

**Modelo estocástico de inspección de
sistemas dependiente de su estado.
Aplicación a mecanismos de seguridad**



Pablo Carrasco Salas
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directores:
Francisco Germán Badía Blasco
María Dolores Berrade Ursúa

Abstract

Reliability is a very important field of mathematics, aimed at keeping systems in good condition to prolong their lifetime, by predicting when they are going to fail, or by defining maintenance policies to avoid failures.

This bachelor's thesis begins with an introduction to some basic concepts in reliability and its measures, such as the reliability function and the failure rate, as well as some distributions frequently used in reliability. Next, the concept of maintenance of a system is described, along with the two different types of maintenance, preventive and corrective, which are carried out before or after failure, respectively.

We focus on systems that can be in one of three states: good, defective or failed. The state of the system remains hidden unless it is inspected. In Chapter 2, we build a model for inspection and maintenance of a system, which is the central topic of this study. The main objective is to determine both the optimum inspection frequency and the optimum time for system replacement to minimize maintenance costs. After programming an algorithm, we carry out a sensitivity analysis to see how the decision variables respond to changes in the model parameters.

In Chapter 3, we modify the model by introducing a downtime cost while the system is in the defective state until it is detected on inspection. The numerical results are analysed in order to see how this modification affects the decision variables, first by changing the parameter associated with this new cost, and then using the same values for the rest of the parameters in the previous model to compare the two models.

The main conclusions of the work provide maintenance rules that can be useful in practice.

Índice general

Abstract	III
1. Introducción	1
1.1. Medidas de la fiabilidad	1
1.2. Distribuciones habituales en fiabilidad	3
1.2.1. Distribución Weibull	3
1.2.2. Distribución exponencial	4
1.2.3. Distribución gamma	4
1.3. Tipos de mantenimiento	4
1.3.1. Mantenimiento correctivo	5
1.3.2. Mantenimiento preventivo	5
2. Modelo de inspección y mantenimiento en dos etapas	9
2.1. Introducción	9
2.2. Construcción del modelo	10
2.3. Estudio numérico	15
3. Modelo con coste en el estado defectuoso	21
3.1. Introducción y motivación	21
3.2. Ejemplos numéricos	22
4. Conclusiones	25

Capítulo 1

Introducción

Un objetivo muy común es buscar que los productos y máquinas que tenemos duren lo máximo posible e intentar prevenir que estos fallen. En los casos más graves, los fallos de un sistema pueden poner en riesgo la integridad de las personas o, al menos, provocar pérdidas económicas. De ahí el interés en evitarlos.

Este objetivo es particularmente importante en las empresas. Si las máquinas para la producción de sus productos fallan, se pueden producir costes elevados, ya que mientras la producción está parada, no se pueden fabricar (por ende vender) nuevos productos, lo que supone dejar de obtener beneficios.

Cuando hablamos de fiabilidad de un sistema nos referimos a su capacidad para funcionar durante un periodo determinado o cuando su uso es requerido. En el ámbito de la fiabilidad tiene especial relevancia el mantenimiento de los sistemas para evitar que estos fallen. Estas operaciones preventivas tienen también un coste asociado, de modo que es importante aplicar las óptimas, es decir, las que resulten lo menos costosas. Eso significa que habrá que determinar tanto la periodicidad con que deben realizarse los mantenimientos, como el momento en que no compensa hacer más y es más conveniente reemplazar el sistema por otro nuevo.

Decimos que un sistema falla cuando deja de cumplir su función correctamente. El fallo puede ser más o menos grave, llevando incluso a la sustitución del sistema. En la mayoría de los casos, se producen fallos leves por uso o deterioro que pueden ser evitados con el adecuado mantenimiento, o reparados sin necesidad de cambiar todo el sistema completo.

Los sistemas fallan de modo aleatorio y la forma en la que medimos el tiempo hasta el fallo puede variar dependiendo del producto, podemos hablar de horas, días, etc, e incluso en algunas ocasiones si nuestro sistema lleva a cabo una operación constantemente, nos puede interesar expresar el tiempo como el número de operaciones que puede llevar a cabo el sistema hasta que falle. Es preciso introducir medidas que cuantifiquen en cada instante la fiabilidad de un sistema. A partir de ellas estableceremos si es preciso realizar un mantenimiento preventivo.

1.1. Medidas de la fiabilidad

En fiabilidad utilizaremos principalmente variables aleatorias continuas, las cuales sirven para medir magnitudes como la duración de un sistema o su resistencia. En este TFG, la variable de interés será el tiempo hasta el fallo, \mathbf{X} , y nos restringiremos, por tanto, a variables aleatorias, positivas. Las principales medidas de la fiabilidad son:

- Función de densidad $f(x)$. El producto $f(x)\Delta x$ expresa la probabilidad de que el fallo ocurra en el intervalo infinitesimal $[x, x + \Delta x]$.
- Función de distribución $F(x)$. Expresa la probabilidad de que el fallo ocurra antes del instante x .
 $F(x) = P(\mathbf{X} < x)$

- Función de fiabilidad $R(x)$. Nos da la probabilidad de que el sistema funcione correctamente durante una longitud de tiempo x . Es decir, $R(x) = P(\mathbf{X} > x)$.
- La esperanza de esta variable recibe el nombre de MTTF (mean time to failure), o en español, el tiempo medio hasta el fallo.

$$MTTF = \int_0^{\infty} xf(x) dx$$

Y se puede expresar en función de $R(x)$.

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(x) dx \quad (1.1)$$

- Tasa de fallos $\lambda(x)$. Esta medida tiene particular interés y está relacionada con la probabilidad de que el sistema falle en el intervalo infinitesimal $(x, x + \Delta x)$, habiendo sobrevivido al instante x , es decir

$$\lambda(x)\Delta x = P(\mathbf{X} \leq x + \Delta x | \mathbf{X} > x)$$

Aplicando la definición de probabilidad condicional, tenemos que

$$P(\mathbf{X} \leq x + \Delta x | \mathbf{X} > x) = \frac{P[(\mathbf{X} > x) \cap (\mathbf{X} \leq x + \Delta x)]}{P(\mathbf{X} > x)} = \frac{P(x < \mathbf{X} \leq x + \Delta x)}{P(\mathbf{X} > x)} = \frac{f(x)\Delta x}{R(x)}$$

Y obtenemos la siguiente formula

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{R(x)}$$

Ahora sabiendo que $f(x) = -\frac{d}{dx}R(x)$, sustituimos en la ecuación.

$$\lambda(x) = -\frac{1}{R(x)} \frac{d}{dx}R(x)$$

Integrando entre 0 y x a ambos lados de la ecuación,

$$\int_0^x \lambda(u) du = -\ln[R(x)]$$

Por último, aplicando la exponencial a ambos lados de la ecuación, obtenemos la relación entre la tasa de fallos y la función de fiabilidad.

$$R(x) = \exp \left[-\int_0^x \lambda(u) du \right] \quad (1.2)$$

En algunos ocasiones la tasa de fallos es siempre constante, es decir, la tasa con la que falla el sistema es independiente de su edad ($\lambda(x) = \lambda \forall x$). Sin embargo, lo más habitual es que la tasa de fallos vaya aumentando con el paso del tiempo debido al uso y deterioro del sistema.

En estos casos tendremos en cuenta el tiempo que el sistema lleva funcionando x_0 para calcular la probabilidad de que siga funcionando durante un tiempo adicional x .

Definimos $R(x | x_0)$ como la fiabilidad de un sistema que ha operado sin fallo durante un tiempo x_0 . Es decir,

$$R(x | x_0) = P(\mathbf{X} > x_0 + x | \mathbf{X} > x_0) \quad x, x_0 > 0$$

Utilizando la definición de la probabilidad condicional llegamos a la siguiente expresión

$$R(x | x_0) = \frac{R(x + x_0)}{R(x_0)} \quad x, x_0 > 0$$

Aplicando la igualdad en 1.2

$$R(x | x_0) = \exp \left[-\int_{x_0}^{x_0+x} \lambda(u) du \right]$$

Y derivando esta expresión respecto a x_0 , obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_0} R(x | x_0) = [\lambda(x_0) - \lambda(x_0 + x)] R(x | x_0)$$

Esta expresión nos da una relación entre las distintas magnitudes. Como la función de fiabilidad es siempre positiva, para que la fiabilidad mejore, es decir, $\frac{\partial}{\partial x_0} R(x | x_0) > 0$, necesitamos que $\lambda(x_0) > \lambda(x_0 + x)$, es decir que la tasa de fallos sea decreciente. Sin embargo, lo más común es que la tasa de fallos aumente con el tiempo, provocando que la fiabilidad empeore.

1.2. Distribuciones habituales en fiabilidad

Vamos a introducir algunas distribuciones usadas en fiabilidad. Todas ellas son asimétricas positivas, lo cual es una característica realista al modelar tiempos de fallo en sistemas que se deterioran con el uso.

1.2.1. Distribución Weibull

Decimos que \mathbf{X} tiene una distribución Weibull de parametros m y θ ($\mathbf{X} \sim Weibull(m, \theta)$) si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{m}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{m-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^m\right] \quad x \geq 0$$

donde m es el parámetro de forma y θ es el parámetro de escala.

Su función de distribución es

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^m\right] \quad x \geq 0$$

Y su función de fiabilidad es:

$$R(x) = \exp\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^m\right] \quad x \geq 0$$

El tiempo medio hasta el fallo de esta distribución es:

$$MTTF = \theta \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

Siendo $\Gamma(t)$ la función gamma de Euler definida como

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \quad t \geq 0$$

Se advierte que cuando θ crece también lo hace el valor del MTTF, de modo que un mayor parámetro de escala conlleva un sistema de mayor fiabilidad.

Por último, esta distribución toma como tasa de fallos:

$$\lambda(x) = \frac{m}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{m-1} \quad x \geq 0$$

El valor del parámetro m nos indica como evoluciona la tasa de fallos con el tiempo

- $m < 1$, la tasa de fallos decrece con el tiempo.
- $m > 1$, la tasa de fallos crece con el tiempo.
- $m = 1$, la tasa de fallos permanece constante, y obtenemos la distribución exponencial.

1.2.2. Distribución exponencial

La distribución exponencial es un caso particular de la Weibull cuando $m = 1$, es decir, si $\mathbf{X} \sim Weibull(1, \frac{1}{\lambda})$ entonces $\mathbf{X} \sim Exp(\lambda)$.

El parámetro λ determina la tasa de fallo del sistema

$$\lambda(x) = \lambda \quad x \geq 0$$

Sus funciones son:

- Función de densidad:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

- Función de distribución:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

- Función de fiabilidad:

$$R(x) = e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

- MTTF:

$$MTTF = \frac{1}{\lambda}$$

Observamos que a medida que λ es mayor, la media se va reduciendo. Esto tiene sentido porque λ es la tasa de fallos, y si ésta aumenta, la probabilidad de que ocurra un fallo más pronto es mayor.

1.2.3. Distribución gamma

Una variable aleatoria \mathbf{X} tiene una distribución gamma con parámetros $a > 0$ y $p > 0$ si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax} \quad x \geq 0$$

donde $\Gamma(t)$ es la función gamma de Euler.

Esta distribución no tiene una función de distribución y una función de fiabilidad explícitas.

La distribución exponencial también es un caso particular de ésta, ya que si $\mathbf{X} \sim \Gamma(1, \lambda)$, entonces $\mathbf{X} \sim Exp(\lambda)$

El tiempo medio hasta el fallo de la distribución gamma está dado por:

$$MTTF = \frac{p}{a}$$

Como podemos ver, un aumento del parámetro p provoca un incremento del MTTF, pero con el parámetro a se obtiene el efecto contrario, disminuyendo la media a medida que éste aumenta.

1.3. Tipos de mantenimiento

El mantenimiento es habitual en todos los sistemas para prolongar su vida útil. El ejemplo más notable es el de los coches que se suelen revisar periódicamente con el objetivo de extender su tiempo de uso sin fallo. Los sistemas de seguridad tales como extintores y mecanismos antiincendios son sometidos también a inspecciones y mantenimientos programados. Se diferencian dos tipos de mantenimiento dependiendo de cuando se aplican, el *mantenimiento correctivo*, el cual se lleva a cabo después de que el fallo haya ocurrido, y el *mantenimiento preventivo*, aplicado antes del fallo para prevenirlo. A la hora de decidir si aplicar un mantenimiento preventivo al sistema se tienen en cuenta diversos factores como los costes que se derivan de realizarlo y las consecuencias de no hacerlo. En este último caso se encontrarían, por ejemplo, las consecuencias por fallos en mecanismos de seguridad, que pueden derivar en graves consecuencias incluso para la vida.

1.3.1. Mantenimiento correctivo

El objetivo del mantenimiento correctivo es que el sistema recupere el estado operativo a la mayor brevedad. Por este motivo, el número de fallos que tiene el sistema y el tiempo que se tarda en repararlos tienen que ser tenidos en cuenta ya que, ambos interfieren en que aquél este disponible para ser utilizado. Un mantenimiento correctivo se lleva a cabo si su coste se ve compensado por el tiempo de vida útil que se añade. Cuando no es así, se opta por reemplazar el sistema por otro nuevo. Se advierte que ese tiempo adicional de funcionamiento es una variable aleatoria lo cual conduce a la definición de una nueva medida, la disponibilidad.

La disponibilidad $A(t)$ se define como la probabilidad de que un sistema este funcionando correctamente en un instante dado t .

En ocasiones puede tener más interés determinar la disponibilidad en un intervalo definida como

$$A^*(T) = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt$$

que expresa la media de la disponibilidad puntual en un intervalo de tiempo T .

También podemos definir la disponibilidad asintótica (si es que existe) como el límite de la disponibilidad en un intervalo

$$A^*(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt$$

1.3.2. Mantenimiento preventivo

El mantenimiento preventivo se realiza antes del fallo para mejorar la fiabilidad del sistema a largo plazo, evitando posibles fallos para garantizar que esté disponible cuando lo necesitemos. Este es el caso de los mantenimientos programados de un coche, que implican cambio de aceite, filtros, etc., los cuales se realizan cada cierto tiempo, por ejemplo anualmente, o cuando se recorren un número predeterminado de kilómetros, por ejemplo, 20000 km.

Para explicar el efecto del mantenimiento en la fiabilidad empezaremos considerando una situación idealizada en la que tras un mantenimiento, el sistema vuelve a estar como nuevo. Este supuesto es razonable en las etapas iniciales de uso de un sistema. Por el contrario, no resulta útil en un sistema que ya lleva funcionando un tiempo largo. En este caso el mantenimiento supone una puesta a punto pero en ningún caso puede dejar el sistema como cuando empezó a funcionar.

Denotaremos $R(x)$ la fiabilidad de un sistema sin mantenimiento, y $R_M(x)$ la fiabilidad de un sistema con mantenimiento que se realiza periódicamente en intervalos de tiempo $T > 0$.

En instantes $x < T$, como todavía no se ha aplicado ningún mantenimiento al sistema, la fiabilidad de ambos sistemas es equivalente.

$$R_M(x) = R(x) \quad 0 \leq x < T$$

Al aplicar un mantenimiento en T que lo deja como nuevo, el deterioro que haya sufrido antes del tiempo T no afecta en el futuro. Luego para sobrevivir a un instante x , $T < x < 2T$, se tiene:

$$R_M(x) = R(T)R(x - T) \quad T \leq x \leq 2T$$

El segundo término es el resultado de que en T el sistema vuelve a estar nuevo, es decir, es como volver a empezar.

Y esto se puede generalizar para cualquier $n \in \mathbb{N}$, obteniéndose la siguiente expresión general del sistema bajo mantenimiento preventivo:

$$R_M(x) = R(T)^n R(x - nT) \quad nT \leq x \leq (n + 1)T \tag{1.3}$$

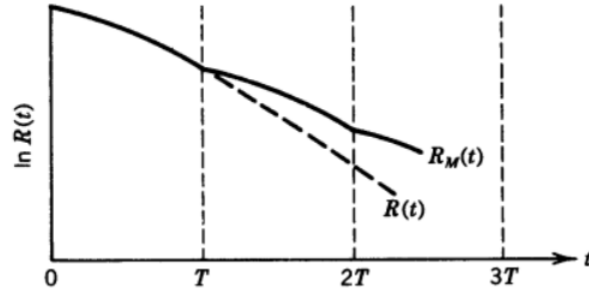


Figura 1.1: Efecto del mantenimiento preventivo idealizado en la fiabilidad

La figura 1.1 describe el incremento de la fiabilidad al aplicar el mantenimiento preventivo en intervalos de tiempo T . Se advierte, además, cómo la diferencia, respecto al sistema sin mantenimiento, aumenta a medida que éste envejece. Es decir, un sistema con un buen mantenimiento tiene una probabilidad más elevada de alcanzar duraciones largas.

Para hallar el tiempo medio hasta el fallo (MTTF) de este sistema primero partimos de la igualdad dada en 1.1, es decir,

$$MTTF = \int_0^{\infty} R_M(t) dt.$$

Para calcular esta expresión, dividimos la integral en intervalos de longitud T .

$$MTTF = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} R_M(t) dt$$

Sustituimos $R_M(t)$, por la expresión en 1.3,

$$MTTF = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} R(T)^n R(t - nT) dt$$

Aplicando el cambio de variable $u = t - nT$,

$$MTTF = \sum_{n=0}^{\infty} R(T)^n \int_0^T R(u) du$$

Por último, evaluando la serie geométrica,

$$\sum_{n=0}^{\infty} R(T)^n = \frac{1}{1 - R(T)}$$

se obtiene la expresión del tiempo medio hasta el fallo del sistema bajo mantenimiento preventivo idealizado.

$$MTTF = \frac{\int_0^T R(u) du}{1 - R(T)}$$

A continuación veremos el efecto del mantenimiento en la fiabilidad. En sistemas con tasa de fallos constante no se obtiene ninguna mejora. En estos sistemas, vimos que $R(x) = e^{-\lambda x}$. Al sustituir en la ecuación 1.3 se obtiene:

$$R_M(x) = (e^{-\lambda x})^n e^{-\lambda(x-nT)} = e^{-\lambda x} \quad nT \leq x \leq (n+1)T$$

es decir

$$R_M(x) = R(x) \quad 0 \leq x < \infty$$

Sin embargo, en sistemas con tasa de fallos creciente, el mantenimiento conduce a una mejora de la fiabilidad. Consideremos ahora la distribución Weibull, $R(x) = \exp\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^m\right]$, con m el parámetro de forma, y θ el de escala. Entonces la expresión de $R_M(x)$ viene dada como:

$$R_M(x) = \exp\left[-n\left(\frac{T}{\theta}\right)^m\right] \exp\left[-\left(\frac{x-nT}{\theta}\right)^m\right], \quad nT \leq x \leq (n+1)T$$

Para calcular el efecto del mantenimiento en la fiabilidad, calculamos la diferencia entre ambas funciones en $x = nT$.

$$\frac{R_M(nT)}{R(nT)} = \exp\left[-n\left(\frac{T}{\theta}\right)^m + \left(\frac{nT}{\theta}\right)^m\right]$$

Se advierte que solo obtendremos una mejora en la fiabilidad si el argumento de la exponencial es positivo, es decir, $(nT/\theta)^m > n(T/\theta)^m$ y por lo tanto $n^{m-1} - 1 > 0$. Con esta expresión llegamos a la conclusión de que el mantenimiento tiene un efecto positivo si $m > 1$, es decir, si la tasa de fallos crece con el tiempo.

Ahora consideremos que el mantenimiento realizado no es perfecto, sino que existe una probabilidad p de que el propio mantenimiento induzca el fallo del sistema. Esta situación ocurre, en la práctica, cuando se utilizan repuestos de baja calidad o las personas que realizan el mantenimiento no han recibido la formación o el entrenamiento requeridos. La función de fiabilidad resulta ser:

$$R_M(x) = R(T)^n(1-p)^n R(x-nT) \quad nT \leq x \leq (n+1)T$$

siendo $(1-p)$ la probabilidad de que el sistema no falle tras realizar un mantenimiento. Tomemos el caso mencionado anteriormente con $m > 1$ y evaluemos la fiabilidad resultante. Se advierte que para p próximo a 0, podemos aproximar $(1-p)^n \approx e^{-np}$. Por consiguiente,

$$\frac{R_M(nT)}{R(nT)} = \exp\left[-n\left(\frac{T}{\theta}\right)^m - np + \left(\frac{nT}{\theta}\right)^m\right]$$

Entonces de nuevo, para que exista mejora con el mantenimiento, el argumento de la exponencial debe ser positivo y para ello se debe cumplir que

$$p < (n^{m-1} - 1) \left(\frac{T}{\theta}\right)^m \tag{1.4}$$

Para un valor de p dado, a medida que el tiempo pasa y el número de mantenimientos n va en aumento, el valor de p puede llegar a satisfacer la desigualdad en 1.4. Por lo tanto, el mantenimiento imperfecto podría ser beneficioso en el largo plazo cuando el sistema acumula un desgaste o deterioro tal que la posibilidad de que el mantenimiento mejore su estado compensa el riesgo de que aquel induzca un fallo.

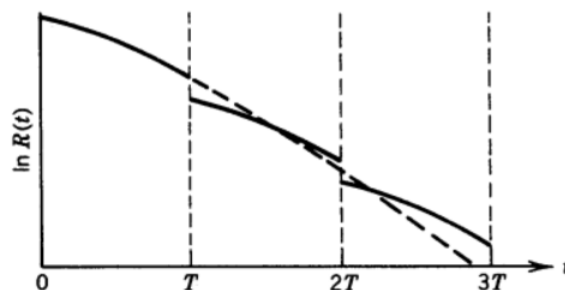


Figura 1.2: Efecto del mantenimiento preventivo imperfecto. Fiabilidad de un sistema bajo mantenimiento (línea continua) y sin mantenimiento (línea discontinua).

La figura 1.2 refleja esta situación. En los instantes $T, 2T, 3T, \dots$, en los que se realiza el mantenimiento imperfecto se advierte que la fiabilidad disminuye en un sistema bajo mantenimiento (línea

continua) respecto a otro sin mantenimiento (línea discontinua) en las etapas iniciales. Es decir, un mantenimiento deficiente resulta adverso en un sistema nuevo. Sin embargo, a medida que el tiempo avanza, la diferencia entre ambas líneas se reduce. Cuando ya el sistema lleva un largo tiempo de uso y su fiabilidad ha decaído lo suficiente, el mantenimiento, aunque imperfecto, puede resultar beneficioso. (Lewis [1]).

Capítulo 2

Modelo de inspección y mantenimiento en dos etapas

2.1. Introducción

En este capítulo vamos a presentar el modelo que es la base del TFG, un modelo de inspección y mantenimiento aplicado a sistemas que no funcionan de forma permanente sino en determinados momentos donde se demande su uso, como por ejemplo mecanismos de seguridad tales como airbags, alarmas anti-incendios, etc. En estos casos es preciso garantizar que el sistema funcionará cuando sea requerido para ello.

Vamos a considerar un sistema que puede presentar 3 posibles estados: bueno, defectuoso o fallo. El estado defectuoso indica una situación intermedia en el que el sistema sigue funcionando correctamente pero posee un cierto nivel de deterioro.

Como estos sistemas no operan de forma continua, el defecto y el fallo pueden ocurrir mientras están en stand-by, es decir, durante los periodos en los que no están en uso. Este tipo de defectos y fallos se denominan *no revelados* ya que, para ser advertidos antes de que haya una demanda de uso, es preciso realizar inspecciones o pruebas periódicas para conocer su estado. Este es el caso de los extintores de incendios que son sometidos a revisiones periódicas para garantizar que funcionarán caso de ser necesario. Todos llevan un registro en el que se anota el instante cuando se llevó a cabo la última inspección.

El sistema se somete a dos fases de inspección periódica. En la primera fase el sistema se inspeccionará periódicamente cada T_1 unidades de tiempo. Cuando se detecte el estado defectuoso, el sistema pasará a la segunda fase donde la frecuencia de inspección aumenta y se realizará cada T_2 unidades de tiempo, con $T_2 < T_1$. Incrementar la frecuencia de inspección para un sistema que ha entrado en defecto, es razonable ya que el fallo se hace más inminente. De hecho, es la práctica habitual en mecanismos como los coches. Así, la inspección técnica de vehículos (ITV) pasa de realizarse cada dos años para vehículos entre 4 y 10 años de edad a ser anual cuando tienen más de 10 años. También se procede de este modo en el ámbito de la medicina. Los intervalos de revisión de un paciente se suelen acortar cuando su estado empeora.

En la introducción hemos comentado que las políticas de mantenimiento vienen determinadas por los costes que conlleva hacerlas frente a los derivados de no ponerlas en práctica. Así, en la construcción del modelo tendremos en cuenta diferentes costes. En particular, el denominado coste por downtime, es decir, el ocasionado durante el tiempo que el sistema funciona mal o no funciona en absoluto, y que pasa inadvertido, si el sistema no es inspeccionado.

El esquema básico de funcionamiento del modelo de inspección y mantenimiento es el siguiente: Desde $t = 0$, cuando es nuevo, se inspecciona cada T_1 unidades de tiempo, es decir, en instantes $T_1, 2T_1, \dots$, hasta un máximo de N_1 inspecciones en esta fase. Las inspecciones tienen como objetivo identificar el estado en que se encuentra el sistema. Vamos a asumir que son perfectas y no se produce error alguno en ellas, de modo que indican fielmente, en cuál de los tres estados se encuentra el sistema.

Al alcanzar el instante $N_1 T_1$ se reduce la frecuencia de inspección que pasa a realizarse en intervalos de amplitud T_2 ($T_2 < T_1$). La segunda etapa puede iniciarse también antes de $N_1 T_1$, si en alguna de las inspecciones de la primera etapa se advierte que el sistema está en estado defectuoso. En resumen; la segunda etapa se inicia cuando se detecta defecto o al alcanzarse el máximo de inspecciones (N_1) de la primera etapa, lo que ocurra en primer lugar. La segunda fase, que tiene un máximo de N_2 inspecciones, concluirá cuando se produzca el primero de los siguientes eventos: al detectarse el fallo o tras realizarse N_2 inspecciones.

El reemplazamiento del sistema por uno nuevo de iguales características ocurrirá en cualquiera de los dos casos siguientes:

1. Una inspección revela que el sistema está en estado de fallo.
2. Al alcanzar el máximo de inspecciones de la segunda fase (N_2) sin haberse detectado fallo con anterioridad. Este segundo caso se trata, por tanto, de un mantenimiento preventivo.

Un concepto clave en la definición de la función de coste es el denominado ciclo. Un ciclo se define como el tiempo aleatorio que transcurre entre dos renovaciones consecutivas del sistema, es decir, desde que es nuevo hasta que se reemplaza por otro idéntico.

En los cálculos que siguen es preciso calcular el valor medio de un ciclo y el coste medio incurrido en él. En este coste habrá que incluir el ocasionado por las inspecciones así como por el tiempo que el sistema permanece inadvertidamente en estado de fallo (downtime) y el de la sustitución.

2.2. Construcción del modelo

Antes de empezar a construir el modelo vamos a mostrar la notación que utilizaremos en este.

- X : tiempo que transcurre hasta que el sistema presenta defecto. Las funciones de densidad, distribución y fiabilidad se denotan, respectivamente, por $f_X(x)$, $F_X(x)$ y $\bar{F}_X(x)$.
- Y : tiempo desde que ocurre el defecto hasta que se produce el fallo. Las funciones de densidad, distribución y fiabilidad se denotan, respectivamente, por $f_Y(y)$, $F_Y(y)$, $\bar{F}_Y(y)$.
- W : tiempo desde que ocurre el fallo hasta que se detecta en inspección (downtime).
- τ : ciclo. Tiempo que transcurre hasta la renovación del sistema por fallo o preventivamente.
- I_F : variable indicadora del suceso “el ciclo se completa en fallo” cuya probabilidad denotamos P_F .
- I_M : variable indicadora del suceso “el ciclo se completa en mantenimiento preventivo”. Su probabilidad se denota por P_M .
- K_1 : número de inspecciones en un ciclo correspondientes a la fase I.
- K_2 : número de inspecciones en un ciclo correspondientes a la fase II.
- T_1 y T_2 : intervalos de inspección en las fases 1 y 2 respectivamente. T_1 y T_2 son variables de decisión.
- N_1 y N_2 : máximo número de inspecciones en las fases I y II, respectivamente. N_1 y N_2 son variables de decisión.
- c_0 : coste unitario de inspección.
- c_d : coste por unidad de tiempo mientras el sistema está en estado de fallo.
- c_F : coste del reemplazamiento por fallo.

- c_M : coste del mantenimiento preventivo. Se suele asumir ($c_M < c_F$) ya que cuando el sistema se reemplaza antes de haber fallado puede tener un valor residual por un eventual uso de segunda mano.
- $C(\tau)$: coste incurrido en un ciclo.

En la Figura 2.1 se muestran las diferentes situaciones que conducen al reemplamamiento del sistema y con ello a que se complete un ciclo. Las tres primeras acaban con mantenimiento correctivo, es decir, el sistema falla y es reemplazado por otro nuevo antes de completar las N_2 inspecciones de la fase II.

En el caso 1, el sistema entra en el estado defectuoso durante la fase I. En el ejemplo de la Figura, esta circunstancia ocurre en el intervalo $[3T_1, 4T_1]$. Cuando se detecta en la siguiente inspección, se inicia la fase II. El sistema falla más adelante en la fase II, en el ejemplo entre $4T_1 + 2T_2$ y $4T_1 + 3T_2$. Al detectarse el fallo en la inspección que tiene lugar en $4T_1 + 3T_2$, se procede a la sustitución del sistema por otro nuevo, completándose el ciclo.

En el caso 2, tanto el defecto como el fallo ocurren en un mismo intervalo entre inspecciones en la fase I. En el ejemplo se representa que ambos, defecto y fallo, tienen lugar en el intervalo $[4T_1, 5T_1]$. Tras la inspección realizada en el instante $5T_1$ que detecta el fallo, el sistema se renueva.

En el caso 3, finalizan las N_1 inspecciones de la fase I sin haberse detectado defecto y se inicia la fase II. Con posterioridad ocurre un defecto (entre $N_1T_1 + T_2$ y $N_1T_1 + 2T_2$ en el ejemplo) que no tiene ningún efecto en la inspección al haberse iniciado ya la fase II. El fallo ocurre dentro de la fase II que, tras ser advertido, conduce a la renovación del sistema. En la Figura la renovación tendrá lugar tras la inspección que se realiza en $N_1T_1 + 5T_2$.

En los casos 4 y 5 se realizan las N_2 inspecciones de la fase II sin que se detecte ningún fallo. Por lo tanto se termina igualmente el ciclo pero esta vez en mantenimiento preventivo, por lo que el coste por reemplazamiento será menor. En el caso 4 se detecta un defecto sin que llegue a ocurrir el fallo, y en el caso 5 el sistema está en buen estado al alcanzar el instante $N_1T_1 + N_2T_2$. Es decir, se realizan el máximo de inspecciones en cada una de las dos fases sin que se haya detectado defecto ni fallo.

En la práctica, estas renovaciones preventivas de un sistema que funciona perfectamente se llevan a cabo con el objetivo de introducir mecanismos nuevos que presentan algún tipo de mejora o actualización. Asimismo es la política habitual cuando el sistema ha superado el tiempo previsto para su amortización. Dado que el sistema en uso está en buen estado tiene un valor adicional como equipo de segunda mano, lo cual justifica que el coste de reemplazamiento preventivo se considere inferior al de sustitución por fallo.

La inspección y mantenimiento del sistema se realiza del siguiente modo:

Desde el instante $t = 0$, se inicia la fase I de inspección cada T_1 unidades de tiempo. La variable K_1 , que representa el número de inspecciones de esta fase, es una variable aleatoria discreta que toma valores en el conjunto $\{1, 2, \dots, N_1\}$. A continuación se presentan las probabilidades de $K_1 = i$. $i = 1, 2, \dots, N_1$.

Por un lado, para $i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$, el defecto debe ocurrir entre las inspecciones $i - 1$ e i , luego la variable \mathbf{X} , tiempo hasta el defecto, debe tomar un valor entre $(i - 1)T_1$ y iT_1 , luego se tiene

$$P(K_1 = i) = \int_{(i-1)T_1}^{iT_1} f_X(x)dx = \bar{F}_X((i-1)T_1) - \bar{F}_X(iT_1). \quad (2.1)$$

Y para que K_1 tome el valor N_1 no debe de haberse detectado defecto o fallo en las inspecciones previas, por lo que

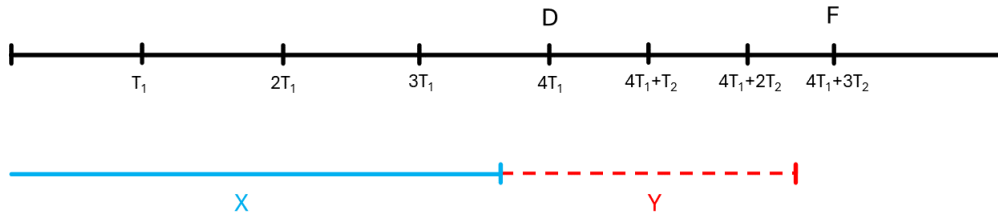
$$P(K_1 = N_1) = \bar{F}_X((N_1 - 1)T_1). \quad (2.2)$$

Así el número medio de inspecciones de fase I en un ciclo es

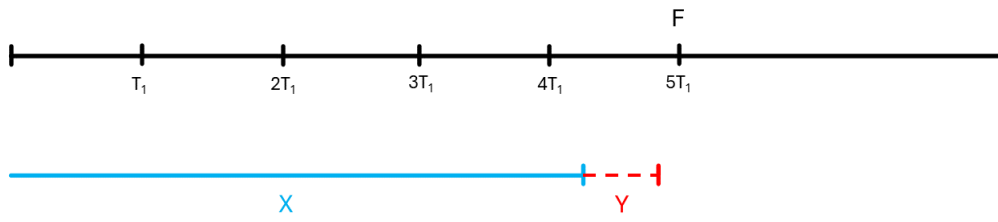
$$E[K_1] = \sum_{i=1}^{N_1} iP(K_1 = i) = \sum_{i=0}^{N_1-1} \bar{F}_X(iT_1). \quad (2.3)$$

A continuación nos centramos en la distribución de la variable K_2 , que describe el número de inspecciones en la segunda fase. K_2 toma valores en el conjunto $\{0, 1, 2, \dots, N_2\}$. El caso $K_2 = 0$ se da cuando

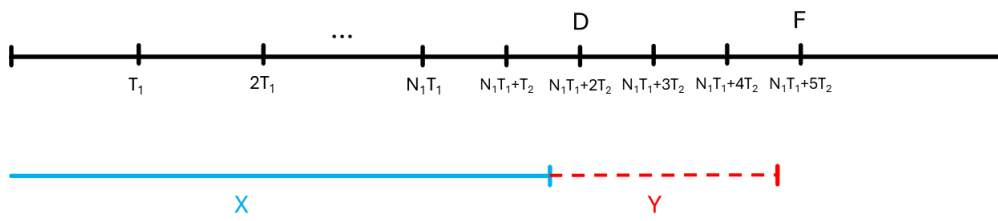
Caso 1:



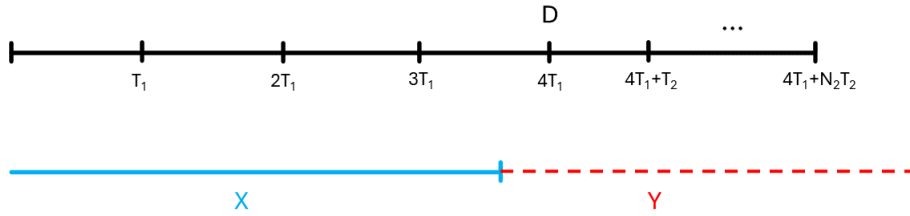
Caso 2:



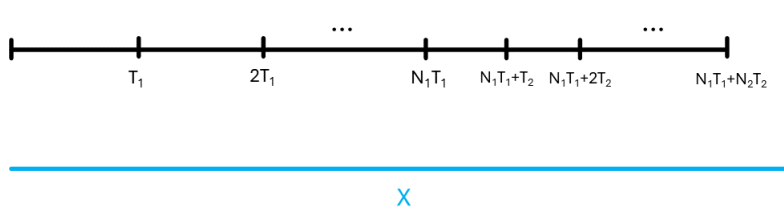
Caso 3:



Caso 4:



Caso 5:



D: se detecta defecto
F: se detecta fallo

Figura 2.1: Esquema de funcionamiento del modelo.

se detecta fallo en la primera fase, por lo que se procede a renovar el sistema sin pasar por la segunda fase. Para que esto ocurra, defecto y fallo deben tener lugar en el mismo intervalo entre dos inspecciones consecutivas, ya que, en otro caso, detectaríamos defecto en una inspección y se iniciaría la segunda fase que tendría, al menos, una inspección. Por lo tanto,

$$P(K_2 = 0) = \sum_{i=1}^{N_1} \int_{(i-1)T_1}^{iT_1} f_X(x) \left(\int_0^{iT_1-x} f_Y(y) dy \right) dx = \sum_{i=1}^{N_1} \int_{(i-1)T_1}^{iT_1} f_X(x) (F_Y(iT_1 - x) - 1) dx. \quad (2.4)$$

Para calcular la probabilidad de que $K_2 = k$, con $k = 1, 2, \dots, N_2 - 1$, vamos a distinguir entre dos posibles sucesos:

- Δ_i : ocurre defecto en $((i-1)T_1, iT_1)$, que se detecta en iT_1 , $i = 1, 2, \dots, N_1$
- D_i : ocurre defecto en $(N_1T_1 + (i-1)T_2, N_1T_1 + iT_2)$, $i < k$, lo que implica que se han completado las N_1 inspecciones de la fase I.

Las probabilidades correspondientes de los eventos anteriores son:

$$P(\Delta_i) = \int_{(i-1)T_1}^{iT_1} f_X(x) dx \quad (2.5)$$

$$P(D_i) = \int_{N_1T_1+(i-1)T_2}^{N_1T_1+iT_2} f_X(x) dx \quad (2.6)$$

Fijando el tiempo x donde se produce el defecto, podemos calcular las siguientes probabilidades condicionales para $k = 1, 2, \dots, N_2 - 1$:

$$P(K_2 = k | \Delta_{ix}) = \int_{iT_1+(k-1)T_2-x}^{iT_1+kT_2-x} f_Y(y) dy, \quad (2.7)$$

donde Δ_{ix} indica que ha ocurrido un defecto en $x \in ((i-1)T_1, iT_1)$, es decir, entre dos inspecciones de la primera fase.

$$P(K_2 = k | D_{ix}) = \int_{N_1T_1+(k-1)T_2-x}^{N_1T_1+kT_2-x} f_Y(y) dy, \quad (2.8)$$

con D_{ix} denotando que ha ocurrido un defecto en $x \in (N_1T_1 + (i-1)T_2, N_1T_1 + iT_2)$, por tanto, entre dos inspecciones de la segunda fase.

Así, para $k = 1, 2, \dots, N_2 - 1$, $i = 1, 2, \dots, N_1$, se tiene

$$P(K_2 = k, \Delta_i) = P(\Delta_i) \cdot P(K_2 = k | \Delta_{ix}) = \int_{(i-1)T_1}^{iT_1} f_X(x) \left(\int_{iT_1+(k-1)T_2-x}^{iT_1+kT_2-x} f_Y(y) dy \right) dx. \quad (2.9)$$

La fórmula superior indica que el defecto ocurre dentro de la fase I, iniciándose la fase II. El fallo tiene que ocurrir dentro del intervalo k de la fase II.

Si el defecto ocurre en la fase II, $K_2 = 1$ implica que tanto el defecto como el fallo tienen lugar en el primer intervalo $(N_1T_1, N_1T_1 + T_2)$, por lo que

$$P(K_2 = 1, D_1) = \int_{N_1T_1}^{N_1T_1+T_2} f_X(x) \left(\int_0^{N_1T_1+T_2-x} f_Y(y) dy \right) dx. \quad (2.10)$$

De modo general para $k = 2, \dots, N_2 - 1$, $i = 1, 2, \dots, k - 1$

$$P(K_2 = k, D_i) = \int_{N_1T_1+(i-1)T_2}^{N_1T_1+iT_2} f_X(x) \left(\int_{N_1T_1+(k-1)T_2-x}^{N_1T_1+kT_2-x} f_Y(y) dy \right) dx. \quad (2.11)$$

Si bien el defecto ocurre en un intervalo anterior al del fallo, no se produce ningún efecto puesto que ya se ha iniciado la fase II.

Además, para $k = 1, 2, \dots, N_2 - 1$, se verifica

$$P(K_2 = k, D_k) = \int_{N_1 T_1 + (k-1)T_2}^{N_1 T_1 + kT_2} f_X(x) \left(\int_0^{N_1 T_1 + kT_2 - x} f_Y(y) dy \right) dx. \quad (2.12)$$

Una vez calculadas todas las probabilidades para todos los casos en los que se puede dar el defecto, la probabilidad de que $K_2 = k$, para $k = 1, 2, \dots, N_2 - 1$, es la suma de todas ellas ya que los sucesos de las fórmulas 2.9-2.12 son excluyentes.

$$P(K_2 = k) = \sum_{i=1}^{N_1} P(K_2 = k, \Delta_i) + \sum_{i=1}^k P(K_2 = k, D_i) \quad (2.13)$$

El último caso, $K_2 = N_2$, sucederá cuando no haya ocurrido fallo antes de la inspección $N_2 - 1$ de la segunda fase. Podemos distinguir tres posibles casos, que el defecto haya ocurrido en la fase I y no se haya detectado fallo en ninguna de las inspecciones de la fase II exceptuando la última, que el defecto haya ocurrido en la fase II y no se ha detectado fallo en las inspecciones restantes hasta la inspección $N_2 - 1$ de la fase II, y que no haya ocurrido defecto hasta ese momento.

Calculando la probabilidad de cada uno de estos casos y sumándolos, tenemos que

$$\begin{aligned} P(K_2 = N_2) = & \quad (2.14) \\ & \sum_{i=1}^{N_1} \int_{(i-1)T_1}^{iT_1} f_X(x) \bar{F}_Y(iT_1 + (N_2 - 1)T_2 - x) dx + \\ & \sum_{i=1}^{N_2-1} \int_{N_1 T_1 + (i-1)T_2}^{N_1 T_1 + iT_2} f_X(x) \bar{F}_Y(N_1 T_1 + (N_2 - 1)T_2 - x) dx + \bar{F}_X(N_1 T_1 + (N_2 - 1)T_2). \end{aligned}$$

Con las expresiones en (2.13) y (2.14) se obtiene el número medio de inspecciones en la fase II,

$$E[K_2] = \sum_{k=1}^{N_2} k P(K_2 = k). \quad (2.15)$$

Así, la duración de un ciclo es

$$\tau = K_1 T_1 + K_2 T_2,$$

y su valor medio está dado por

$$E[\tau] = T_1 E[K_1] + T_2 E[K_2]. \quad (2.16)$$

El coste de la renovación toma dos valores, c_F y c_M , dependiendo de que el ciclo se complete tras detectarse fallo o, de modo preventivo, al final de las N_2 inspecciones de la segunda fase. Las probabilidades respectivas de estos sucesos excluyentes se denotan P_F y P_M ($P_F + P_M = 1$). En los modelos de mantenimiento se suele asumir que $c_M < c_F$. Como ya se ha indicado anteriormente, el hecho de que un sistema que aún funciona pueda tener un valor residual como elemento de segunda mano, es una de las causas que justifica este supuesto.

Se completa un ciclo en mantenimiento preventivo si no se ha detectado fallo en ninguna de las N_2 inspecciones de la fase II. El razonamiento es muy similar al cálculo de $P(K_2 = N_2)$, con la diferencia de que ahora el sistema no debe dar fallo en la última inspección. Entonces se llega a

$$\begin{aligned} P_M = & \quad (2.17) \\ & \sum_{i=1}^{N_1} \int_{(i-1)T_1}^{iT_1} f_X(x) \bar{F}_Y(iT_1 + N_2 T_2 - x) dx + \\ & \sum_{i=1}^{N_2} \int_{N_1 T_1 + (i-1)T_2}^{N_1 T_1 + iT_2} f_X(x) \bar{F}_Y(N_1 T_1 + N_2 T_2 - x) dx + \bar{F}_X(N_1 T_1 + N_2 T_2). \end{aligned}$$

En el primer término, el defecto ocurre en un intervalo $((i-1)T_1, iT_1)$ de la primera fase, y el fallo no ocurre antes de la inspección N_2 de la segunda fase, es decir, no ocurre antes del instante $iT_1 + N_2T_2$. En el segundo término el defecto ocurre en la segunda fase, completándose las N_1 inspecciones de la fase I, y el fallo no ocurre antes del instante $N_1T_1 + N_2T_2$. En el tercer término el sistema no llega a defecto en ningún momento del ciclo.

En el modelo se asume un coste c_d mientras el sistema está inadvertidamente en estado de fallo. Este tiempo, denominado downtime, abarca desde que ocurre el fallo hasta que es detectado en la siguiente inspección. El valor medio del downtime, W , está dado a continuación

$$\begin{aligned}
 E[W] = & \tag{2.18} \\
 & \sum_{i=1}^{N_1} \int_{(i-1)T_1}^{iT_1} f_X(x) \left(\int_0^{iT_1-x} (iT_1 - x - y) f_Y(y) dy \right) dx + \\
 & \sum_{i=1}^{N_1} \int_{(i-1)T_1}^{iT_1} f_X(x) \left(\sum_{k=1}^{N_2} \int_{iT_1+(k-1)T_2-x}^{iT_1+kT_2-x} (iT_1 + kT_2 - x - y) f_Y(y) dy \right) dx + \\
 & \sum_{i=1}^{N_2} \int_{N_1T_1+(i-1)T_2}^{N_1T_1+iT_2} f_X(x) \left(\int_0^{N_1T_1+iT_2-x} (N_1T_1 + iT_2 - x - y) f_Y(y) dy \right) dx + \\
 & \sum_{i=1}^{N_2-1} \int_{N_1T_1+(i-1)T_2}^{N_1T_1+iT_2} f_X(x) \left(\sum_{k=i+1}^{N_2} \int_{N_1T_1+(k-1)T_2-x}^{N_1T_1+kT_2-x} (N_1T_1 + kT_2 - x - y) f_Y(y) dy \right) dx.
 \end{aligned}$$

En el primer término, el defecto y el fallo ocurren en un mismo intervalo de la primera fase. En el segundo, el defecto y el fallo ocurren en intervalos diferentes. En este caso, la detección del primero induce el inicio de la fase II, de modo que al tratarse de intervalos distintos, el fallo sólo puede tener lugar en la fase II. El tercer término indica que el defecto y el fallo ocurren en el mismo intervalo, pero esta vez en un intervalo de la fase II. En el cuarto término, defecto y fallo ocurren en diferentes intervalos de la segunda fase.

En la notación, se había presentado el coste unitario de inspección, c_0 , el coste por unidad de tiempo mientras el sistema está en estado de fallo, c_d y los costes de reemplazamiento preventivo, c_M y por fallo, c_F . Con todos ellos se tiene el coste incurrido hasta que el sistema es sustituido por otro nuevo, es decir, el coste de un ciclo,

$$C(\tau) = c_0(K_1 + K_2) + c_dW + c_M I_M + c_F(1 - I_M).$$

donde I_M es la variable indicadora de reemplazamiento preventivo en la inspección N_2 de la segunda fase. Así, el coste medio de un ciclo es

$$E[C(\tau)] = c_0(E[K_1] + E[K_2]) + c_dE[W] + c_M P_M + c_F(1 - P_M). \tag{2.19}$$

A partir de las expresiones de la longitud media de un ciclo y su coste medio dadas, respectivamente, en 2.16 y 2.19, se construye la función de coste asociada a este modelo.

$$Q(T_1, T_2, N_1, N_2) = \frac{c_0(E[K_1] + E[K_2]) + c_dE[W] + c_M P_M + c_F(1 - P_M)}{T_1 E[K_1] + T_2 E[K_2]} \tag{2.20}$$

2.3. Estudio numérico

Para su aplicación práctica el objetivo es encontrar la política de mantenimiento óptima, es decir, los valores $(T_1^*, T_2^*, N_1^*, N_2^*)$ que minimizan la función de coste.

$$(T_1^*, T_2^*, N_1^*, N_2^*) = \underset{T_1, T_2, N_1, N_2}{\operatorname{arg\,mín}} Q(T_1, T_2, N_1, N_2)$$

El estudio de sensibilidad arranca fijando unos valores de referencia (caso base) para los parámetros del modelo. Estos son, de una parte los que definen las variables Weibull y, de otra, los costes del problema. A partir de ellos se obtienen los valores óptimos de las variables de decisión ($T_1^*, T_2^*, N_1^*, N_2^*$).

A continuación, se introducen cambios en los parámetros, de uno en uno, obteniéndose en cada caso la política y el coste óptimos.

Este estudio finaliza con el análisis de las tablas que contienen los resultados así obtenidos en la búsqueda de patrones que puedan tener aplicación práctica. Se trata de investigar cómo debe modificarse la inspección y el mantenimiento de un sistema según sean los valores de los parámetros del modelo.

Tomamos los valores del caso base que se indican a continuación:

Costes	$c_0 = 5$	$c_d = 1,35$	$c_m = 55$	$c_f = 105$
Parámetros de X e Y	$m_1 = 2$	$m_2 = 2$	$\theta_1 = 500$	$\theta_2 = 5000$

Tabla 2.1: Política óptima bajo cambios en los parámetros de escala

Nº	θ_1	θ_2	N_1^*	T_1^*	$N_1^*T_1^*$	N_2^*	T_2^*	$N_2^*T_2^*$	$N_1^*T_1^* + N_2^*T_2^*$	Q^*
1	500	5000	2	1105,067	2210,133	4	286,122	1144,487	3354,620	0,051
2	1000	5000	5	1116,752	5583,761	3	303,349	910,048	6493,809	0,043
3	1500	5000	7	1111,826	7782,779	2	315,146	630,292	8413,071	0,036
4	2000	5000	10	1120,078	11200,779	2	280,895	561,789	11762,568	0,031
5	3000	5000	14	1156,531	16191,427	2	229,265	458,529	16649,957	0,025
6	500	1000	6	380,044	2280,264	1	126,611	126,611	2406,875	0,111
7	500	2000	3	624,387	1873,161	2	188,950	377,900	2251,061	0,083
8	500	3000	2	832,991	1665,982	3	220,122	660,365	2326,347	0,068
9	500	4000	2	997,217	1994,433	3	271,006	813,017	2807,450	0,058
10	5000	2000	23	747,449	17191,318	2	43,359	86,718	17278,036	0,023
11	5000	3000	21	930,992	19550,832	2	83,936	167,871	19718,703	0,021
12	5000	4000	20	1091,738	21834,755	2	124,968	249,937	22084,692	0,019

La Tabla 2.1 contiene la política óptima ($T_1^*, T_2^*, N_1^*, N_2^*$) y el coste óptimo $Q^* = Q(T_1^*, T_2^*, N_1^*, N_2^*)$ al variar los parámetros de escala. El parámetro que varía se indica en negrita.

Los resultados muestran que al aumentar θ_1 , aumenta tanto el número de inspecciones en la primera fase. Esto se produce porque es mayor el tiempo hasta la ocurrencia del defecto y, con ello, se puede prolongar el periodo correspondiente a la primera fase ($N_1^*T_1^*$). Los cambios de θ_1 también afectan a la fase II que se acorta, si bien el comportamiento de $N_2^*T_2^*$ se advierte robusto frente a los cambios en θ_1 , en comparación con $N_1^*T_1^*$. Es importante recordar que la fase II se inicia de modo automático al detectarse el defecto y, por consiguiente, está dirigida a la detección del fallo. Por ello, esta fase es menos sensible a los cambios de θ_1 . El aumento de θ_1 conduce a un alargamiento de $N_1^*T_1^* + N_2^*T_2^*$, es decir, del tiempo máximo de uso del sistema. Este efecto es razonable ya que un mayor valor de θ_1 está asociado a un sistema más fiable. Al mismo tiempo se advierte que el intervalo entre inspecciones es bastante estable, en las dos fases, ante los cambios de θ_1 .

El aumento del tiempo desde el defecto hasta el fallo, reflejado en el incremento de θ_2 , tiene el efecto contrario. La primera fase tiene a ser más corta mientras que la segunda aumenta. El efecto de aumentar θ_2 , se refleja en un significativo incremento de la frecuencia de inspección en ambas fases. Al comparar los casos 6 y 9 se advierte que el incremento de T_1^* (162%) es notablemente superior al de T_2^* (114%). Dado que el modelo sólo considera un coste a partir de que el sistema está en estado de fallo, no hay inconveniente en prolongar el tiempo entre inspecciones en la primera fase, pues no se deriva ninguna penalización durante el tiempo que el sistema está en estado defectuoso. Pero por otro lado el incremento en la segunda, es mucho más cauto, con tal de evitar los costes por fallo. Por tanto, sólo el aumento del tiempo del defecto al fallo llega a inducir una importante relajación en las inspecciones. El incremento de θ_2 implica, en todos los casos un incremento del tiempo de uso del sistema antes de ser reemplazado

Los casos 1 a 9 recogen situaciones en las que $\theta_2 > \theta_1$, es decir, se refieren a un sistema que puede funcionar largo rato en estado defectuoso antes de que ocurra el fallo total. Los casos 10, 11 y 12 permiten analizar el efecto inverso cuando el fallo presenta una inminencia mayor tras el defecto. En este caso el efecto de aumentar θ_2 tiene un efecto más acusado en la relajación de las inspecciones de la segunda fase. Al comparar la diferencia entre los casos 10 y 12 frente a los casos 7 y 9 tenemos que T_2^* tiene un aumento del 188% frente a un 43% del otro caso. Sin embargo, el aumento de T_1^* es en menor proporción, un 46% frente a un 59%.

Las mejoras tanto en θ_1 como en θ_2 producen una disminución del coste óptimo. Este hecho podría indicar que aunque un sistema de mejores prestaciones pueda ser también más caro que otro menos fiable, se advierte que este segundo puede requerir una sustitución más temprana por otro. Este comportamiento recoge la idea de que lo barato puede salir caro.

Tabla 2.2: Política óptima bajo cambios en los costes

Nº	c_0	c_d	c_m	c_f	N_1^*	T_1^*	$N_1^*T_1^*$	N_2^*	T_2^*	$N_2^*T_2^*$	$N_1^*T_1^* + N_2^*T_2^*$	Q^*
1	2	1,35	55	105	3	915,309	2745,926	11	168,808	1856,885	4602,811	0,042
2	5	1,35	55	105	2	1105,067	2210,133	4	286,122	1144,487	3354,620	0,051
3	10	1,35	55	105	2	1306,584	2613,167	1	464,266	464,266	3077,434	0,059
4	15	1,35	55	105	2	1356,900	2713,801	1	484,292	484,292	3198,093	0,064
5	20	1,35	55	105	2	1403,099	2806,199	1	502,950	502,950	3309,149	0,070
6	5	0,5	55	105	2	1412,876	2825,752	4	394,583	1578,333	4404,086	0,040
7	5	2,5	55	105	2	938,557	1877,114	4	233,194	932,776	2809,890	0,059
8	5	7,5	55	105	3	659,879	1979,637	3	178,284	534,852	2514,489	0,077
9	5	1,35	20	105	2	987,327	1974,654	1	323,822	323,822	2298,476	0,031
10	5	1,35	35	105	2	1116,593	2233,186	1	382,191	382,191	2615,377	0,041
11	5	1,35	70	105	2	1128,028	2256,056	6	263,977	1583,861	3839,917	0,056
12	5	1,35	90	105	2	1151,089	2302,178	10	233,331	2333,306	4635,484	0,062
13	5	1,35	55	70	2	1112,167	2224,333	5	271,899	1359,494	3583,827	0,049
14	5	1,35	55	150	2	1103,761	2207,522	3	306,856	920,568	3128,090	0,053
15	5	1,35	55	175	2	1088,340	2176,679	3	301,179	903,538	3080,218	0,054
16	5	1,35	55	200	2	1119,718	2239,435	2	342,197	684,394	2923,829	0,056

La Tabla 2.2 contiene la política óptima y el coste óptimo cuando varían los costes del modelo.

Al aumentar el coste de inspección c_0 , se reduce la frecuencia de inspección en ambas fases y el número de inspecciones en la segunda fase. Comparando los casos 1 y 5 vemos que T_2^* incrementa en un 197% y T_1^* en un 53%. Es decir, la relajación de las inspecciones es mayor en la segunda fase.

El aumento en c_d conlleva un incremento de la frecuencia de inspección de ambas fases, a fin de tener una mayor probabilidad de detectar el fallo. Además, el periodo de funcionamiento del sistema hasta su reemplazamiento se acorta de manera drástica. El coste derivado mientras el sistema está en estado de fallo, implica que la política óptima es renovar el sistema con antelación.

Con el incremento en c_m , mientras que los valores N_1^* y T_1^* de la fase I se mantienen estables, sí que hay cambios destacables en la fase II. Cuando c_m es pequeño la fase II se acorta, hasta el punto de constar de una única inspección. con el objetivo de aumentar mucho la probabilidad de acabar el ciclo en mantenimiento preventivo, el cual sale mucho más barato que acabar en fallo. En contraposición, cuando c_m es más grande, acercándose al valor de coste por reemplazamiento en fallo, c_f , se busca alargar el ciclo del sistema lo máximo posible, ya que la ventaja de acabar en mantenimiento preventivo es menor.

Cambiando el parámetro c_f obtenemos un resultado parecido al de c_m , la fase II se acorta conforme la diferencia entre c_f y c_m es mayor, ya que cuando ésta es muy grande, resulta significativamente más rentable el reemplazamiento preventivo.

En todos los casos se observan las dos rasgos siguientes:

1. El aumento unitario de cualquier coste implica que también lo haga el coste óptimo. Este es el

resultado esperable. Lo contrario no tendría sentido.

2. El intervalo entre inspecciones en la segunda fase T_2^* es en todos los casos inferior al de la primera fase T_1^* . Por consiguiente, el modelo sugiere que la política óptima es aumentar la frecuencia de inspección en la segunda fase, es decir, cuando el sistema ha entrado en defecto o bien cuando ya tiene una cierta edad.

Capítulo 3

Modelo con coste en el estado defectuoso

3.1. Introducción y motivación

En el modelo anterior solo hemos añadido costes de penalización cuando el sistema tenía algún fallo. Esto hace que el modelo no le de especial importancia a cuando el sistema está defectuoso, lo cual también puede ser un problema en algunas aplicaciones. Por ende, vamos a proponer una pequeña variación a nuestro modelo agregando un nuevo coste por tiempo mientras el sistema está en estado defectuoso, que denotaremos como c_y . Es razonable suponer que el coste c_y será inferior al coste c_d ($c_y < c_d$), ya que las consecuencias de que el sistema esté defectuoso son mucho menores. Con esto, nuestro objetivo es acortar el número de inspecciones, advirtiendo al modelo del riesgo que puede suponer tener un sistema defectuoso, ya que a partir de ese instante se puede producir fallo en cualquier momento.

Se observa que, este segundo modelo es, más general que el primero que, de hecho se obtiene cuando $c_y = 0$. Sin embargo, desde el punto de vista de su aplicación en la vida real, el caso particular es más realista y, de ahí, que se haya centrado la atención en él.

Para añadir este nuevo coste a la función debemos calcular el tiempo que el sistema permanece en estado defectuoso en media. Este valor viene dado por la variable Y , por lo tanto debemos calcular $E[Y]$, que viene dado como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}
 E[Y] = & \tag{3.1} \\
 & \sum_{i=1}^{N_1} \int_{(i-1)T_1}^{iT_1} f_X(x) \left(\int_0^{iT_1-x} y f_Y(y) dy \right) dx + \\
 & \sum_{i=1}^{N_1} \int_{(i-1)T_1}^{iT_1} f_X(x) \left(\sum_{k=1}^{N_2} \int_{iT_1+(k-1)T_2-x}^{iT_1+kT_2-x} y f_Y(y) dy \right) dx + \\
 & \sum_{i=1}^{N_1} \int_{(i-1)T_1}^{iT_1} f_X(x) (iT_1 + N_2 T_2 - x) \bar{F}_Y(iT_1 + N_2 T_2 - x) dx + \\
 & \sum_{i=1}^{N_2} \int_{N_1 T_1+(i-1)T_2}^{N_1 T_1+iT_2} f_X(x) \left(\int_0^{N_1 T_1+iT_2-x} y f_Y(y) dy \right) dx + \\
 & \sum_{i=1}^{N_2-1} \int_{N_1 T_1+(i-1)T_2}^{N_1 T_1+iT_2} f_X(x) \left(\sum_{k=i+1}^{N_2} \int_{N_1 T_1+(k-1)T_2-x}^{N_1 T_1+kT_2-x} y f_Y(y) dy \right) dx + \\
 & \sum_{i=1}^{N_2} \int_{N_1 T_1+(i-1)T_2}^{N_1 T_1+iT_2} f_X(x) (N_1 T_1 + N_2 T_2 - x) \bar{F}_Y(N_1 T_1 + N_2 T_2 - x) dx
 \end{aligned}$$

Vemos que la formula está compuesta de 6 términos. En los 3 primeros, el defecto ocurre en un intervalo de la fase I ($((i-1)T_1, iT_1)$). Dependiendo de cuando ocurra el fallo, puede haber tres variantes: el fallo ocurre en el mismo intervalo que el defecto, el fallo ocurre en un intervalo posterior al intervalo

en el que ocurre el defecto, ya en la fase II $(iT_1 + (k - 1)T_2, iT_1 + kT_2)$ $k = 1, 2, \dots, N_2$, o no llega a ocurrir ningún fallo pasadas las N_2 inspecciones de la fase II. En este caso la variable Y debe tomar un valor mayor que $iT_1 + N_2T_2 - x$ y ese será el tiempo que el sistema permanecerá en defecto. Los otros tres términos representan los mismos casos para el fallo cuando el defecto ocurre en la fase II, pasadas las N_1 inspecciones de la fase I, en un intervalo $(N_1T_1 + (i - 1)T_2, N_1T_1 + iT_2)$ $i = 1, 2, \dots, N_2$.

Agregamos un nuevo término al numerador de la función de coste, $c_yE[Y]$. Por lo tanto la nueva función de coste es

$$Q_2(T_1, T_2, N_1, N_2) = \frac{c_0(E[K_1] + E[K_2]) + c_yE[Y] + c_dE[W] + c_M P_M + c_F P_F}{T_1E[K_1] + T_2E[K_2]}. \tag{3.2}$$

3.2. Ejemplos numéricos

Respecto al estudio numérico del caso anterior, consideramos los mismos valores del caso base salvo en el caso del coste por unidad de tiempo durante el fallo que pasa a ser $c_d = 2,5$. El valor de c_y en el nuevo caso base es $c_y = 0,02$.

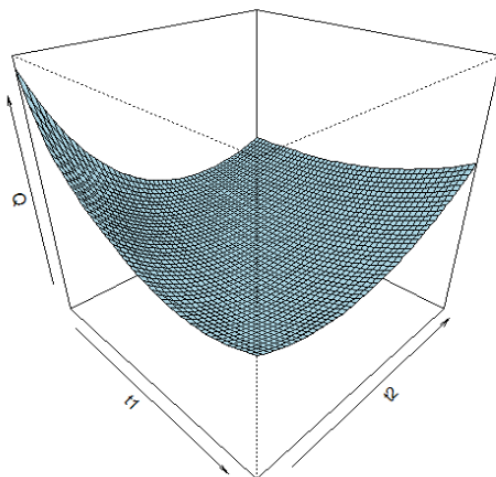


Figura 3.1: Gráfica de la función Q_2 en el caso base

En la Figura 3.1 se representa la función de coste para los valores óptimos N_1^* y N_2^* del caso base frente a las frecuencias de inspección T_1 y T_2 . Se constata que la función tiene un óptimo.

Tabla 3.1: Política óptima bajo cambios en el parámetro c_y

Nº	c_y	N_1^*	T_1^*	$N_1^*T_1^*$	N_2^*	T_2^*	$N_2^*T_2^*$	$N_1^*T_1^* + N_2^*T_2^*$	Q_2^*
1	0	2	938,557	1877,114	4	233,194	932,776	2809,890	0,059
2	0,01	2	945,507	1891,015	3	253,405	760,214	2651,229	0,067
3	0,015	2	937,762	1875,523	3	250,560	751,679	2627,202	0,070
4	0,02	2	929,835	1859,670	3	247,637	742,912	2602,582	0,074
5	0,05	2	944,363	1888,727	1	313,071	313,071	2201,798	0,095
6	0,1	2	783,939	1567,878	1	233,936	233,936	1801,815	0,126
7	0,15	2	573,638	1147,275	1	23,371	23,371	1170,646	0,152

En la Tabla 3.1 se presenta el estudio de sensibilidad bajo cambios en el coste por unidad de tiempo desde que el sistema entra en defecto hasta que falla o se produce un mantenimiento preventivo.

Vemos que a medida que aumentamos c_y , la duración de ambas fases disminuye, provocando que la longitud del ciclo, y por tanto el tiempo hasta que el sistema es reemplazado, se acorte. El periodo entre

inspecciones en la fase I se mantiene estable para valores de c_y inferiores a 0.1 y empieza a decrecer drásticamente cuando c_y está por encima de este valor, ya que se tiene un mayor interés en una rápida detección del defecto. Se advierte que el aumento de c_y tiene mayor incidencia en la duración de la fase II que en la de la fase I. Esto resulta razonable si tenemos en cuenta que la fase II se inicia si ocurre defecto y, por tanto, es altamente probable que esta fase se desarrolle con el sistema en estado de defecto. Además, como era de esperar, cualquier aumento de coste conlleva un incremento del coste óptimo.

Para valores más altos de c_y obtenemos que $T_2^* = 0$. En estos casos la penalización por defecto es tan elevada, que mantener el sistema no es ventajoso. Por el contrario, lo mejor es reemplazarlo una vez finalizada la fase I.

Tabla 3.2: Política óptima bajo cambios en los parámetros de escala en el modelo 2

Nº	θ_1	θ_2	N_1^*	T_1^*	$N_1^*T_1^*$	N_2^*	T_2^*	$N_2^*T_2^*$	$N_1^*T_1^* + N_2^*T_2^*$	Q_2^*
1	500	5000	2	1098,696	2197,392	3	304,460	913,379	3110,771	0,066
2	1000	5000	4	1113,471	4453,883	1	384,901	384,901	4838,784	0,054
3	1500	5000	6	1048,576	6291,455	1	295,193	295,193	6586,648	0,044
4	2000	5000	8	1039,416	8315,331	1	216,648	216,648	8531,979	0,037
5	3000	5000	10	1056,437	10564,371	1	100,291	100,291	10664,661	0,029
6	500	1000	6	370,074	2220,443	1	115,723	115,723	2336,166	0,119
7	500	2000	4	602,280	2409,122	2	178,055	356,111	2765,233	0,095
8	500	3000	3	833,450	2500,350	2	241,889	483,778	2984,128	0,081
9	500	4000	2	1000,097	2000,194	2	297,268	594,536	2594,729	0,073
10	5000	2000	20	717,008	14340,170	2	0	0	14340,170	0,024
11	5000	3000	17	871,897	14822,250	1	0	0	14822,250	0,022
12	5000	4000	15	1005,018	15075,265	1	0	0	15075,265	0,021

Tabla 3.3: Política óptima bajo cambios en los costes en el modelo 2

Nº	c_0	c_d	c_y	c_m	c_f	N_1^*	T_1^*	$N_1^*T_1^*$	N_2^*	T_2^*	$N_2^*T_2^*$	Q_2^*
1	2	1,35	0,02	55	105	3	904,486	2713,458	9	177,287	1595,579	0,059
2	5	1,35	0,02	55	105	2	1098,696	2197,392	3	304,460	913,379	0,066
3	10	1,35	0,02	55	105	2	1267,083	2534,165	1	445,221	445,221	0,073
4	15	1,35	0,02	55	105	2	1321,832	2643,664	1	466,935	466,935	0,079
5	20	1,35	0,02	55	105	2	1371,498	2742,997	1	487,009	487,009	0,085
6	5	0,5	0,02	55	105	2	1415,865	2831,73	3	422,996	1268,988	0,057
7	5	2,5	0,02	55	105	3	929,894	2789,682	3	247,633	742,899	0,074
8	5	7,5	0,02	55	105	3	655,465	1966,395	3	195,183	585,549	0,089
9	5	1,35	0,02	20	105	2	903,693	1807,386	1	280,273	280,273	0,044
10	5	1,35	0,02	35	105	2	1053,156	2106,312	1	353,693	353,693	0,055
11	5	1,35	0,02	75	105	2	1125,643	2251,285	6	262,880	1577,279	0,074
12	5	1,35	0,02	90	105	2	1151,962	2303,924	8	250,268	2002,144	0,078
13	5	1,35	0,02	55	70	2	1122,245	2244,490	3	313,395	940,184	0,065
14	5	1,35	0,02	55	150	2	1108,953	2217,906	2	337,166	674,332	0,068
15	5	1,35	0,02	55	175	2	1094,133	2188,266	2	331,345	662,689	0,069
16	5	1,35	0,02	55	200	2	1079,608	2159,217	2	325,701	651,402	0,070

En las tablas 3.2 y 3.3 se muestra la política óptima al variar los parámetros de escala y los costes en este segundo modelo, tomando los mismos casos evaluados en el primer modelo.

Empezamos comparando la variación de θ_1 en las tablas 2.1 y 3.2. La inspección en la primera fase es más frecuente en el modelo 2. Es el modo de protegerse frente a la ocurrencia de defectos que en el nuevo modelo implican un coste mientras no se detectan. El número de inspecciones de ambas fases, N_1^* y N_2^* ,

se reduce así como la duración máxima del ciclo. Sin embargo, en los casos 6 a 9 donde modificamos θ_2 , la fase I se mantiene robusta y solo la fase II se acorta, reduciéndose N_2^* .

En los casos 10-12 donde $\theta_1 > \theta_2$ también se produce una disminución considerable en las variables de la fase I, reduciendo hasta en 5 el número de inspecciones N_1^* . Además, obtenemos que $T_2^* = 0$, lo que nos indica que en estos casos se prescinde de la fase II, terminando el ciclo una vez se detecte el defecto o al alcanzar el máximo de inspecciones N_1 de la fase I, lo que ocurra primero.

En la comparación de las Tablas 2.2 y 3.3 correspondientes a los modelos I y II, se detecta una reducción de la duración máxima de ambas fases ya que el mantenimiento de un sistema como el que describe el modelo II es menos rentable frente a uno nuevo.

Cuando cambia c_0 , observamos que la frecuencia de inspección es mayor en la fase I del modelo II que en la fase I del modelo I, para así tener más oportunidades de detectar el defecto. En cuanto a la segunda fase, su duración se acorta en el modelo II y se llevan a cabo menos inspecciones.

Al variar c_d , también se reduce el número de inspecciones de la segunda fase, pero el periodo entre ellas aumenta ligeramente, en los tres casos entre un 6 y un 10 por ciento.

En los casos donde cambiamos c_m tenemos una situación muy parecida a la de c_0 , T_1^* y N_2^* disminuye, aunque este último solo lo hace cuando $c_m = 90$. Sin embargo, en los casos donde hay una mayor disminución de T_1^* son en los casos $c_m = 20$ y $c_m = 35$. Es decir, se tiene un mayor interés en detectar el defecto cuando los beneficios del mantenimiento preventivo son mayores. Cuando varía c_f , de nuevo observamos un decrecimiento de N_2^* , más pronunciado cuando c_f es más cercano a c_m .

Por último, como cabría esperar, el coste óptimo en el modelo II es superior en todos los casos al del modelo I.

Capítulo 4

Conclusiones

En este Trabajo Fin de Grado hemos descrito un modelo para la inspección y mantenimiento de un sistema, aplicado a sistemas que no operan de forma continua sino en determinados momentos donde se requiera su uso. Se plantean inspecciones dado que los defectos y fallos del sistema son del tipo no revelado, es decir, pueden ocurrir mientras el sistema no está funcionando y así detectarlos antes de que el sistema tenga una demanda de uso. Por otra parte, el mantenimiento es importante con el objetivo de alargar la vida útil de éste. Se propone una inspección en dos fases que se ha revelado adecuada para adaptarse al deterioro del sistema ya que se hace una inspección más frecuente cuando el sistema está defectuoso o bien ha alcanzado una cierta edad.

Sistemas a los que se les puede aplicar este modelo son, por ejemplo, sistemas de seguridad, tales como extintores. De hecho, podemos observar que estos llevan un registro en el que se anota cuando se llevan a cabo sus inspecciones.

Este modo de proceder tiene muchas similitudes con la práctica médica. Por un lado, existen enfermedades que no presentan síntomas cuando alguien las padece, o que empiezan a manifestarse cuando la enfermedad lleva ya una cierta evolución. Así, con el objetivo de detectarse lo antes posible para evitar males mayores, se realizan ciertas pruebas o análisis. Por otro lado, cuando una persona tiene alguna enfermedad o va envejeciendo, se va sometiendo a pruebas más frecuentes, ya que es más probable que desarrolle la enfermedad o que ésta se agrave.

El deterioro natural de cualquier sistema a medida que pasa el tiempo es la hipótesis de partida que nos lleva a plantear la inspección en dos etapas del modelo, cambiando la frecuencia de esta a partir de un instante temporal. Este momento viene dado por el mínimo entre dos valores, uno determinista y el otro aleatorio. El primero es el número máximo de inspecciones, fijado de antemano. El segundo se corresponde con la inspección que detecta un inicio de deterioro del sistema. Los dos indicadores tienen en cuenta, respectivamente, el envejecimiento natural causado por el paso del tiempo y el deterioro que provoca el uso. La inspección del sistema implica un coste, así como no llevarla a cabo, dejando que el sistema funcione mal cuando se deteriora. Esto significa que es preciso definir una función de coste que contenga los parámetros del modelo (costes unitarios, distribuciones de tiempos hasta que el sistema se deteriora) así como las variables de decisión que definen la política (número máximo de inspecciones en cada fase y frecuencia de inspección en ambas).

El TFG presenta dos partes diferenciadas. En primer lugar, la construcción del modelo de inspección y mantenimiento junto con la función de coste. La segunda abarca su programación y el posterior uso de algoritmos para la búsqueda de la política óptima, es decir, la que hace mínima la función de coste. A esta parte corresponde también el análisis de sensibilidad que tiene como propósito analizar el efecto que causan en las variables de decisión los cambios en los parámetros del modelo. Este estudio de sensibilidad nos conduce a una serie de reflexiones que pueden ser de utilidad para quienes ponen en práctica procedimientos de mantenimiento.

Primero, aunque en el algoritmo de optimización no se impuso ninguna restricción para que la frecuencia de inspección en la segunda fase fuera mayor que en la primera, este resultado siempre se da para todos los casos analizados. El óptimo, responde a la intuición que teníamos de partida. Tiene sentido

que sea así dado que se deriva un coste del estado de fallo, y la probabilidad de que éste ocurra aumenta a medida que el tiempo avanza. Esto lleva a tener más precaución en esta fase para minimizar el tiempo en el que el sistema está en estado de fallo.

El aumento del tiempo hasta la ocurrencia del defecto afecta a la fase I que se prolonga. Sin embargo, la duración de la fase II, así como la frecuencia de inspección en ambas es robusta frente a este cambio. Al sistema le cuesta más tiempo entrar en defecto, pero, una vez en él, nada cambia respecto al fallo y el interés por detectarlo hace que el intervalo entre inspecciones no se vea afectado.

Los cambios en el tiempo desde el defecto hasta el fallo tienen un efecto diferente. En primer lugar, las dos etapas se ven afectadas y la frecuencia de inspección disminuye en ambas etapas cuando aquél aumenta. Dado que coste más elevado tiene lugar cuando ocurre un fallo, la disminución de éste conduce a aumentar la frecuencia de inspección también en la primera fase, dado que el fallo puede ser más inminente.

En el estudio de sensibilidad se observa un patrón diferente en el caso de que el sistema pueda funcionar durante un largo tiempo en estado defectuoso que cuando, por el contrario, el fallo ocurre al poco de haberse producido el defecto. En la primera situación, sólo cuando se produce un aumento del tiempo entre defecto y fallo aumenta significativamente el tiempo entre inspecciones. Hay que recordar que el estado de defecto no implica ninguna penalización en forma de coste que sólo ocurre mientras el sistema está en fallo sin ser advertido. Por este motivo, la relajación de las inspecciones es mayor en la fase I que en la fase II.

Cuando el fallo tiene lugar poco tiempo después del defecto, al crecer el tiempo entre ambos se produce, igualmente, una relajación importante de la frecuencia de inspección, con mayor intensidad en la fase II.

Ante cambios en los costes, el número máximo de inspecciones de la primera fase se mantiene robusto, pero el resto de las variables sí sufren cambios. Aumentando el coste de inspección se llevan a cabo menos inspecciones en la segunda fase y más relajadas en ambas etapas. Al aumentar el coste mientras el sistema está en estado de fallo (downtime), las inspecciones se hacen más frecuentes en ambas fases, a pesar de que el riesgo de que ocurra un fallo se da mayormente en la segunda fase. La primera fase se ve afectada, al igual ocurría cuando se producen cambios del tiempo del defecto al fallo por la importancia de detectar este último.

En cuanto a los cambios en los costes por reemplazamiento preventivo y correctivo, mientras que la fase I apenas sufre cambios, la diferencia entre ambos indicará la estrategia a seguir en la fase II. Cuando mayor sea, disminuye el número de inspecciones y la frecuencia con la que estas se realizan. Al ser mucho más económico terminar el ciclo en mantenimiento preventivo, hay un mayor interés en evitar que ocurra un fallo.

Además, añadimos al modelo un nuevo coste mientras el sistema está en estado de defecto, mucho menor que el de fallo. Este afecta en gran medida a la fase II, disminuyendo el número máximo de inspecciones realizadas en ésta y con ello acortando la longitud del ciclo. A medida que este valor aumenta, también lo hace la frecuencia de las inspecciones en ambas fases. Si este valor es suficientemente grande, se puede dar el caso de que la política óptima sea prescindir de la fase II, y reemplazar el sistema una vez acabada la fase I.

Bibliografía

- [1] E. E. Lewis. Introduction to reliability engineering. 2nd edition. New York, John Wiley and Sons. 1996.
- [2] STHDA. Writing Data From R to Excel Files (xls | xlsx). <http://www.sthda.com/english/wiki/writing-data-from-r-to-excel-files-xls-xlsx>
- [3] Stack Overflow. double integral in R. <https://stackoverflow.com/questions/43189512/double-integral-in-r>