

# **El espacio donde viven los fractales**



**Marta Ros Corpas**

**Trabajo de fin de grado de Matemáticas  
Universidad de Zaragoza**

**Director del trabajo: Luis Carlos García Lirola  
12 de junio de 2024**



# Resumen

La R.A.E. define fractal como “Objeto geométrico en el que una misma estructura, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas y tamaño”. El concepto de fractal fue introducido por primera vez por el matemático Benoit B. Mandelbrot en 1970. Sus estudios causaron un gran impacto gracias a la capacidad de dichos objetos para modelar y representar estructuras complejas y autosemejantes, siendo utilizados en numerosas aplicaciones innovadoras en diversas disciplinas. En los últimos años, los fractales han cobrado mayor importancia no solo por su aportación en el área de las matemáticas, sino también por su gran relevancia para el estudio de diversos campos de la ciencia, como han explicado National Geographic [6] o BBVA [4], con aplicaciones tan diversas como antenas fractales, la arquitectura patológica de tumores, el estudio de redes neuronales y conexiones, y el tratamiento de datos.

En el presente Trabajo Fin de Grado se pretende proporcionar un marco teórico para estos objetos matemáticos con el fin de comprender mejor cómo se pueden generar, sus propiedades y su comportamiento.

El objetivo del primer capítulo es estudiar y analizar el espacio donde “viven” los fractales. Para presentar el espacio de los subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n$ , o más generalmente de un espacio métrico conocido como el espacio de Hausdorff, introduciremos la distancia de Hausdorff, veremos las propiedades que tiene que satisfacer para ser un espacio métrico y que efectivamente lo es. Además, demostraremos que el espacio de Hausdorff es completo, una de las demostraciones más importantes del trabajo, apoyándonos en el lema de extensión de sucesiones de Cauchy.

Una vez conocido el espacio, veremos cómo crear en él nuestros objetos de estudio. A lo largo del segundo capítulo estudiaremos la generación de fractales como puntos fijos de aplicaciones que cumplen una serie de requisitos. Empezaremos caracterizando las aplicaciones contractivas, estudiando la existencia y unicidad del punto fijo de dichas aplicaciones en espacios métricos completos, con el conocido Teorema del punto fijo de Banach, y presentaremos una serie de lemas necesarios para introducir las funciones que nos interesan, los sistemas iterativos de funciones conocidos como IFS. Estos últimos son un conjunto de funciones cuyo punto fijo, llamado atractor, es el fractal que queremos hallar. A medida que estudiemos las propiedades y características de estas funciones, las ilustraremos con ejemplos, todos ellos realizados aplicando el algoritmo determinista que introduciremos posteriormente junto al probabilístico para finalizar el capítulo. Los códigos utilizados para la realización de los gráficos en Matlab se encuentran incorporados en los anexos.

Pero los fractales tienen otra peculiaridad: su dimensión. Por último, hemos dedicado el tercer capítulo a estudiarla. Para poder introducir la noción de dimensión, necesitábamos unos conceptos previos como el de diámetro de un conjunto y la medida exterior métrica. Así, hemos podido comprobar que la medida  $s$ -dimensional de Hausdorff es una medida exterior métrica y, por tanto, su restricción a los conjuntos de Borel es una medida, que además se comporta muy bien con las aplicaciones Lipschitz. Gracias a ello, hemos podido presentar la dimensión de Hausdorff-Besicovich. Al igual que en el capítulo anterior, hemos presentado varios lemas y propiedades para el cálculo de la dimensión, ilustrándolos con ejemplos. Luego, aplicando el último teorema, hemos calculado la dimensión de varios fractales importantes como el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski y el copo de nieve de Koch. Para finalizar el trabajo, hemos incorporado otra noción de dimensión, la dimensión caja, y hemos analizado varios casos, uno donde coincide con la de Hausdorff-Besicovich y otro donde no.

Mi tarea durante la realización de este trabajo ha consistido en realizar una revisión bibliográfica, reescribir y completar pruebas, comprender resultados y demostraciones, e ir aplicando a ejemplos los teoremas presentados, con el fin de proporcionar un marco teórico para los fractales, comprender sus propiedades y saber aplicar los resultados en ejemplos concretos. A su vez, para la realización de dichos ejemplos, he trabajado en programas de Matlab para poder representarlos gráficamente aplicando los algoritmos presentados en el capítulo 2.

# Abstract

The R.A.E. defines a fractal as “A geometric object in which the same structure, fragmented or apparently irregular, is repeated at different scales and sizes.” The concept of a fractal was first introduced by mathematician Benoît B. Mandelbrot in 1970. His studies had a significant impact due to the ability of these objects to model and represent complex and self-similar structures, leading to numerous innovative applications in various fields. In recent years, fractals have gained increasing importance not only for their contribution to mathematics but also for their significant relevance in the study of various scientific fields, as explained by National Geographic [6] or BBVA [4], with applications as diverse as fractal antennas, the pathological architecture of tumors, the study of neural networks and connections, and data processing.

In this TFG, the aim is to provide a theoretical framework for these mathematical objects to better understand how they can be generated, their properties, and their behavior.

The objective of the first chapter is to study and analyze the space where fractals “live”. To present the space of compact subsets of  $\mathbb{R}^n$ , or more generally a metric space known as the Hausdorff space, we will introduce the Hausdorff distance, examine the properties it must satisfy to be a metric space, and confirm that it indeed is. Additionally, we will demonstrate that the Hausdorff space is complete, one of the most important proofs in the thesis, supported by the extension lemma of Cauchy sequences.

Once we are familiar with the space, we will explore how to create our objects of study within it. Throughout the second chapter, we will study the generation of fractals as fixed points of applications that meet certain requirements. We will start by characterizing contractive applications, studying the existence and uniqueness of the fixed point of such applications in complete metric spaces, with the well-known Banach Fixed-Point Theorem, and introducing a series of lemmas necessary to introduce the functions of interest, the iterative function systems known as IFS. These are a set of functions whose fixed point, called the attractor, is the fractal we seek to find. As we study the properties and characteristics of these functions, we will illustrate them with examples, all performed by applying the deterministic algorithm that we will introduce later along with the probabilistic one to conclude the chapter. The programs used to create the graphics in Matlab are included in the annexes.

Fractals also have another peculiarity: their dimension. Finally, we have dedicated the third chapter to studying this aspect. To introduce the notion of dimension, we needed some preliminary concepts such as the diameter of a set and the metric outer measure. Thus, we have been able to verify that the  $s$ -dimensional Hausdorff measure is a metric outer measure and therefore its restriction to Borel sets is a measure, which also behaves well with Lipschitz applications. Thanks to this, we have been able to present the Hausdorff-Besicovich dimension. As in the previous chapter, we have introduced several lemmas and properties for the calculation of the dimension, illustrating them with examples. Then, applying the final theorem, we have calculated the dimension of several important fractals such as the Cantor set, the Sierpinski triangle, and the Koch snowflake. To conclude the thesis, we have incorporated another notion of dimension, the box dimension, and analyzed several cases, one where it coincides with the Hausdorff-Besicovich dimension and another where it does not.

My task during the realization of this project has consisted of conducting a literature review, rewriting and completing proofs, understanding results and demonstrations, and applying the presented theorems

to examples, in order to provide a theoretical framework for fractals, understand their properties, and know how to apply the results to concrete examples. Additionally, for the creation of these examples, I have worked on Matlab programs to represent them graphically by applying the algorithms presented in Chapter 2.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>V</b>
<b>1. El espacio de los fractales.</b>	<b>1</b>
1.1. El espacio métrico $(\mathcal{H}, h)$ . . . . .	1
1.2. La completitud del espacio Hausdorff. . . . .	4
<b>2. Aplicaciones contractivas y el teorema del punto fijo de Banach</b>	<b>7</b>
2.1. Aplicaciones contractivas. . . . .	7
2.2. Las IFS. . . . .	10
2.3. Algoritmos para dibujar fractales. . . . .	13
2.3.1. Algoritmo determinista . . . . .	13
2.3.2. Algoritmo probabilístico . . . . .	15
<b>3. La medida de Hausdorff y la dimensión de los fractales</b>	<b>17</b>
3.1. La dimensión de los fractales . . . . .	17
3.2. Ejemplos de cálculo de la dimensión . . . . .	23
3.3. Otra noción de dimensión: la dimensión caja ( $\dim_B$ ) . . . . .	24
<b>Bibliografía</b>	<b>27</b>
<b>Anexos</b>	<b>29</b>





# Capítulo 1

## El espacio de los fractales.

La R.A.E. define fractal como “Objeto geométrico en el que una misma estructura, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas y tamaños.” En este capítulo vamos a ver en que espacio viven dicho objetos y construiremos la medida necesaria para poder analizarlos y describirlos. Para estudiar la geometría fractal y su espacio nos hemos basado en esta sección principalmente en el libro *Fractals Everywhere* de Michael F. Barnsley [1] y los apuntes de las asignaturas Topología General, Análisis Matemático II, Análisis funcional.

A lo largo de este capítulo trabajaremos en espacios métricos completos, que denotaremos como  $(X, d)$ , con el fin de poder analizar, imágenes, dibujos y conjuntos en el espacio definiremos lo siguiente.

### 1.1. El espacio métrico $(\mathcal{H}, h)$

Para estudiar la geometría fractal y poder definir el espacio  $(\mathcal{H}, h)$  donde se encuentran los fractales, necesitaremos conceptos preliminares sobre espacios métricos.

**Definición.** Sea  $X$  un conjunto, decimos que  $(X, d)$  un espacio métrico si la aplicación  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  satisface  $\forall x, y, z \in X$  :

1.  $d(x, y) \geq 0$  y  $d(x, y) = 0$  si y solo si  $x = y$ .
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ .
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

**Definición.** Sea  $X$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$  (donde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ). Decimos que  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado si la aplicación  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty)$  satisface  $\forall x, y \in X \forall \lambda \in \mathbb{K}$ :

1.  $\|x\| \geq 0$ , y  $\|x\| = 0$  si y solo si  $x = 0$ .
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ .
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

En ese caso la aplicación  $\|\cdot\|$  define una norma sobre  $X$ .

Notemos que un espacio normado y un espacio métrico se relacionan de la siguiente forma: Un espacio normado induce a un espacio métrico, definiendo  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  con  $d(x, y) = \|x - y\|$ , proporcionando una topología de espacio métrico.

También necesitamos el concepto de sucesión de Cauchy.

**Definición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ . Decimos que  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$  es sucesión de Cauchy si  $\forall \varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $m, n \geq n_0$  entonces  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

**Definición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Decimos que  $X$  es completo si toda sucesión de Cauchy  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$  es convergente a un  $x \in X$ .

Por ejemplo  $\mathbb{R}^n$  con su métrica usual es un espacio métrico completo.

A lo largo de este capítulo trabajaremos en espacios métricos completos. Con el fin de poder analizar y estudiar nuestros fractales en el espacio necesitaremos definir el conjunto de subconjuntos compactos de  $X$ , así como distancias entre un punto y un conjunto, dos conjuntos y la distancia Hausdorff entre conjuntos.

En primer lugar definiremos la colección de subconjuntos compactos de  $X$ .

**Definición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, denotamos con  $\mathcal{H}(X)$  al espacio formado por los conjuntos compactos de  $X$  distintos del conjunto vacío.

Denotaremos  $\mathcal{H}(X)$  como  $\mathcal{H}$  si está claro el conjunto  $X$  y no se necesita especificar. Ahora ya tenemos los elementos necesarios para poder definir las distancias que nos llevarán a la distancia Hausdorff.

**Definición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $x \in X$  y  $B \in \mathcal{H}$  definimos

$$d(x, B) = \inf\{d(x, y) : y \in B\} \quad (1.1)$$

donde  $d(x, B)$  es la distancia del punto  $x$  al conjunto  $B$ .

Pero concretamente el ínfimo de la definición anterior se alcanza y por tanto es un mínimo:

$$d(x, B) = \inf\{d(x, y) : y \in B\} = \min\{d(x, y) : y \in B\} \quad (1.2)$$

Dicha afirmación se sigue de que  $B \in \mathcal{H}$  es un conjunto compacto no vacío. Consideramos  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  definido como  $f(y) = d(x, y)$ ,  $\forall y \in B$ . Por la definición de métrica, sabemos que  $f$  es continua. Denotamos  $p := \inf\{f(y) : y \in B\}$ , como  $f(y) \geq 0$ ,  $\forall y \in B$  y  $B$  es compacto, podemos aplicar el *Teorema de Weierstrass* que nos dice que toda función continua en un compacto alcanza su mínimo y por tanto, existe  $\hat{y} \in B$  tal que  $f(\hat{y}) = p$  como queríamos demostrar.

A continuación definiremos dos medidas entre dos conjuntos pertenecientes a  $\mathcal{H}(X)$ .

**Definición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $A$  y  $B \in \mathcal{H}$  definimos

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\} \quad (1.3)$$

Al igual que en la definición anterior, utilizando la propiedad de que  $A$  y  $B$  son compactos, podemos probar que existen  $\hat{x} \in A$  y  $\hat{y} \in B$  satisfaciendo que  $d(A, B) = d(\hat{x}, \hat{y})$ .

Notar que la distancia  $d(A, B)$  no siempre coincide con la distancia  $d(B, A)$ , veamos un ejemplo.

**Ejemplo 1.** Tomando los conjuntos  $A = [0, 1]^2$ ,  $B = [0, 2]^2$ , representados en la imagen 1.1.

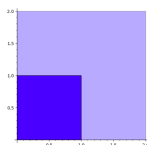


Figura 1.1: Conjuntos  $A$  (azul oscuro) y  $B$  (azul claro)

Como podemos observar la distancia  $d(x, B) = 0$  para cada  $x \in A$ , por lo tanto  $d(A, B) = 0$  sin embargo para  $(2, 2) \in B$  tenemos  $d((2, 2), A) = \sqrt{2}$  y por tanto  $d(B, A) = \sqrt{2}$ . Es decir las distancias en  $d(A, B)$  y  $d(B, A)$  no coinciden.

Notemos también que en algunos libros se utiliza la notación  $d(A, B)$  para  $\inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$ . El ejemplo anterior muestra que ambas nociones son distintas.

Ahora ya tenemos todos los conceptos necesarios para definir la distancia Hausdorff.

**Definición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. La distancia Hausdorff entre conjuntos  $A$  y  $B \in \mathcal{H}$  está definida como:

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\} \quad (1.4)$$

**Proposición 1.1.** Sea  $h$  definida como anteriormente, entonces  $h$  es métrica en  $\mathcal{H}$ .

*Demostración.* Sean  $A, B, C \in \mathcal{H}$ .

1. Claramente

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\} \geq 0, \text{ ya que } d(A, B), d(B, A) \geq 0$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\} = 0 &\iff \begin{cases} d(A, B) = 0 \\ d(B, A) = 0 \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} \forall x \in A, d(x, B) = 0 \\ \forall y \in B, d(y, A) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \forall x \in A, \exists y \in B \text{ tal que } x = y \\ \forall y \in B, \exists x \in A \text{ tal que } y = x \end{cases} \iff A = B \end{aligned}$$

2. Que  $h(A, B) = h(B, A)$  es trivial, ya que  $h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\} = h(B, A) = \max\{d(B, A), d(A, B)\}$ .

3. Ahora queremos ver que  $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$ . Primero veremos que  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ . Entonces  $\forall a \in A$  se tiene

$$d(a, B) = \min\{d(a, b) : b \in B\} \leq \min\{d(a, c) + d(c, b) : b \in B\} = d(a, c) + \min\{d(c, b) : b \in B\}$$

Por tanto, para cada  $c \in C$ , se tiene

$$d(a, B) \leq \min\{d(a, c) : c \in C\} + \max\{\min\{d(c, b) : b \in B\} : c \in C\} = d(a, C) + d(C, B)$$

Por lo tanto obtenemos que

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

Intercambiando el papel de  $A$  y  $B$  obtenemos

$$d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A)$$

Llegando así al resultado que queríamos obtener:

$$\begin{aligned} h(A, B) &= \max\{d(A, B), d(B, A)\} \leq \max\{d(B, C), d(C, B)\} + \max\{d(A, C), d(C, A)\} \\ &= h(B, C) + h(A, C). \end{aligned}$$

□

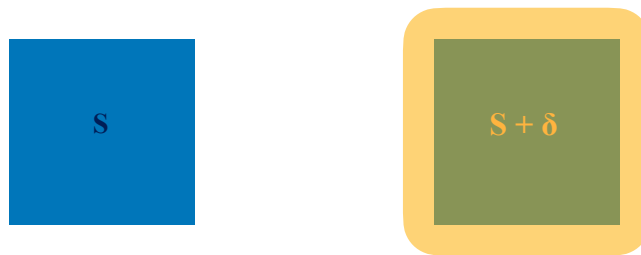


Figura 1.2: Conjuntos  $S$  (a la izquierda) y  $S + \delta$  (a la derecha)

## 1.2. La completitud del espacio Hausdorff.

En esta sección estudiaremos la completitud del espacio métrico  $(\mathcal{H}, h)$  y caracterizaremos las sucesiones convergentes en  $\mathcal{H}$ .

Necesitamos unos conceptos previos para poder estudiar la completitud:

**Definición.** Sea  $S \subset X$  y  $\delta \geq 0$ , definimos:

$$S + \delta := \{y \in X : d(x, y) \leq \delta, \text{ para algún } x \in S\} = \{y \in X : d(y, S) \leq \delta\} \quad (1.5)$$

Vamos a ver el siguiente ejemplo para ilustrar esta definición:

**Ejemplo 2.** Tomando  $S$  como el cuadrado  $4,5 \times 4,5$  y  $\delta = 0,75$  obtenemos que el conjunto definido anteriormente  $S + \delta$  es el siguiente:

**Teorema 1.2.** Sean  $A, B \in \mathcal{H}$  donde  $(X, d)$  es un espacio métrico. Sea  $\varepsilon > 0$ , entonces:

$$h(A, B) \leq \varepsilon \iff \begin{cases} A \subset B + \varepsilon \\ B \subset A + \varepsilon \end{cases}$$

*Demostración.* Primero comenzaremos probando que  $d(A, B) \leq \varepsilon \iff A \subset B + \varepsilon$ .

Suponemos  $d(A, B) \leq \varepsilon$ , por lo tanto  $\max\{d(a, B) : a \in A\} \leq \varepsilon$ , lo que implica que  $d(a, B) \leq \varepsilon \forall a \in A$ . Por tanto, para cada  $a \in A$  tenemos  $a \in B + \varepsilon$ , es decir  $A \subset B + \varepsilon$ .

Recíprocamente ahora suponemos  $A \subset B + \varepsilon$ . Consideramos  $d(A, B) = \max\{d(a, B) : a \in A\}$  y sea  $a \in A$ . Como  $A \subset B + \varepsilon$ , tenemos que existe  $b \in B$  tal que  $d(a, b) \leq \varepsilon$ , por lo tanto  $d(a, B) \leq \varepsilon$ . Y esto es cierto para todo  $a \in A$ . Por lo tanto  $d(A, B) \leq \varepsilon$ .

Análogamente se ve que  $d(B, A) \leq \varepsilon \iff B \subset A + \varepsilon$ , intercambiando los papeles de  $A$  y  $B$ .

Así pues juntando ambas tenemos que

$$h(A, B) \leq \varepsilon \iff \begin{cases} d(A, B) \leq \varepsilon \\ d(B, A) \leq \varepsilon \end{cases} \iff \begin{cases} A \subset B + \varepsilon \\ B \subset A + \varepsilon \end{cases}$$

□

Necesitaremos también la noción de “extender las sucesiones de Cauchy”.

**Teorema 1.3 (El lema de extensión).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y sea  $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{H}$  una sucesión de Cauchy en  $(\mathcal{H}, h)$ . Sea  $(n_j)_{j=1}^\infty \subseteq \mathbb{N}$  tal que  $0 < n_1 < n_2 < \dots$ . Suponemos que tenemos una sucesión de Cauchy  $\{x_{n_j} \in A_{n_j} : j = 1, 2, 3, \dots\}$  en  $(X, d)$ . Entonces existe una sucesión de Cauchy  $\{\hat{x}_n \in A_n : j = 1, 2, 3, \dots\}$  tal que  $\hat{x}_{n_j} = x_{n_j} \forall j = 1, 2, 3, \dots$

*Demostración.* Vamos a definir una sucesión  $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^\infty$  con  $\hat{x}_n \in A_n$ . Para cada  $n \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ , cogemos  $\hat{x}_n \in \{x \in A_n \text{ tal que } d(x_{n_1}, x) = d(x_{n_1}, A_n)\}$ , lo que significa que  $\hat{x}_n$  es el punto más cercano en  $A_n$  a  $x_{n_1}$ . Sabemos que dicho punto existe debido a que  $A_n$  es compacto. De forma análoga se obtiene para cada  $j \in \{2, 3, \dots\}$  y para cada  $n \in \{n_{j-1} + 1, \dots, n_j\}$  eligiendo  $\hat{x}_n \in \{x \in A_n \text{ tal que } d(x_{n_j}, x) = d(x_{n_j}, A_n)\}$ . La sucesión  $\hat{x}_n$  satisface las condiciones que estábamos buscando, obteniendo así la extensión de  $x_{n_j}$  a  $A_n$ , cumpliéndose  $\hat{x}_{n_j} = x_{n_j}$  y  $x_n \in A_n$  por construcción. Queremos ver que también es una sucesión de Cauchy. Para ello, tomamos  $\varepsilon > 0$ , para el cual existirá un  $N_1$  tal que si  $n_j, n_k \geq N_1$  entonces se tiene  $d(x_{n_j}, x_{n_k}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .

Además, existirá un  $N_2$  tal que si  $m, n \geq N_2$  se tiene  $h(A_n, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .

Definimos entonces  $n_0 = \max\{N_1, N_2\}$ , obteniendo que para cada  $m, n \geq n_0$

$$\begin{aligned} d(\hat{x}_m, \hat{x}_n) &\leq d(\hat{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \hat{x}_n) \\ &= d(x_{n_j}, A_m) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{3} + d(x_{n_j}, A_m) + d(x_{n_k}, A_n) \end{aligned}$$

donde  $m \in \{n_{j-1} + 1, n_{j-1} + 2, \dots, n_j\}$  y  $n \in \{n_{k-1} + 1, n_{k-1} + 2, \dots, n_k\}$ . Como  $n_j \geq m \geq n_0$ , se tiene  $h(A_m, A_{n_j}) \leq \varepsilon/3$  y así  $x_{n_j} \in A_m + \varepsilon/3$ . Por tanto  $d(x_{n_j}, A_m) \leq \varepsilon/3$ . Análogamente  $d(x_{n_k}, A_n) \leq \varepsilon/3$ . Por lo tanto  $d(\hat{x}_m, \hat{x}_n) \leq \varepsilon \forall m, n \geq n_0$ .

Así obtenemos que nuestra sucesión es de Cauchy y satisface las propiedades, como queríamos demostrar.  $\square$

**Teorema 1.4 (La completitud del espacio de fractales).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Entonces  $(\mathcal{H}, h)$  es un espacio métrico completo. Es más, si  $\{A_n \in \mathcal{H}\}_{n=1}^\infty$  es una sucesión de Cauchy entonces:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{H}$$

puede ser caracterizado de la siguiente forma:

$$A = \{x \in X : \text{existe sucesión de Cauchy } \{x_n\}_n \text{ con } x_n \in A_n \text{ que converge a } x\}$$

*Demostración.* Sea  $\{A_n\}$  sucesión de Cauchy en  $\mathcal{H}$  y sea:

$$A = \{x \in X : \text{existe sucesión de Cauchy } \{x_n\}_n \text{ con } x_n \in A_n \text{ que converge a } x\}$$

En primer lugar probaremos que este conjunto  $A$  es no vacío. Para ello tomaremos una sucesión de números naturales:  $N_1 < N_2 < N_3 < \dots < N_n < \dots$  tal que, para  $m, n \geq N_i$  se tiene:  $h(A_m, A_n) < \frac{1}{2^i}$ , y sabemos que existe ya que  $\{A_n\}$  es de Cauchy. Vamos a construir inductivamente una sucesión  $(x_{N_k})$  con  $x_{N_k} \in A_{N_k}$  y  $d(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) \leq 1/2^k$ . Elegimos  $x_{N_1} \in A_{N_1}$  arbitrario, entonces como  $h(A_{N_1}, A_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$ , podemos encontrar  $x_{N_2} \in A_{N_2}$  tal que  $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$ .

Ahora, supongamos que tenemos construida una sucesión finita  $x_{N_i} \in A_{N_i}$  siendo  $i = 1, 2, \dots, k$  tal que  $d(x_{N_{i-1}}, x_{N_i}) \leq \frac{1}{2^{i-1}}$ .

Entonces como  $h(A_{N_k}, A_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$  y  $x_{N_k} \in A_{N_k}$ , podemos encontrar  $x_{N_{k+1}} \in A_{N_{k+1}}$  tal que  $d(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$ . Por ejemplo, sea  $x_{N_{k+1}} \in A_{N_{k+1}}$  el más cercano a  $x_{N_k}$ . Esta sucesión cumple lo que buscábamos. Para ver que  $\{x_{N_i}\}$  es una sucesión de Cauchy en  $X$ , primero tomaremos  $\varepsilon > 0$  y  $N_\varepsilon$  que satisfaga que  $\sum_{i=N_\varepsilon}^\infty \frac{1}{2^i} \leq \varepsilon$ . Entonces para  $m, n \geq N_\varepsilon$  con  $n \geq m$  tenemos que:

$$d(x_{N_m}, x_{N_n}) \leq d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + d(x_{N_{m+1}}, x_{N_{m+2}}) + \dots + d(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) \leq \sum_{i=N_m}^n \frac{1}{2^i} < \varepsilon$$

Y ahora aplicando el *Lema de Extensión* ??, sabemos que existe una sucesión de Cauchy  $\{\hat{x}_i \in A_i\}$  tal que  $\hat{x}_{N_i} = x_{N_i}$  y por tanto existe el límite de  $\hat{x}_i$  y dicho límite pertenece a  $A$ , demostrando así que  $A \neq \emptyset$ .

En segundo lugar vamos a probar que el conjunto  $A$  es cerrado, para ello partiremos de una sucesión  $\{a_i \in A\}$  y supondremos que converge a un punto  $a$  y para demostraremos que  $a \in A$ . Para cada número

natural  $i$ , existe una sucesión  $\{x_{i,n} \in A_n\}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{i,n} = a_i$ . Existe una sucesión creciente de números positivos  $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$  tal que  $d(a_{N_i}, a) < \frac{1}{i}$ . Además existe una sucesión de números naturales  $\{m_i\}$  tal que  $d(x_{N_i, m_i}, a_{N_i}) \leq \frac{1}{i}$ , por tanto  $d(x_{N_i, m_i}, a) \leq \frac{2}{i}$ . Si tomamos  $y_{m_i} = x_{N_i, m_i}$  podemos ver que  $y_{m_i} \in A_{m_i}$  y  $\lim_{i \rightarrow \infty} y_{m_i} = a$ , por tanto podemos volver a aplicar el *Lema de Extensión* ?? a  $\{y_{m_i}\}$ , extendiéndose a una sucesión convergente  $\{\hat{y}_i \in A_i\}$  obteniéndose que  $a \in A$  como queríamos comprobar.

En tercer lugar vamos a ver que dado  $\varepsilon > 0$  va a existir un  $N$  tal que para todo  $n \geq N$  se tiene que  $A \subset A_n + \varepsilon$ . Para ello tomamos  $\varepsilon > 0$  y sabemos que existe un  $N$  tal que para todo  $n, m \geq N$  se tiene que  $h(A_m, A_n) \leq \varepsilon$ . Ahora tomemos  $n \geq N$ , entonces si  $m \geq n$ ,  $A_m \subset A_n + \varepsilon$ . Queremos ver que  $A \subset A_n + \varepsilon$ . Para ello tomamos  $a \in A$ . Existe una sucesión  $\{a_i \in A_i\}$  que converge a  $a$ . Tomaremos  $N$  suficientemente grande para que si  $m \geq N$ , se tiene  $d(a_m, a) \leq \varepsilon$ . Entonces, como  $A_m \subset A_n + \varepsilon$  se tiene que  $a_m \in A_n + \varepsilon$ . Por otro lado como  $A_n$  es compacto, se tiene que  $A_n + \varepsilon$  es cerrado. Por lo tanto como  $a_m \in A_n + \varepsilon$  para todo  $m \geq N$ , su límite  $a$  debe estar también en  $A_n + \varepsilon$ . Es decir  $A \subset A_n + \varepsilon$  para un  $n$  suficientemente grande.

En cuarto lugar vamos a ver que el conjunto  $A$  está totalmente acotado, que juntándolo con que es cerrado implica que es compacto. Para probarlo supondremos que  $A$  no es totalmente acotado, lo que significa que para algún  $\varepsilon > 0$  podemos encontrar una sucesión  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  en  $A$  tal que  $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$  para  $i \neq j$ , y vamos a ver que esto nos lleva a una contradicción. Sabemos que como hemos comprobado en tercer lugar, existe un  $n$  lo suficientemente grande tal que  $A \subset A_n + \frac{\varepsilon}{3}$ . Para cada  $x_i$ , existe una correspondiente  $y_i \in A_n$  para la cual  $d(x_{n_i}, y_i) < \frac{\varepsilon}{3}$ . Como  $A_n$  es compacto, alguna subsucesión  $\{y_{n_i}\}$  de  $\{y_i\}$  que converge. Entonces podemos tener los puntos  $\{y_{n_i}\}$  tan cerca como queramos. En particular podemos encontrar dos puntos  $y_{n_i}, y_{n_j}$  tal que  $d(y_{n_i}, y_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ , pero entonces tenemos que:

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, x_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Por lo tanto llegamos a una contradicción, lo que significa que  $A$  es totalmente acotado, junto con que es completo (visto en segundo lugar) se llega a que por lo tanto  $A$  es compacto.

Y por último vamos a ver que  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$  en  $(\mathcal{H}, h)$ . De lo anteriormente demostrado tenemos que  $A \in \mathcal{H}$ . Gracias a lo visto en el tercer paso, para demostrar nuestro límite basta demostrar que para  $\varepsilon > 0$  existe un  $N$  tal que para  $n \geq N$ ,  $A_n \subset A + \varepsilon$ . Sea  $\varepsilon > 0$  y tomamos  $N$  tal que para todo  $n, m \geq N$  se tiene que  $h(A_m, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , entonces para todo  $n, m \geq N$ ,  $A_m \subset A_n + \frac{\varepsilon}{2}$ . Sea ahora  $n \geq N$  y veamos que  $A_n \subset A + \varepsilon$ . Sabemos que existe una sucesión creciente de números naturales  $\{N_i\}$  tales que  $n < N_1 < N_2 < \dots < N_k < \dots$ , y para  $n, m \geq N_j$ ,  $A_m \subset A_n + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ . Notar que  $A_m \subset A_{N_1} + \frac{\varepsilon}{2}$ . Dado  $y \in A_n$ , existe un  $x_{N_1} \in A_{N_1}$  tal que  $d(y, x_{N_1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Como  $x_{N_1} \in A_{N_1}$ , existe un  $x_{N_2} \in A_{N_2}$  tal que  $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{\varepsilon}{2^2}$ . Y así sucesivamente por inducción podemos encontrar una sucesión  $x_{N_1}, x_{N_2}, x_{N_3}, \dots$  tales que  $x_{N_j} \in A_{N_j}$  y  $d(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ . Aplicando la desigualdad triangular tenemos  $\forall j$ :

$$\begin{aligned} d(y, x_{N_j}) &\leq d(y, x_{N_1}) + d(x_{N_1}, x_{N_2}) + \dots + d(x_{N_{j-1}}, x_{N_j}) \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \dots + \varepsilon/2^{j+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

y además  $\{x_{N_j}\}$  es una sucesión de Cauchy. Según hemos escogido  $n$ , cada  $A_{N_j} \subset A_n + \frac{\varepsilon}{2}$  y la sucesión  $\{x_{N_j}\}$  converge a un punto  $x \in A_n + \frac{\varepsilon}{2}$ , ya que  $A_n + \frac{\varepsilon}{2}$  es cerrado. Más aún,  $d(y, x_{N_j}) \leq \varepsilon$  implica que  $d(y, x) \leq \varepsilon$ , por lo que tenemos que  $A_n \subset A + \varepsilon$  para todo  $n \geq N$ , obteniendo así que  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ .

Por lo tanto tenemos que  $(\mathcal{H}, h)$  es completo como queríamos demostrar.  $\square$

## Capítulo 2

# Aplicaciones contractivas y el teorema del punto fijo de Banach

Uno de los objetivos de nuestro estudio de los fractales es la generación de fractales, ¿cómo crearlos? Hay fractales que surgen como puntos fijos de funciones pero ¿cualquier función es válida? En el capítulo anterior hemos introducido el espacio métrico y completo de Hausdorff, en este capítulo vamos a estudiar como los fractales se obtienen como punto fijo de ciertos conjuntos de aplicaciones, llamados IFS, en el espacio métrico introducido anteriormente. Además describiremos el algoritmo determinista y su convergencia, que aplicaremos para dibujar fractales con Matlab junto con el algoritmo probabilístico. En este capítulo nos hemos apoyado en el libro *Fractals Everywhere* de Michael F. Barnsley [1] para la base teórica, en las páginas *Classic Iterated Function Systems* [?] y [5] para la elaboración de los códigos de Matlab y en los documentos trabajados en la asignatura de Modelación Matemática.

### 2.1. Aplicaciones contractivas.

Primero estudiaremos las aplicaciones contractivas en espacios métricos en general, que denotaremos como  $(X, d)$ . Necesitaremos una definición preliminar, el concepto de aplicación contractiva.

**Definición.** Sea  $f : X \rightarrow X$  una aplicación en el espacio métrico  $(X, d)$ . Se llama aplicación contractiva si existe una constante  $0 \leq s < 1$  tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

A la constante  $s$  se le denomina factor contractivo de  $f$ .

Por ejemplo, sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $f : I \rightarrow I$  una función derivable con  $s = \sup_{x \in I} |f'(x)| < 1$ . Por el teorema del valor medio sabemos que existe  $\zeta \in (x, y)$  tal que  $|f(x) - f(y)| = |f'(\zeta) \cdot (x - y)| \leq s \cdot |x - y|$ , así que  $f$  es contractiva.

Y ahora sí que podemos enunciar el teorema de las aplicaciones contractivas.

**Teorema 2.1 (Teorema del punto fijo de Banach).** Sea  $f : X \rightarrow X$  una aplicación contractiva en un espacio métrico completo  $(X, d)$ . Sea  $x \in X$ , denotamos  $x_0 = x$  y  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Entonces  $f$  tiene exactamente un único punto fijo  $x_f \in X$ , es decir,  $f(x_f) = x_f$ , además:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = x_f.$$

*Demostración.* Sea  $x \in X$ . Denotamos como en el enunciado,  $x_0 = x$  y  $x_{n+1} = f(x_n)$ .

Dados  $n, m \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq m$ , tenemos:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})) \leq s \cdot d(x_{n-1}, x_{m-1}) = s \cdot d(f(x_{n-2}), f(x_{m-2})) \\ &\leq s^2 \cdot d(x_{n-2}, x_{m-2}) \leq \dots \leq s^m \cdot d(x_{n-m}, x). \end{aligned}$$

Por tanto  $n, m \in \mathbb{N}$  tenemos que

$$d(x_n, x_m) \leq s^{\min\{n, m\}} \cdot d(x_{|n-m|}, x)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} d(x, x_k) &\leq d(x, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k) \leq d(x, x_1) + s \cdot d(x, x_1) + \cdots + s^{k-1} \cdot d(x, x_1) \\ &= d(x, x_1)(1 + s + s^2 + \cdots + s^{k-1}) \leq d(x, x_1) \sum_{k=0}^{\infty} s^k = d(x, x_1) \frac{1}{1-s} \end{aligned}$$

donde hemos aplicado que la serie converge ya que  $|s| < 1$ . Entonces

$$d(x_n, x_m) \leq s^{\min\{n, m\}} \cdot d(x_{|n-m|}, x) \leq s^{\min\{n, m\}} d(x, x_1) \frac{1}{1-s}.$$

Como  $d(x, x_1) \frac{1}{1-s}$  es fijo, tenemos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  tal que si  $n, m \geq N$ , entonces  $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ . Es decir  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  es de Cauchy, y por tanto converge a un  $x_f \in X$ , es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_f$$

Nos queda ver que  $x_f$  es punto fijo, para ello aplicando que  $f$  es continua:

$$f(x_f) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x_f$$

Y por último vamos a comprobar su unicidad. Suponemos que existen dos puntos fijos  $x_f, y_f$ . Por ser puntos fijos de  $f$  se cumple  $x_f = f(x_f)$  y  $y_f = f(y_f)$  entonces tenemos:

$$d(x_f, y_f) = d(f(x_f), f(y_f)) \leq s \cdot d(x_f, y_f)$$

y despejando, gracias a que  $0 < s < 1$ ,

$$(1-s)d(x_f, y_f) \leq 0 \implies d(x_f, y_f) = 0 \implies x_f = y_f$$

Y así queda demostrada la unicidad. □

A continuación vamos a incorporar una serie de lemas que nos sirven para caracterizar y estudiar las propiedades de las aplicaciones contractivas que necesitaremos para la generación de fractales.

**Lema 2.2.** Sea  $f : X \rightarrow X$  una aplicación contractiva en el espacio métrico  $(X, d)$ , entonces la aplicación  $f$  es continua.

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$  y sea  $s \in [0, 1)$  el factor contractivo de  $f$ . Para todo  $x, y \in X$  con  $d(x, y) < \delta$ , tomando  $\delta = \frac{\varepsilon}{s}$  se obtiene

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y) < \varepsilon$$

y por lo tanto la continuidad de  $f$ . □

Ahora volveremos a nuestro espacio métrico  $(\mathcal{H}, h)$ , el espacio Hausdorff. Recordar que seguimos denotando  $\mathcal{H}$  a  $\mathcal{H}(X)$  y  $h$  a  $h(d)$  si no es necesario especificar, como anteriormente. El siguiente lema es conocido por Topología, no obstante lo probaremos por completitud.

**Lema 2.3.** Sea  $f : X \rightarrow X$  una aplicación continua en el espacio métrico  $(X, d)$ , entonces la aplicación  $f$  lleva a  $\mathcal{H}$  a sí mismo.

*Demostración.* Sea  $S \subset X$  un conjunto compacto distinto del vacío. Es claro que  $f(S) = \{f(x) : x \in S\} \neq \emptyset$ . Queremos probar que  $f(S)$  es compacto. Para ello tomamos  $\{y_n = f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$  sucesión contenida en  $f(S)$ , entonces tenemos que  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión de puntos de  $S$ . Como  $S$  es compacto, sabemos que existe una subsucesión  $\{x_{n_m}\}_{m=0}^{\infty}$  que convergerá a un punto  $\hat{x} \in S$ , pero por la continuidad de  $f$  tenemos que  $\{y_{n_m} = f(x_{n_m})\}$  es una subsucesión de  $\{y_n\}$  y por lo tanto  $f(\hat{x}) = \hat{y} \in f(S)$ . Así queda demostrado que  $f(S)$  es compacto. □



**Lema 2.4.** Sea  $f : X \rightarrow X$  una aplicación contractiva en el espacio métrico  $(X, d)$ , con  $s$  el factor contractivo, entonces  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  definida como

$$f(B) = \{f(x) : x \in B\}, \quad \forall B \in \mathcal{H}$$

es una aplicación contractiva en el espacio métrico  $(\mathcal{H}, h)$ , con  $s$  el factor de contracción.

*Demostración.* Del Lema 2.2 se sigue que  $f : X \rightarrow X$  es continua y por tanto, aplicando el Lema 2.3, tenemos que  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ .

Sea pues  $B, C \in \mathcal{H}$ , entonces tenemos por un lado que

$$d(f(B), f(C)) = \max\{\min\{d(f(x), f(y)) : y \in C\} : x \in B\} \leq \max\{\min\{s \cdot d(x, y) : y \in C\} : x \in B\} = s \cdot d(B, C)$$

Y análogamente, intercambiando el papel de  $B$  y  $C$  obtenemos

$$d(f(C), f(B)) \leq s \cdot d(C, B)$$

Obteniendo que

$$h(f(B), f(C)) \leq s \cdot h(B, C)$$

como queríamos demostrar.  $\square$

**Lema 2.5.** Para todo  $B, C, D, E \in \mathcal{H}$  se tiene

$$h(B \cup C, D \cup E) \leq \max\{h(B, D), h(C, E)\}$$

*Demostración.* Por un lado vemos que:

$$\begin{aligned} d(B \cup C, D) &= \max\{d(x, D) : x \in B \cup C\} = \max\{\min\{d(x, D) : x \in B\}, \min\{d(x, D) : x \in C\}\} \\ &= \max\{d(B, D), d(C, D)\}. \end{aligned}$$

Y por otro lado:

$$\begin{aligned} d(B, D \cup E) &= \max\{d(x, D \cup E) : x \in B\} = \max\{\min\{d(x, y) : y \in D \cup E\} : x \in B\} \\ &\leq \max\{\min\{d(x, y) : y \in D\} : x \in B\} = \max\{d(x, D) : x \in B\} = d(B, D). \end{aligned}$$

Análogamente tenemos  $d(B, D \cup E) \leq d(B, E)$ . Por tanto,  $d(B, D \cup E) \leq \max\{d(B, D), d(B, E)\}$ . Volviendo a lo que queremos demostrar, tenemos por un lado

$$d(B \cup C, D \cup E) \leq \max\{d(B, D \cup E), d(C, D \cup E)\} \leq \max\{d(B, D), d(C, E)\}$$

Análogamente intercambiando los papeles de  $B \cup C$  y  $D \cup E$ :

$$d(D \cup E, B \cup C) \leq \max\{d(D, B \cup C), d(E, B \cup C)\} \leq \max\{d(D, B), d(E, C)\}$$

Juntando todo tenemos:

$$\begin{aligned} h(B \cup C, D \cup E) &= \max\{d(B \cup C, D \cup E), d(D \cup E, B \cup C)\} \\ &\leq \max\{d(B, D), d(C, E), d(D, B), d(E, C)\} = \max\{h(B, D), h(C, E)\}. \end{aligned}$$

$\square$

**Lema 2.6.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Sean  $f_n$  con  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$  aplicaciones contractivas en  $(\mathcal{H}, h)$  con sus correspondientes factores de contracción  $s_n$ . Definimos  $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  como:

$$F(B) = f_1(B) \cup f_2(B) \cup \dots \cup f_N(B) = \bigcup_{n=1}^N f_n(B)$$

para cada  $B \in \mathcal{H}$ . Entonces  $F$  es una aplicación contractiva con factor de contracción  $s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ .

*Demostración.* Vamos a probarlo por inducción. Para  $N = 2$ , sean  $B, C \in \mathcal{H}$ . Entonces tenemos, gracias al Lema 2.5 :

$$\begin{aligned} h(F(B), F(C)) &= h(f_1(B) \cup f_2(B), f_1(C) \cup f_2(C)) \leq \max\{h(f_1(B), f_1(C)), h(f_2(B), f_2(C))\} \\ &\leq \max\{s_1 \cdot h(B, C), s_2 \cdot h(B, C)\} \leq s \cdot h(B, C). \end{aligned}$$

Suponemos cierto para  $N - 1$  y vamos a probarlo para  $N$ .

$$\begin{aligned} h(F(B), F(C)) &= h(f_1(B) \cup f_2(B) \cup \dots \cup f_N(B), f_1(C) \cup f_2(C) \dots \cup f_N(C)) \\ &\leq \max\{h(\cup_{n=1}^{N-1} f_n(B), \cup_{n=1}^{N-1} f_n(C)), h(f_N(B), f_N(C))\} \\ &\leq \max\{\max\{s_i : i \in \{1, \dots, N-1\}\} \cdot h(B, C), s_N \cdot h(B, C)\} \leq s \cdot h(B, C). \end{aligned}$$

□

Ahora ya podemos definir las funciones que nos van a interesar.

## 2.2. Las IFS.

Como hemos mencionado anteriormente hay fractales que se generan como puntos fijos de algunos conjuntos de funciones, en esta sección vamos a estudiar cuales son dichas funciones generadoras de fractales, qué tienen que cumplir y cómo hallar los puntos fijos.

**Definición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Un conjunto iterativo de funciones o IFS (iterated function system) es un conjunto finito de aplicaciones contractivas  $f_n : X \rightarrow X$ , con sus respectivos factores de contracción  $s_n$  con  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Con IFS denotamos a  $\{f_n : X \rightarrow X, n = 1, 2, \dots, N\}$  siendo su factor de contracción  $s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ .

**Teorema 2.7.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $\{f_n : X \rightarrow X, n = 1, 2, \dots, N\}$  una IFS en  $X$  con factor de contracción  $s$ , entonces, la función definida  $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  como  $F(B) = \cup_{n=1}^N f_n(B)$ , para todo  $B \in \mathcal{H}$  es una aplicación contractiva en  $(\mathcal{H}, h)$  con factor de contracción  $s$ . Denotamos  $B_1 = F(B)$ , y así sucesivamente siendo  $B_{n+1} = F(B_n)$ . Además existe un único conjunto  $A \in \mathcal{H}$  tal que  $A = F(A) = \cup_{n=1}^N f_n(A)$  y dicho conjunto viene dado, con la notación anterior por  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} F(B_n)$  para todo  $B \in \mathcal{H}$ .

*Demostración.* La primera parte la tenemos por el Lema 2.6., solo nos queda ver que la existencia y unicidad del conjunto  $A$  pero aplicando el Teorema 2.1 (Teorema del punto fijo de Banach) a  $F$  que es aplicación contractiva y a  $(\mathcal{H}, h)$  espacio métrico completo, sabemos que existe un único punto  $A \in \mathcal{H}$  que satisface las condiciones del teorema. Como sabemos que los puntos del espacio  $\mathcal{H}$  son subconjuntos compactos de  $X$ , tenemos el resultado. □

**Definición.** El conjunto fijo  $A \in \mathcal{H}$  descrito en el teorema anterior se llama atractor de la IFS.

Vamos a ver varios ejemplos de atractor como el Conjunto de Cantor en  $\mathbb{R}$ , el Triángulo de Sierpinski en  $\mathbb{R}^2$  y un conjunto de funciones en  $C[0, 1]$ .

**Ejemplo 3.** En primer lugar vamos a ver como es el atractor conocido como el conjunto de Cantor. Para ello consideraremos las siguientes funciones,

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & f_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{x}{3} & x &\longrightarrow \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Tenemos que las aplicaciones  $f_1$  y  $f_2$  son funciones contractivas. El atractor de la IFS  $\{f_1, f_2\}$  es el conjunto ternario de Cantor. En la Figura 2.1 vemos las iteraciones tomando  $B_0 = [0, 1]$ .

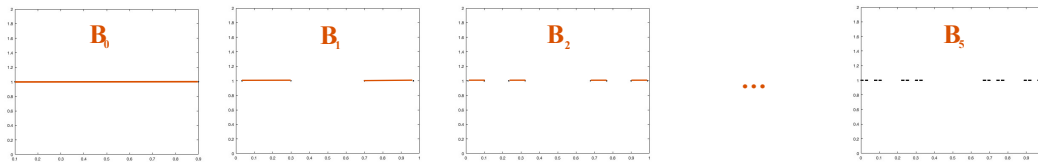


Figura 2.1: Iteraciones del conjunto de Cantor.

**Ejemplo 4.** Ahora estudiaremos el atractor conocido como Triángulo de Sierpinski. Para ello consideraremos las siguientes funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \\ f_2(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ f_3(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En la Figura 2.2 vemos como partiendo de distintos conjuntos  $A_0$ , las figuras geométricas de la izquierda (un triángulo rectángulo y una casa), a las que se les aplica la IFS reiteradas veces  $n = 2, 4, 6$  hasta finalmente  $n = 8$  se transforman en ambos casos en unas gráficas muy similares al triángulo de Sierpinski.

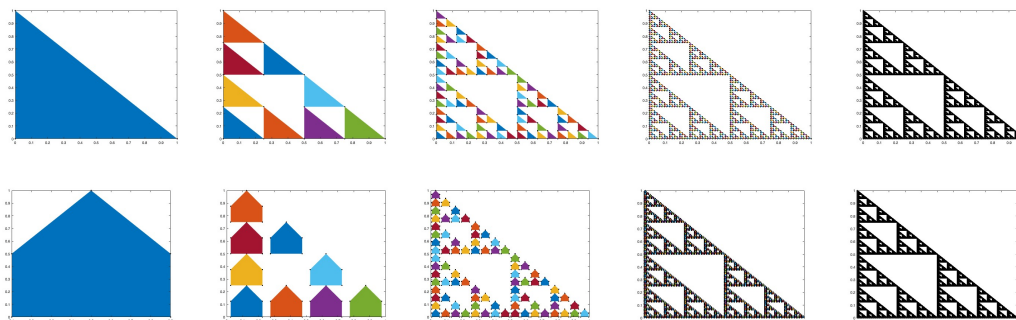


Figura 2.2: IFS Triángulo Sierpinski.

Por último vamos a ver el caso de las funciones del espacio  $C[0, 1]$ .

**Ejemplo 5.** Para este caso consideramos el espacio métrico

$$C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas}\}$$

con la métrica

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in [0, 1]\}.$$

Sabemos de Análisis Funcional que este espacio métrico es completo con la métrica definida anteriormente. Consideramos ahora las aplicaciones

$$\begin{aligned} f_1 : C[0, 1] &\rightarrow C[0, 1] & f_2 : C[0, 1] &\rightarrow C[0, 1] \\ g &\rightarrow \frac{g}{2} & g &\rightarrow \frac{g}{2} + h \end{aligned}$$

donde  $h(t) = 2t(1 - t)$ . En primer lugar notar que  $f_1$  y  $f_2$  son aplicaciones contractivas con factor de contracción  $1/2$ . Ahora consideramos

$$\begin{aligned} F : \mathcal{H}(C[0, 1]) &\rightarrow \mathcal{H}(C[0, 1]) \\ B &\rightarrow f_1(B) \cup f_2(B) \end{aligned}$$

y tomamos como conjunto inicial la aplicación nula  $B_0 = \{0\}$ . A medida que vamos aplicando reiteradamente  $F$  obtenemos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{0, h\} & B_2 &= \{0, h/2, h, 3h/2\} \\ B_3 &= \{kh/4 : k \in \{0, \dots, 7\}\} \end{aligned}$$

Parece por tanto que el atractor es el conjunto

$$A = \{\lambda h : \lambda \in [0, 2]\}.$$

De hecho, podemos comprobar que es así:

$$\begin{aligned} F(A) &= f_1(A) \cup f_2(A) = \{\lambda/2 \cdot h : \lambda \in [0, 2]\} \cup \{\lambda/2 \cdot h + h : \lambda \in [0, 2]\} \\ &= \{\lambda h : \lambda \in [0, 1]\} \cup \{\lambda h : \lambda \in [1, 2]\} = A \end{aligned}$$

A raíz de los ejemplos anteriores surge la pregunta de ¿hasta qué  $A_n$  hay que llegar para que el conjunto se “parezca” al límite?

Los siguientes resultados nos proporcionarán una cota para la distancia entre una cierta iteración y el atractor.

**Lema 2.8.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Sea  $f : X \rightarrow X$  una aplicación contractiva con factor de contracción  $0 \leq s < 1$ , y sea  $x_f \in X$  el punto fijo de la aplicación  $f$ , entonces, para todo  $x \in X$ :

$$d(x, x_f) \leq \frac{1}{1-s} \cdot d(x, f(x))$$

*Demostración.* En primer lugar hay que tener en cuenta que para un  $x \in X$  fijo, la función  $d(x, y)$  es continua para todo  $y \in X$ , por tanto siendo  $f(x_0) = x$ , tenemos

$$\begin{aligned} d(x, x_f) &= d(x, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f(x_n)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n d(f(x_{m-1}), f(x_m)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f(x))(1 + s + \dots + s^{n-1}) \leq \frac{1}{1-s} \cdot d(x, f(x)). \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema es fundamental para el diseño de IFS cuyos atractores son cercanos a los conjuntos dados.

**Teorema 2.9 (The Collage Theorem, (Barnsley 1985)).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Sea  $B \in \mathcal{H}$  un conjunto dado y  $\varepsilon \geq 0$  dado. Tomamos una IFS  $\{f_i : X \rightarrow X : i = 1, 2, \dots, n\}$  con factor de contracción  $0 \leq s < 1$ , tal que

$$h(B, \cup_{i=1}^n f_i(B)) \leq \varepsilon$$

donde  $h$  es la distancia Hausdorff, entonces:

$$h(B, A) \leq \frac{\varepsilon}{1-s}$$

donde  $A$  es el atractor de la IFS. Equivalentemente, para todo  $B \in \mathcal{H}$ :

$$h(B, A) \leq \frac{1}{1-s} \cdot h(B, \cup_{i=1}^n f_i(B))$$

*Demostración.* Basta aplicar el Lema 2.8 al espacio completo  $(\mathcal{H}, h)$  y a la aplicación contractiva  $F$  definida en el Teorema 2.7 para obtener:

$$h(B, A) \leq \frac{1}{1-s} \cdot h(B, \cup_{i=1}^n f_i(B)).$$

Como hemos elegido una IFS cumpliendo que

$$h(B, \cup_{i=1}^n f_i(B)) \leq \varepsilon$$

se tiene el teorema. □

Veamos el teorema aplicado a un ejemplo.

**Ejemplo 6.** Consideramos  $E_0$  el triángulo equilátero con vértices  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  y  $(1/2, \sqrt{3}/2)$ , y las funciones

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad f_3(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix},$$

que son aplicaciones contractivas con factor de contracción  $s = 1/2$  y definimos  $E_{n+1} = \cup_{i=1,2,3} f_i(E_n)$ . Observamos que tenemos que  $E_1 \subset E_0 + 0$  y  $E_0 \subset E_1 + \frac{\sqrt{3}}{8}$ , por lo tanto  $d(E_1, E_0) = 0$  y  $d(E_0, E_1) = \frac{\sqrt{3}}{8}$ ,

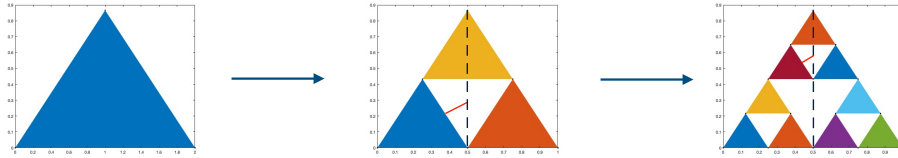


Figura 2.3: Aplicación del Teorema 2.9 a las primeras iteraciones del Triángulo Sierpinski.

obteniéndose  $h(E_0, E_1) = \frac{\sqrt{3}}{8}$ . Si repetimos el proceso con  $E_1$  y  $E_2$  obtenemos  $h(E_1, E_2) = \frac{\sqrt{3}}{16}$ . En general  $h(E_n, E_{n+1}) = \frac{\sqrt{3}}{2^{n+3}}$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Aplicando el teorema tenemos

$$h(E_n, A) \leq \frac{1}{1-1/2} \frac{\sqrt{3}}{2^{n+3}} = \frac{\sqrt{3}}{2^{n+2}}.$$

## 2.3. Algoritmos para dibujar fractales.

Hay diferentes tipos de algoritmos para representar fractales. En esta sección vamos a ver dos de ellos.

### 2.3.1. Algoritmo determinista

El algoritmo determinista está basado en la idea de directamente calcular la sucesión de conjuntos  $B_n$  definida en el Teorema 2.7, empezando desde un conjunto  $B_0$ .

En primer lugar vamos a ver más en profundidad el ejemplo visto en la sección anterior, Ejemplo 6.

**Ejemplo 7.** Como hemos visto anteriormente tomamos la IFS  $\{f_1, f_2, f_3\}$  siendo las  $f_i$  definidas en el Ejemplo 6, que tienen factor de contracción  $s = 1/2$ . Sea  $B_0$  el triángulo equilátero con vértices  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  y  $(1/2, \sqrt{3}/2)$  y veamos graficamente la evolución del triángulo según vamos aplicando la IFS  $n$  veces, con  $n$  desde 0 hasta 8.

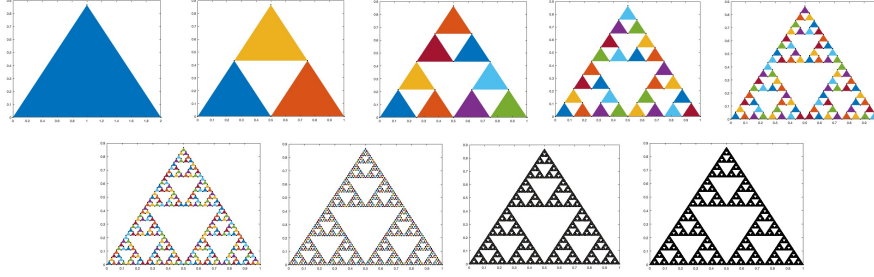


Figura 2.4: Algoritmo determinista del Triángulo Sierpinski.

**Ejemplo 8.** Ahora vamos a ver el algoritmo determinista del Dragón de Heighway. Volvemos a considerar el conjunto inicial  $B_0$  el triángulo equilátero, y las funciones

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que son aplicaciones contractivas con factor de contracción  $s = 1/\sqrt{2}$ , veámoslo. Se puede comprobar que  $f_1 = 1/\sqrt{2} U$  siendo

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

matriz ortogonal. Por tanto

$$\|f_1(x) - f_1(y)\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}}Ux - \frac{1}{\sqrt{2}}Uy \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|Ux - Uy\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|x - y\|.$$

Análogamente se comprueba que  $\|f_2(x) - f_2(y)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|x - y\|$ .

Definimos  $B_{n+1} = \bigcup_{i=1,2} f_i(B_n)$

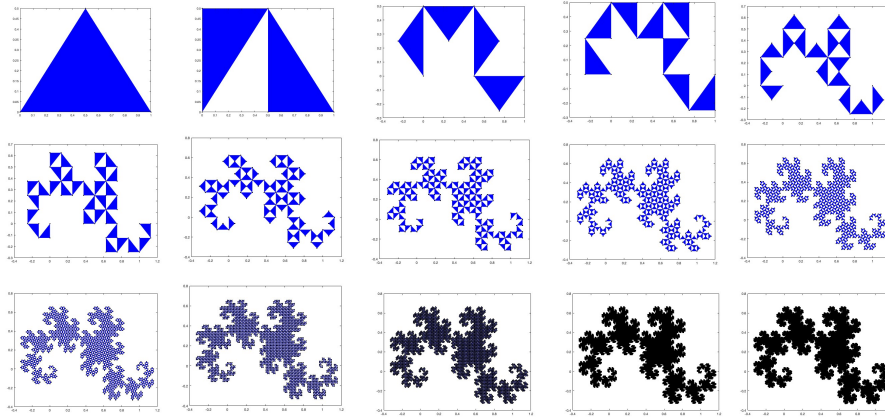


Figura 2.5: Algoritmo determinista del Dragón de Heighway .

Pero este algoritmo no es el más óptimo ya que tiene gran coste computacional. Por ejemplo, encontramos problemas computacionales al realizar las iteraciones del copo de nieve de Koch, con un  $n > 5$ .

**Ejemplo 9.** En este ejemplo partimos de  $B_0$  un hexágono regular centrado en el origen, y las funciones

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x} & f_2(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} & f_3(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} \\ f_4(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} & f_5(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/3 \end{pmatrix} & f_6(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \end{pmatrix} \\ f_7(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que son aplicaciones contractivas con factores de contracción  $s_1 = 1/\sqrt{3}$  y  $s_i = 1/3$  para  $i = 2, \dots, 7$  definimos  $B_{n+1} = \bigcup_{i=1,2,\dots,7} f_i(B_n)$

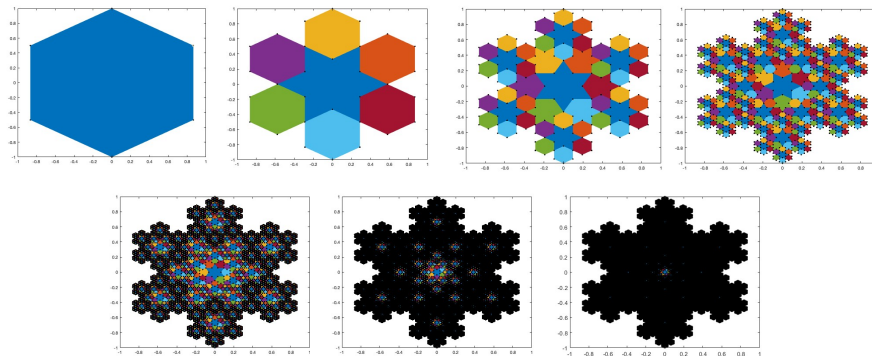


Figura 2.6: Algoritmo determinista del Copo de nieve de Koch.

### 2.3.2. Algoritmo probabilístico

El algoritmo probabilístico o de iteración aleatoria, esta basado en la teoría ergódica (disciplina que se dedica al estudio matemático del comportamiento promedio a largo plazo de los sistemas dinámicos). La idea es que, a partir de una IFS  $\{f_i : X \rightarrow X : i = 1, \dots, N\}$  y un conjunto  $B \in \mathcal{H}$ , modificar el algoritmo asociando a cada aplicación  $f_i$  una probabilidad  $p_i > 0$ , con  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ . Así partiendo de un punto  $x_i$  se van obteniendo otros puntos a partir de él, aplicando una de las diferentes transformaciones afines que forman la IFS dependiendo de la probabilidad de cada una de ellas. En anexos se encuentra un ejemplo explicado detalladamente, veamos ahora su aplicación en la generación de dos fractales de gran relevancia.

**Ejemplo 10.** Vamos a ver este algoritmo aplicado al ya conocido Triángulo de Sierpinski y al Helecho de Barnsley. Para el primero los valores de  $n$  serán  $\{1, 2, 4, 6 \text{ y } 8\}$ , aumentando  $n$  en cada iteración como se ve en la imagen.

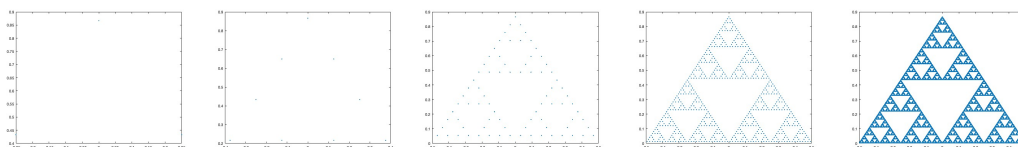


Figura 2.7: Algoritmo probabilístico del Triángulo de Sierpinski.

En el algoritmo del Helecho de Barnsley,  $n$  irá aumentando y tomando los valores 100, 1000, 10000, 100000 y 1000000.

Los códigos para implementar estos algoritmos en Matlab con los que se han elaborado las figuras del trabajo aparecen incluidos en el Anexo.

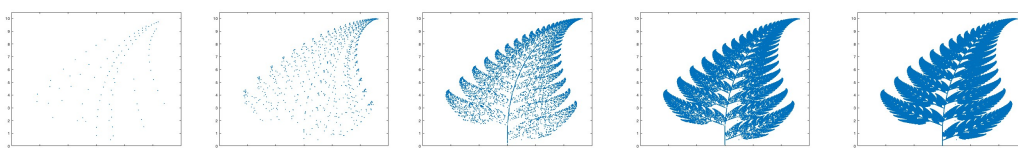


Figura 2.8: Algoritmo probabilístico del Helecho de Barnsley.





## Capítulo 3

# La medida de Hausdorff y la dimensión de los fractales

La noción de dimensión es imprescindible para el estudio de la geometría fractal. A lo largo del grado hemos estudiado diferentes nociones de dimensión, como la dimensión de un espacio vectorial, de una variedad diferenciable, ..., sin embargo ninguna de ellas parece encajar para estudiar la dimensión de un fractal. Por ejemplo el triángulo de Sierpinski es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  sin embargo no tiene área pero parece mayor que una recta o curva 1-dimensional. Entonces ¿qué dimensión tienen los fractales? En este capítulo nos hemos basado mayoritariamente en *Fractal Geometry* de Kenneth Falconer [2], a lo largo de él estudiaremos la dimensión de Hausdorff-Besicovich y la aplicaremos a algunos ejemplos ya conocidos.

### 3.1. La dimensión de los fractales

Antes de introducir el concepto de dimensión necesitaremos algunas definiciones.

**Definición.** Sea  $U$  un conjunto no vacío de un espacio métrico  $(X, d)$ , definimos diámetro de  $U$  como:

$$\text{diam}(U) = \sup\{d(x, y) : x, y \in U\}.$$

Si tenemos un conjunto  $A \subset X$  y existe una familia contable  $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$  tal que para todo  $i$  se tiene que  $0 \leq \text{diam}(U_i) \leq \delta$  y además  $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ , se dice que la familia  $\{U_i\}$  es un  $\delta$ -cubrimiento de  $A$ .

**Definición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Decimos que  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$  es una medida exterior métrica si:

1.  $\mu^*(\emptyset) = 0$ .
2. Si  $A_1 \subset A_2$ , se tiene  $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$ .
3. Dados  $A_1, A_2, \dots \subseteq X$ , se tiene

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

4.  $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ ,  $\forall A, B \subset X$  con  $\inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0$ .

El conocido teorema de Carathéodory nos dice que si  $\mu^*$  es una medida exterior, es decir, si cumple las condiciones 1, 2 y 3 de la definición anterior, el conjunto definido como

$$\Sigma = \{A \in X : \mu^*(A) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \setminus F) \forall F \subseteq X\}$$

es una  $\sigma$ -álgebra y la restricción de  $\mu^*$  a  $\Sigma$  es una medida.

**Teorema 3.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\mu^*$  una medida exterior métrica. Dado  $A \subset X$  de Borel, se tiene

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \setminus F) \quad \forall F \subseteq X.$$

*Demostración.* Como los conjuntos cerrados generan la  $\sigma$ -álgebra de los borelianos, es suficiente probar que para todo conjunto  $F \subset X$  cumple la condición del enunciado. De este modo, dado  $A \subset X$  con  $\mu^*(A) < \infty$ , queremos ver que  $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \setminus F)$ . Sean  $B_n = \{x \in A \setminus F : d(x, F) \geq 1/n\}$ , que es una sucesión creciente de conjuntos cuya unión es  $A \setminus F$ , por ser  $F$  cerrado. Además, por la propiedad 4,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*((A \cap F) \cup B_n) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(B_n)$$

por lo que basta ver que  $\mu^*(A \setminus F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(B_n)$ . Sea  $C_n = B_{n+1} \setminus B_n$ . Si  $x \in C_{n+1}$ ,  $y \in B_n$  y  $d(x, y) \leq \frac{1}{n(n+1)}$ , entonces

$$d(y, F) \leq d(x, y) + d(x, F) < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}.$$

Entonces  $\inf\{d(x, y) : x \in C_{n+1}, y \in B_n\} \geq 1/n(n+1)$ . Por inducción se tiene que

$$\mu^*(B_{2k+1}) \geq \mu^*(C_{2k} \cup B_{2k-1}) = \mu^*(C_{2k}) + \mu^*(B_{2k-1}) \geq \mu^*(C_{2k}) + \mu^*(C_{2k-2} \cup B_{2k-3}) \geq \dots \geq \sum_{j=1}^k \mu^*(C_{2j})$$

y similarmente  $\mu^*(B_{2k}) \geq \sum_{j=1}^k \mu^*(C_{2j-1})$ . Como  $\mu^*(B_n) \leq \mu^*(A) < \infty$ , se sigue que  $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(C_{2j})$  y  $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(C_{2j-1})$  son convergentes. Tenemos, por la propiedad 3,

$$\mu^*(A \setminus F) \leq \mu^*(B_n) + \sum_{j=n}^{\infty} \mu^*(C_j).$$

Haciendo tender  $n$  a infinito tenemos

$$\mu^*(A \setminus F) \leq \liminf \mu^*(B_n) \leq \limsup \mu^*(B_n) \leq \mu^*(A \setminus F)$$

como queríamos demostrar. □

Ahora ya podemos presentar el concepto de medida de Hausdorff.

**Definición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Suponemos que  $A$  es un subconjunto de  $X$  y  $s \geq 0$  un número no negativo. Para todo  $\delta > 0$ , definimos

$$H_\delta^s(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s : \{U_i\} \text{ } \delta\text{-cubrimiento de } A\right\}.$$

Y definimos

$$H^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^s(A).$$

A  $H^s(A)$  se le llama la medida  $s$ -dimensional de Hausdorff de  $A$ .

Notar que el límite de la definición anterior siempre existe para cualquier subconjunto  $A$  de  $X$ , no obstante suele ser 0 o  $\infty$ . Además se puede definir también,  $H^s(A)$  como  $H^s(A) = \sup_{\delta > 0} \{H_\delta^s(A)\}$ .

Vamos a ver que efectivamente es una medida.

**Teorema 3.2.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Entonces  $H^s$  es una medida exterior métrica. Por tanto, la restricción de  $H^s$  a los conjuntos de Borel de  $X$  es una medida.

*Demostración.* Veamos que la medida  $H^s$  es una medida exterior métrica:

1. En primer lugar, es claro que  $H_\delta^s(\emptyset) = 0$ ,  $\forall \delta > 0$  y por tanto  $H_\delta^s(\emptyset) = 0$ .

2. Dados  $A \subset B$ , todo  $\delta$ -cubrimiento de  $B$  es también un  $\delta$ -cubrimiento de  $A$  y por tanto  $H_\delta^s(A) \leq H_\delta^s(B)$ . Tomando límite  $\delta \rightarrow 0$ , tenemos  $H^s(A) \leq H^s(B)$ .
3. Sean  $A_1, A_2, \dots \subset X$  y  $\delta > 0$ . Probamos primero que

$$H_\delta^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} H_\delta^s(A_n).$$

Podemos suponer que  $H_\delta^s(A_n) < +\infty \forall n$  (en caso de no cumplirse la desigualdad es clara). Sea  $\varepsilon > 0$ , dado  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $\{A_{i,n}\}_{i=1}^n$  un  $\delta$ -cubrimiento de  $A_n$ , con  $H_\delta^s(A_n) \leq \sum_{i=1}^n \text{diam}(A_{i,n})^s - \varepsilon/2^n$ . Entonces  $\{A_{i,n}\}$  es un  $\delta$ -cubrimiento de  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Así,

$$H_\delta^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(A_{i,n}))^s \leq \sum_{n=1}^{\infty} (H_\delta^s(A_n) + \varepsilon/2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} H_\delta^s(A_n) + \varepsilon$$

Como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, llegamos a

$$H_\delta^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} H_\delta^s(A_n)$$

Vamos a probar ahora que  $H^s(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} H^s(A_n)$ , para ello usaremos que  $H^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} H_\delta^s(A)$ , y por tanto  $H_\delta^s(A) \leq H^s(A)$ ,  $\forall \delta > 0$  y  $\forall A \subset X$ . Así

$$H^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} H_\delta^s(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} H^s(A_n).$$

4. Por último sean  $A, B \subset X$  con  $\inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} > 0$ . Por (3), sabemos que  $H^s(A \cup B) \leq H^s(A) + H^s(B)$ . Queda ver que  $H^s(A) + H^s(B) \leq H^s(A \cup B)$ . Tomemos  $0 < \delta < \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ . Sea  $C_n$  un  $\delta$ -cubrimiento de  $A \cup B$ . Llamemos  $I_A = \{n \in \mathbb{N} : C_n \cap A \neq \emptyset\}$  y  $I_B = \{n \in \mathbb{N} : C_n \cap B \neq \emptyset\}$ . Entonces tenemos que  $\{C_n\}_{n \in I_A}$  es un  $\delta$ -cubrimiento de  $A$  y  $\{C_n\}_{n \in I_B}$  es un  $\delta$ -cubrimiento de  $B$ . Además,  $I_A \cap I_B \neq \emptyset$  ya que si existiese  $n \in \mathbb{N}$  tal que existe un  $a \in C_n \cap A$  y un  $b \in C_n \cap B$ , tendríamos  $d(a, b) < \delta$ , y eso es imposible por la elección de  $\delta$ . Así,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \text{diam}(C_n)^s \geq \sum_{n \in I_A} \text{diam}(C_n)^s + \sum_{n \in I_B} \text{diam}(C_n)^s \geq H_\delta^s(A) + H_\delta^s(B).$$

Como esto ocurre para cada  $\delta$ -cubrimiento de  $A \cup B$ , tenemos  $H_\delta^s(A \cup B) \geq H_\delta^s(A) + H_\delta^s(B)$ . Tomando el límite cuando  $\delta$  tiende a  $0^+$ , nos queda  $H^s(A \cup B) \geq H^s(A) + H^s(B)$ .

□

La medida de Hausdorff generaliza las ideas de longitud, área y volumen, existiendo una relación entre ella y la medida de Lebesgue. Si tenemos un conjunto de Borel,  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  se tiene la siguiente relación  $H^n(A) = \frac{1}{c_n} m_n(A)$ , donde  $c_n$  es el volumen de una bola  $n$ -dimensional de diámetro 1. Y nos queda ver cómo se comporta esta medida con las aplicaciones.

**Proposición 3.3.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $A \subset X$  y  $f : A \rightarrow X$  una aplicación que satisface que  $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)^\alpha$  para todo  $x, y \in A$  con  $c > 0$  y  $\alpha > 0$  constantes. Entonces para cada  $s$

$$H_{c^\frac{s}{\alpha}}^{\frac{s}{\alpha}}(f(A)) \leq c^\frac{s}{\alpha} H^s(A).$$

*Demostración.* Si  $\{U_i\}$  es un  $\delta$ -cubrimiento de  $A$ , entonces como

$$\text{diam}(f(A \cap U_i)) \leq c \cdot \text{diam}(A \cap U_i)^\alpha \leq c \cdot \text{diam}(U_i)^\alpha$$

tenemos que  $\{f(A \cap U_i)\}$  es un  $c\delta^\alpha$ -cubrimiento de  $f(A)$ . Por lo tanto

$$\sum_i \text{diam}(f(A \cap U_i))^{\frac{s}{\alpha}} \leq c^\frac{s}{\alpha} \sum_i \text{diam}(U_i)^s \implies H_{c^\frac{s}{\alpha}}^{\frac{s}{\alpha}}(f(A)) \leq c^{s/\alpha} H_\delta^s(A).$$

tomando ínfimos. Ahora si hacemos tender  $\delta$  a 0 obtenemos el resultado.

□

Notar que para todo conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $1 > \delta > 0$ ,  $H_\delta^s(A)$  es no-creciente con respecto a  $s$ , por lo tanto  $H^s(A)$  igual. Tomando  $t > s$  y  $\{U_i\}_{i=1}^\infty$  un  $\delta$ -recubrimiento de  $F$  se tiene:

$$\sum_i \text{diam}(U_i)^t \leq \sum_i \text{diam}(U_i)^{t-s} \text{diam}(U_i)^s \leq \delta^{t-s} \sum_i \text{diam}(U_i)^s$$

y tomando ínfimos  $H^t(A) \leq \delta^{t-s} H^s(A)$ . Por lo tanto haciendo tender  $\delta$  a 0, si  $H^s(A) < \infty$  se tiene que  $H^t(A) = 0$  para todo  $t > s$ .

**Definición.** En las condiciones anteriores vemos que existe un valor de  $s$  en el que la función  $H^s(A)$  da un salto de  $\infty$  a 0. A este valor crítico se le llama la dimensión de Hausdorff-Besicovitch y se denota como  $\dim_H A$ . Formalmente lo definimos como

$$\dim_H A = \inf\{s > 0 : H^s(A) = 0\} = \sup\{s > 0 : H^s(A) = \infty\},$$

entonces tenemos que

$$H^s(A) = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 \leq s < \dim_H A \\ 0 & \text{si } s > \dim_H A. \end{cases}$$

Ahora tenemos ya todas las herramientas para calcular la dimensión de los fractales. Usando las IFS tenemos la ventaja de que la dimensión del atractor es habitualmente fácil de calcular o estimar en función de las contracciones. Los resultados que vamos a estudiar solo se aplican a contracciones del tipo  $d(f_i(x), f_i(y)) = c_i \cdot d(x, y)$ , con  $0 < c_i < 1$  el factor de contracción. Cada una de estas aplicaciones llevan a los distintos subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  a conjuntos similares más pequeños. Además toda transformación  $f$  que cumpla dicha condición tiene la propiedad de escala.

**Proposición 3.4 (Propiedad de escala).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $f$  una transformación que satisface que  $d(f(x), f(y)) = \lambda \cdot d(x, y)$ , con  $0 < \lambda$  el factor de escala. Si  $U \subset X$  es un conjunto abierto, entonces

$$H^s(f(U)) = \lambda^s H^s(U).$$

*Demostración.* Sea  $U \subset X$  y  $f$  aplicación satisfaciendo la hipótesis del enunciado. Si tenemos  $\{U_i\}$  un  $\delta$ -cubrimiento de  $U$ , entonces  $\{f(U_i)\}$  es un  $\lambda\delta$ -cubrimiento de  $f(U)$ , entonces

$$\sum \text{diam}(f(U_i))^s = \lambda^s \sum \text{diam}(U_i)^s \implies H_{\lambda\delta}^s(f(U)) \leq \lambda^s H_\delta^s(U).$$

Tomando ínfimos y haciendo que  $\delta$  tienda a 0 obtenemos  $H^s(f(U)) \leq \lambda^s H^s(U)$ . Por otro lado si sustituimos  $\lambda$  por  $\frac{1}{\lambda}$ ,  $U$  por  $f(U)$  y  $f$  por  $f^{-1}$  tenemos la desigualdad opuesta. □

Algunos de los conjuntos que cumplen esta condición son el copo de nieve de Koch, el conjunto de Cantor o el triángulo de Sierpinski.

Vemos que bajo ciertas circunstancias un conjunto semejante  $A$  tiene la dimensión de Hausdorff igual a la medida de Lebesgue para un cierto valor de  $s$  satisfaciendo que

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$$

y aún más este conjunto  $A$  tiene una  $H^s$ -medida positiva y finita. Si  $A = \cup_{i=1}^m f_i(A)$  unión “casi disjunta”, aplicando la característica de estas funciones se tiene

$$H^s(A) = \sum_{i=1}^m H^s(f_i(A)) = \sum_{i=1}^m c_i^s H^s(A).$$

Si además asumimos que  $0 < H^s(A) < \infty$ , en el valor de “salto”  $s = \dim_H A$  se satisface las condiciones anteriores.

Para poder utilizar este razonamiento tenemos que especificar que significa la unión “casi disjunta”.

**Definición (Condición de conjunto abierto).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Sean  $f_i$  aplicaciones como las enunciadas anteriormente. Se dice que  $f_i$  satisface la condición de conjunto abierto si existe  $V$  un conjunto abierto y acotado distinto del vacío tal que

$$\bigcup_{i=1}^m f_i(V) \subset V$$

con la unión disjunta.

Veamos algún ejemplo que satisfaga esta condición.

**Ejemplo 11.** Consideramos las aplicaciones contractivas del triángulo de Sierpinski del Ejemplo 4, y consideramos  $V$  como el interior del triángulo equilátero con vértices  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  y  $(1/2, \sqrt{3}/2)$ .

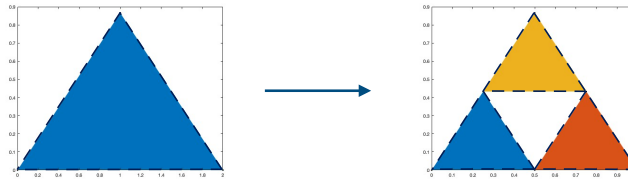


Figura 3.1: Conjunto inicial  $V$  y la primera iteración aplicada a  $V$

Como podemos observar, en este caso se cumple que para  $i = 1, 2, 3$ ,  $f_i(V) \subset V$ , por lo tanto  $\bigcup_{i=1}^3 f_i(V) \subset V$ , satisfaciendo la condición de conjunto abierto.

Ahora nuestro espacio métrico  $(X, d)$  es  $\mathbb{R}^n$ .

**Lema 3.5.** Sea  $\{U_i\}$  una colección de conjuntos abiertos disjuntos de  $\mathbb{R}^n$  tal que cada conjunto  $U_i$  contiene una bola de radio  $a_1 r$  y está contenido en una bola de radio  $a_2 r$ . Entonces toda bola  $B_r$  de radio  $r$  intersecta a los sumo  $(\frac{1+2a_2}{a_1})^n$  de las clausuras de los  $U_i$ ,  $\overline{U_i}$ .

*Demostración.* Sea  $B_r$  una bola de radio  $r$ . Supongamos que la intersección  $\overline{U_i}$  con  $B_r$  es no vacía. Tenemos que  $\overline{U_i}$  está contenido en una bola concéntrica con  $B_r$  de radio  $(1 + 2a_2)r$ , puesto que  $U_i$  está contenido en una bola de radio  $a_2 r$  y por tanto  $\text{diam}(U_i) \leq 2a_2 r$ . Ahora supongamos que  $k$  de los conjuntos  $\overline{U_i}$  cortan a  $B_r$  y los reordenamos llamándolos  $V_j$ , con  $j = 1, \dots, k$ . Llamemos  $B_{1,j}$  a la bola de radio  $a_1 r$  contenida en  $V_j$ , y sea  $B$  la bola de radio  $(1 + 2a_2)r$  que contiene a todos los  $V_j$ . Por tanto

$$\bigcup_{j=1}^k B_{1,j} \subset \bigcup_{j=1}^k V_j \subset B.$$

Entonces tenemos que

$$\text{vol}_n(\bigcup_{j=1}^k B_{1,j}) \leq \text{vol}_n(B).$$

Como los  $B_{1,j}$  son bolas disjuntas,

$$\text{vol}_n(\bigcup_{j=1}^k B_{1,j}) = \sum_{j=1}^k \text{vol}_n(B_{1,j}) = k \cdot (a_1 \cdot r)^n \cdot \text{vol}_n(B_1).$$

Por otro lado

$$\text{vol}_n(B) = (1 + 2a_2)^n r^n \text{vol}_n(B_1)$$

y así

$$k(a_1)^n \leq (1 + 2a_2)^n$$

obteniéndose así el resultado buscado.  $\square$

**Teorema 3.6.** Sea el espacio métrico  $\mathbb{R}^n$  con la métrica usual y sea  $\{f_i : X \rightarrow X : i = 1, 2, \dots, m\}$  una IFS donde las transformaciones  $f_i$  con  $i = 1, \dots, m$ , satisfacen que  $d(f_i(x), f_i(y)) = c_i \cdot d(x, y)$ , con  $0 < c_i < 1$  el factor de contracción y la condición de conjunto abierto. Si el conjunto  $A$  es el atractor de la IFS, esto significa que

$$A = \bigcup_{i=1}^m f_i(A)$$

entonces  $\dim_H A = s$ , donde  $s$  vienen dado por

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1.$$

Además, para este valor de  $s$  se satisface  $0 < H^s(A) < \infty$ .

Solo abordaremos la primera para de la demostración, la desigualdad  $\dim_H A$ , debido a la extensión de la segunda y que su inclusión no es de gran relevancia para este trabajo.

*Demostración.* En las condiciones del enunciado suponemos que  $s$  satisface  $\sum_{i=1}^m C_i^s = 1$ . Denotamos como  $\mathcal{J}_k$  al conjunto de las  $k$ -tuplas  $(i_1, \dots, i_k)$  con  $1 \leq i_j \leq m$ . Llamemos  $A_{i_1, \dots, i_k} = (f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k})(A)$ . Para el conjunto  $A$  tenemos

$$A = \bigcup_{i=1}^m f_i(A) = f_1(A) \cup \dots \cup f_m(A)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} f_1(A) &= \bigcup_{i=1}^m f_i(f_1(A)) = f_1(f_1(A)) \cup \dots \cup f_m(f_1(A)) \\ f_2(A) &= \bigcup_{i=1}^m f_i(f_2(A)) = f_1(f_2(A)) \cup \dots \cup f_m(f_2(A)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

y así

$$A = f_1(A) \cup \dots \cup f_m(A) = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^m (f_i \circ f_j)(A) = \bigcup_{\{i,j\} \in \mathcal{J}_2} A_{i,j}.$$

Reiterando podemos expresar

$$A = \bigcup_{i,j,k=1}^m (f_i \circ f_j \circ f_k)(A) = \bigcup_{\{i,j,k\} \in \mathcal{J}_3} A_{i,j,k}.$$

Con este cambio de notación, tenemos

$$A = \bigcup_{\mathcal{J}_k} A_{i_1, \dots, i_k}.$$

Vamos a probar que estos cubrimientos de  $A$  nos proporcionan una estimación superior adecuada de la medida de Hausdorff. Como la composición  $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}$  es una aplicación que también satisface la condición del enunciado con factor de contracción  $c_{i_1} \cdot \dots \cdot c_{i_k}$ , entonces

$$\sum_k \text{diam}(A_{i_1, \dots, i_k})^s = \sum_k (c_{i_1} \cdot \dots \cdot c_{i_k})^s \cdot \text{diam}(A)^s = \left( \sum_k c_{i_1}^s \right) \cdot \dots \cdot \left( \sum_k c_{i_k}^s \right) \cdot \text{diam}(A)^s = \text{diam}(A)^s.$$

Para cualquier  $\delta > 0$ , podemos tomar  $k$  de forma que satisfaga

$$\text{diam}(A_{i_1, \dots, i_k}) \leq (\max_i c_i)^k \text{diam}(A) \leq \delta$$

por lo tanto tenemos que  $H_\delta^s(A) \leq \text{diam}(A)^s$  como esto ocurre para todo  $\delta > 0$ ,  $H^s(A) \leq \text{diam}(A)^s < \infty$ . Y por lo tanto  $\dim_H A \geq s$ .  $\square$

### 3.2. Ejemplos de cálculo de la dimensión

En esta sección vamos a aplicar el último teorema de la sección anterior a varios ejemplos de fractales conocidos.

1. **El conjunto de Cantor.** Como hemos visto en el Ejemplo 3 tenemos que  $f_1(x) = x/3$  y  $f_2(x) = x/3 + 2/3$ , con factores de contracción ambos  $1/3$ . Sea  $A$  el atractor de nuestra IFS  $\{f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : i = 1, 2\}$  conocido como el conjunto de Cantor. Como nos encontramos en las condiciones del Teorema 3.6, por tanto tenemos que  $\dim_H A = s$  siendo  $s$ :

$$\sum_{i=1}^2 c_i^s = 1$$

Es decir,

$$(1/3)^s + (1/3)^s = 2(1/3)^s = 1.$$

Por tanto la dimensión del conjunto de Cantor es  $s = \frac{\log 2}{\log 3} < 1$ .

2. **El triángulo de Sierpinski.** Como ya hemos visto en el Ejemplo 4, las funciones que forman nuestra IFS  $\{f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : i = 1, 2, 3\}$  tienen factores de contracción  $c_i = 1/2$  para  $i = 1, 2, 3$ . Sea  $A$  el atractor de esta IFS. Volvemos a encontrarnos en las condiciones del Teorema 3.6, por tanto tenemos que  $\dim_H A = s$  siendo  $s$ :

$$\sum_{i=1}^3 c_i^s = 1.$$

Por tanto,

$$(1/2)^s + (1/2)^s + (1/2)^s = 3(1/2)^s = 1.$$

Es decir la dimensión del triángulo de Sierpinski es  $s = \frac{\log 3}{\log 2} > 1$ .

3. **El copo de nieve de Koch.** Por último vamos a aplicar el teorema al fractal conocido como el copo de nieve de Koch. Como hemos visto en el ejemplo 9, las funciones que forman la IFS tienen factores de contracción  $c_1 = 1/\sqrt{3}$  y  $c_i = 1/3$  para  $i = 2, \dots, 7$ . Sea  $A$  el atractor de esta IFS. Estamos en las condiciones del teorema 3.6, por tanto tenemos que  $\dim_H A = s$  siendo  $s$ :

$$\sum_{i=1}^7 c_i^s = 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^s + \sum_{i=2}^6 \left(\frac{1}{3}\right)^s = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^s + 6(1/3)^s = 1.$$

Y es fácil ver que la solución para dicha ecuación es

$$s = 2.$$

La dimensión de nuestro ejemplo del copo de nieve de Koch es 2, no obstante hay que tener en cuenta que tiene especial relevancia la frontera de este conjunto, conocida como la curva de Koch, que también es un fractal pero de dimensión aproximadamente 1,26. Veámoslo.

La curva de Koch resulta como atractor de la IFS que tiene como funciones:

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1/6 & -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 & 1/6 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_3(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1/6 & \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/6 & 1/6 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix} \quad f_4(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como podemos observar las funciones que forman nuestra IFS  $\{f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : i = 1, 2, 3, 4\}$  tienen factores de contracción  $c_i = 1/3$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Siendo  $A$  el atractor de esta IFS. Volvemos a encontrarnos en las condiciones del Teorema 3.6, por tanto tenemos que  $\dim_H A = s$  siendo  $s$ :

$$\sum_{i=1}^4 c_i^s = 1$$

$$(1/3)^s + (1/3)^s + (1/3)^s + (1/3)^s = 4(1/3)^s = 1$$

$$s = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

Es decir la curva de Koch es  $\frac{\log 4}{\log 3}$ .

### 3.3. Otra noción de dimensión: la dimensión caja ( $\dim_B$ )

En esta sección vamos a presentar otro concepto de dimensión de gran relevancia, la dimensión caja. Esta noción de dimensión es una de las más utilizadas gracias a su relativa facilidad de cálculo y su estimación empírica. La idea de esta dimensión es calcular el número de conjuntos de diámetro a lo sumo  $\delta$  que son necesarios para cubrir nuestro conjunto.

**Definición.** Sea  $F$  un conjunto no vacío y acotado de  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $N_\delta(F)$  el menor número de conjuntos de diámetro a lo sumo  $\delta$  necesarios para cubrir  $F$ . La dimensión de caja superior de  $F$  se define como

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

La dimensión de caja inferior de  $F$  se define como

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Si ambas dimensiones coinciden entonces se llama a dicho valor como dimensión caja de  $F$

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Para ilustrar el cálculo de esta dimensión y su relación con la dimensión de Hausdorff-Besicovich veamos un par de ejemplos.

**Ejemplo 12.** En primer lugar vamos a calcular la dimensión caja del conjunto de Cantor. Como hemos visto en la sección anterior la dimensión de Hausdorff-Besicovich para este fractal es  $\dim_H A = \frac{\log 2}{\log 3}$ , vamos a comprobar que coincide con la dimensión caja.

Teniendo en cuenta el atractor visto en el Ejemplo 3, parece que el cubrimiento lógico en la iteración  $k$  serán  $2^k$  intervalos  $E_k$  de longitud  $3^{-k}$ , lo que nos lleva a que  $N_\delta(A) \leq 2^k$  si  $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$  se tiene que

$$\overline{\dim}_B A = \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{-\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Por otro lado, cualquier intervalo de longitud  $\delta$  con  $3^{-k-1} < \delta \leq 3^{-k}$  interseca como mucho uno de los  $k$ -intervalos de longitud  $3^{-k}$ . Como hay  $2^k$  intervalos de longitud  $\delta$  necesarios para cubrir nuestro conjunto  $A$ , entonces  $N_\delta(A) \leq 2^k$ , lo que nos lleva a que  $\dim_B A = \frac{\log 2}{\log 3}$ . Por lo tanto  $\dim_B A = \frac{\log 2}{\log 3} = \dim_H F$  como queríamos demostrar.

Es decir, la dimensión caja del conjunto de Cantor es  $\frac{\log 2}{\log 3}$  coincidiendo con la dimensión de Hausdorff-Besicovich.

Ahora vemos un ejemplo en el que la dimensión caja y la de Hausdorff-Besicovich no coinciden.



**Ejemplo 13.** Definimos  $A = \{0, 1, 1/2, \dots\}$  un conjunto compacto en  $\mathbb{R}$  y vamos a calcular su dimensión. En primer lugar, para calcular su dimensión caja tomamos  $0 < \delta < 1/2$  y sea  $k$  un entero que satisface que  $\frac{1}{(k-1)k} > \delta \geq \frac{1}{k(k+1)}$ . Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}$  tal que  $\text{diam } U \leq \delta$ , entonces  $U$  puede cubrir como mucho a los puntos  $\{1, 1/2, \dots, 1/k\}$ , ya que  $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k} > \delta$ , entonces al menos  $k$  conjuntos de diámetro  $\delta$  son necesarios para cubrir  $A$ . Por tanto  $N_\delta(A) \geq k$ , es decir

$$\frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta} \geq \frac{\log k}{\log k(k+1)}.$$

Tomando límite superior cuando  $\delta$  tiende a  $0^+$  y cuando  $k$  tiende a  $\infty$ , tenemos  $\overline{\dim}_B A \geq 1/2$ .

Por otro lado tenemos que si  $1/2 > \delta > 0$ , tomando  $k$  tal que  $\frac{1}{(k-1)k} > \delta \geq \frac{1}{k(k+1)}$ , entonces  $k+1$  intervalos de longitud  $\delta$  cubren el intervalo  $[0, 1/k]$  dejando  $k-1$  puntos de  $B$  para los que son necesarios otros  $k-1$  intervalos. . Por tanto  $N_\delta(A) \leq 2k$ , es decir

$$\frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2k}{\log k(k-1)}.$$

Tomando límite inferior cuando  $\delta$  tiende a  $0^+$  y cuando  $k$  tiende a  $\infty$ , tenemos  $\underline{\dim}_B A \leq 1/2$ . Por tanto  $\dim_B A = 1/2$ , es decir, la dimensión caja de  $B$  es  $1/2$ .

Veamos ahora que la dimensión caja no coincide con la dimensión de Hausdorff-Besicovich. Resulta complejo calcular este conjunto como atractor de una IFS, pero tenemos demostrado que  $H^s$  es una medida para cada  $s > 0$ . Por ser medida se satisface:

$$H^s(A) = H^s(\{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{1/n\}) \leq H^s(\{0\}) + \sum_{n=1}^{\infty} H^s(\{1/n\}) = 0$$

Por tanto,  $\dim_H(A) = \inf\{s > 0 : H^s(A) = 0\} = 0$ . Junto con lo anterior observamos que la dimensión de Hausdorff-Besicovich es estrictamente menor que la dimensión caja como queríamos demostrar.

Como hemos podido observar, en general  $\dim_H \leq \dim_B$  y no tienen por qué coincidir, no obstante en las condiciones del Teorema 3.6 coinciden.



# Bibliografía

- [1] BARNSLEY, M. F.(1993), *Fractals everywhere* (2ª ed.). Academic Press..
- [2] FALCONER, K.(2014), *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*. John Wiley Sons.
- [3] FOLLAND, G. B.(1999). *Real analysis: Modern techniques and their applications* (2ª ed.). John Wiley & Sons.
- [4] GASCUEÑA, D.(2020, agosto 12), *Aplicaciones de la geometría fractal: del cambio climático al cáncer*. Open Mind BBVA, consultado el 24 de abril de 2024 en <https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/matematicas/aplicaciones-la-geometria-fractal-del-cambio-climatico-al-cancer/>.
- [5] MATHWORKS. GDAWIEC, K.(2008, mayo 29), *Fractals v1.2. Generating fractals through IFS Chaos Game. Julia sets Mandelbrot set.*, disponible en <https://es.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/10919-fractals-v1-2> (consultado el 8 de marzo de 2024).
- [6] NATIONAL GEOGRAPHIC ESPAÑA(2023, diciembre 24), *Fractales: los patrones que se encuentran en la naturaleza*. National Geographic España., disponible en [https://www.nationalgeographic.com.es/ciencia/fractales-patrones-que-se-encuentran-naturaleza\\_20807](https://www.nationalgeographic.com.es/ciencia/fractales-patrones-que-se-encuentran-naturaleza_20807).
- [7] REAL ACADEMIA ESPAÑOLA, disponible en <http://www.rae.es/>.
- [8] RIDDLE, L.(n.d.), *Classic Iterated Function Systems*. Agnes Scott College, disponible en <https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/ifs.htm>(consultado entre febrero de 2024 y junio 2024).



# Anexos

En esta parte se muestran dos ejemplos de los códigos utilizados para el dibujo de los diferentes fractales que se han visto a lo largo del trabajo.

## Código determinista

En primer lugar mostramos el código de Matlab para el dibujo del triángulo de Sierpinski a partir de un triángulo equilátero aplicando el algoritmo determinista.

```
%Caso concreto en el que lo vamos a aplicar
n = 3;
trans = {[0.5 0 0.0; 0 0.5 0.00; 0 0 1],[0.5 0.0 0.0; 0.0 0.5 0.00;
0.5 0 1],[0.5 0 0.0; 0 0.5 0.00; 0.25 (sqrt(3))/4 1.0]};
shape = [0 0 1; 1 0.0 1; 0.5 (sqrt(3))/2 1]; % figura inicial

% Aplicacion de la funcion a los datos anteriores.
IFS(trans,shape,n)

function p = IFS(trans,shape,n)
temp = shape;
[iw,ik]=size(shape) %nos da el n de filas (iw) y de columnas(ik).
tr = size(trans,2); %numero de aplicaciones contractivas
%len = length(trans);%Notar que nos calcularia lo mismo que size[2]

temp1 = zeros(iw,ik*tr^n);
w = 1;
for i = 1:n
    k = 1;
    for j = 1:tr
        for m = 1:w
            temp1(:,1+(k-1)*ik:ik+(k-1)*ik) =
                temp(:,1+(m-1)*ik:ik+(m-1)*ik) * trans{j};
            k = k + 1;
        end
    end
    w = w * tr;
    temp = temp1(:,1:ik*w);
end
points = temp;

m = size(points,2);
%Notar que iw=numero de puntos de nuestra shape fuese uno no habria
```

```
%area por lo que no ser a necesario rellenar nada.
    if iw > 1
        fill(points(:,1:ik:m),points(:,2:ik:m),'.');
    else
        plot(points(:,1:ik:m),points(:,2:ik:m),'.','MarkerSize',
            1);
    end
end
```

## Código probabilístico

En segundo lugar vamos a ver el código del modelo probabilístico aplicado al Helecho de Barnsley. Partimos del punto  $x_0 = (0,5,0,5)$ . A cada aplicación afín  $A_i x + b_i$  le asociamos una probabilidad, para  $i = 1$  tenemos 85 %, para  $i = 2$  un 7 %, para  $i = 3$  otro 7 % y por último para  $i = 4$  tenemos 1 %. Ahora generamos un número aleatorio  $rr$  entre 0 y 1, dependiendo del intervalo en el que se encuentre nuestro número aplicamos la aplicación correspondiente, y lo reiteramos  $n - 1$  veces.

```
n=100;
xx=ones(2,n);
xx(:,1)=[0.5; 0.5];

p=[0.85,0.92,0.99,1.00]; %Limites de los intervalos
A1=[0.85,0.04;-0.04,0.85];
b1=[0;1.6];
A2=[0.20,-0.26;0.23,0.22];
b2=[0;1.6];
A3=[-0.15,0.28;0.26,0.24];
b3=[0;0.44];
A4=[0.,0.;0.,0.16];
b4=[0;0];

for i=1:n-1
    rr=rand(1);
    if rr<p(1)
        xx(:,i+1)= A1*xx(:,i)+b1;
    elseif rr<p(2)
        xx(:,i+1)= A2*xx(:,i)+b2;
    elseif rr<p(3)
        xx(:,i+1)= A3*xx(:,i)+b3;
    else
        xx(:,i+1)= A4*xx(:,i);
    end
end
plot(xx(1,:),xx(2,:),'.','MarkerSize',1);
axis([-3 3. 0 10.5]);
```