



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

Introducción a las teorías de Gran Unificación

Autor

Adrian Fernández Duro

Directora

Siannah Peñaranda Rivas

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
FACULTAD DE CIENCIAS
2023/2024

Índice

1. Introducción.	1
2. Modelo Estándar.	2
2.1. QED en el SM.	3
2.2. Interacción electrodébil.	6
2.2.1. Rotura de simetría	9
2.3. QCD	11
3. Grupo de renormalización.	14
3.1. Constantes de acoplo y unificación.	15
4. Modelos de Gran Unificación.	17
4.1. Problema de las Jerarquías	17
4.2. Supersimetría	18
4.2.1. Unificación del MSSM	20
4.3. Gravedad	22
5. Conclusiones.	24
Bibliografía	25
A. Anexos correspondientes a los capítulos 1 y 2	26
A.1. Invarianza $U(1)$ del Lagrangiano	26
A.2. Derivada covariante para $U(1)$	27
A.3. Desarrollo del Lagrangiano escalar en la rotura de simetría <i>electrodébil</i> al aplicar la derivada covariante	28

Capítulo 1

Introducción.

A lo largo de la historia, los físicos han desarrollado distintas teorías para intentar entender los diferentes fenómenos de la naturaleza, siendo estas, a primera vista, independientes entre sí. Sin embargo, importantes físicos han intentado unir dichas teorías, creando lo que llamamos *Teorías de la unificación*. Un primer ejemplo de unificación en la física lo encontramos en el siglo XVII, donde Newton publicó por primera vez en su libro *Philosophiæ naturalis principia mathematica* la enunciación de la Ley de Gravitación Universal, explicando y unificando el movimiento de los cuerpos terrestres y celestes. Dos siglos después vendría la siguiente unificación, cuando Maxwell enunciaba sus ecuaciones consiguiendo describir y unificar la electrostática y el magnetismo. Posteriormente, llegando al siglo XX, Einstein intentó por primera vez unificar dos fuerzas fundamentales, la electromagnética y la gravitatoria. No obstante, aunque no consiguió hacerlo, resultó en la teoría de la relatividad especial; una pieza clave, junto con la mecánica cuántica, para entender la física de partículas. La aparición de dos nuevas fuerzas nucleares, la débil y la fuerte, incentivó el deseo de los físicos del siglo XX de crear nuevas teorías de unificación, intentando juntar así las interacciones en las llamadas *Teorías de Gran Unificación* (GUT - del inglés *Grand Unified Theory*). En los años 60, Salam, Glashow y Weinberg enunciaron la primera de estas teorías, el modelo *ElectroDébil* que unifica el electromagnetismo y la fuerza débil, la cual a día de hoy está comprobada experimentalmente.

El objetivo de este trabajo es comprender y explicar ideas básicas de las *teorías de Gran Unificación* de las interacciones. El trabajo está descrito en 4 capítulos. Posterior a esta introducción, el primero describirá el *Modelo Estándar* de la física de partículas, explicando las diversas teorías descritas en él, empezando con la electrodinámica cuántica y explicando posteriormente el modelo *electrodébil*. Esta es la primera teoría unificada que discutimos en este trabajo. A continuación, daremos una breve descripción sobre la interacción fuerte, utilizando la *Cromodinámica Cuántica*. En el capítulo 3 presentamos las ecuaciones del grupo de renormalización y cómo evolucionan las constantes de acoplo de cada interacción con la energía, para terminar explicando la unificación *electrodébil* en el *Modelo Estándar* y mostrando que no tenemos la unificación con la interacción fuerte. En el capítulo 4 hablaremos sobre algunas extensiones del este modelo, que resuelven algunos problemas abiertos como es el caso de la unificación de interacciones. Por último, presentamos las conclusiones.

Capítulo 2

Modelo Estándar.

Todos los fenómenos, interacciones y descripciones relacionados con las partículas elementales están descritas en el *Modelo Estándar* (SM - del inglés *Standard Model*). Este modelo es una teoría cuántica de campos, basada en determinados grupos de simetría y que describe con notable éxito y una gran precisión los resultados experimentales, siendo, actualmente, la teoría más aceptada. En este modelo se incluyen tres de las cuatro fuerzas fundamentales: el electromagnetismo, la fuerza débil y la fuerza fuerte, con la predicción de la unificación de las dos primeras interacciones mencionadas en la teoría *electrodébil*. La fuerza gravitatoria no está incluida en este modelo. Concretamente, el SM está basado en el grupo de simetría $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. A continuación, como profundizaremos en este tema más adelante, es conveniente dar una pequeña explicación de las partículas presentes en el SM, las cuales están constituidas por *fermiones* siendo estas las que constituyen la materia y por *bosones* las cuales son las responsables de las interacciones:

- **Fermiones:** Partículas de espín semientero que cumplen el principio de exclusión de Pauli, no pudiendo coexistir dos fermiones en el mismo estado cuántico. Debido a esto, se creó el postulado de simetrización aclarando que las funciones de onda deben ser antisimétricas bajo el cambio de dos partículas idénticas de este tipo. En el SM distinguimos dos tipos de fermiones: leptones y quarks, los cuales se agrupan en 3 familias o generaciones distintas. En el caso de los leptones, las familias están compuestas por partículas cargadas ya conocidas con su respectivo neutrino y, en cuanto a los quarks, también se agrupan en 3 familias constituidas por un quark de carga $+2/3$ (up) y un quark de carga $-1/3$ (down). Además, todos estos fermiones tendrán sus correspondientes antifermiones. Podemos visualizar las familias a continuación:

$$\text{Leptones} : \begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad \text{Quarks} : \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

- **Bosones:** Partículas de espín entero los cuales no cumplen el principio de exclusión de Pauli, y por el postulado de simetrización sus funciones de onda tienen que ser simétricas bajo el intercambio de dos partículas idénticas. Concretamente, el SM habla de partículas de espín 1: el fotón correspondiente a la interacción electromagnética, el gluón con la fuerza nuclear fuerte, los cuales no tienen masa; y los correspondientes a la fuerza débil W^+ , W^- y Z^0 los cuales si tienen masa.

Faltaría un último bosón llamado bosón de Higgs, el cual es muy importante ya que a través del mecanismo de Higgs dotamos de masa a las distintas partículas del modelo. Todas las partículas del SM han sido descubiertas experimentalmente; la última el bosón de Higgs en el LHC, CERN, en 2012.

2.1. QED en el SM.

La primera interacción que vamos a explicar será la electromagnética. Clásicamente, utilizamos las ecuaciones de Maxwell, las cuales nos describen como funcionan los campos eléctrico y magnético a nivel macroscópico. Sin embargo, sabemos que estas ecuaciones no son invariantes relativistas, es decir, no son invariantes bajo las transformaciones Lorentz. Por lo tanto, el primer objetivo es crear una teoría covariante que sea capaz de describir el electromagnetismo; es decir, escribir las ecuaciones de Maxwell en forma covariante [1]. Para ello, introducimos un cuadvivector tratado como potencial:

$$A^\mu \equiv (\phi, \vec{A}), \quad (2.2)$$

donde ϕ es el campo escalar y \vec{A} el potencial vector, y a su vez definimos un nuevo tensor que llamaremos tensor de campo electromagnético y viene dado por:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.3)$$

De esta forma podemos escribir las ecuaciones de Maxwell en forma covariante como:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0, \quad (2.4)$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu, \quad (2.5)$$

donde $j^\mu \equiv (\rho, \vec{j})$ es el cuadvivector densidad de carga-corriente, siendo ρ la densidad de carga y \vec{j} la densidad de corriente. Cuando no existen fuentes externas esta última ecuación (2.5) es igual a 0, lo que quiere decir que estamos trabajando con partículas libres, sin interacciones.

Es importante destacar que de esta forma el cuadvivector potencial (2.2) no está definido unívocamente. Podemos tomar una transformación tal que:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f, \quad (2.6)$$

con f una función cualquiera tal que esta transformación mantenga invariante los campos eléctrico y magnético definidos en función del cuadvivector A^μ y del tensor $F^{\mu\nu}$. Aseguramos así que las ecuaciones de Maxwell permanecen invariantes bajo esta transformación. A esta transformación se le denomina transformación de *gauge* de segunda especie y corresponde con una transformación global que actúa sobre todos los puntos del espacio-tiempo. Este tipo de transformación es muy importante en el SM.

Finalmente, la densidad lagrangiana asociada estaría dada, en función del tensor $F_{\mu\nu}$, de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + j^\mu A_\mu, \quad (2.7)$$

donde el primer término describe la dinámica del campo electromagnético libre y el segundo corresponde con el término de interacción. A partir de esta densidad Lagrangiana, utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, podemos obtener las ecuaciones (2.4) y (2.5).

Obviamente, los fotones no siempre están libres, sino que interaccionan con otras partículas electromagnéticamente, por lo tanto es conveniente estudiar también estas partículas y como interaccionan con dichos fotones. Aquí es donde entra la Electrodinámica Cuántica (QED - del inglés *Quantum Electrodynamics*). Las partículas que interaccionarán serán fermiones las cuales lo harán a través del intercambio de fotones como partícula mediadora. Estos fermiones como partículas libres estarán regidos por el Lagrangiano,

$$\mathcal{L}_{1/2} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (2.8)$$

el cual es llamado *Lagrangiano de Dirac*, siendo ψ el campo del fermión correspondiente, $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$; con ψ^\dagger el adjunto del campo ψ , y γ^μ las matrices de Dirac.

Este Lagrangiano es invariante bajo transformaciones globales del grupo de simetría $U(1)$ donde los campos ψ están determinados solo por una fase, i.e. $e^{i\theta}\psi$, siendo θ una constante real. Sin embargo, bajo transformaciones locales, es decir, tomando la fase dependiente de las coordenadas espacio-temporales $\theta = \theta(x)$,

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta(x)}\psi, \quad (2.9)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = e^{-i\theta(x)}\bar{\psi}, \quad (2.10)$$

el Lagrangiano deja de ser invariante ya que aparece un nuevo término debido a esta dependencia local ¹.

Sin embargo, sabemos que las ecuaciones de movimiento, y por tanto nuestro Lagrangiano debe ser invariante, por lo que debemos encontrar la forma de tratar dicho término y, así, establecer la nueva invariancia bajo transformaciones locales [2]. La forma en que lo haremos será definiendo un nuevo operador llamado *derivada covariante*,

$$\mathfrak{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i q A_\mu, \quad (2.11)$$

en la cual hemos redefinido, utilizando el principio del acoplo mínimo, la fase θ como $-q\lambda$, donde q lo podemos interpretar como la carga de la partícula y λ como el parámetro característico de la transformación.

¹La demostración está incluída en el anexo A.1.

Además, si tenemos en cuenta que el campo del fotón es un campo *gauge*, que cumple (2.6), podemos utilizar como función f el anteriormente definido parámetro λ y, utilizando (2.9), las transformaciones del campo del fotón y de la derivada del campo fermionico nos quedarían:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \lambda, \quad (2.12)$$

$$\partial_\mu \psi \rightarrow \partial_\mu \psi' = \partial_\mu (e^{-iq\lambda} \psi) = e^{-iq\lambda} (\partial_\mu - iq \partial_\mu \lambda) \psi, \quad (2.13)$$

De esta forma, sustituyendo todas las derivadas parciales por las nuevas derivadas covariantes, tenemos un nuevo Lagrangiano invariante de la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathfrak{D}_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (q\bar{\psi}\gamma^\mu \psi)A_\mu, \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde el primer término es el del fermión libre, correspondiente al término cinético y de masa, el segundo término el del fotón libre y el tercero es el término de interacción entre fotones y fermiones. Este nuevo Lagrangiano que se transforma bajo el grupo de simetría $U(1)$ es invariante localmente ².

El término de interacción, definido como:

$$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi}\gamma^\mu Q\psi A_\mu = j^\mu A_\mu, \quad (2.15)$$

donde hemos separado el factor q en dos términos eQ , siendo Q el generador del operador carga y e el autovalor de este operador; la carga del electrón, caracteriza la interacción electromagnética. En la figura (2.1) presentamos el diagrama de Feynman de esta interacción. Cada vértice de interacción estará gobernado por la constante de acoplo en cuestión, siendo en este caso $-ieQ\gamma^\mu$ al ser una interacción electromagnética descrita por (2.15). Este acoplamiento está relacionado con la constante de estructura fina (en unidades naturales) $\alpha_{EM} = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137} \ll 1$. Esta constante de acoplamiento es pequeña, lo que implicará que podremos tratar esta interacción perturbativamente. Para cada una de las interacciones presentes en el SM tendríamos una constante de acoplo diferente, de las cuales hablaremos más adelante.

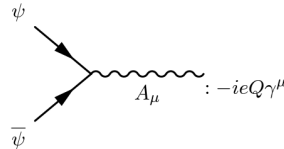


Figura 2.1: Diagrama de Feynman de la interacción entre dos fermiones y un fotón

²La demostración está incluida en el anexo A.2

2.2. Interacción electrodébil.

A continuación, explicaremos como funciona el modelo *electrodébil* en el SM, utilizando similitudes con la QED [3]. Antes de nada, es conveniente explicar qué es la fuerza nuclear débil. Esta interacción se descubrió en los años 30, cuando encontraron que algunas desintegraciones nucleares emitían, aparte del correspondiente núcleo, una partícula cargada (negativa o positiva), más tarde identificada con el electrón o su antipartícula; el positrón. A este tipo de desintegraciones les llamaron desintegración β . Además, midieron el alcance de dicha desintegración y observaron que era mayor que la ya conocida desintegración α debida a la fuerza nuclear fuerte, así que se trataba de otra interacción mucho más débil que esta. Posteriormente, se desarrolló la hoy conocida como interacción *electrodébil* que corresponde a la interacción unificada del electromagnetismo y la fuerza nuclear débil, y posee dos números cuánticos, el isospín débil y la hipercarga, los cuales deben conservarse en las desintegraciones nucleares.

Anteriormente hemos explicado que es posible hacer invariante localmente el Lagrangiano generando nuevos términos de interacción electromagnética al hacer una transformación *gauge* local sobre los términos en el Lagrangiano libre utilizando una derivada covariante que introduce nuevos campos bosónicos, llamados campos de *gauge*, y que en este caso correspondían con el campo del fotón. Este campo interacciona con el campo de los fermiones, tal que el Lagrangiano permanece invariante bajo el grupo de simetría $U(1)_{EM}$.

En la teoría *electrodébil*, tenemos nuevos grados de libertad, por lo que la simetría cambia. La nueva simetría es $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Bajo el grupo $SU(2)_L$, las componentes levógiras (*left*) se transforman de forma distinta que las dextrógiras (*right*), por una parte los campos *left* son dobletes de isospín y por otra los *right* son singletes. El índice Y se refiere a la hipercarga, y nos permite poder distinguir el grupo asociado con el número cuántico de hipercarga débil $U(1)_Y$ del grupo asociado $U(1)_{EM}$ el cual utiliza la carga eléctrica ordinaria, denominado Q .

Los campos fermiónicos se transformarán de la siguiente manera,

$$\Psi_L \rightarrow \Psi'_L = \exp\left[\underbrace{i\alpha(x)\vec{\tau}/2}_{SU(2)} + \underbrace{i\beta(x)Y}_{U(1)_Y}\right] \Psi_L, \quad (2.16)$$

$$\Psi_R \rightarrow \Psi'_R = \exp\left[\underbrace{i\beta(x)Y}_{U(1)_Y}\right] \Psi_R, \quad (2.17)$$

siendo $\alpha(x) = g$ y $\beta(x) = g'/2$, donde g y g' son las constantes de acoplamiento. El vector $\vec{\tau}$ está formado por las tres matrices de Pauli, $\vec{\tau} = \sigma_i$.

Si comprobamos la invarianza del Lagrangiano *electrodébil* a través de estas transformaciones y, con la transformación *gauge* de los campos bosónicos, llegaremos a la conclusión de que debemos introducir la derivada covariante, pero de una forma

distinta a QED, con nuevos sumandos que dependerán de las transformadas de los campos anteriormente explicados. La derivada covariante \mathfrak{D}_μ que necesitamos introducir para respetar la invariancia está dada por,

$$\mathfrak{D}_\mu = \partial_\mu + ig\frac{1}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + ig'\frac{1}{2}Y B_\mu, \quad (2.18)$$

A cada simetría le corresponderá un nuevo bosón *gauge*, siendo para $SU(2)_L$ los campos \vec{W}_μ y para $U(1)_Y$ el campo B_μ . Notése que hemos tenido que introducir tres bosones vectoriales, $\vec{W}_\mu = (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3)$, uno por cada generador de $SU(2)_L$ y otro más, B_μ , para el grupo $U(1)_Y$. Los campos \vec{W}_μ y B_μ darán lugar a los bosones de *gauge* físicos debidos a la interacción débil llamados W^+ , W^- y Z^0 , como veremos más adelante.

Al introducir la derivada covariante (2.18) en el Lagrangiano de Dirac, nos aparecerán 4 nuevos términos de interacción entre los campos fermiónicos *left* y los nuevos campos no físicos \vec{W}_μ y B_μ de la forma:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{EW} &= \bar{\Psi}_L (i\gamma^\mu \mathfrak{D}_\mu - m) \Psi_L \\ &= \bar{\Psi}_L (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi_L - g \underbrace{(\bar{\Psi}_L \gamma^\mu \frac{\vec{\tau}}{2} \Psi_L)}_{\vec{J}_\tau^\mu} \vec{W}_\mu - \frac{g'}{2} \underbrace{(\bar{\Psi}_L \gamma^\mu Y \Psi_L)}_{J_Y^\mu} B_\mu, \end{aligned} \quad (2.19)$$

Al igual que teníamos la corriente electromagnética en QED, en la teoría *electrodébil*, debido a los nuevos términos de interacción entre fermiones y bosones *gauge*, tendremos unas nuevas corrientes \vec{J}_τ^μ y J_Y^μ . Sin embargo, no son estas corrientes ni estos bosones lo que nos dan la interpretación y explicación física de las interacciones nucleares débiles, sino una combinación de los mismos. Primero, definimos los bosones físicos relacionados con las corrientes cargadas,

$$W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad (2.20)$$

donde el índice \pm en la W se refiere a la carga eléctrica. Podemos incluir estos nuevos bosones cargados W_μ^\pm sustituyéndolos por los anteriores bosones no físicos (W_μ^1, W_μ^2) en los términos de interacción de la expresión (2.19) tal que quedaría, solamente escribiendo de forma genérica los términos de interacción debidos a estos bosones,

$$\mathfrak{L}_{CC} = -g W_\mu^+ J^{+\mu} - g W_\mu^- J^{-\mu}, \quad (2.21)$$

definiendo nuevas corrientes cargadas del tipo,

$$J^{\mu, \pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \tau^\pm \Psi_L, \quad (2.22)$$

donde $\tau^\pm = \frac{1}{2}(\tau^1 \pm i\tau^2)$. Así, tendremos nuevas interacciones entre fermiones y los bosones físicos W^\pm .

Presentamos en la figura (2.2) el diagrama de Feynman correspondiente a estas corrientes, cuyo vértice de interacción está caracterizado por $-\frac{i}{\sqrt{2}}g\gamma^\mu\tau^\pm$, siendo g la constante de acoplo con la cual podremos estudiar estas interacciones.

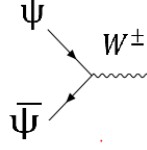


Figura 2.2: Diagrama de Feynman de la interacción entre dos fermiones y un bosón W^\pm .

Nuestro Lagrangiano (2.19) también contiene interacciones con los campos *gauge* neutros W_μ^3 y B_μ , con una nueva constante de acoplo g' y que daría lugar a un nuevo término de interacción. Sin embargo, no podemos identificar directamente estos bosones con los bosones físicos Z_μ^0 y el fotón. Entonces, las transformaciones correspondientes a $\tau_3/2$, tercera componente del isospín correspondiente al doblete junto con las correspondientes a Y , llevan a crear las interacciones de corrientes neutras y, como resultado, los bosones *gauge* W_μ^3 y B_μ se mezclan. Por lo tanto, la verdadera pregunta es si nosotros podríamos reestructurar estos campos *gauge* tal que se conviertan en el fotón A_μ y el bosón Z_μ^0 , ambos bosones físicos, de una forma en concreto. La respuesta la obtuvieron Weinberg y Salam. Los campos físicos neutros del fotón y de Z_μ^0 son combinaciones lineales de los bosones W_μ^3 y B_μ . Se transforman de una manera parecida a como lo hace el grupo de simetría $SO(3)$, como una rotación de un ángulo en un plano conformado por W_μ^3 y B_μ tal que,

$$\begin{aligned} A_\mu &= B_\mu \cos \theta_W + W_\mu^3 \sin \theta_W, \\ Z_\mu^0 &= -B_\mu \sin \theta_W + W_\mu^3 \cos \theta_W, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde θ_W es el denominado ángulo de Weinberg.

Utilizando esta expresión podemos obtener el Lagrangiano de corrientes neutras en términos de los campos físicos A_μ y Z_μ^0 :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{NC} &= -gJ_3^\mu W_\mu^3 - \frac{g'}{2}J_Y^\mu B_\mu = - \left(g \sin \theta_W J_3^\mu + g' \cos \theta_W \frac{J_2^\mu}{2} \right) A_\mu \\ &\quad - \left(g \cos \theta_W J_3^\mu - g' \sin \theta_W \frac{J_2^\mu}{2} \right) Z_\mu^0 \\ &\equiv eJ_{EM}^\mu A_\mu - g_Z J_{NC}^\mu Z_\mu^0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde definimos la corriente electromagnética, J_{EM}^μ y las corrientes neutras J_{NC}^μ . Para poder obtener de esta teoría *electrodébil* la QED ya explicada, hay que imponer necesariamente relaciones entre los parámetros g, g' , el ángulo de Weinberg θ_W y e, τ_3, Q . Estas condiciones son,

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e; \quad Q = \tau_3/2 + \frac{1}{2}Y. \quad (2.25)$$

Una vez obtenidas estas relaciones, podemos establecer,

$$\frac{g'}{g} = \tan \theta_W \quad (2.26)$$

Con esta relación entre los acoplamientos g y g' de $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$ respectivamente, con el acoplamiento electromagnético e , hemos unificado la interacción electromagnética, mediada por el fotón A_μ , y la interacción débil, mediada por los bosones W_μ^\pm y con Z_μ^0 , en la llamada interacción *electrodébil*.

Todas estas partículas se han descubierto experimentalmente, y hemos determinado sus masas. Sin embargo, en nuestro modelo no son partículas masivas. A continuación, explicaremos que pasaría si rompemos la simetría a través del mecanismo de Higgs y las consecuencias que esto conlleva.

2.2.1. Rotura de simetría

En esta sección abordaremos algunos aspectos del Mecanismo de Higgs, con el objetivo de explicar como las partículas del modelo *electrodébil* adquieren masa [3].

En el SM, la simetría se rompe tal que $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$. Para esto tenemos que introducir un doblete de campos escalares complejos tal que,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix},$$

Vemos que es un doblete con 4 grados de libertad el cual necesitaremos que tenga isospin $I=1/2$ con hipercarga $Y=+1$ por razones que veremos a continuación.

Además, añadiremos un potencial al Lagrangiano de la forma,

$$V(\phi) = \mu^2(\phi^\dagger\phi) + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2,$$

con $\lambda > 0$ para asegurar que existe un estado de mínima energía, el vacío, y $\mu^2 < 0$, que correspondería con un mínimo no trivial. Utilizando esto, nuestro nuevo Lagrangiano será,

$$\mathcal{L}_{escalar} = (D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) - V(\phi), \quad (2.27)$$

con la derivada covariante definida en (2.18).

Debido a la invariancia de fase del Lagrangiano, existirían un número infinito de estados de mínima energía. Por tanto, podemos escoger uno de ellos como el estado fundamental o vacío físico,

$$Vacío = \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix},$$

Notése que solo los campos escalares neutros pueden adquirir un valor esperado en el vacío, puesto que la carga es una cantidad conservada. A continuación, vamos a ver que esta elección del vacío rompe la simetría de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, pero deja invariante $U(1)_{EM}$, dejando al fotón sin masa, justo lo que vemos en la naturaleza.

Para ver la invariancia tenemos que, si aplicamos la transformación de coordenadas a nuestro estado de vacío, este no debe cambiar. Bajo rotaciones infinitesimales, tendremos

que comprobar que $Z\phi_0=0$, siendo Z el generador de la simetría que queremos comprobar. Haciendo esto, tenemos,

$$\begin{aligned}
SU(2)_L : \tau_1\phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v+h \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rota} \\
\tau_2\phi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v+h \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rota} \\
\tau_3\phi_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rota} \\
U(1)_Y : Y\phi_0 &= Y_{\phi_0} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{rota}
\end{aligned}$$

Confirmamos entonces que los tres bosones \vec{W}_μ y B_μ adquieren masa a través del Mecanismo de Higgs. En el modelo *electrodébil*, vimos que los bosones W_μ^1 y W_μ^2 se mezclan para crear los bosones físicos W_μ^\pm ; y los bosones W_μ^3 y B_μ se mezclan para crear el Z_μ^0 y el fotón. No obstante, como vemos a continuación, el fotón se quedará sin masa. Estudiando la simetría correspondiente al electromagnetismo, $U(1)_{EM}$, podemos predecir este carácter no masivo,

$$U(1)_{EM} : Q\phi_0 = \frac{1}{2}(\tau_3 + Y)\phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \text{no rota}$$

Obviamente esta simetría se conserva ya que el vacío tiene carga nula y entonces es trivial que, al ser el generador el operador Q , este estado no varíe.

Debemos ahora desarrollar la ecuación (2.27), siguiendo (2.18), en función de los bosones físicos que describen las corrientes cargadas y neutras. Haciendo esto, obtendremos las distintas masas, además de los acoplos correspondientes a las interacciones. Aplicando la derivada covariante al estado vacío nos dará tres términos distintos: el que nos dará la masa de los bosones *gauge* ($\sim v^2$), y dos términos de interacciones de dichos bosones con el bosón de Higgs ($\sim vh$ y $\sim h^2$). Estudiaremos entonces el término que nos da la masa de las partículas. Desarrollando las expresiones de $(D_\mu\phi)$ nos sale ³,

$$(D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) = \frac{1}{8}v^2[g^2(W_\mu^1)^2 + g^2(W_\mu^2)^2 + (-gW_\mu^3 + g'Y_{\phi_0}B_\mu)^2], \quad (2.28)$$

Siguiendo (2.20), podemos escribir el término para los bosones W_μ^1, W_μ^2 en función de W_μ^\pm como,

$$g^2(W_\mu^1)^2 + g^2(W_\mu^2)^2 = g^2(W_\mu^+)^2 + g^2(W_\mu^-)^2,$$

En el caso del término que aparece para los bosones W_μ^3, B_μ , su contribución está al cuadrado, por lo que si lo desarrollamos, habrá sumandos proporcionales a la mezcla de ambos bosones, que serán distintos de 0 si y solo si la hipercarga es distinta de 0. Entonces W_μ^3 y B_μ se

³El desarrollo explícito está descrito en el anexo A.3

mezclan; y si es ± 1 , una combinación en específico resultará en una masa nula para el fotón, tal que obtenemos ⁴,

$$(-gW_\mu^3 + g'Y_{\phi_0}B_\mu)^2 = (g^2 + g'^2)(Z_\mu^0)^2 + 0 \cdot (A_\mu)^2,$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación (2.28), tendremos:

$$(D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) = \frac{1}{8}v^2[g^2(W_\mu^+)^2 + g^2(W_\mu^-)^2 + (g^2 + g'^2)(Z_\mu^0)^2 + 0 \cdot (A_\mu)^2], \quad (2.29)$$

Claramente, hemos obtenido que para los bosones *gauge* físicos W_μ^\pm y Z_μ^0 tenemos términos de masas distintos de 0 y para el fotón A_μ , como sabíamos de QED, tenemos masa nula. Por lo tanto, para las masas de los bosones *gauge* físicos tendremos,

$$\begin{aligned} M_{W^\pm} &= \frac{1}{2}vg \\ M_{Z^0} &= \frac{1}{2}v\sqrt{(g^2 + g'^2)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Vemos que estas masas dependen de las constantes de acoplo g y g' , las cuales siguen la relación dada en (2.25). Además, el modelo predice que $M_W < M_{Z^0}$. Si conocemos la carga eléctrica e y sabemos que tanto el coseno como el seno están definidos entre 0 y 1, podríamos obtener una estimación para estas constantes de acoplo y, por tanto, para las masas de los bosones de *gauge*. Además, estas masas también dependen del valor esperado en el vacío v , y sabemos que en el SM el valor esperado en el vacío v está relacionado con la constante de Fermi, la cual se calculó estudiando la desintegración del muón. De esta forma, en base a mediciones experimentales podríamos analizar diversos intervalos posibles para predecir las masas de estas partículas. Este tipo de análisis se hacen en el contexto del SM, podríamos llamarlos *test cruzados* del modelo. Actualmente, las masas del W^\pm y el Z^0 se conocen con una gran precisión experimental y sus valores nos permiten hacer una predicción para el ángulo de mezcla θ_W , valor que está en completo acuerdo con el que se obtiene a partir de la medida de la constante de Fermi; que a su vez se obtiene de la medida de la vida media del muón. Esto constituye una demostración de la validez de la teoría *electrodébil* en el SM.

2.3. QCD

Hemos explicado dos de las tres interacciones fundamentales descritas en el SM. En esta sección hablaremos brevemente sobre la tercera de estas, la fuerza nuclear fuerte, presentando un breve resumen de la teoría que explica esta; la denominada Cromodinámica Cuántica (QCD - del inglés *Quantum Chromodynamics*) [4].

Para describir esta interacción, tomamos como base las ideas introducidas para la QED, generalizándolas a una teoría en la que los supuestos electrones llevan una carga no abeliana,

⁴El desarrollo explícito está descrito en el anexo A.3.

es decir, se transforman bajo una representación no trivial de un grupo no abeliano que asumiremos es del tipo $SU(N)$, y nos referiremos a la carga no abeliana como *color*. Ahora, en vez de utilizar una simetría $U(1)$, la QCD utilizaría una nueva simetría, $SU(3)$, y tendríamos un nuevo campo *gauge* bosónico, G_μ . Este nuevo campo lo representaremos como una matriz hermítica $(G_\mu)_j^i$ al tener un nuevo grado de libertad denominado *color*. Con una simetría $SU(N)$, tendríamos que la dimensión es $N^2 - 1$, por lo tanto habrá 8 bosones *gauge* contenidos en esta matriz. Estos son conocidos como *gluones*. Este campo G_μ se podrá escribir en función de los generadores de nuestra simetría, las matrices de *Gell-Mann* en nuestro caso.

Podemos definir también un tensor para el nuevo campo (de forma similar a (2.3) para el campo del fotón) de la siguiente manera:

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu - ig_s [G_\mu, G_\nu]. \quad (2.31)$$

Sin embargo, notéase que tenemos un nuevo término el cual está gobernado por la constante de acoplo de la interacción fuerte g_s . Esta constante la utilizaremos más adelante, en concreto en el capítulo 3, junto a las constantes de acoplo de la fuerza débil y electromagnética.

Estos gluones son las partículas mediadoras de las interacciones fuertes entre quarks y gluones. Los quarks son partículas de espín 1/2 y con carga fraccionaria, que siguen la estadística de Fermi-Dirac, y tienen un número cuántico adicional denominado *color*, son tripletes de color; de tal manera que cada quark tiene tres posibles valores diferentes de este nuevo número cuántico. Poco después se descubrió que los gluones también eran portadores de este número cuántico como hemos dicho anteriormente al introducir G_μ . Los gluones son los campos *gauge* de *color*.

Para mantener la invariancia *gauge*, necesitamos entonces introducir estos 8 campos de *gauge*, los campos de los gluones, y la derivada covariante definida como:

$$\mathfrak{D}_\mu q^a = \partial_\mu q^a - ig_s (G_\mu)_b^a q^b, \quad (2.32)$$

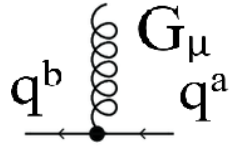
donde denotamos por q al campo de los quarks y el índice ‘a’ caracteriza el número cuántico de *color*, y tenemos la constante de acoplo g_s multiplicando al término de interacción.

Por último, utilizando (2.31) y (2.32), podemos escribir el Lagrangiano para QCD:

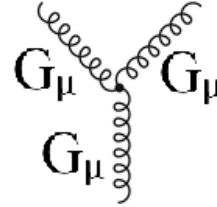
$$\mathfrak{L}_{QCD} = \bar{q}^a (i\gamma^\mu (\mathfrak{D}_\mu)_{ab}) q^b - m \delta_{ab} \bar{q}^a q^b - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \quad (2.33)$$

Al sustituir la derivada covariante en el primer término de este Lagrangiano observamos que aparece un término que correspondería a la emisión de un gluón por un quark (proveniente del segundo término de (2.32)). Además, desde el último término en (2.33) también tendríamos las posibilidades de que un gluón emita un gluón y de que dos gluones emitan dos gluones. Esta es una diferencia fundamental con respecto a QED, que es clave para entender los comportamientos diferentes en estas dos teorías. Los diagramas de Feynman que

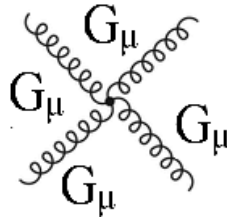
representan la interacción de quarks y gluones se muestran en la figura (2.3). Los gluones, mediadores de la interacción en QCD, al contrario de lo que sucede con los fotones, llevan color (la carga de la interacción fuerte) y pueden interaccionar con ellos mismos. Los quarks y los gluones son los únicos campos fundamentales del SM con interacciones fuertes (hadrones).



(a) Interacción entre dos quarks y un gluón.



(b) Interacción entre tres gluones



(c) Interacción entre cuatro gluones

Figura 2.3: Diagramas de Feynman en QCD.

Se ha demostrado que la interacción entre quarks y gluones desaparece a distancias pequeñas, lo cual permite explicar por qué los quarks se comportan como casi libres dentro del protón. Este fenómeno se denomina libertad asintótica. Por otra parte, quarks y gluones no son estados libres y se encuentran confinados en el interior de los hadrones, dando lugar a lo que se conoce como el fenómeno de confinamiento.

Capítulo 3

Grupo de renormalización.

Ya hemos hablado sobre las distintas fuerzas fundamentales presentes en el SM, donde las interacciones están caracterizadas por los distintos acoplos. Si queremos estudiar los distintos procesos físicos de dispersión de partículas, tendríamos que considerar todos los diagramas de Feynman posibles y, en general, nos aparecerían contribuciones con distintos vértices de interacción y a diferentes ordenes en la constante de acoplo que los caracteriza. Estaríamos, por tanto, realizando estos cálculos de dispersión a diferentes órdenes en teoría de perturbaciones. En estos cálculos perturbativos nos aparecen integrales divergentes como es el caso del cálculo de diagramas con lazos. Para tratar este problema se debe introducir una regularización, un cierto límite con dimensiones de energía y que sea compatible con la simetría *gauge* y la invariancia Lorentz. Después de esto, el siguiente paso es la renormalización. En una teoría renormalizable, la dependencia que aparece con dicho límite puede reabsorberse en una redefinición de las masas de las partículas, los acoplamientos y la normalización de la función de onda, tal que, es en este proceso donde se absorben las divergencias [5]. En este trabajo no trataremos el detalle de estos aspectos, hablaremos brevemente de estos, explicando cómo algunos de estos parámetros redefinidos varían con la escala de energía.

Este límite con dimensiones de energía que hemos mencionado se denominará *escala de renormalización* y la denominaremos μ . El valor de esta escala de renormalización es arbitrario, pero la física no puede depender de su elección. Por tanto, los parámetros de la teoría renormalizada deben depender de esta escala, pero la dependencia se tiene que cancelar en observables físicos. Esta dependencia viene determinada por las denominadas *ecuaciones del grupo de renormalización* (RGE - del inglés *Renormalization Group Equations*), que nos muestra cómo cambian los parámetros renormalizados al variar la escala de renormalización tal que la física permanezca invariante.

Asumamos que tenemos entonces una cantidad adimensional R que depende de dicha escala. Supondremos una escala de energía Q mucho mayor que la masa de cualquier partícula de nuestro modelo ($Q \gg m$). Además, R dependerá de la constante de acoplo de la interacción que estamos estudiando; α . Así pues, las RGE nos dicen que R variará con la *escala de renormalización* μ de la forma:

$$\left[\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \mu^2 \frac{\partial \alpha}{\partial \mu^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] R \left(\frac{Q}{\mu}, \alpha \right) = 0. \quad (3.1)$$

A continuación, definimos nuevas variables de la forma $t = \ln \frac{Q}{\mu}$ y $\beta(\alpha) = \mu^2 \frac{\partial \alpha(\mu)}{\partial \mu^2}$, que se relacionan tal que:

$$t = - \int_{\alpha(\mu)}^{\alpha(Q)} \frac{dx}{\beta(x)}, \quad (3.2)$$

donde la nueva función $\beta(x)$ se puede obtener a cualquier orden en teoría en perturbaciones. Cuantos más términos consideremos, más precisión tendremos en nuestros resultados, no obstante, los cálculos serán más complicados de realizar.

Suponiendo una expansión de la función $\beta(x)$ de la siguiente forma:

$$\beta(x) = -bx^2(1 + b'x + O(x^2)),$$

y tomando solo hasta el primer orden en la expansión obtenemos, utilizando la ecuación (3.2), la siguiente expresión:

$$\alpha(Q) = \frac{\alpha(\mu)}{1 + b \alpha(\mu) \ln(Q/\mu)}. \quad (3.3)$$

Finalmente, tenemos la dependencia de los acoplos con la energía Q , dado por $\alpha(Q)$.

3.1. Constantes de acoplo y unificación.

Nuestro objetivo es encontrar una escala GUT (del inglés *Grand Unification Theory*) en la que las tres constantes que caracterizan las interacciones incluídas en el SM unifiquen o no sea posible hacerlo. Para ello, tendremos que encontrar la energía M_{GUT} en la que las tres constantes se igualen.

Reescribiremos la expresión (3.3) para incluir las tres constantes de acoplo del SM y obtener como evolucionan dichas constantes con la energía. Tenemos que:

$$\frac{1}{\alpha_j(Q)} = \frac{1}{\alpha_j(\mu)} + \frac{b_j}{2\pi} \ln \left(\frac{Q}{\mu} \right) \quad (3.4)$$

Las constantes b_j también reciben contribuciones a diferentes ordenes en teoría de perturbaciones y dependen del modelo en el que se trabaja. En nuestro caso, en el SM tendremos las siguientes expresiones:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 22/3 \\ 11 \end{pmatrix} - N_f \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} - N_H \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

donde N_f es el número de sabores de los quarks, en nuestro caso 3, y N_H el número de dobletes de Higgs, que en el SM es igual a 1. Las constantes b_1, b_2, b_3 corresponden a los grupos *gauge* $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.

La escala μ es arbitraria y queda fijada por el experimento. En el caso de QED se tiene el famoso valor $\alpha = \frac{1}{137}$ cuando $Q^2 = 2m_e^2$, basado en una comparación directa con la sección transversal de dispersión de Thomson. En el caso de QCD se utilizan diversos

observables experimentales para determinar la constante de acoplo fuerte. Se ha convertido en una práctica estándar dar el valor de esta constante a la escala del bosón Z^0 . En nuestros cálculos, asumimos la escala μ a dicha escala de la masa del bosón Z^0 . Por lo que, sabiendo que $\alpha_{EM}^{-1}(M_Z)=127,9\pm0,9$ y que $\sin^2\theta_W(M_Z) = 0,2314 \pm 0,003$, valores obtenidos experimentalmente [6], podemos obtener las constantes α_i ($i = 1, 2, 3$). De esta forma, obtenemos que:

$$\begin{aligned}\alpha_1^{-1}(Q) &= 61,927 - 0,650 \ln Q, \\ \alpha_2^{-1}(Q) &= 27,321 + 0,504 \ln Q, \\ \alpha_3^{-1}(Q) &= 3,447 + 1,114 \ln Q.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Siguiendo estos resultados, presentamos en la figura (3.1) la evolución de las constantes de acoplo con la escala de energía Q , donde hemos puesto el eje x en escala logarítmica para una mejor visualización. Claramente, estos tres acoplos no unifican o, equivalentemente, en el SM no están unificadas las tres interacciones, sino solo dos de ellas que corresponden a la interacción electromagnética y la débil, que hemos visto están unificadas en la teoría *electrodébil*.

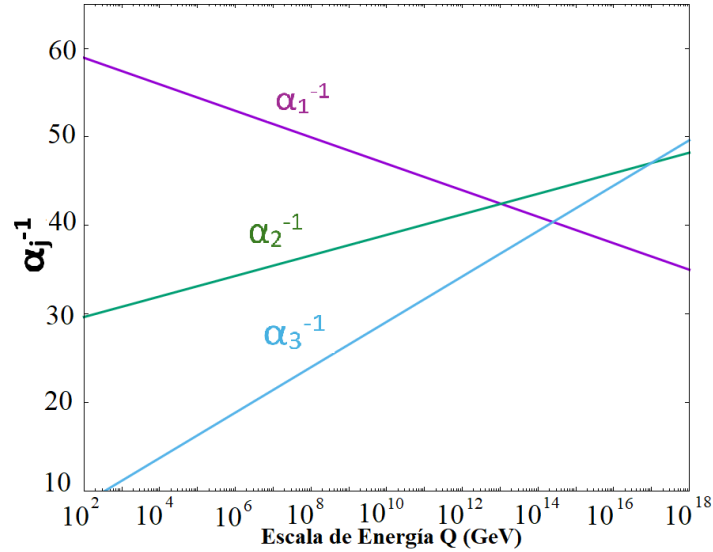


Figura 3.1: Evolución de las constantes de acoplo con la escala en el SM.

El hecho de no encontrar una teoría GUT en el marco del SM es una de las razones teóricas por la que los físicos piensan que el SM está incompleto, pero no es la única. En el siguiente capítulo hablaremos de algunos problemas que aparecen en el SM y por qué debemos buscar física más allá del SM creando nuevas teorías.

Capítulo 4

Modelos de Gran Unificación.

El SM es un perfecto ejemplo de teoría científica la cual unifica y construye distintas ideas en un marco teórico sobre la física de partículas. Ha sido probado en numerosos experimentos con una gran precisión. Sin embargo, aún quedan muchas preguntas abiertas y debe ser perfeccionado arreglando distintos problemas y añadiendo nuevas teorías.

En este capítulo hablaremos brevemente de teorías, denominadas GUT, las cuales han podido unificar la física de partículas. Empezamos esta sección explicando algunas cuestiones abiertas en este modelo, y el por qué debemos crear nuevas teorías basadas o partiendo del SM. Algunos de estos problemas son:

- No explica la existencia de materia oscura, la cual es la razón de la inconsistencia al intentar explicar la rotación de galaxias utilizando la física de la materia común.
- Explicación del carácter másico y oscilatorio de los neutrinos como solución del problema de los neutrinos solares.
- Explicación de la existencia de tres generaciones de quarks y leptones.
- Ausencia de una descripción de la gravedad como la describe la relatividad general.
- Problema de las jerarquías, un problema teórico en el cual fenómenos con una escala de energías característica muy alta son relevantes en fenómenos de escalas muchos órdenes de magnitud menor.

El último de los problemas mencionados trata varios temas de importancia que no explica el SM. Además, muchas de las teorías GUT se basan en solucionar principalmente este obstáculo. Hablaremos a continuación de este problema.

4.1. Problema de las Jerarquías

Este problema se puede tratar en dos partes. La primera es relativa a la gran discrepancia entre escalas de energía de la fuerza débil mediada por los bosones gauge ya explicados W^\pm y Z^0 con masas aproximadamente de 10^2 GeV, y la escala de Planck, $m_{Pl} \sim 10^{19}$ GeV, donde la gravedad empieza a tener relevancia en las interacciones de partículas. Hay 17 órdenes de magnitud entre ambas escalas, zona llamada *Universo Desconocido*. Además, ¿cómo es

posible que tengamos una escala de Planck que afecta la escala *electrodébil* y no sabemos como funciona? Una vez descubierto el bosón de Higgs y conocidas todas las correcciones a su masa, la escala de Planck también tiene que afectar a estas. Esto último sobre el bosón de Higgs constituye la segunda parte del problema jerárquico.

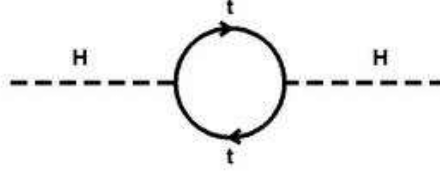


Figura 4.1: Diagrama de Feynman sobre las correcciones cuánticas del bosón de Higgs

Las correcciones cuánticas dominantes a la masa del Higgs provienen de diagramas a un lazo con el quark top, como se muestra en la figura (4.1) y están dadas por la siguiente expresión:

$$\delta M_H^2 = -\frac{3m_{top}^2}{8v^2\pi^2}\Delta^2, \quad (4.1)$$

donde m_{top} es la masa del quark *top*, v la energía del vacío y Δ la escala de renormalización.

Vemos en la expresión (4.1) la dependencia con el cuadrado de la masa de este quark, $m_{top}=175$ GeV, dividida por el cuadrado de la energía del vacío, por lo que el factor relevante es la contribución con el cuadrado de la escala Δ la cual debe ser muy elevada, del orden de la masa de Planck. Por tanto, nos quedaría una corrección a la masa del Higgs del orden de $\sim 10^{34}$ GeV. Obviamente es una corrección enormemente grande la cual nos da muchos problemas.

Para una teoría conteniendo gravedad, debido a correcciones cuadráticas, sería entonces de esperar que la masa del Higgs fuese del orden de la masa de Planck, lo cual sabemos no es posible si hablamos del bosón de Higgs del SM con una masa del orden de los GeV.

Una de las posibles soluciones a este problema envuelve la creación de nuevas partículas, no contenidas en el SM. Si una partícula del SM contribuye a la masa del Higgs en la cantidad δM_H^2 , podemos crear una nueva partícula tal que contribuya $-\delta M_H^2$. Por lo tanto, necesitamos una nueva simetría del Lagrangiano fundamental para obtener esta nueva corrección tal que obtengamos una masa del Higgs que se aproxime a la encontrada experimentalmente, 125 GeV. Un ejemplo de estas nuevas teorías es la denominada Supersimetría.

4.2. Supersimetría

Las teorías Supersimétricas (SUSY) [7] fueron primero desarrolladas en los años 70 por los físicos Julius Wess y Bruno Zumino como solución a varios problemas que teníamos en el SM y como extensión de dicha teoría para más altas energías. En el problema de las jerarquías,

como explicamos anteriormente, la masa del bosón de Higgs se puede estimar en el orden de $\sim 10^{34}$ GeV debido a las correcciones cuánticas, y para mantener el valor experimental de 125 GeV se requiere un ajuste antinatural muy fino. SUSY propone un mecanismo de protección para esta masa utilizando un argumento basado en una relación de simetría entre fermiones y bosones, tal que aparecen nuevos diagramas de Feynman, con nuevas partículas que contribuyen a las correcciones a la masa del Higgs y cancelan estas contribuciones del SM. En concreto, por cada diagrama como el que aparece en la figura (4.1), tenemos un diagrama similar donde en lugar del quark top nos aparece su superpareja o compañera supersimétrica (como veremos a continuación) tal que la contribución es la misma pero con signo contrario.

Esta transformación supersimétrica que hemos mencionado cambia los estados bósonicos a estados fermiónicos y viceversa. Utilizaron un operador que genera estas transformaciones tal que:

$$Q|Boson\rangle = |Fermion\rangle, \quad Q|Fermion\rangle = |Boson\rangle \quad (4.2)$$

Estos operadores tendrán sus propias relaciones de conmutación, además de estar relacionadas con las transformaciones de Lorentz.

Estas transformaciones nos indican que cada partícula del SM tendrá una *superpareja*. Si nuestra partícula es un fermión, su superpareja será un bosón y viceversa. Estas dos partículas formarán por tanto una representación irreducible del álgebra supersimétrica, llamado *supermultiplete* en la cual ambas partículas tienen masas, carga eléctrica, isospín débil y color iguales. La norma que tenemos para crear supermultipletes es que los grados de libertad fermiónicos tienen que ser igual a los grados de libertad bosónicos:

$$n_F = n_B \quad (4.3)$$

Con esta norma, tenemos varias posibilidades para crear supermultipletes: El denominado supermultiplete *quiral* con un fermión de Weyl y un bosón escalar complejo; el llamado supermultiplete *gauge* que contiene un bosón gauge y su superpareja fermiónica, llamada *gauginos*; e incluso podríamos crear un supermultiplete con partículas hipotéticas como puede ser el correspondiente a la fuerza de la gravedad, el *gravitón* con su superpareja el *gravitino*.

Si vamos a las partículas del SM, quarks y leptones tienen su superpareja, las cuales denotaremos con un prefijo *s* y llamaremos *squarks* y *sleptones* (abreviación de quarks escalares y leptones escalares por su carácter bosónico de spin-0, además los símbolos de estas partículas son iguales a su correspondiente fermión pero con tilde, por ejemplo, \tilde{e}). En la tabla (4.1) podemos ver de modo resumido los supermultipletes quirales correspondientes a los quarks y a los leptones, y en las tres últimas filas la parte correspondiente a los bosones de *gauge* que tenemos en el SM, cuyas superparejas las llamamos en general *gauginos*.

Un apunte sobre los winos y el bino (superparejas de los bosones W_μ y B_μ) es que cuando se mezclan, como lo hacen sus parejas en el modelo *electrodébil* para formar los bosones Z_μ^0 y

Nombres		spin 0	spin 1/2
squarks, quarks (x3 familias)	Q	$(\tilde{u}_L \tilde{d}_L)$	$(u_L d_L)$
	\bar{u}	\tilde{u}_R^*	u_R^\dagger
	\bar{d}	\tilde{d}_R^*	d_R^\dagger
sleptones, leptones (x3 familias)	L	$(\tilde{\nu} \tilde{e}_L)$	(νe_L)
	\bar{e}	\tilde{e}_R^*	e_R^\dagger
Nombres		spin 1/2	spin 1
gluino, gluon		\tilde{G}	G
winos, bosones W_μ		$\tilde{W}_\mu^\pm \tilde{W}_\mu^3$	$W_\mu^\pm b_\mu^3$
bino, boson B_μ		\tilde{B}_μ	B_μ

Tabla 4.1: Supermultipletes quirales y gauge del *Minimal Supersymmetric Standard Model*

γ , estos también se mezclan y forman el llamado *zino* (\tilde{Z}_μ^0) y el *photino* ($\tilde{\gamma}$). También habría, aparte del bosón de Higgs conocido en el SM, su superpareja, el *higgsino*. Además, *gauginos* y *higgsino* se mezclan para formar las partículas supersimétricas conocidas como *charginos* y *neutralinos*, este último uno de los posibles candidatos para la materia oscura del universo.

Lo más importante y fascinante de esta teoría es que ninguna de las superparejas de las correspondientes partículas del SM ha sido descubierta. Si no se rompiese esta supersimetría, entonces tendría que haber *selectrones* \tilde{e}_L y \tilde{e}_R con masas exactamente iguales a $m_e=0.511$ MeV. Una similar afirmación se aplica a cada *sleptón* y *squark*, e incluso habría un gluino y *photino* sin masa. Estas partículas habrían sido extremadamente fáciles de detectar. Por tanto, *supersimetría* es una simetría que se rompe en el vacío elegido por la Naturaleza. SUSY está rota a baja energía y las superpartículas tienen mucha más masa en reposo que sus correspondientes parejas en el SM.

4.2.1. Unificación del MSSM

Sabiendo esto, se añade un nuevo término ‘suave’ al Lagrangiano tal que rompa la supersimetría tal y como pasa en la naturaleza. Estos nuevos términos son conocidos como *Soft-SUSY-breaking*. La extensión supersimétrica minimal del SM que incluye SUSY con estos nuevos términos se denomina *Minimal Supersymmetric Standard Model* (MSSM) en el que algunos supermultipletes se encuentran en la tabla (4.1). Este término ‘suave’ lleva asociado una escala de energía m_{soft} tal que todas las diferencias de masas entre las partículas del *Modelo Estándar* y sus superparejas están determinados por esta escala.

El Lagrangiano completo del MSSM contiene a su vez el SM. Las interacciones de las fuerzas electromagnética, débil y fuerte asociadas a las simetrías $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ obviamente no deben desaparecer. Sin embargo, al crear la nueva teoría y añadir la ruptura de simetría ‘suave’, las interacciones se redefinen. No obstante, a pesar de estas redefiniciones, siguen existiendo las divergencias al igual que ocurría en el SM. Debido a esto, es necesario

incluir de nuevo las ecuaciones del grupo de renormalización pero adaptadas a MSSM. Las expresiones son las mismas a las discutidas en el capítulo 3, pero cambiando las constantes b_j definidas ahora como:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} - N_f \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - N_H \begin{pmatrix} 3/10 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

donde N_f es, al igual que el *Modelo Estándar*, igual a 3 y N_H sería igual a 2 debido al nuevo doblete de higgsinos.

Los vértices de interacción variarán entonces con la escala de energía siguiendo la ecuación (3.4), lo que nos queda por lo tanto:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{-1}(Q) &= 63,723 - 1,050 \ln Q, \\ \alpha_2^{-1}(Q) &= 30,314 - 0,159 \ln Q, \\ \alpha_3^{-1}(Q) &= 6,320 + 0,477 \ln Q. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Si dibujamos la dependencia con la escala de nuestras tres constantes de acoplo α_j al igual que como hicimos en la figura (3.1), nos quedará en este caso:

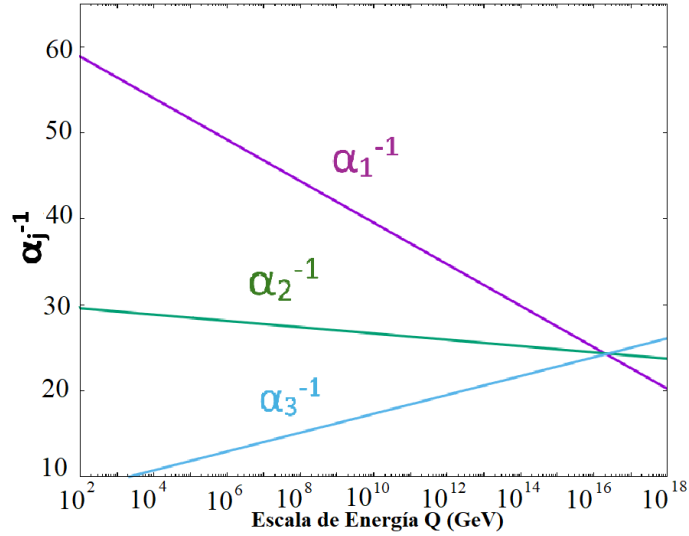


Figura 4.2: Evolución con la escala de las constantes de acoplo del MSSM

A diferencia de los resultados que obtuvimos en el caso del SM, hemos encontrado que estas tres constantes si unifican en un punto, a una energía llamada escala de gran unificación (GUT) que podemos comprobar que está en torno a 10^{16} GeV. Concluimos entonces que SUSY resuelve el problema de la unificación. Este resultado, conjuntamente al hecho de que resuelve el problema de las jerarquías y proporciona un candidato a materia oscura, han sido razones para considerar a SUSY a lo largo de la historia de la física de partículas como uno de los mejores candidatos para modelos de física más allá del SM.

4.3. Gravedad

Hemos hablado durante todo el trabajo sobre tres de las cuatro fuerzas fundamentales y cómo el SM intenta explicarlas y unificarlas utilizando el marco teórico de la *Teoría Cuántica de Campos*. No obstante, no he querido terminar esta memoria sin hablar de la última fuerza fundamental, la gravedad, la cual está muy bien explicada a través de la Relatividad General (GR - del inglés *General Relativity*) de Albert Einstein. La coexistencia de estas dos teorías es un capítulo abierto en la física ya que estas dos teorías no son compatibles. La creación de una nueva gran teoría de unificación que incluya las cuatro interacciones, una *teoría del todo*, es necesaria, de modo que podamos explicar así toda la naturaleza de la materia ordinaria desde un nivel fundamental.

En esta sección solamente voy a tratar de dar una motivación, sin entrar en detalles, para el estudio de estas posibles teorías que envuelvan la fuerza de la gravedad desde un marco cuántico, además de la unificación con las tres fuerzas ya explicadas [8, 9]. Sin embargo, ninguna de las teorías que intentan hacer esto, trabaja con teorías cuánticas de campos, por lo que no tienen relación con nada de lo que hemos estado explicando en esta memoria. No obstante, como he dicho, me parece interesante hablar algo sobre esta cuarta fuerza. Primero, voy a intentar tratar de dar argumentos a favor de la creación de una teoría conjunta:

- **La geometría es determinada por la materia, la cual está cuantizada.**

La ecuación de Einstein $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ nos dice que la geometría, descrita por el tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$, es determinada por el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$. Por otro lado, la teoría cuántica de campos nos dice que la materia puede ser cuantizada. Por lo que muchos investigadores consideran que convertir todos los tensores anteriores en operadores en el espacio de Hilbert podría funcionar.

- **Singularidades en relatividad general.**

La existencia de singularidades en teorías físicas normalmente señalan una rotura en la descripción física y la necesidad de ir más allá de dicho marco teórico.

- **Problemas del Modelo Estándar.**

Los problemas ya comentados del SM pueden estar relacionados con la gravedad, como por el ejemplo la existencia de materia oscura o el problema de las jerarquías con la escala de Planck. Al igual que existe una escala de energía de Planck, también existe una longitud de Planck por debajo de la cual, una medida previsiblemente no puede ser tratada adecuadamente en los modelos de física actuales, por lo que las simetrías del SM, incluida la simetría de Lorentz, se podrían romper.

Estos y más argumentos pueden ser considerados al crear nuevas teorías. Una de las teorías que intentan explicar la gravedad desde un marco cuántico es la denominada teoría *Extra*

Dimensions, la cual se basa en el aumento de dimensiones de la métrica, $D > 5$. Físicos como Kaluza o Klein intentaron desarrollar teorías con este método. Las teorías más famosas son la *Teoría de Cuerdas* y *M-Theory*.

Capítulo 5

Conclusiones.

A lo largo de este trabajo hemos desarrollado el *Modelo Estándar* explicando como este utiliza la simetría a la hora de construir el Lagrangiano, exigiendo que este sea invariante bajo estas simetrías. Por ende, las ecuaciones de movimiento de los distintos sectores de partículas fundamentales en el modelo permanecen también invariantes. Además, hemos dado gran énfasis a como el *Modelo Estándar* explica tres de las cuatro interacciones fundamentales; la interacción electromagnética, la nuclear débil y la nuclear fuerte, en un marco de *Teoría Cuántica de Campos*, definiendo sus correspondientes acoplos. Discutimos además el mecanismo de ruptura de simetría en este modelo a través del mecanismo de Higgs y prestamos especial interés a la unificación *electrodébil*, presentando la relación entre las constantes de acoplo características de las interacciones electromagnética y débil.

Posteriormente, presentamos las ecuaciones del grupo de renormalización con el fin de mostrar la dependencia de los acoplos de cada una de las interacciones con la escala de energía. Hemos comprobado entonces que el *Modelo Estándar* unifica la fuerza electromagnética y la nuclear débil en la teoría *electrodébil* antes mencionada. No obstante, una vez añadimos la nuclear fuerte, comprobamos que no existe una escala a la cual unifican las tres interacciones. Concluimos, por tanto, que el *Modelo Estándar* explica exitosamente, con comprobaciones experimentales, las tres interacciones pero sin poder unificarlas.

Finalmente, explicamos algunos problemas de este modelo que llevan a la hipótesis de considerar física más allá de este modelo, e introducimos las *Teorías de Gran Unificación*. Como un ejemplo explicamos brevemente las teorías supersimétricas y su versión minimal (MSSM), discutimos cómo esta soluciona el problema de las jerarquías y comprobamos, estudiando los acoplos correspondientes, que dicha teoría unifica las tres fuerzas fundamentales a una escala de energía aproximada de 10^{16} GeV. Por último, presento una breve motivación sobre cómo podríamos incorporar la gravedad, con el fin de crear una teoría unificada de toda la física fundamental, una *teoría del todo*.

El *Modelo Estándar* es, sin lugar a dudas, una teoría muy exitosa y comprobada experimentalmente con gran precisión. No obstante, existen aún preguntas y problemas sin resolver, que motivan el ir más allá a la hora de crear nuevas teorías capaces de responder dichas preguntas y explicar nuestra naturaleza.

Bibliografía

- [1] S. Peñaranda. Notas de Electrodinámica Cuántica. 2008.
- [2] Henrik Jansson. Unification in Particle Physics. *Lectures*, pages 1–21, 2016.
- [3] W. Hulsbergen M. Merk, I. Van Vulpen. Particle Physics 1. Lecture notes for the first year master course on the electroweak part of the Standard Model. *Nikhef*, pages 107–127, 129–132, 2017.
- [4] D. Tong. Lectures on the Standard Model. *Lectures*, page Chapter 3, 2019.
- [5] S. Peñaranda. Notas de Ecuaciones del Grupo de Renormalización. 2012.
- [6] P. A. Zyla et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2020(8):083C01, 2020.
- [7] Stephen P. Martin. A Supersymmetry Primer. *Lectures*, pages 3–13, 2016.
- [8] N. Bodendorfer. An elementary introduction to loop quantum gravity. *Lectures*, pages 2–3, 2016.
- [9] T. Thiemann. Lectures on Loop Quantum Gravity. *Lectures*, pages 6–7, 2002.

Anexos A

Anexos correspondientes a los capítulos 1 y 2

A.1. Invarianza $U(1)$ del Lagrangiano

Bajo la simetría $U(1)$, las funciones de onda correspondientes a nuestras partículas se transforman de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = e^{i\theta(x)}\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = e^{-i\theta(x)}\bar{\psi},\end{aligned}\tag{A.1}$$

siendo ψ la correspondiente función de onda, $\bar{\psi}$ la función de onda conjugada y θ una función que puede depender de las coordenadas (simetría local) o no (simetría global). Esta función θ está conformada por una constante α y el generador del grupo de simetría. En el caso concreto del electromagnetismo, la constante α se corresponde a la carga del electrón, la cual caracterizamos en la memoria como $-q\lambda$.

Teniendo el lagrangiano de un fermión libre,

$$\mathcal{L}_{1/2} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi,\tag{A.2}$$

podemos comprobar de la siguiente manera que, bajo una transformación de simetría $U(1)$ global, donde $\theta \neq \theta(x)$, tendremos,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{1/2} &= i\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - m\bar{\psi}'\psi' \\ &= i(e^{-i\theta}\bar{\psi})\gamma^\mu\partial_\mu(e^{i\theta}\psi) - m(e^{-i\theta}\bar{\psi})(e^{i\theta}\psi) \\ &= i e^{-i\theta} e^{i\theta} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m e^{-i\theta} e^{i\theta} \bar{\psi} \psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = \mathcal{L}_{1/2},\end{aligned}\tag{A.3}$$

y por tanto, vemos que el lagrangiano es invariante bajo coordenadas globales, ya que se confirma que $\partial_\mu(e^{i\theta}\psi) = e^{i\theta}\partial_\mu\psi$.

En el caso de una simetría local, según (A.1), tendremos,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{1/2} &= i\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - m\bar{\psi}'\psi' \\ &= i(e^{-i\theta(x)}\bar{\psi})\gamma^\mu\partial_\mu(e^{i\theta(x)}\psi) - m(e^{-i\theta(x)}\bar{\psi})(e^{i\theta(x)}\psi) \\ &= i(e^{-i\theta(x)}\bar{\psi})\gamma^\mu(\partial_\mu e^{i\theta(x)})\psi + i(e^{-i\theta(x)}\bar{\psi})\gamma^\mu e^{i\theta(x)}\partial_\mu\psi - m e^{-i\theta(x)} e^{i\theta(x)} \bar{\psi} \psi \\ &= -\partial_\mu\theta(x) e^{i\theta(x)} e^{-i\theta(x)} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = -\partial_\mu\theta(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + \mathcal{L}_{1/2},\end{aligned}\tag{A.4}$$

Vemos que para coordenadas locales, el lagrangiano no es invariante, es más, aparece un nuevo término proporcional a la derivada de la función θ .

A.2. Derivada covariante para U(1)

Hemos introducido la derivada covariante como un método para hacer invariante el lagrangiano. Comprobaremos a continuación si sustituyendo la derivada parcial por dicha derivada covariante en nuestro lagrangiano, obtenemos un lagrangiano invariante. Nuestro lagrangiano tras hacer esta sustitución queda de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathfrak{D}_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu.\end{aligned}\tag{A.5}$$

Para comprobar la invariancia, tendremos que crear otro lagrangiano primado y trabajar las transformadas locales de ψ' a ψ definidas en la ecuación (A.1) y ver que dicho lagrangiano primado sea igual al sin primar. En el anexo A.1 ya hemos comprobado el primer término y sale que no es invariante ya que aparece un nuevo término igual a $-\partial_\mu\theta(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, siendo $\theta=-q\lambda(x)$. Sin embargo, en este nuevo lagrangiano hay dos nuevos términos, el correspondiente al fotón libre el cual es invariante ya que sabemos que la contracción de dos tensores es invariante; y el correspondiente al término de interacción.

Primero, para el campo A_μ tenemos la siguiente transformación,

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu\lambda.\tag{A.6}$$

Utilizando esta transformación y las de los campos fermiónicos (A.1), obtenemos para el último término del lagrangiano que,

$$\begin{aligned}-(q\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi')A'_\mu &= -(q(e^{-i\theta(x)}\bar{\psi})\gamma^\mu(e^{i\theta(x)}\psi))(A_\mu + \partial_\mu\lambda) \\ &= -e^{-i\theta(x)}e^{i\theta(x)}(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(A_\mu + \partial_\mu\lambda) \\ &= -(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\lambda,\end{aligned}\tag{A.7}$$

Vemos que este término no es invariante, sino que aparece una nueva contribución debido a la transformación *gauge*.

Si juntamos todos los 3 términos del lagrangiano, tendremos,

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{L} - \underbrace{\partial_\mu\theta(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}_{\text{Simetria } U(1)} - \underbrace{(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\lambda}_{\text{Simetria gauge}}\tag{A.8}$$

Si utilizamos que $\theta(x)=-q\lambda(x)$ y que la derivada conmuta con las matrices γ^μ , estos dos términos se cancelan y confirmamos que el lagrangiano es invariante, es decir, $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$.

A.3. Desarrollo del Lagrangiano escalar en la rotura de simetría *electrodébil* al aplicar la derivada covariante

Teniendo el lagrangiano escalar para el bosón de Higgs de la forma,

$$\mathcal{L}_{escalar} = (\mathfrak{D}^\mu \phi)^\dagger (\mathfrak{D}_\mu \phi) - V(\phi), \quad (\text{A.9})$$

donde el término $V(\phi)$ dará la masa al Higgs, solamente tendremos que estudiar el término de las derivadas, siendo estas,

$$\mathfrak{D}_\mu \phi = [\partial_\mu + ig \frac{1}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + ig' \frac{1}{2} Y B_\mu] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

donde hemos utilizado la derivada covariante *electrodébil* y siendo ϕ el bosón de Higgs en el vacío dado en el mecanismo de Higgs.

Para el estudio de las masas de los bosones *gauge*, tan solo queremos estudiar los términos proporcionales a v^2 , por lo que la parte correspondiente en la derivada covariante nos queda,

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_\mu \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ig \frac{1}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + ig' \frac{1}{2} Y B_\mu \right] \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{\sqrt{8}} [g(\tau^1 W_\mu^1 + \tau^2 W_\mu^2 + \tau^3 W_\mu^3) + g' Y B_\mu] \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{\sqrt{8}} \left[g \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^1 \\ W_\mu^1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -iW_\mu^2 \\ iW_\mu^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_\mu^3 & 0 \\ 0 & W_\mu^3 \end{pmatrix} + g' \begin{pmatrix} Y_{\phi_0} B_\mu & 0 \\ 0 & Y_{\phi_0} B_\mu \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} gW_\mu^3 + g'Y_{\phi_0}B_\mu & g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ g(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -gW_\mu^3 + g'Y_{\phi_0}B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{iv}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ -gW_\mu^3 + g'Y_{\phi_0}B_\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Si ahora hacemos la traspuesta conjugada de esta expresión y las multiplicamos, tendremos la expresión que buscábamos,

$$(D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) = \frac{1}{8} v^2 [g^2 (W_\mu^1)^2 + g^2 (W_\mu^2)^2 + (-gW_\mu^3 + g'Y_{\phi_0}B_\mu)^2]. \quad (\text{A.12})$$

El término correspondiente a los bosones no físicos W_μ^3 y B_μ es el siguiente,

$$(-gW_\mu^3 + g'Y_{\phi_0}B_\mu)^2 = (W_\mu^3, B_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg'Y_{\phi_0} \\ -gg'Y_{\phi_0} & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

donde hemos visto que podemos reescribir dicho término en función de una matriz la cual, si la hipercarga es igual a 0, los campos bosónicos W_μ^3 y B_μ no se mezclan. A continuación,

sacaremos los autovalores λ_i y autovectores de dicha matriz, lo que nos sale,

$$\begin{aligned}
\overbrace{\lambda}^{\text{autovalor}} = 0 & \rightarrow \overbrace{\frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}}^{\text{autovector}} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g' W_\mu^3 + g B_\mu) = A_\mu \quad \text{Fotón } (\gamma) \\
\overbrace{\lambda}^{\text{autovalor}} = (g^2 + g'^2) & \rightarrow \overbrace{\frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g \\ -g' \end{pmatrix}}^{\text{autovector}} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g W_\mu^3 - g' B_\mu) = Z_\mu^0 \quad \text{Boson } Z(Z^0)
\end{aligned}
\tag{A.14}$$

Por lo que, sustituyendo en la matriz original con su base de bosones no físicos (W_μ^3, B_μ) , los autovalores y autovectores en la base de bosones físicos (γ, Z_μ^0) , llegamos a que el término (A.13) puede ser escrito de la siguiente forma,

$$(-g W_\mu^3 + g' Y_{\phi_0} B_\mu)^2 = (g^2 + g'^2)(Z_\mu^0)^2 + 0 \cdot (A_\mu)^2. \tag{A.15}$$