_T > 0$ $\mathbb{Q}$-casi seguramente, que la esperanza anterior sea nula implica que $X_T = 0$ $\mathbb{Q}$-casi seguramente. De nuevo la equivalencia de las medidas significa que $\mathbb{P}\{X_T > 0\} = 0$, lo cual contradice la segunda condición de la definición de arbitraje 4.2.1. □

De esta manera, como $\mathbb{Q}$ es una medida de riesgo neutro, el modelo de Black-Scholes-Merton no admite arbitraje.

Nos interesa además que el valor de una cartera de inversión autofinanciada, es decir, a la que no se le introduce más dinero del que hay en el tiempo inicial, se comporte también como una martingala, veámoslo. En primer lugar, es importante notar que en este modelo de mercado sólo se pueden hacer dos tipos de inversión: poseer Δ_t unidades de activo a tiempo t (Δ_t<0 significa venta en corto) o dejar el dinero en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés libre de riesgo r, la cantidad destinada a esta actividad será $X_t - \Delta_t S_t$. El valor de la cantidad en la cuenta de ahorros debe ser

$$\int_0^t r(X_t - \Delta_t S_t)dt,$$

mientras que el valor de la cantidad invertida en el activo es

$$\int_0^t \Delta_t dS_t,$$

por tanto el valor de la cartera debe ser la suma de ambos términos, en notación diferencial,

$$dX_t = \Delta_t dS_t + r(X_t - \Delta_t S_t)dt. \tag{4.12}$$

Introduciendo la expresión de dS_t y operando

$$dX_t = \Delta_t(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + r(X_t - \Delta_t S_t)dt = rX_t dt + \Delta_t(\mu - r)S_t dt + \Delta_t S_t \sigma dW_t.$$

Realizando el mismo argumento que para obtener (4.10) se deduce que

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}X_t) =& - re^{-rt}X_t dt + e^{-rt}(rX_t dt + \Delta_t(\mu - r)S_t dt + \Delta_t S_t \sigma dW_t) = \\ =&\Delta_t(\mu - r)e^{-rt}S_t dt + \Delta_t e^{-rt}S_t\sigma dW_t = \Delta_t e^{-rt}S_t\sigma(\Theta dt + dW_t) = \Delta_t e^{-rt}S_t\sigma d\widetilde{W}_t, \end{aligned} \tag{4.13}$$

por tanto $e^{-rt}X_t$ también es una martingala bajo la medida $\mathbb{Q}$.

De esta forma, podemos calcular valor de una cartera a tiempo $t \in [0, T]$ como

$$X_t = \frac{1}{D_t}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D_T X_T \mid \mathcal{F}_t\right], \tag{4.14}$$

en particular, si se tiene un cartera X_t que cubre a un derivado de valor V, es decir, que su valor en el tiempo de vencimiento es igual que la función de beneficio del derivado:

$$\mathbb{P}\{X_T = V(T, S_T)\} = 1,$$

el principio de valoración sin arbitraje hace que el precio de la cartera sea el valor del derivado en todo instante de tiempo, $(X_t)_{t\in[0,T]} = (V(t, S_t))_{t\in[0,T]}$. Por tanto, en virtud de la expresión (4.14), el valor del derivado será

$$V(t, S_t) = \frac{1}{D_t}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D_T V(T, S_T) \mid \mathcal{F}_t\right] = e^{rt}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}V(T, S_T) \bigm| \mathcal{F}_t\right]. \tag{4.15}$$

Se puede demostrar que en un modelo de un mercado con un único activo, como este, siempre existe una cartera de cobertura para cualquier derivado, algunos detalles sobre esto se pueden consultar en el Anexo C.1 y en [8]. Por esta razón, para valorar un derivado podemos recurrir directamente a la expresión (4.15).

4.3. Opciones europeas y contratos *forward*

Se va aplicar lo anterior a la valoración de opciones europeas y contratos *forward* en el marco de Black-Scholes-Merton.

Proposición 4.3.1. *El precio de una opción call europea de strike K y vencimiento T en un tiempo $t \in [0, T]$ y con un precio actual del subyacente $S_t > 0$ bajo el modelo de Black-Scholes-Merton con tasa libre de riesgo r y volatilidad σ está dado por*

$$c(t, S_t) = S_t N\left(d_+\left(T - t, \frac{S_t}{K}\right)\right) - Ke^{-r(T-t)}N\left(d_-\left(T - t, \frac{S_t}{K}\right)\right), \tag{4.16}$$

donde

$$d_\pm(\tau, s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log s + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)\right], \tag{4.17}$$

y $N(\cdot)$ es la función de distribución de una variable aleatoria normal estándar.

Demostración. La valoración en riesgo neutro asegura que

$$\begin{aligned} c(t,S_t) =& e^{rt}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}c(T,S_T)\mid \mathcal{F}_t\right]\right] = e^{rt}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}\max(S_T-K,0)\mid \mathcal{F}_t\right]\right] = \\ =& e^{-r(T-t)}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_T\mathbb{1}_{\{S_T>K\}}\mid \mathcal{F}_t\right]-K\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{S_T>K\}}\mid \mathcal{F}_t\right]\right]. \end{aligned} \tag{4.18}$$

En primer lugar,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{S_T>K\}}\mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{Q}\left[S_T>K\mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{Q}\left[S_T>K\mid S_t\right].$$

Tomando logaritmos, se tiene que $S_T > K$ si y sólo si $-\log(S_T) \leq \log(1/K)$. Y, como S_t obedece la ecuación (4.11), cuya solución es análoga a (4.2), se tiene que $\log(S_T)$ condicionado al valor en tiempo t se distribuye de forma normal

$$\log(S_T) \sim \mathcal{N}\left(\log(S_t)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t),\sigma^2(T-t)\right), \tag{4.19}$$

entonces

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q}\left[S_T>K\mid S_t\right] = \mathbb{Q}\left[-\log(S_T)\leq \log(1/K)\mid S_t\right] = \\ =&\mathbb{Q}\left[Z\leq \frac{\log(1/K)+\log(S_t)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\;\middle|\; S_t\right] = N\left(d_-\left(T-t,\frac{S_t}{K}\right)\right), \end{aligned} \tag{4.20}$$

donde $Z = \frac{-\log(S_T)+\log(S_t)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ es una variable normal estándar.
Por otra parte,

$$S_T = e^{log(S_T)} = \exp\left[\sigma\sqrt{T-t}Z+M\right], \quad \text{con} \quad M = \log(S_t)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t),$$

luego

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_T\mathbb{1}_{\{S_T>K\}}\right] =& e^M\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left[-\sigma\sqrt{T-t}Z\mathbb{1}_{\{-\log S_T\leq \log(1/K)\}}\right]\right] = \\ =& e^M e^{\frac{\sigma^2(T-t)}{2}}\int_{-\infty}^{d_-\left(T-t,\frac{S_t}{K}\right)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(z+\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}}dz. \end{aligned}$$

Mediante un cambio de variable $z \mapsto s-\sigma\sqrt{T-t}$ se obtiene

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_T\mathbb{1}_{\{S_T>K\}}\right] = e^{r(T-t)}S_tN\left(d_-\left(T-t,\frac{S_t}{K}\right)+\sigma^2(T-t)\right) = e^{r(T-t)}S_tN\left(d_+\left(T-t,\frac{S_t}{K}\right)\right)$$

□

El precio $p(t,S_t)$ de una opción *put* europea se puede obtener de forma similar, pero en este texto se va a seguir otro camino que permite relacionar las opciones europeas con los contratos *forward*.

Proposición 4.3.2. *El precio de un contrato forward con precio fijado K para el subyacente en el vencimiento T en un tiempo $t \in [0,T]$ y con un precio actual del subyacente $S_t > 0$ bajo el modelo de Black-Scholes-Merton con tasa libre de riesgo r y volatilidad σ está dado por*

$$f(t,S_t) = S_t - e^{-r(T-t)}K \tag{4.21}$$

Demostración. Como la función de beneficio de un contrato *forward* es $H_f(T) = S(T) - K$, siguiendo la valoración en riesgo neutro se tiene que

$$
\begin{aligned}
f(t, S_t) =& e^{rt}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}(S_T - K) \mid \mathcal{F}_t\right] = e^{rt}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}S_T \mid \mathcal{F}_t\right] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}K \mid \mathcal{F}_t\right]\right] = \\
=& e^{rt}\left[e^{-rt}S_t - e^{-rT}K\right] = S_t - e^{-r(T-t)}K,
\end{aligned}
$$

donde la tercera igualdad se debe a que el precio descontado del subyacente es una martingala. □

Un hecho de gran relevancia es la relación entre las funciones de beneficio de los contratos *forward* y de las opciones, dado que

$$
f(T, S_T) = S_T - K = \max(S_T - K, 0) - \max(K - S_T, 0) = c(T, S_T) - p(T, S_T),
$$

de esta forma, debido a la valoración en riesgo neutro, tomando esperanzas condicionales en la expresión anterior se obtiene que los precios de los tres derivados se relacionan de la siguiente manera

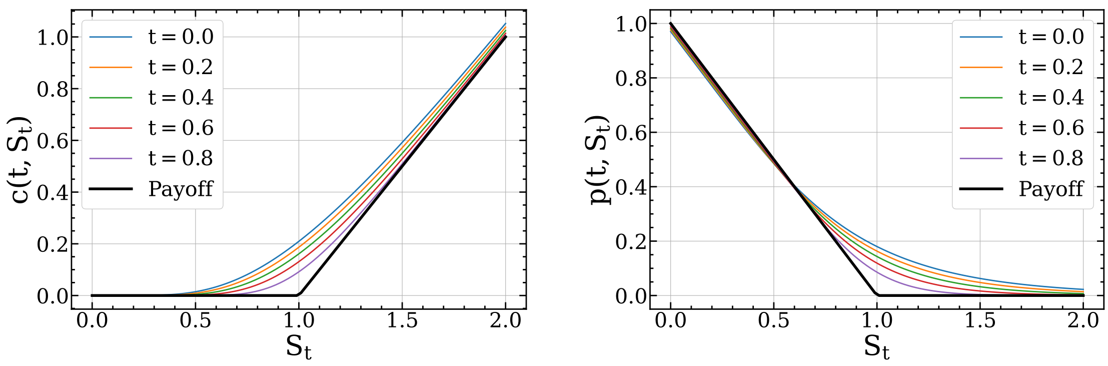
$$
f(t, S_t) = c(t, S_t) - p(t, S_t). \tag{4.22}
$$

Esto es lo que se conoce como la "paridad Put-Call" y supone una forma de calcular el precio de la opción *put* a partir de los precios de la opción *call* y un contrato *forward*, así sustituyendo la expresiones (4.16) y (4.21) en (4.22), queda demostrado el siguiente resultado.

Proposición 4.3.3. *El precio de una opción put europea de strike K y vencimiento T en un tiempo $t \in [0, T]$ y con un precio actual del subyacente $S_t > 0$ bajo el modelo de Black-Scholes-Merton con tasa libre de riesgo r y volatilidad σ está dado por*

$$
p(t, S_t) = Ke^{-r(T-t)}N\left(-d_-\left(T - t, \frac{S_t}{K}\right)\right) - S_tN\left(-d_+\left(T - t, \frac{S_t}{K}\right)\right), \tag{4.23}
$$

donde $d_\pm$ vienen dadas por (4.17) y $N(y)$, $y \in \mathbb{R}$, es la función de distribución de una variable aleatoria normal estándar.



(a) Opción *call*. (b) Opción *put*.

Figura 4.1: Precio de opciones europeas bajo el modelo BSM con $r = 0{,}03$, $\sigma = 0{,}5$ y $T = 1$ año.

4.4. Cobertura en Delta

En la valoración bajo la medida de riesgo neutro, uno de los aspectos clave es el de la existencia de una cartera replicante, aquella cuyo beneficio es igual al del derivado a valorar y que fija el precio de este. En la teoría desarrollada hasta el momento, no nos hemos planteado cuál es esta cartera y para la valoración no es necesario conocerla (siempre y cuando se tenga certeza de su existencia), sin embargo, en la industria financiera a menudo es muy importante, ya que permitirá cubrir riesgos [9]. Veamos el caso de una opción de precio $V(t, S_t)$ que queremos cubrir con una cartera de inversión de valor X_t que está descrita por (4.12), entonces necesitamos que $e^{-rt}X_t = e^{-rt}V(t, S_t)$, y por tanto,

$$d(e^{-rt}X_t) = d(e^{-rt}V(t, S_t)).$$

Aplicando el lema de Itô a ambos lados se obtiene

$$\begin{aligned}&\Delta_t(\mu - r)e^{-rt}S_t dt + e^{-rt}\Delta_t S_t \sigma dW_t = \\ &\quad = e^{-rt}\left[-rV(t, S_t) + V_t(t, S_t) + \mu S_t V_S(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 V_{SS}(t, S_t)\right] dt + \sigma e^{-rt} S_t V_S(t, S_t) dW_t,\end{aligned}$$

donde $V_S(t, S_t) = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t)$ es la derivada del valor de la opción respecto al precio del subyacente y de conoce como *delta* de la opción. Igualando términos se obtiene que necesariamente

$$\Delta_t = V_S(t, S_t) \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0.$$

Esta es la ecuación de Black-Scholes y las funciones (4.16) y (4.23) son soluciones bajo las condiciones de contornos apropiadas.

De esta forma, hemos probado que una cartera autofinanciada cuyo valor inicial coincide con el de una opción europea y en la que se mantiene un número de acciones del subyacente igual a la *delta* de la opción tiene exactamente el mismo valor que la opción en cuestión. La manera de emplear este resultado para cubrir riesgos es sencilla: si una entidad financiera vende una opción de este tipo y a la vez mantiene una cartera como la previamente descrita, idealmente al llegar a la fecha de vencimiento habrá realizado pérdidas y beneficios nulas. Esta cobertura tiene numerosas limitaciones, principalmente las relacionadas con la veracidad del modelo de Black-Scholes-Merton, la existencia de costes de transacción y la imposibilidad de actualizar el numero de acciones que se poseen de forma continua, es por ello que en la práctica se realizan alguna correcciones a la hora de aplicar este tipo de cobertura.

Es lógico preguntarse la utilidad de la cobertura en delta, dado que el beneficio teórico de la estrategia es nulo. La realidad es que esta cobertura es principalmente empleada por creadores de mercado[4], los cuales obtienen su beneficio del diferencial entre oferta y demanda, como suelen hacer los brókers, y no del desempeño de la opción concreta que vendan. Por otra parte, la cobertura en delta es la base de otras estrategias más complejas que obtienen su beneficio gracias a la volatilidad de la opción.

Además de la *delta* de la opción, a las demás derivadas del precio se las conoce como *letras griegas* de la opción y son relevantes en la gestión de riesgos, una breve introducción a estos elementos se puede en contrar en el Anexo C.2.

[4]Más conocidos por el término inglés *market makers*.

4.5. Limitaciones del modelo: *smile* de volatilidad

Ya se han intuido algunas de las limitaciones del modelo a lo largo del texto, por ejemplo la existencia de costes de transacción y la imposibilidad de una cobertura continua, sin embargo esto no es insalvable y se puede solventar mediante distintas técnicas y haciendo ajustes a la valoración [17]. Sin embargo, hay problemas estructurales más relevantes, comenzando con la falsedad de la hipótesis de log-normalidad del precio del activo subyacente y el modelo Browniano Geométrico. En la realidad los retornos logarítmicos exhiben distribuciones con exceso de curtosis y sus trayectorias no son continuas [16, 17], debido al reparto de dividendos, la respuesta del mercado a distintos acontecimientos o simplemente el efecto de la apertura de la bolsa cada mañana.

Una de las principales limitaciones del modelo viene por parte de la *volatilidad implícita*, es decir el valor de la volatilidad que hace que el precio predicho por el modelo BSM (expresión (4.16) para opciones de compra y (4.23) de venta) coincida con el precio de mercado. Si el modelo de Black-Scholes fuera cierto, la volatilidad implícita debería mantenerse constante para cualquier tiempo y valor de K. Sin embargo, en realidad, al considerarla como función de K, se obtiene una forma que recuerda a una sonrisa o mueca, conocida en la industria financiera como *smile* de volatilidad implícita. Si además se considera la dependencia temporal, se tiene una superficie de volatilidad. Un ejemplo se puede ver en la figura 4.2 para opciones sobre acciones de *NVIDIA*, para su cálculo se emplea una tasa libre de riesgo de 0.053, de acuerdo a la curva de tipos de bonos del Tesoro de EEUU, un tiempo de expiración de 35 días y un precio actual de la acción de 1096,33 USD.

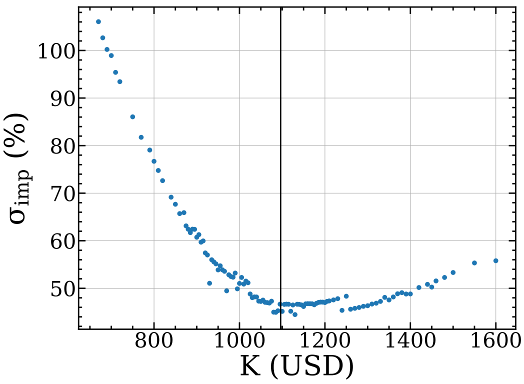


Figura 4.2: Volatilidad implícita al cierre de mercado del día 31 de mayo de 2024 para las opciones de compra de acciones de NVIDIA con fecha de expiración del 5 de julio. Datos obtenidos de Yahoo Finance [18].

Aunque el modelo de Black-Scholes-Merton no sea satisfactorio por diversas razones, tiene una vital importancia. En primer lugar, posee una fuerte relevancia histórica, ya que fue el desarrollo de este modelo lo que catapultó los mercados de opciones, para las cuales no se poseía un método de valoración; es más, hasta el Lunes Negro de 1987, los mercados estadounidenses no exhibían una sonrisa, sino que la volatilidad implícita era aproximadamente constante. En segundo lugar, la volatilidad implícita se ha convertido en una herramienta esencial con la cual los financieros se refieren a las opciones y que resume en un valor único muchas de sus propiedades. Y finalmente, este modelo es la base de muchos otros que tratan de cubrir sus puntos más débiles.

5. Otros modelos

Tras el modelo de Black-Scholes se han desarrollado numerosos modelos para describir el precio de las opciones sobre acciones o generalizaciones a otros subyacentes, ya sean bienes materiales, tasas de interés o moneda extranjera [16].

Uno de los grandes grupos de modelos son los llamados "de volatilidad local", en los cuales el preccio de la acción subyacente se modela con un Movimiento Browniano Geométrico Generalizado, en el cual la volatilidad es una función determinista del precio y del valor de la acción:

$$dS_t = \mu(t, S)S_t dt + \sigma(t, S_t)dW, \tag{5.1}$$

cuya solución es

$$S_t = S_0 \exp\left[\int_0^t \left(\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right) ds + \int_0^t \sigma_s dWs\right], \tag{5.2}$$

como se puede comprobar definiendo el proceso de Itô $X_t = \int_0^t \left(\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right) ds + \int_0^t \sigma_s ds$ y aplicando el mismo razonamiento que que para demostrar la solución (4.2). Para este tipo de modelos, muchos de los resultados presentados para el modelo BSM son aplicables, como se discute en el Anexo C.3.

Otro gran grupo de modelos son los "de volatilidad estocástica". En ellos, la volatilidad no es determinista sino que sigue otro proceso aleatorio. Un ejemplo es el modelo de Heston, que en riesgo neutro toma la forma:

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_x^{\mathbb{Q}}, \\ dv_t = \kappa(\overline{v} - v_t)dt + \gamma\sqrt{v_t} dW_v^{\mathbb{Q}}. \end{cases} \tag{5.3}$$

Donde $W_x^{\mathbb{Q}}$ y $W_v^{\mathbb{Q}}$ son movimientos brownianos correlados. Además existen modelos que incorporan saltos en la trayectoria de los precios, añadiendo procesos de tipo Poisson a S_t.

6. Conclusión

Los procesos estocásticos constituyen una herramienta fundamental en la valoración de derivados financieros, ya que son el mecanismo matemático necesario para modelar la aleatoriedad característica del precio de los activos subyacentes. Además, este tipo de procesos presentan generalmente una variación total no acotada, es por ello que la integral de Lebesgue-Stieltjes no está definida y es necesaria la extensión del concepto de integral para procesos de Itô con integrandos que cumplan una serie de propiedades de medibilidad e integrabilidad.

Por otra parte se han aplicado los resultados matemáticos presentados en la construcción del modelo de Black-Scholes-Merton, el cual tiene una gran relevancia histórica y mantiene el protagonismo en la industria financiera. Este modelo respeta el principio de ausencia de arbitraje y, gracias al teorema de Girsanov, permite la valoración mediante un cambio de medida de probabilidad, de forma que la valoración es independiente de la tasa de retorno real del precio y depende exclusivamente de la volatilidad, la tasa de interés libre de riesgo, características de la opción y el valor actual del subyacente. Finalmente, se han discutido sus limitaciones más relevantes, particularmente la *smile* de volatilidad implícita y se han presentado algunos modelos alternativos existentes.

Referencias

(1) Cesa, M. *Probability, Uncertainty and Quantitative Risk* **2017**, *2*, DOI: `https://doi.org/10.1186/s41546-017-0018-3`.

(2) Bachelier, L. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* **1900**, *17*, 31-86.

(3) Black, F. y Scholes, M. *Journal of Political Economy* **1973**, *81*, 637-654.

(4) Merton, R. C. *The Bell Journal of Economics and Management Science* **1973**, *4*, 141-183.

(5) Loring, J., *La gestión financiera*; Ediciones Deusto S.A.: 1997.

(6) Drake, P. y Fabozzi, F., *The Basics of Finance: An Introduction to Financial Markets, Business Finance, and Portfolio Management*; Frank J. Fabozzi Series; Wiley: 2010.

(7) CFA Institute, *Quantitative Investment Analysis*, 4ª Ed.; Wiley: 2015.

(8) Shreve, S. E., *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-time models*; Springer: 2004.

(9) Hull, J. C., *Options, Futures and other Derivatives*, 11ª Ed.; Pearson: 2022.

(10) Blyth, S., *An Introduction to Quantitative Finance*; OUP Oxford: 2014.

(11) Mitchell, M. y Pulvino, T. *Journal of Financial Economics* **2012**, *104*, Market Institutions, Financial Market Risks and Financial Crisis, 469-490.

(12) Billingsley, P., *Probability and Measure*; Wiley series in probability and mathematical statistics; Wiley India: 2017.

(13) Brzeźniak, Z. y Zastawniak, T., *Basic Stochastic Processes*; Springer Undergraduate Mathematics Series; Springer: 1999.

(14) Karatzas, I. y Shreve, S., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*; Graduate Texts in Mathematics; Springer Verlag: 1988.

(15) Baldi, P., *Stochastic Calculus: An Introduction Through Theory and Exercises*; Springer: 2017.

(16) Oosterlee, C. W. y Grzelak, L. A., *Mathematical Modeling and Computation in Finance*; World Scientific: 2019.

(17) Derman, E. y Miller, M. B., *The Volatility Smile*; Wiley: 2016.

(18) Yahoo Finance NVIDIA Corporation `https://es.finance.yahoo.com/quote/NVDA/options?date=1720137600` (visitado 01-06-2024).

(19) CFA Institute, *2018 CFA Curriculum level II*, 4ª Ed.; Wiley: 2017; vol. Fixed income and derivatives.

(20) Shreve, S. E., *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*; Springer: 2004.

ANEXOS

A. Principio de Ausencia de Arbitraje

A.1. Ejemplo de valoración: Bonos

Se pone ahora un ejemplo donde se aplica el principio de no existencia de arbitraje en la valoración de un bono. Para ello es necesario definir los conceptos de bono y bono cupón cero:

- **Bono (cupón sin opcionalidad):** Se trata de un instrumento de deuda en el que el el titular presta una cantidad de dinero (valor nominal) al emisor, y este a su vez se compromete a entregar una serie de cantidades (cupones) con una periodicidad determinada y a la devolución del valor nominal a la fecha de vencimiento.
- **Bono cupón cero (ZCB):** Es un bono que no paga cupones y por tanto sólo realiza el pago del valor nominal a vencimiento, estos bonos se venden a descuento, de forma que la rentabilidad se obtiene de la diferencia entre el precio de compra y el valor nominal.

Es importante puntualizar que estos instrumentos cotizan en los mercados secundarios, es decir, se pueden comprar y vender a precio de mercado y los pagos se harán al titular actual del bono. El precio de mercado no tiene por qué coincidir con el valor nominal del bono e irá cambiando según se aproxime la fecha de vencimiento y según la fluctuación de los tipos de interés. Es por esta razón la necesidad de métodos de valoración.

La valoración de un bono cupón cero (ZCB) de valor nominal M es trivial, dado que sólo existe un único flujo de caja en la fecha de vencimiento, si r es la tasa de rentabilidad exigida y el vencimiento se da en n años, entonces el valor es:

$$P = \frac{M}{(1+r)^n}. \tag{A.1}$$

Consideremos el caso de un bono de valor nominal M que reparte cupones C anualmente y con vencimiento a n años. El procedimiento no es tan sencillo, ya que existen flujos de caja en momentos diferentes. La forma tradicional de valoración asume una tasa de interés constante durante todo el tiempo, sin embargo esto no tiene por qué ser así, generalmente la curva de tipos no es constante y los bonos a corto plazo tienen menor rendimiento que aquellos a largo plazo. Así, para calcular la tasa de interés para cada flujo de caja recurrimos a un argumento de arbitraje [19]: se considera una cartera en la que tenemos n ZCBs donde la fecha de vencimiento de cada uno de ellos coincide con la fecha de pago de cada cupón y su valor nominal es C y además otro ZCB de vencimiento a n años y nominal M, entones nuestra cartera de ZCBs dará las mismas cantidades de dinero y en los mismos momentos que el bono original, por tanto, la cartera y el bono deben tener el mismo precio, dado que ya hemos visto cómo se valora un BCZ:

$$P = \frac{C}{(1+r_1)} + \frac{C}{(1+r_2)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r_n)^n} + \frac{M}{(1+r_n)^n}, \tag{A.2}$$

donde r_k con $k = 1, 2, \ldots n$ son las rentabilidades para un bono cupón cero de vencimiento a k años. Estas rentabilidades se estiman a partir de datos de mercado y no se entrará en más detalles.

A.2. Modelo binomial de un paso

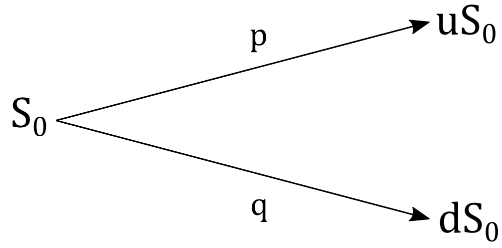


Figura A.1: Esquema de un modelo binomial de un paso para el activo subyacente

Se va a introducir a continuación el *modelo binomial de un paso* [20] para la valoración de opciones. Este, a pesar de su sencillez, sienta las bases para modelos más sofisticados y sus generalizaciones son ampliamente aplicados en la industria. Este modelo asume que, en el momento actual (t_0), el activo subyacente tiene un valor S_0 y que, en la fecha de ejercicio ($t = T$), puede tomar dos valores diferentes $S_T = uS_0$ con probabilidad p y $S_T = dS_0$ con probabilidad $q = 1 - p$, donde $d < u$ son dos números positivos conocidos y las probabilidades son desconocidas. Además, en este modelo existe una *tasa de interés libre de riesgo*[5] $r > -1$ a la que se puede tomar prestado o prestar dinero y no existen otros costes. Debido al principio de no arbitraje, es necesario que los valores u y d cumplan las siguientes desigualdades:

$$0 < d < 1 + r < u, \tag{A.3}$$

ya que si se tuviera $d \geq 1$, entonces, comenzando en el tiempo inicial con un capital nulo, se podría pedir prestado dinero y comprar activo a precio S_0; al llegar a tiempo T se vendería el activo al precio S_T y se devolvería el préstamo y los intereses, obteniendo un beneficio $S_T - (1 + r)S_0$. Nótese que el beneficio, en cualquiera de las dos situaciones de precio final, sería no negativo, es decir, se gana dinero sin ningún riesgo. Por tanto esto supone una oportunidad de arbitraje que no debería existir.

Para demostrar que $1 + r < u$, se hace un razonamiento similar, pero en esta ocasión se vende el activo en corto y se presta el dinero, al llegar el tiempo final se cobra la devolución del préstamo y los intereses y se compra el activo para cerrar la venta en corto. Este proceso da un beneficio $(1 + r)S_0 - S_T \geq 0$ en cualquiera de los precios finales.

En este modelo de mercado sólo podemos comprar/vender activo o prestar/tomar prestado dinero, llamemos X_0 a la cantidad inicial de capital y Δ_0 a la cantidad de activo comprada (si es una venta en corto, se tendrá $\Delta_0 < 0$), el resto de dinero disponible se dejará prestado. Entonces en $t = T$, el valor de la cartera será: $\Delta_0 S_T + (1 + r)(X_0 - \Delta_0 S_0)$

Estudiemos la valoración de una opción europea en este modelo, sea $V(t, S_t)$ el precio de la opción. En $t = T$ el precio debe coincidir con la función de beneficio de la opción, denotaremos $V^{(1)} := V(T, uS_0)$ y $V^{(2)} := V(T, dS_0)$ a los dos posibles valores del precio. Nuestro objetivo es construir una cartera que replique los flujos de caja de la opción en cualquiera de las situaciones posibles, si lo conseguimos, el precio de la cartera en $t = 0$ será el precio actual de la opción. Así,

[5] La tasa de interés en general es positiva, pero podría no serlo y el modelo es válido siempre que sea mayor que -1.

se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\Delta_0 u S_0 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = V^{(1)}, \tag{A.4}$$

$$\Delta_0 d S_0 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = V^{(2)}. \tag{A.5}$$

Se puede demostrar que la solución para $V(0) = X_0$ es

$$X_0 = \frac{1}{1+r}\left(\widetilde{p}V^{(1)} + \widetilde{q}V^{(2)}\right), \tag{A.6}$$

donde

$$\widetilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \widetilde{q} = 1-p, \tag{A.7}$$

y por las desigualdades (A.3), se tiene $0 < \widetilde{p}, \widetilde{q} < 1$, es decir, $\widetilde{p}$ y $\widetilde{q}$ se pueden interpretar como probabilidades (lo que llamaremos medida de probabilidad de *riesgo neutro*) y así, el precio de la opción es simplemente la esperanza de los precios en esta nueva medida de probabilidad, descontada por la tasa de interés libre de riesgo.

$$V(0, S_0) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}[V(T, S_T)|S_0]. \tag{A.8}$$

Este modelo se generaliza añadiendo más pasos binomiales con un intervalo de tiempo menor, de forma que se forma un árbol de posibles precios. Además, cuando el intervalo temporal se hace tender a 0, este proceso se convierte en una evolución estocástica continua de los precios. En cualquier caso el modelo binomial de un paso, ya muestra algunas muy buenas propiedades deseables en los modelos generalizados:

- Es posible la valoración sin existencia de arbitraje.
- El precio de un derivado no depende de las probabilidades reales de evolución de los precios de activo subyacente, las cuales son prácticamente imposibles de conocer.
- Existe una medida de riesgo neutro, que se puede conocer a partir de los parámetros del modelo, bajo la cual la valoración de cualquier derivado se realiza con de manera análoga a la expresión (A.8).

B. Conceptos y resultados de Teoría de la Medida y Probabilidad

La Teoría de la Probabilidad y en particular, la Teoría de Procesos Estocásticos se fundamenta sobre la Teoría de la Medida, a continuación se presentan algunos conceptos y resultados previos necesarios para el desarrollo del texto. Para una introducción más profunda consúltese [12].

Definición B.1 (σ-álgebra)**.** Sea Ω un conjunto no vacío, y sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una colección de subconjuntos de Ω. Se dice que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra si cumple:
(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,
(ii) para cualquier $A \in \mathcal{F}$ se tiene que $A^c := \Omega \backslash A \in \mathcal{F}$, y
(iii) dada una sucesión numerable de subconjuntos de Ω $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ perteneciente a $\mathcal{F}$ entonces su unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ también pertenece a $\mathcal{F}$.
Al par $(\Omega, \mathcal{F})$ se le denomina *espacio medible.*

Definición B.2 (Espacio de medida)**.** Sea Ω un conjunto no vacío, $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre Ω. Una medida es una función $\mu : \mathcal{F} \to [0, 1]$ que cumple:
(i) $\mu(\emptyset) = 0$ y
(ii) dada una secuencia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos pertenecientes a $\mathcal{F}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{B.1}$$

A la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ se le llama *espacio de medida.*

Nota B.3. En el contexto de teoría de la probabilidad, a una medida $\mu = \mathbb{P}$ finita tal que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, la llamaremos *medida de probabilidad*, Ω diremos que es el *espacio de sucesos* y $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un *espacio de probabilidad.*

Definición B.4 (Función medible)**.** Sean $(\Omega, \mathcal{F})$ y $(E, \mathcal{E})$ dos espacios medibles. Una función $f : \Omega \to E$ es $\mathcal{F}$-medible si $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ para todo $B \in \mathcal{E}$.

Definición B.5 (Variable aleatoria)**.** Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $(E, \mathcal{E})$ un espacio medible. Una variable aleatoria es una función $\mathcal{F}$-medible $X : \Omega \to E$.

Definición B.6 (σ-álgebra engendrada)**.** Sea $\Omega \neq \emptyset$ y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una familia de subconjuntos de Ω. La σ-álgebra engendrada por $\mathcal{A}$, $\sigma(\mathcal{A})$, es la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$:

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap \{\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega) : \mathcal{G} \text{ es } \sigma - \text{álgebra y } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}\}.$$

Dada X una variable aleatoria real, la σ-álgebra engendrada por X es

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) \in \mathcal{P}(\Omega) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Definición B.7 (σ-álgebra de Borel)**.** Dado un espacio topológico X, se llama σ-álgebra de Borel a aquella engendrada por los abiertos de X, es decir, la menor σ-álgebra que contiene a todos los abiertos de X. Se denota $\mathcal{B}(X)$ y a sus elementos se les llama Borelianos. Se dice que una variable aleatoria es real si, con la notación de la definición B.5, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Definición B.8. Una propiedad se dice que se verifica para casi todo punto (c.t.p.)si es cierta salvo, quizá, en un conjunto de medida nula. En el contexto de un espacio de probabilidad diremos que se verifica casi seguramente (c.s.), es decir, si es cierta salvo, quizás, en un conjunto de probabilidad nula.

Teorema B.9 (de la Convergencia Monótona). *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de medida, $E \in \mathcal{F}$ y sean $f_n : \mathbb{E} \to [0, \infty]$ funciones medibles ($n \in \mathbb{N}$) de manera que para casi todo punto $x \in E$*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots \leq +\infty.$$

Entonces, si $f(x) := \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x)$ para casi todo $x \in E$, se tiene que f es una función medible no negativa y verifica

$$\int_E f d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mathbb{P}.$$

Teorema B.10 (de la Convergencia Dominada). *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de medida, $E \in \mathcal{F}$ y sean $f_n : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones medibles ($n \in \mathbb{N}$) de manera que convergen en casi todo punto a a una función medible f. Si existe una función g integrable sobre E tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $|f_n| \leq g$ (c.t.p.), entonces f y cada una de las funciones f_n son integrables sobre E y*

$$\int_E f d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mathbb{P}.$$

Definición B.11 (σ-álgebra producto). Sean $(X, \mathcal{F})$ e $(Y, \mathcal{G})$ dos espacios medibles. Se llama σ-álgebra producto de $\mathcal{F}$ por $\mathcal{G}$ a aquella σ-álgebra sobre $X \times Y$ engendrada por los rectángulos medibles

$$A \times B, \quad A \in \mathcal{F}, \quad B \in \mathcal{G}.$$

Se denota $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.

Definición B.12 (Medida producto). Sean $(X, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $(Y, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$ espacios de medida σ-finitas. Se llama medida producto $(\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q})$ a la única medida sobre $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ que cumple

$$(\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q})(A \times B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{Q}(B), \quad \text{para cualesquiera} \quad A \in \mathcal{F}, \quad B \in \mathcal{G}.$$

Definición B.13. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible y $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos medidas sobre él. Se dice que $\mathbb{Q}$ es absolutamente continua respecto de $\mathbb{P}$, denotado $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ si para todo $A \in \mathcal{F}$, $P(A) = 0$ implica que $\mathbb{Q}(A) = 0$. Las medidas se dicen equivalentes si son absolutamente continuas una con respecto de la otra.

Definición B.14. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible y $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos medidas sobre él. Se dice que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{P}$ son singulares una conrespecto de la otra si existen conjuntos E, $F \in \mathcal{F}$ disjuntos tales que para todo $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap E) \quad \text{y} \quad \mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}(A \cap F).$$

Teorema B.15 (de Radon-Nikodym para medidas finitas). *Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible y sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ medidas positivas finitas sobre $\mathcal{F}$. Entonces $\mathbb{Q}$ es absolutamente continua respecto de $\mathbb{P}$ si y sólo si existe una función medible no negativa $f : \Omega \to [0, \infty)$ tal que*

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A f d\mathbb{P}$$

para cada $A \in \mathcal{F}$. Además esta función es $\mathbb{P}$-integrable y es única en casi todo punto. La función f se denomina derivada de Radon-Nikodym de $\mathbb{Q}$ respecto a $\mathbb{P}$.

Teorema B.16 (de descomposición de Lebesgue para medidas finitas). *Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible y sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ medidas positivas finitas sobre $\mathcal{F}$. Entonces existe un único par de medidas $\mathbb{Q}_a$, $\mathbb{Q}_s$ sobre $\mathcal{F}$ tales que $\mathbb{Q}_a$ es absolutamente continua respecto de $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}_s$ es singular respecto de $\mathbb{P}$, y*

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_a + \mathbb{Q}_s.$$

Teorema B.17 (de Fubini)**.** *n Sean* $(X, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *e* $(Y, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$ *espacios de medida* σ*-finitos. Sea* $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ *una función* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$*-medible y* $\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}$*-integrable. Sea* $f^x : Y \to \mathbb{C}$ *dada por* $f^x(y) = f(x, y)$ *y sea* $f^y : X \to \mathbb{C}$ *dada por* $f^y(x) = f(x, y)$*. Entonces:*

(a) Para casi todo $x \in X$*,* f^x *es* $\mathbb{Q}$*-integrable. Para casi todo* $y \in Y$*,* f^y *es* $\mathbb{P}$*-integrable.*

(b) La función φ *compleja definida para* $\mathbb{P}$*-casi todo punto* $x \in X$ *por*

$$\varphi(x) = \int_Y f^x d\mathbb{Q} = \int_Y f(x, y) d\mathbb{Q}$$

es $\mathcal{G}$*-medible y* $\mathbb{P}$*-integrable.*

La función ψ *compleja definida para* $\mathbb{Q}$*-casi todo punto* $y \in Y$ *por*

$$\psi(x) = \int_X f^y d\mathbb{P} = \int_Y f(x, y) d\mathbb{P}$$

es $\mathcal{F}$*-medible y* $\mathbb{Q}$*-integrable.*

(c) Se verifica

$$\int_{X \times Y} f d(\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}) = \int_X \varphi d\mathbb{P} = \int_Y \psi d\mathbb{Q}.$$

Lema B.18. *Sea* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función de variación total acotada en el intervalo* $[a, b]$*, entonces existen funciones* $F_1, F_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ *no decrecientes cumpliendo*

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x), \quad x \in [a, b].$$

Definición B.19 (Medida de Lebesgue-Stieltjes)**.** Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función no decreciente en su dominio y sea $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ la única función no decreciente y continua a derecha que coincide con F en sus puntos de continuidad. Se define la medida de Lebesgue-Stieltjes de F, m_F como aquella medida positiva sobre $[a, b]$ contruida con el método de Carathéodory de forma que cumpla

$$m_F((a, b]) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

La σ-álgebra asociada a esta medida se llama σ-álgebra de los medibles Stieltjes y se denota $\mathcal{M}_F$.

Definición B.20 (Integral de Lebesgue-Stieltjes)**.** Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función no decreciente en su dominio, se define la integral de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{M}_F$-medible como la integral de f respecto a la medida m_F.

$$\int_a^b f dF := \int_{[a,b]} f dm_F$$

Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada, y sean F_1 y F_2 las funciones dadas por el Lema B.18, entonces se define la integral de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{M}_{F_1}$-medible y $\mathcal{M}_{F_2}$-medible como

$$\int_a^b f dF := \int_{[a,b]} f dm_{F_1} - \int_{[a,b]} f dm_{F_2}.$$

C. Algunos aspectos del modelo Black-Scholes-Merton

C.1. Existencia de la cartera de cobertura

El método de valoración en riesgo neutro desarrollado en la sección 4.1 requiere, para su completa justificación, la existencia de una cartera de cobertura que tenga en todo momento el valor del derivado a valorar. En el caso en el que el modelo de mercado es unidimensional, es decir, solo se trabaja con el precio de una acción, esto se prueba de manera sencilla mediante la aplicación de un resultado auxiliar [8].

Teorema C.1 (de representación de la Martingala 1D)**.** *Sea* $(W_t)_{t\in[0,T]}$ *un movimiento Browniano y sea* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ *la filtración natural del proceso. Sea* $(M_t)_{t\in[0,T]}$ *una martingala adaptada a la filtración* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$*, entonces existe un proceso adaptado* $(\Gamma_t)_{t\in[0,t]}$ *tal que*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \Gamma_u dW_u, \quad t \in [0,T].$$

Consideremos que V_T es una variable aleatoria $\mathcal{F}_T$-medible que representa el valor del derivado financiero a valorar en el tiempo final. Definimos el proceso $(V_t)_{t\in[0,t]}$ como el procdeso adaptado

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}V_T|\mathcal{F}_t].$$

Este proceso descontado por e^{-rt} es una $\mathbb{Q}$-martingala, ya que para $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rt}V_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[e^{-rt}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}V_T|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}V_T|\mathcal{F}_s] = e^{-rs}V_s.$$

De esta forma existe un proceso $(\Gamma_t)_{t\in[0,t]}$ tal que

$$e^{-rt}V_t = V_0 + \int_0^t \Gamma_u d\widetilde{W}_u, \quad t \in [0,T].$$

Por otra parte, dada una cartera autofinanciada, por lo expuesto en la ecuación (4.13), se tiene que

$$e^{-rt}X_t = X_0 + \int_0^t \Delta_u \sigma e^{-ru} S_u d\widetilde{W}_u.$$

Basta tomar así

$$X_0 = V_0$$

y

$$\Delta_t = \frac{\Gamma_t}{\sigma S_t} e^{rt}$$

para hacer que X sea una cartera replicante.

C.2. Griegas de una opción

En la sección 4.4 se ha introducido la *delta* de una opción, que es la derivada de su precio respecto al valor del subyacente, y se ha establecido su importancia en la gestión de riesgos. De manera análoga, se introduce una nomenclatura para otras derivadas mediante letras griegas, las cuales tienen vital importancia en la caracterización de los diversos riesgos que presentan las opciones. Aunque no se vaya a profundizar sobre ellas en este trabajo, su relevancia merece que al menos se presenten las principales.

Comenzamos con dos griegas cuyo significado es directo en el marco de Black-Scholes: *theta* es la variabilidad del precio respecto del tiempo a la fecha de vencimiento y *gamma* caracteriza la variabilidad de *delta* con respecto del valor del subyacente

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}, \qquad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.$$

Si el modelo bajo el cual hemos trabajado fuera cierto, la tasa libre de riesgo r y la volatilidad del subyacente σ serían constantes y no tendríamos que preocuparnos de sus efectos, sin embargo las griegas *vega* y *rho*, definidas a continuación, son esenciales a la hora de trasladar la teoría a la realidad y tener en cuenta la *smile* de volatilidad,

$$\nu = \frac{\partial V}{\partial r}, \qquad \rho = \frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

Bajo el modelo BSM las griegas toman la forma reflejada en la Tabla C.1, donde se usa la notación $d_+ := d_+\left(T-t, \frac{S_t}{K}\right)$ y $d_- := d_-\left(T-t, \frac{S_t}{K}\right)$.

	Call	**Put**
Δ	d_+	$d_+ - 1$
Θ	$-\frac{S_0 N'(d_+)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_-)$	$-\frac{S_0 N'(d_+)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_-)$
Γ	$\frac{N'(d_+)}{S_0\sigma\sqrt{T}}$	$\frac{N'(d_+)}{S_0\sigma\sqrt{T}}$
ν	$S_0\sqrt{T}N'(d_+)$	$S_0\sqrt{T}N'(d_+)$
ρ	$KTe^{-rT}N(d_-)$	$-KTe^{-rT}N(-d_-)$

Tabla C.1: Griegas de una opción bajo el modelo BSM [9].

C.3. Generalización a modelos de volatilidad local

En el texto principal de este trabajo se ha dado una versión particular del Teorema de Girsanov, que no requiere de otros resultados previos para su demostración, para demostrar la existencia de una medida de riesgo neutra en el modelo BSM. Para modelos de volatilidad local más generales, se puede dar un resultado análogo mediante la aplicación del la versión general del Teorema de Girsanov [8].

Teorema C.1 (Teorema de Girsanov 1D). *Sea $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un movimiento Browniano con una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$. Sea $(\Theta_t)_{t\in[0,T]}$ un proceso progresivamente medible. Definiendo*

$$Z_t = \exp\left[-\int_0^t \Theta_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta_u^2 du\right] \quad y, \tag{C.1}$$

$$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \Theta_u du, \tag{C.2}$$

y suponiendo que

$$\mathbb{E}\int_0^T \Theta_u^2 Z_u^2 du < \infty. \tag{C.3}$$

Denotando $Z = Z(T)$. Entonces $\mathbb{E}Z = 1$ y bajo la medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ dada por

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \quad A \in \mathcal{F}, \tag{C.4}$$

el proceso $\widetilde{W}_t$ es un movimiento Browniano.

Con este resultado, el método para deducir la medida de riesgo neutra es idéntica al modelo de BSM, simplemente ha de tenerse en cuenta que el proceso de descuento D_t será estocástico, siendo R_t el proceso que sigue la tasa de interés libre de riesgo y se define

$$\Theta_t = \frac{\mu_t - R_t}{\sigma_t}.$$

De esta forma,

$$d(D_t S_t) = (\mu_t - R_t) D_t S_t dt + \sigma_t D_t S_t dW_t = \sigma_t D_t S_t [\Theta_t dt + dW_t] = \sigma_t D_t S_t d\widetilde{W}_t$$

Además, se encuentran resultados similares para la evolución de las carteras autofinanciadas.

Proposición C.2. *Sea $\mathbb{Q}$ una medida de riesgo neutro y X_t el valor de una cartera. Bajo la medida $\mathbb{Q}$, el valor descontado de la cartera $D_t X_t$ es una martingala.*

Por otra parte, la teoría es generalizable a modelos de mercado multidimensionales, en los que existen m activos diferentes gobernados por las ecuaciones

$$dS_i(t) = \mu_i(t) S_i(t) dt + S_i(t) \sum_{j=1} \sigma_{ij}(t) dW_j(t), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{C.5}$$

donde $W_j(t)$, $j = 1, \ldots, d$ son movimientos Brownianos. Para este tipo de modelos se pueden demostrar los *Teoremas Fundamentales de la Valoración* [8].

Teorema C.3 (Primer Teorema Fundamenta de la Valoración). *Si un modelo de mercado tiene una medida de probabilidad de riesgo neutro, entonces no admite arbitraje.*

Teorema C.4 (Segundo Teorema Fundamenta de la Valoración). *Sea un modelo que tiene una medida de probabilidad de riesgo neutro. Este modelo es completo, es decir, todo producto derivado puede cubrirse, si y sólo si la medida de probabilidad de riesgo neutro es única.*