

TEORÍA DE VALORES EXTREMOS



Alba Abbad Rodés

Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: F. Javier López Lorente

Junio 2024

Summary

This report deals with Extreme Value Theory, a very important field in Probability and Statistics. This theory focuses on the analysis of the largest and the smallest values of a variable. Even though these extreme values have a very low probability of occurring, they can have a significant impact if they do happen. Some examples of extreme events are floods, heat waves, and financial crises, so this theory is widely used in fields such as engineering, hydrology or insurance companies, among many others. From a theoretical point of view, it poses very interesting problems and requires specific techniques for its study. In this paper, I will present the basic results of this theory, including key methodologies and findings that highlight its practical applications and theoretical insights.

The main objective is to determine the convergence in distribution of the maximum of X_1, \dots, X_n , which are independent identically distributed random variables with distribution function F . As well, we will study its convergence in probability and almost sure convergence. The maximum is denoted as M_n . All the results that are going to be mentioned are also valid for the study of the minimum, taking into account that $\min(X_1, \dots, X_n) = \max(-X_1, \dots, -X_n)$.

After studying all the above, a statistical analysis of a dataset is done in order to observe how the extreme values manifest themselves in real data.

The first important fact to know is that there are three types of *Extreme value distributions*:

TYPE I (*Gumbel distribution*),

$$G(x) = \exp(-e^{-x}), \quad -\infty < x < +\infty.$$

TYPE II (*Fréchet distribution*), for $\alpha > 0$:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0. \end{cases}$$

TYPE III (*Weibull distribution*), for $\alpha > 0$:

$$G(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha), & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

As mentioned earlier, we are interested in finding out sequences of real numbers, $\{a_n > 0\}$, $\{b_n\}$, and a distribution function G such that $P(a_n(M_n - b_n) \leq x) = F^n(a_n^{-1}x + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x)$, $\forall x$ continuity point of G . This condition is equivalent to saying that F belongs to the *maximum domain of attraction of G* ($F \in MDA(G)$). Another important definition is that a non-degenerate distribution function G is considered to be *max-stable* if and only if there are sequences $\{a_n > 0\}$, $\{b_n\}$ such that $G^n(a_nx + b_n) = G(x)$. Furthermore, two distribution functions are considered to be of the same type if their maximum domains of attraction are equal.

On the one hand, there is a theorem stating that a non-degenerate distribution function G is max-stable if and only if $MDA(G)$ is not the null set. On the other hand, another theorem states that a distribution function is max-stable if and only if it is of the same type as one of the extreme value distributions. Therefore, by combining these two last results we end up with the convergence in distribution of M_n , there exist sequences, $\{a_n > 0\}$, $\{b_n\}$, and a non-degenerate distribution function G such that $P(a_n(M_n - b_n) \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x)$, $\forall x$ continuity point of G , if and only if G is of the same type as one of the extreme value distributions.

Moreover, there exists a result for a more general convergence. Let $\{u_n\}$ be a sequence of real numbers and $0 \leq \tau \leq \infty$, then $P(M_n \leq u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\tau}$ if and only if $n(1 - F(u_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tau$. We will be focus on the cases when $\tau \notin \{0, +\infty\}$ since these would imply a convergence to a degenerate distribution function. By taking $u_n = b_n + a_n^{-1}x$, to determine whether there is convergence in distribution to a non degenerate distribution function, it suffices to check that $n(1 - F(b_n + a_n^{-1}x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tau$, with $0 < \tau < +\infty$.

Necessary and sufficient conditions can be found on the distribution function to determine to which of the three types of maximum domain of attraction, if any, it belongs to. Once the type has been determined, the normalising constants can be easily found.

Regarding the objective of determining the convergence in probability and almost sure convergence, we distinguish two cases: distribution functions with a finite right endpoint (x_F) and those with an infinite finite right endpoint.

For the first type, $x_F < +\infty$, the convergences are straightforward: M_n converges almost surely and in probability to its finite right end point.

For the second type, $x_F = +\infty$, there are two more complicated theorems:

- Given a sequence $\{a_n\}$, the necessary and sufficient conditions for M_n/a_n to converge in probability to 1 are: $n(1 - F(ta_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, $\forall t \in (0, 1)$, and $n(1 - F(ta_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\forall t > 1$.
- Defining $\gamma_n = \inf\{y : F(y) \geq 1 - 1/n\}$ and assuming $n(1 - F(1 - \varepsilon)\gamma_n) \uparrow +\infty$, $\forall \varepsilon > 0$. Then M_n/γ_n converges almost surely to 1 if and only if $\forall k > 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} [1 - F(k\gamma_n)] < +\infty$.

Finally, after seeing and proving the above results, we have carried out a statistical analysis of a dataset. The dataset consists of the maximum wind gust recorded on each day of October for the years 1961 to 2019 at Almería airport. We took the maximum wind gust of each October for each year, so that we had 59 values of our maximum variable. Our data range is between 48 km/h and 163 km/h.

Our aim was to determine the extreme value type to which this distribution belongs to. After doing some estimations, we concluded that our distribution belongs to the maximum domain of attraction of a Fréchet distribution of parameter $\alpha = 4,965$.

This allowed us to estimate the tail of the distribution function as well as its quantiles. The latter is extremely important because it allows us to estimate outside the range of the data. The absence of recorded gusts greater than 163 km/h does not mean that larger gusts will not be recorded in the future. Hence, after all the above, we were able to estimate the probability of having large wind gusts, which allows us to calculate their return periods. The return period of extreme wind gusts is widely used in engineering (to design infrastructures) and in insurance companies (to assess risk and determine insurance premiums).

We have seen how all this is used in an airport. Some of the considerations mentioned include that certain structures, such as hangars or control towers, have to withstand wind gust with a return period of at least 200 years to ensure the long-term safety and functionality. According our results, wind gusts greater than 200 km/h have a return period of more than 200 years. Moreover, it is used in the planning of operational procedures, such as take-off and landing operations in extreme wind conditions, to ensure an appropriate response to infrequent events.

Índice general

Summary	III
Introducción	VII
1. Teoría de valores extremos	1
1.1. Preliminares	1
1.2. Convergencia en distribución del máximo	2
1.2.1. Distribuciones max-estables y máximos dominios de atracción	3
1.2.2. Teorema fundamental sobre los tipos de distribuciones de extremos	4
1.2.3. Convergencia general	7
1.2.4. Condiciones necesarias y suficientes para pertenecer al dominio de atracción de de una ley de extremo	9
1.2.5. Ejemplos	11
1.3. Convergencia en probabilidad y convergencia casi segura para el máximo	14
1.3.1. Ejemplos	18
2. La estadística en valores extremos	23
2.1. Introducción	23
2.2. Aplicación	23
Apéndices	27
Bibliografía	35

Introducción

En el ámbito de la probabilidad, uno de los conceptos más fundamentales y estudiados es el comportamiento de la suma de n variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (i.i.d.). Denotamos a estas variable como X_1, \dots, X_n .

La *Ley fuerte de grandes números* establece que si existe la esperanza de las variables, denotada como μ , entonces la media de la suma tiende a converger casi seguramente a μ , es decir, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s.} \mu$.

Por otro lado, el *Teorema central del límite* establece que bajo ciertas condiciones, la normalización de la suma converge en distribución a una variable aleatoria normal estándar, es decir, $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} Z$, siendo $Z \sim N(0, 1)$.

La motivación central de este trabajo es extender estos resultados clásicos a la variable máximo de n variables i.i.d., denotada como M_n . El objetivo es encontrar sucesiones de números reales $\{\gamma_n\}, \{a_n\}, \{b_n\}$, de modo que la normalización de M_n cumpla resultados análogos a la suma, es decir, $\frac{M_n}{\gamma_n} \xrightarrow{c.s.} 1$ y que $a_n(M_n - b_n)$ converja en distribución a una variable aleatoria no constante.

La base de este problema radica en la *Teoría de Valores Extremos*, un campo de estudio dedicado al análisis de los valores más altos y más bajos de las variables, que suelen situarse en las colas de las distribuciones de probabilidad.

A pesar de su baja probabilidad de ocurrencia, estos valores extremos pueden tener un impacto significativo, especialmente en áreas como meteorología, finanzas y hidrología. La capacidad de estimar los tiempos de retorno de sucesos extremos es crucial para comprender y mitigar los riesgos asociados a eventos catastróficos, como inundaciones o crisis financieras.

El origen de la Teoría de Valores Extremos se remonta a 1928, cuando Fisher y Tippet sentaron las bases de la teoría asintótica de las distribuciones de valores extremos. Posteriormente, en 1948, Gnedenko completó la caracterización de su teoría. Desde entonces, el estudio de los valores extremos ha experimentado un crecimiento constante, tanto en el ámbito probabilístico como estadístico, siendo fundamental en la compresión y gestión de eventos extremos en diversos campos de aplicación.

Capítulo 1

Teoría de valores extremos

1.1. Preliminares

En todo este capítulo se va a considerar (Ω, \mathcal{F}, P) como el espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias X_1, \dots, X_n independientes e idénticamente distribuidas con distribución F . La distribución de su máximo va a ser el principal objeto de estudio.

Definición 1. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (i.i.d.), definimos M_n como la variable aleatoria del máximo de todas ellas:

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$$

Usando que las variables son *i.i.d.* su función de distribución viene dada por

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = P(X_1 \leq x) \dots P(X_n \leq x) = F^n(x) \quad (1.1)$$

Nota 1. Todos resultados que se van presentar serán también válidos para el estudio del mínimo, teniendo en cuenta que $m_n = \min(X_1, \dots, X_n) = -\max(-X_1, \dots, -X_n)$.

En primer lugar (Sección 1.2), analizaremos el problema de la convergencia del máximo debidamente normalizado. Es decir, obtendremos condiciones necesarias y suficientes sobre F para la existencia de sucesiones de números reales, $\{a_n > 0\}$, $\{b_n\} \in \mathbb{R}$, y una distribución G tal que $a_n(M_n - b_n)$ converja en distribución a G cuando $n \rightarrow +\infty$. Es decir,

$$P(a_n(M_n - b_n) \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(x), \quad \forall x \text{ punto de continuidad de } G. \quad (1.2)$$

Vamos a definir una clase de distribuciones que jugarán un papel fundamental en esta teoría.

Definición 2. (Distribuciones de valores extremos):

TIPO I (Distribución de Gumbel),

$$G(x) = \exp(-e^{-x}), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (1.3)$$

TIPO II (Distribución de Fréchet), para $\alpha > 0$:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

TIPO III (Distribución de Weibull), para $\alpha > 0$:

$$G(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha), & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Proposición 1.1. *La convergencia (1.2) es equivalente a:*

$$F^n(a_n^{-1}x + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x), \forall x \text{ punto de continuidad de } G$$

Demostración. La demostración es inmediata utilizando (1.1) ya que

$$P(a_n(M_n - b_n) \leq x) = P(M_n \leq a_n^{-1}x + b_n) = F^n(a_n^{-1}x + b_n)$$

□

A continuación (Sección 1.3), demostraremos que si la función de distribución F satisface unas ciertas condiciones tendremos que $\frac{M_n}{\gamma_n} \xrightarrow{c.s.} 1$, siendo $\gamma_n = \inf\{y : F(y) \geq 1 - 1/n\}$.

En este capítulo va a ser fundamental un resultado dado por Khintchine (Teorema 1.3) sobre convergencia en distribución. Antes de formularlo, se necesitan unas nociones básicas sobre funciones inversas de funciones monótonas:

Definición 3. Sea $\psi(x)$ una función no decreciente y continua por la derecha, definimos su inversa $\psi^{-1}(y)$ en el intervalo $(\inf\{\psi(x)\}, \sup\{\psi(x)\})$ como:

$$\psi^{-1}(y) = \inf\{x : \psi(x) \geq y\}$$

Tomando una función con las propiedades de la definición se verifican las siguientes propiedades:

Lema 1.2. *(Propiedades sobre inversas de funciones).*

- a) Sean $a > 0, b, c$ constantes, $H(x) = \psi(ax + b) - c$, entonces $H^{-1}(y) = a^{-1}(\psi^{-1}(y + c) - b)$.
- b) Si ψ^{-1} es una función continua entonces $\psi^{-1}(\psi(x)) = x$.

El resultado obtenido por Khintchine fue el siguiente:

Teorema 1.3. (Teorema de Convergencia de tipos).

Sea $\{F_n\}$ una sucesión de funciones de distribución y sea G una función de distribución no degenerada. Sean además $\{\alpha_n > 0\}, \{\beta_n\}$, sucesiones de números reales tal que $F_n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x) \forall x$ punto de continuidad de G .

Entonces existe una función de distribución H y unas sucesiones $\{\alpha_n > 0\}, \{\beta_n\}$ que satisfacen

$F_n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} H(x) \forall x$ punto de continuidad de H , si y solo si, $a_n^{-1}\alpha_n \rightarrow a$, $a_n^{-1}(\beta_n - b_n) \rightarrow b$, para algún $a > 0, b \in \mathbb{R}$.

En ese caso, $H(x) = G(ax + b)$.

Demostración. Los detalles de esta demostración se pueden encontrar en [1] (pág. 7, Teorema 1.2.3). □

1.2. Convergencia en distribución del máximo

En esta sección pasamos a ver cuándo, cómo y a qué convergen las distribuciones de máximo.

Primero, vamos a considerar una convergencia más específica, veremos a qué converge $P(a_n(M_n - b_n) \leq x)$ dadas unas constantes normalizadoras $\{\alpha_n > 0\}, \{\beta_n\}$.

Seguidamente, estudiaremos una convergencia en distribución más general, dada por $P(M_n \leq u_n)$, donde $\{u_n\}$ puede ser una función más complicada que una lineal e incluso no depender de x .

Finalmente, obtendremos condiciones suficientes y necesarias sobre la función de distribución para que las convergencias anteriores ocurran.

Para poder llevar a cabo todo esto, necesitamos unos conocimientos sobre distribuciones max-estables y dominios de atracción que se presentan a continuación.

1.2. Convergencia en distribución del máximo

1.2.1. Distribuciones max-estables y máximos dominios de atracción

Las dos siguientes definiciones muestran los conceptos claves de esta sección.

Definición 4. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias i.i.d. con función de distribución F y sea G una función de distribución no degenerada. Si existen sucesiones $\{a_n > 0\}, \{b_n\}$ tal que

$$F^n(a_n^{-1}x + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x), \quad \forall x \text{ punto de continuidad de } G,$$

se dice que F pertenece al *máximo dominio de atracción* de G .

Lo denotamos como $F \in MDA(G)$.

Es posible que una distribución pertenezca a su propio máximo dominio de atracción. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 5. Sea G una función de distribución no degenerada, decimos que es *max-estable* si existen sucesiones de números reales $\{a_n > 0\}, \{b_n\}$ tal que $G^n(a_n x + b_n) = G(x)$, $\forall x$ punto de continuidad de G , $\forall n \in \mathbb{N}$.

Las propiedades más importantes de este tipo de distribuciones son:

Proposición 1.4. Una función de distribución G es max-estable si y solo si existe una sucesión $\{F_n\}$ de funciones de distribución y sucesiones $\{a_n > 0\}, \{b_n\}$ de números reales tal que para todo $k = 1, 2, \dots$

$$F_n(a_{nk}^{-1}x + b_{nk}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G^{1/k}(x), \quad \forall x \text{ punto de continuidad de } G. \quad (1.6)$$

Demostración. Sea G no degenerada.

\Leftarrow) $G^{1/k}$ también es no degenerada, entonces si (1.6) se satisface para todo k , se satisface en particular para $k = 1$. Por tanto, aplicando el Teorema 1.3 tenemos que $G^{1/k}(x) = G(\alpha_k x + \beta_k)$, para algunas constantes $\alpha_k > 0, \beta_k$. Hemos obtenido que G es max-estable.

\Rightarrow) Definimos $F_n = G^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Por ser G max-estable tenemos que $F_n(a_n^{-1}x + b_n) = G^n(a_n^{-1}x + b_n) = G(x)$, con $a_n > 0, b_n$. Por tanto,

$$F_n(a_{nk}^{-1}x + b_{nk}) = (G^n(a_{nk}^{-1}x + b_{nk}))^{k \cdot \frac{1}{k}} = (G(x))^{\frac{1}{k}}.$$

Es decir, se satisface (1.6). □

Teorema 1.5. Sea G una función de distribución no degenerada, $MDA(G)$ es distinto del vacío si y solo si G es max-estable. En este caso, $G \in MDA(G)$.

Demostración. \Leftarrow) Si G es max-estable, existen unas sucesiones $\{a_n > 0\}, \{b_n\}$ tal que $G^n(a_n x + b_n) = G(x)$. Por lo que es inmediato que $G \in MDA(G)$. En consecuencia, $MDA(G) \neq \emptyset$.

\Rightarrow) Ahora suponemos que $MDA(G) \neq \emptyset$, es decir, $\exists F \in MDA(G)$ y sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\}$ tal que $F^n(a_n^{-1}x + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x)$.

Por consiguiente, $F^{nk}(a_{nk}^{-1}x + b_{nk}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x) \Rightarrow F^n(a_{nk}^{-1}x + b_{nk}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G^{1/k}(x)$.

Tomando $F_n = F^n$, la convergencia (1.6) se satisface. Basta aplicar la Proposición 1.4 para determinar que G es max-estable. □

Con este último resultado podemos establecer que las funciones que aparecen como distribuciones límites en (1.2) son la clase de funciones max-estables.

Corolario 1.5.1. Sea G una distribución max-estable, entonces existen funciones reales $a(s) > 0$ y $b(s)$ definidas para $s > 0$ tal que:

$$G^s(a(s)x + b(s)) = G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, s > 0.$$

1.2. Convergencia en distribución del máximo

Otro concepto importante que tenemos que saber es:

Definición 6. Dos funciones de distribución (G_1, G_2) son *del mismo tipo* si existen constantes $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ tal que $G_2(x) = G_1(ax + b)$.

Con esta definición, aplicando el resultado de Khintchine (Teorema 1.3), vemos que $MDA(G_1) = MDA(G_2) \iff G_1$ y G_2 son del mismo tipo.

1.2.2. Teorema fundamental sobre los tipos de distribuciones de extremos

Para poder pasar a estudiar las posibles distribuciones asintóticas del máximo de variables i.i.d. necesitamos el resultado escrito a continuación.

Teorema 1.6. Una distribución es max-estable si y solo si es del mismo tipo que una de los 3 tipos de distribución de valores extremos (Definición 2).

Demostración. Sea F una distribución no degenerada:

\Leftarrow) Esta implicación es bastante directa.

Lo probamos para el caso de que F es del mismo tipo que la distribución de Gumbel (TIPO I, (1.3)). Es decir, existen constantes $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(ax + b)$, con G en (1.3).

Sea $\alpha_n = 1$, $\beta_n = \frac{\log(n)}{a}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$F(\alpha_n x + \beta_n) = F\left(x + \frac{\log(n)}{a}\right) = G(ax + \log(n) + b) = \exp\{-e^{-(ax+b+\log(n))}\}.$$

Por tanto,

$$F^n(\alpha_n x + \beta_n) = \exp\{-ne^{-(ax+b+\log(n))}\} = G(ax + b) = F(x).$$

En definitiva, F es max-estable.

Las demostraciones de los otros dos tipos de distribuciones de valores extremos son análogas.

\Rightarrow) Ahora suponemos que F es max-estable. Usando el Corolario 1.5.1 y teniendo en cuenta que $0 < F(s) < 1$, podemos aplicar logaritmos obteniendo:

$$-s \log(F(a(s)x + b(s))) = -\log(F(x)),$$

y aplicando otra vez logaritmos

$$-\log s - \log(-\log(F(a(s)x + b(s)))) = -\log(-\log(F(x))). \quad (1.7)$$

Por otra parte, pasamos a ver que, por ser F max-estable, esta distribución no puede tener un salto ni en $x_F = \sup\{x : F(x) < 1\}$, ni en $x_I = \inf\{x : F(x) > 0\}$.

Consideramos que en x_F hay un salto, es decir, $F(x_F) = 1$ pero existe $p \in (0, 1)$ tal que $F(x_F^-) = \lim_{y \rightarrow x_F^-} F(y) = p$.

Por ser F max-estable, definiendo $H(x) = F(x - x_F)$ esta también lo es. Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer $x_F = 0$.

Sean a_2, b_2 tal que $F^2(a_2 x + b_2) = F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, se verifica que $1 = F(0) = F^2(b_2) \Rightarrow b_2 \geq 0$.

Si $b_2 > 0$ tomando $x = \frac{-b_2}{2a_2} < 0$ tenemos que

$$F^2\left(a_2 \frac{-b_2}{2a_2} + b_2\right) = F^2\left(\frac{b_2}{2}\right) = 1 \neq F\left(\frac{-b_2}{2a_2}\right) < 1,$$

lo que contradice la propiedad de max-estable para $n = 2$. Por consiguiente, $b_2 = 0$.

Ahora,

$$p = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F^2(a_2 x) = p^2 \Rightarrow p = p^2 \Rightarrow p \in \{0, 1\}.$$

1.2. Convergencia en distribución del máximo

Si $p = 0$, obtendríamos que F es una función de distribución degenerada, lo que contradice nuestra hipótesis inicial. También llegamos a contradicción si $p = 1$, habíamos considerado $p < 1$. Llevando a cabo un razonamiento similar para x_I , podemos afirmar que no F no tiene ningún salto en x_I .

Entonces, definimos $\phi(x) = -\log(-\log(F(x)))$. Se trata de una función no decreciente con $\inf\{\phi(x)\} = -\infty$, $\sup\{\phi(x)\} = +\infty$. Por tanto, aplicando la *Definición 3*, ϕ tiene función inversa $U(y)$ definida en \mathbb{R} . Teniendo en cuenta (1.7), tenemos que $\phi(a(s)x + b(s)) - \log(s) = \phi(x)$. Aplicando la función inversa a ambos lados de la ecuación, usando Lema 1.2 a) con $H(x) = \phi(a(s)x + b(s)) - \log(s)$, obtenemos:

$$\frac{U(y + \log(s)) - b(s)}{a(s)} = U(y).$$

Restando a ambos lados la expresión en $y = 0$ tenemos:

$$\frac{U(y + \log(s)) - U(\log(s))}{a(s)} = U(y) - U(0).$$

Haciendo los cambios de variable $z = \log(s) \Rightarrow a(s) = a(e^z) = \tilde{a}(z)$, $\tilde{U}(y) = U(y) - U(0)$:

$$\tilde{U}(y + z) - \tilde{U}(z) = \tilde{U}(y)\tilde{a}(z). \quad (1.8)$$

Intercambiando los valores de y , z obtenemos:

$$\tilde{U}(z + y) - \tilde{U}(y) = \tilde{U}(z)\tilde{a}(y). \quad (1.9)$$

Finalmente, restando (1.8), (1.9) llegamos a la siguiente expresión:

$$\tilde{U}(y)(1 - \tilde{a}(z)) = \tilde{U}(z)(1 - \tilde{a}(y)). \quad (1.10)$$

Consideramos dos casos:

1) $\tilde{a}(z) = 1, \forall z \in \mathbb{R}$. Sustituyendo en (1.8) obtenemos:

$$\tilde{U}(y + z) = \tilde{U}(y) + \tilde{U}(z).$$

Sabemos que la única solución creciente monótona de la expresión anterior viene dada por $\tilde{U}(y) = py$ con $p > 0$. Entonces,

$$U(y) - U(0) = py \Rightarrow \phi^{-1}(y) = py + v, \text{ con } v = U(0).$$

ϕ^{-1} es continua por ser una función lineal, por lo que, aplicando el Lema 1.2 (b) obtenemos:

$$x = \phi^{-1}(\phi(x)) = p\phi(x) + v \Rightarrow \phi(x) = \frac{x - v}{p} \Rightarrow F(x) = \exp\{-e^{-(x-v)/p}\}.$$

Efectivamente, F es una función de distribución sin saltos en x_F y en x_I . Además, $F(x) = G\left(\frac{x}{p} - \frac{v}{p}\right)$, siendo G la *distribución de Gumbel (Tipo I)*, (1.3).

Por tanto, F es del mismo tipo que uno de los tipos de distribuciones de valores extremos.

2) $\tilde{a}(z) \neq 1$ para algún $z \in \mathbb{R}$. Tomando uno de esos z y despejando $\tilde{U}(y)$ en (1.10):

$$\tilde{U}(y) = \frac{\tilde{U}(z)}{1 - \tilde{a}(z)}(1 - \tilde{a}(y)) = c(1 - \tilde{a}(y)). \quad (1.11)$$

Consideramos $c = \frac{\tilde{U}(z)}{1 - \tilde{a}(z)} \neq 0$, ya que si $c = 0 \Rightarrow \tilde{U}(y) = 0, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow U(y) = U(0)$.

Esto supondría que $U(y)$ sería constante y, por tanto, F sería una función de distribución degenerada.

Aplicando (1.11) en (1.8) llegamos a:

$$c(1 - \tilde{a}(y + z)) - c(1 - \tilde{a}(z)) = c(1 - \tilde{a}(y))\tilde{a}(z) \Rightarrow \tilde{a}(y + z) = \tilde{a}(y)\tilde{a}(z). \quad (1.12)$$

1.2. Convergencia en distribución del máximo

Al ser $\tilde{U}(y)$ monótona, por la ecuación (1.11) sabemos que $\tilde{a}(y)$ también lo es. La única solución monótona no constante de (1.12) viene dada por $\tilde{a}(y) = e^{py}$, con $p \neq 0$.

Por tanto,

$$\phi^{-1}(y) = U(y) = v + c(1 - e^{py}), \text{ con } v = U(0) \Rightarrow x = \phi^{-1}(\phi(x)) = v + c(1 - e^{p\phi(x)}).$$

Para la implicación se ha vuelto a usar el Lema 1.2 (b), ya que U es continua por ser una función exponencial.

Lo anterior nos permite obtener la siguiente expresión,

$$F(x) = \exp \left\{ - \left(1 - \frac{x-v}{c} \right)^{-\frac{1}{p}} \right\}.$$

Con $c < 0$ si $p > 0$ y $c > 0$ si $p < 0$.

La razón de estas condiciones es que, al ser una función de distribución, F es no decreciente. Por tanto, teniendo en cuenta la definición de ϕ , sabemos que esta, a su vez, es no decreciente y, en consecuencia, su inversa, U , también lo es. A través de la expresión obtenida de U , obtenemos las condiciones sobre p y c .

Finalmente, podemos ver que F es una función de distribución sin saltos en ningún punto final. Asimismo, $F(x) = G(-\frac{x}{c} + (1 - \frac{v}{c}))$, siendo G la distribución de Fréchet (Tipo II (1.4)) o la distribución de Weibull (Tipo III (1.5)), con $\alpha = +1/p$ o $\alpha = -1/p$ de acuerdo a $p > 0$ o $p < 0$.

En definitiva, F es del mismo tipo que una de los tipos de distribuciones de valores extremos.

□

A continuación presentamos el resultado fundamental de esta teoría.

Teorema 1.7. (Convergencia en distribución del máximo). Sean X_1, \dots, X_n variables i.i.d. y sea $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Si existen sucesiones $\{a_n > 0\}$, $\{b_n\}$ tal que,

$$P(a_n(M_n - b_n) \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x), \quad \forall x \text{ punto de continuidad de } G, \quad (1.13)$$

siendo G una función de distribución no degenerada. Entonces, G es una distribución de tipo valor extremo, (Definición 2).

Asimismo, cada función de distribución G de tipo valor extremo puede aparecer como límite en (1.13), de hecho, aparece cuando la propia G es la función de distribución de cada X_i .

Demostración. Si (1.13) se verifica, entonces, por la Proposición 1.4, tenemos que G es una distribución max-estable. Basta aplicar el Teorema 1.6 para concluir que G es del mismo tipo que uno de los tipos de distribuciones de valor extremo.

Por otra parte, suponemos que las variables están distribuidas según la distribución G , siendo G uno de los tres tipos de la Definición 2. Al ser de tipo valor extremo es max-estable (Teorema 1.6). Finalmente, basta aplicar el Teorema 1.5 para ver que $G \in MDA(G)$. Esto implica que existen sucesiones $\{a_n > 0\}$, $\{b_n\}$ tal que $P(a_n(M_n - b_n) \leq x) = G^n(a_n^{-1}x + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x)$. □

La condición de que G sea no degenerada es fundamental, en la Sección 1.2.3 veremos bajo qué condición G es degenerada y qué valor toma en ese caso. Por otra parte, en la Sección 1.2.4 veremos bajo qué condiciones ocurre la convergencia y cuáles son las expresiones de $\{a_n > 0\}$, $\{b_n\}$, según el tipo de distribución valor extremo al que converjan.

1.2. Convergencia en distribución del máximo

1.2.3. Convergencia general

Como se mencionó previamente, en esta sección nos dedicaremos al estudio de la convergencia de la probabilidad $P(M_n \leq u_n)$. Aquí, consideramos sucesiones $\{u_n\}$ que pueden ser más complejas que la sucesión lineal discutida en la Sección 1.2.2, e incluso pueden no depender de x .

Teorema 1.8. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias i.i.d. y sea F su función de distribución. Sea $0 \leq \tau \leq +\infty$ y sea $\{u_n\}$ una sucesión de números reales entonces,

$$n(1 - F(u_n)) \rightarrow \tau, \quad \text{cuando } n \rightarrow +\infty \quad (1.14)$$

si y solo si

$$P(M_n \leq u_n) \rightarrow e^{-\tau}, \quad \text{cuando } n \rightarrow +\infty. \quad (1.15)$$

Demostración. Vamos a considerar 2 casos:

1) $0 \leq \tau < +\infty$.

\Rightarrow) Para que se cumpla (1.14) es necesario que $1 - F(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ya que si no el límite (1.14) tendería a infinito. Por tanto, tenemos que $\log\{1 - (1 - F(u_n))\} \sim -(1 - F(u_n))$, cuando $n \rightarrow +\infty$. Además,

$$P(M_n \leq u_n) = F^n(u_n) = \{1 - (1 - F(u_n))\}^n. \quad (1.16)$$

Luego,

$$P(M_n \leq u_n) = e^{n \log\{1 - (1 - F(u_n))\}} \sim e^{-n(1 - F(u_n))} \rightarrow e^{-\tau}, \quad \text{cuando } n \rightarrow +\infty.$$

\Leftarrow) Bajo la hipótesis (1.15), pasamos a probar que se debe cumplir que $1 - F(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si esto último no es cierto, existirá una subsucesión u_{n_k} y un $\varepsilon > 0$ tal que $1 - F(u_{n_k}) > \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, $F(u_{n_k}) < 1 - \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}$.

En consecuencia, $P(M_{n_k} \leq u_{n_k}) < (1 - \varepsilon)^{n_k} \rightarrow 0$, si $k \rightarrow +\infty$. Por lo que llegamos a contradicción con la hipótesis (1.15), estamos en el caso de $\tau < +\infty$.

Tomamos logaritmos en (1.15) y (1.16) obteniendo así:

$$n \log\{1 - (1 - F(u_n))\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\tau. \quad (1.17)$$

Como $1 - F(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, tenemos que $\log\{1 - (1 - F(u_n))\} \sim -(1 - F(u_n))$, cuando $n \rightarrow +\infty$. Por tanto, (1.17) implica inmediatamente (1.14).

2) $\tau = +\infty$.

\Rightarrow) Suponemos que $n(1 - F(u_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, pero que (1.15) no se satisface, $P(M_n \leq u_n) \not\rightarrow 0$. Entonces, existirá una subsucesión $\{n_k\}$ tal que $P(M_{n_k} \leq u_{n_k}) \rightarrow e^{-\tau'}, k \rightarrow +\infty$ para algún $\tau' < +\infty$. Esto implicaría que estaríamos en el caso (1).

Por tanto, (1.15) implica que $n_k(1 - F(u_{n_k})) \rightarrow \tau' < +\infty$, contradiciendo nuestra hipótesis.

\Leftarrow) Análogamente, se demuestra que (1.15) implica (1.14). Basta considerar que

$n(1 - F(u_n)) \not\rightarrow +\infty$, cuando $n \rightarrow +\infty$. Entonces, existirá una subsucesión $\{n_k\}$ tal que $n_k(1 - F(u_{n_k})) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tau' < +\infty$ y aplicar lo probado para el caso $\tau < +\infty$.

□

En el Teorema 1.7 hemos probado que si $a_n(M_n - b_n)$ converge en distribución a una función no degenerada G , entonces G es del tipo distribución de valor extremo. A continuación, pasamos a ver un caso en el que $a_n(M_n - b_n)$ converge a una distribución degenerada y no podremos aplicar el teorema (lo hacemos para una sucesión más general $\{u_n\}$ pero basta tomar $u_n = x/a_n + b_n$).

Corolario 1.8.1. Sea F satisfaciendo que $x_F < +\infty$ y que $\lim_{x \rightarrow x_F^-} F(x) = F(x_F^-) < 1$, es decir, F con salto en x_F .

Si para alguna sucesión $\{u_n\}$, $P(M_n \leq u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$, entonces $p = 0$ o $p = 1$.

1.2. Convergencia en distribución del máximo

Demostración. Sea $\{u_n\}$ tal que $P(M_n \leq u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$, entonces $0 \leq p \leq 1$. Por lo que $p = e^{-\tau}$ para algún $0 \leq \tau \leq +\infty$. Aplicando el Teorema 1.8, llegamos a que $n(1 - F(u_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tau$.

Podemos tener dos situaciones:

- 1) $u_n < x_F$ para infinitos valores de n : para estos valores tendremos $1 - F(u_n) \geq 1 - F(x_F^-) > 0$. Por tanto, $\tau = +\infty \Rightarrow p = 0$.
- 2) $u_n \geq x_F$ para infinitos valores de n : por tanto para esos valores de n tendremos que $F(u_n) = 1 \Rightarrow n(1 - F(u_n)) = 0 \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow p = 1$.

□

En el caso de distribuciones discretas se pueden encontrar condiciones necesarias para que la distribución del máximo bajo alguna normalización lineal converja a una distribución no degenerada.

Teorema 1.9. Sea X_1, \dots, X_n variables i.i.d. con función de distribución F y sea $0 < \tau < +\infty$.

Si existe una sucesión $\{u_n\}$ satisfaciendo $n(1 - F(u_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tau$, (1.14), entonces

$$\frac{p(x)}{1 - F(x^-)} \rightarrow 0, \text{ cuando } x \rightarrow x_F, \quad (1.18)$$

siendo $F(x^-) = \lim_{y \rightarrow x^-} F(y)$ y $p(x) = F(x) - F(x^-)$.

Por tanto, por el Teorema 1.8, la condición (1.18) es necesaria para que exista una sucesión $\{u_n\}$ satisfaciendo $P(M_n \leq u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\tau}$, con $0 < \tau < +\infty$.

Demostración. Vamos a demostrar por contradicción, suponemos que existe una sucesión $\{u_n\}$ cumpliendo (1.14) pero no satisfaciendo (1.18). Esto implica la existencia de un $\varepsilon > 0$ y una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_F$ y

$$p(x_n) \geq 2\varepsilon(1 - F(x_n^-)). \quad (1.19)$$

Escogemos una sucesión de números enteros $\{n_j\}$ de modo que

$$1 - \frac{\tau}{n_j} \leq \frac{F(x_j^-) + F(x_j)}{2} \leq 1 - \frac{\tau}{n_j + 1}. \quad (1.20)$$

$\{u_{n_j}\}$, $\{x_j\}$ son dos sucesiones, por tanto, al menos una de ella gana a la otra en un número infinito de j . Luego, tenemos dos opciones:

- 1) $u_{n_j} \leq x_j$ para infinitos valores de $j \Rightarrow n_j(1 - F(u_{n_j})) \geq n_j(1 - F(x_j^-))$, para esos valores de j .
Por otra parte,

$$\begin{aligned} n_j(1 - F(x_j^-)) &= \tau + n_j \left[\left(1 - \frac{\tau}{n_j}\right) - \frac{F(x_j) + F(x_j^-)}{2} + \frac{p(x_j)}{2} \right] \geq \tau + \frac{n_j p(x_j)}{2} - n_j \left(\frac{\tau}{n_j} - \frac{\tau}{n_j + 1} \right) \geq \\ &\geq \tau + \varepsilon n_j(1 - F(x_j^-)) - \frac{\tau}{n_j + 1}. \end{aligned}$$

En la primera desigualdad hemos utilizado (1.20) y en la segunda (1.19).

Hemos llegado a que

$$(1 - \varepsilon)n_j(1 - F(x_j^-)) \geq \tau - \frac{\tau}{n_j + 1} \Rightarrow n_j(1 - F(x_j^-)) \geq \frac{\tau}{1 - \varepsilon} \left(1 - \frac{1}{n_j + 1}\right).$$

Dado que $n_j \rightarrow +\infty$ (ya que $F(x_j^-) + F(x_j) \rightarrow 2$), tenemos que:

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} n_j(1 - F(x_j^-)) > \tau.$$

Y a consecuencia,

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} n_j(1 - F(u_{n_j})) > \tau.$$

Hemos llegado a contradicción con (1.14).

1.2. Convergencia en distribución del máximo

- 2) $u_{n_j} \geq x_j$ para infinitos valores de j . Razonando de manera similar, pero cambiando las desigualdades, llegamos a la misma contradicción.

□

1.2.4. Condiciones necesarias y suficientes para pertenecer al dominio de atracción de una ley de extremo

Finalmente, en esta sección pasamos a ver las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir la función de distribución F para pertenecer al dominio de atracción de una función de tipo valor extremo.

Teorema 1.10. *Sea F una función de distribución. Las condiciones necesarias y suficientes para que F pertenezca al máximo dominio de atracción de uno de los tres tipos de distribuciones de valores extremos son:*

TIPO I: existe $g(t)$, una función positiva tal que $\lim_{t \uparrow x_F} \frac{1-F(t+tg(t))}{1-F(t)} = e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

TIPO II: $\begin{cases} x_F = +\infty, \\ \exists \alpha > 0 \text{ tal que } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = x^{-\alpha}, \quad \forall x > 0. \end{cases}$

TIPO III: $\begin{cases} x_F < +\infty, \\ \exists \alpha > 0 \text{ tal que } \lim_{h \downarrow 0} \frac{1-F(x_F-xh)}{1-F(x_F-h)} = x^\alpha, \quad \forall x > 0. \end{cases}$

En definitiva, observamos que el comportamiento asintótico de la cola de la distribución $(1-F(x))$ es el que determina el tipo dominio máximo de atracción al que pertenece una distribución.

Demostración. Pasamos a probar la parte de suficiencia, suponemos que la función de distribución F satisface las condiciones de alguno de los tres tipos en el enunciado del teorema.

En primer lugar, demostramos la existencia de una sucesión no decreciente $\{\gamma_n\}$ tal que $n(1-F(\gamma_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Tomamos $\gamma_n = F^{-1}(1 - 1/n)$, por lo que

$$F(\gamma_n^-) \leq 1 - \frac{1}{n} \leq F(\gamma_n),$$

siendo $F(\gamma_n^-) = \lim_{y \rightarrow \gamma_n^-} F(y)$.

De aquí deducimos que $\limsup n(1-F(\gamma_n)) \leq 1$. Si verificamos que $\liminf n(1-F(\gamma_n)) \geq 1$, habremos probado lo que queríamos. Tenemos que $n(1-F(\gamma_n^-)) \geq 1$, luego basta ver si

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-F(\gamma_n)}{1-F(\gamma_n^-)} \geq 1. \quad (1.21)$$

En particular, una vez visto esto último, llegamos a que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-F(\gamma_n)}{1-F(\gamma_n^-)} = 1$, por ser $\limsup \frac{1-F(\gamma_n)}{1-F(\gamma_n^-)} \leq 1$.

Lo demostramos para cada uno de los casos:

- *F satisface las condiciones del TIPO I:* Tenemos que $F(\gamma_n - a) \leq F(\gamma_n^-)$, $\forall a > 0$, por ser F no decreciente. Por tanto, por ser g positiva, $F(\gamma_n + xg(\gamma_n)) \leq F(\gamma_n^-)$, $\forall x < 0$. Luego, $1 - F(\gamma_n^-) \leq 1 - F(\gamma_n + xg(\gamma_n))$, $\forall x < 0$.

Notar que $\gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_F$. Por consiguiente,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-F(\gamma_n)}{1-F(\gamma_n^-)} \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-F(\gamma_n)}{1-F(\gamma_n + xg(\gamma_n))} = e^x, \quad \forall x < 0.$$

La última igualdad viene de nuestras hipótesis sobre F . Basta hacer tender x a 0 para ver que se satisface la desigualdad (1.21).

1.2. Convergencia en distribución del máximo

- *F satisface las condiciones del TIPO II:* Considerando que $F(x\gamma_n) \leq F(\gamma_n^-)$, $\forall x < 1$ y que $\gamma_n \rightarrow x_F$, tenemos que,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - F(\gamma_n)}{1 - F(\gamma_n^-)} \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - F(\gamma_n)}{1 - F(\gamma_n x)} = x^\alpha, \quad \forall x < 1.$$

La última igualdad viene de nuestra hipótesis sobre F . Basta hacer $x \rightarrow 1$ para ver que se satisface la desigualdad (1.21).

- *F satisface las condiciones del TIPO III:* Definimos $h_n = x_F - \gamma_n$, ($h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$). Teniendo en cuenta que $x\gamma_n + (1-x)x_F < \gamma_n$, $\forall x > 1$, tenemos que $F(x\gamma_n + (1-x)x_F) \leq F(\gamma_n^-)$, $\forall x > 1$. A consecuencia,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - F(\gamma_n)}{1 - F(\gamma_n^-)} \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - F(\gamma_n)}{1 - F(\gamma_n x + (1-x)x_F)} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - F(x_F - h_n)}{1 - F(x_F - xh_n)} = x^{-\alpha}, \quad \forall x > 1.$$

La última igualdad viene de nuestra hipótesis sobre F . Basta hacer $x \rightarrow 1$ para ver que se satisface la desigualdad (1.21).

Una vez definida y probada la existencia de $\{\gamma_n\}$, pasamos a ver que efectivamente las condiciones dadas son suficientes para que F pertenezca a uno de los tres dominios de atracción. Lo demostramos para cada uno de los casos:

- *F satisface las condiciones del TIPO I:* Sabemos que $\gamma_n \rightarrow x_F$, luego por hipótesis, tomando $t = \gamma_n$ llegamos a que

$$n(1 - F(\gamma_n + xg(\gamma_n))) \sim n(1 - F(\gamma_n))e^{-x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-x}.$$

Aplicando el Teorema 1.8, tenemos que $P(M_n \leq \gamma_n + xg(\gamma_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\{-e^{-x}\}$. Por tanto, basta tomar $\mathbf{a}_n = (g(\gamma_n))^{-1}$, $\mathbf{b}_n = \gamma_n$ para tener $P(a_n(M_n - b_n) \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x)$, siendo G la función de distribución de Gumbel (TIPO I, 1.3).

- *F satisface las condiciones del TIPO II:* Tomando $t = \gamma_n$ y $x > 0$, razonando del mismo modo que en el caso anterior, tenemos que

$$n(1 - F(\gamma_n x)) \sim n(1 - F(\gamma_n))x^{-\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^{-\alpha}.$$

Aplicando el Teorema 1.8, $P(M_n \leq \gamma_n x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\{-x^{-\alpha}\}$, si $x > 0$. Por otra parte, como $\gamma_n > 0$ para n suficientemente grande ($\gamma_n \rightarrow +\infty$), si $x \downarrow 0$ obtenemos que $P(M_n \leq 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Finalmente, si $x < 0$, $P(M_n \leq \gamma_n x) \leq P(M_n \leq 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Definiendo $\mathbf{a}_n = \gamma_n^{-1}$, $\mathbf{b}_n = 0$, llegamos a $P(a_n(M_n - b_n) \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x)$, siendo G la función de distribución de Fréchet (TIPO II, 1.4).

- *F satisface las condiciones del TIPO III:* Estableciendo h_n como antes, observamos que $h_n \rightarrow 0$. Llevando a cabo un procedimiento análogo, obtenemos que para $x > 0$,

$$n(1 - F(x_F - x(x_F - \gamma_n))) \sim n(1 - F(\gamma_n))x^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^\alpha.$$

Remplazando x por $-x$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - F(x_F + x(x_F - \gamma_n))) = (-x)^\alpha.$$

Por el Teorema 1.8, $P(M_n \leq x_F + x(x_F - \gamma_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\{-(-x)^\alpha\}$, si $x < 0$. Haciendo $x \uparrow 0$ llegamos a que $P(M_n \leq x_F) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Luego si $x > 0$, $P(M_n \leq x_F + x(x_F - \gamma_n)) \geq P(M_n \leq x_F) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, debido a que $x_F > \gamma_n$.

En definitiva, tomando $\mathbf{a}_n = (x_F - \gamma_n)^{-1}$, $\mathbf{b}_n = x_F$, obtenemos $P(a_n(M_n - b_n) \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x)$, siendo G la función de distribución de Weibull (TIPO III, 1.5).

1.2. Convergencia en distribución del máximo

La demostración de la necesidad de las condiciones se puede consultar en [5].

□

Nota 2. Tal y como hemos visto en la demostración del teorema anterior, sean $\{a_n > 0\}$, $\{b_n\}$ sucesiones tal que $P(a_n(M_n - b_n) \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x)$. Una posible elección es:

$$\text{TIPO I: } a_n = [g(\gamma_n)]^{-1}, \quad b_n = \gamma_n.$$

$$\text{TIPO II: } a_n = \gamma_n^{-1}, \quad b_n = 0.$$

$$\text{TIPO III: } a_n = (x_F - \gamma_n)^{-1}, \quad b_n = x_F.$$

con $\gamma_n = F^{-1}(1 - 1/n)$ y g la que aparece en el Teorema 1.10.

1.2.5. Ejemplos

En esta sección, pasamos a ver ejemplos de cómo podemos aplicar los resultados vistos hasta ahora. Primero, veremos ejemplos de distribuciones que sí que pertenecen al máximo dominio de atracción de alguno de los 3 tipos de distribuciones valores extremos, identificando a cuál de ellos y hallando las constantes normalizadoras. A continuación, veremos un ejemplo en el que el máximo no converge en distribución a ninguno de los tres tipos bajo ninguna normalización.

Ejemplo 1. (Distribución Weibull).

Pese a compartir nombre con el de la distribución de valor extremo de TIPO III (1.5), no se trata de la misma distribución. La función de distribución de Weibull considerada en este ejemplo viene dada por $F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}$, si $x > 0$, $F(x) = 0$, si $x \leq 0$, donde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ son los parámetros de forma y escala, respectivamente.

Se trata de una distribución continua con $x_F = +\infty$, luego aplicando el Teorema 1.10, descartamos que esta distribución pertenezca al máximo dominio de atracción de la **distribución de Weibull (TIPO III 1.5)**.

Definimos $g(t) = \frac{\beta^\alpha t^{1-\alpha}}{\alpha}$, $\forall t \geq 0$ y pasamos a ver que $t^\alpha - (t + xg(t))^\alpha \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -x\beta^\alpha$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^\alpha - (t + xg(t))^\alpha) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(1 + \frac{x\beta^\alpha t^{-\alpha}}{\alpha}\right)^\alpha}{t^{-\alpha}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha \left(1 + \frac{x\beta^\alpha t^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{\alpha-1} \frac{x\beta^\alpha}{\alpha} t^{-(\alpha+1)}}{-\alpha t^{-(\alpha+1)}} = -x\beta^\alpha.$$

Por tanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - F(t + xg(t))}{1 - F(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{t^\alpha - (t + xg(t))^\alpha}{\beta^\alpha}} = e^{-x}.$$

Aplicando el Teorema 1.10, concluimos que **una variable Weibull pertenece al máximo dominio de atracción de una distribución de Gumbel (TIPO I, 1.3)**. Es decir, existen sucesiones $\{a_n > 0\}$, $\{b_n\}$ de modo que $P(M_n \leq a_n^{-1}x + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, siendo $G(x)$ la función definida en (1.3).

Teniendo en cuenta la Nota 2, pasamos averiguar la expresión de γ_n :

$$F(\gamma_n) = 1 - \frac{1}{n} \iff e^{-\left(\frac{\gamma_n}{\beta}\right)^\alpha} = \frac{1}{n} \iff \gamma_n = \beta \log(n)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Llegamos a que $a_n = \frac{\alpha}{\beta} \log(n)^{1-\frac{1}{\alpha}}$ y $b_n = \beta \log(n)^{\frac{1}{\alpha}}$.

La distribución exponencial es un caso particular de la distribución de Weibull ($\beta = 1/\lambda$, $\alpha = 1$). Luego, si M_n es el máximo de n variables $Exp(\lambda)$, se satisface que $\lambda M_n - \log(n)$ converge en distribución a una

distribución de Gumbel, ya que $a_n = \lambda$, $b_n = \log(n)/\lambda$.

Con ayuda de R, hemos realizado una simulación de Monte Carlo de este último resultado con 200 repeticiones comprobando que se tiene un buen ajuste. En la Figura 1.1 se muestra una simulación considerando una $Exp(0.5)$ y $n=1000$.

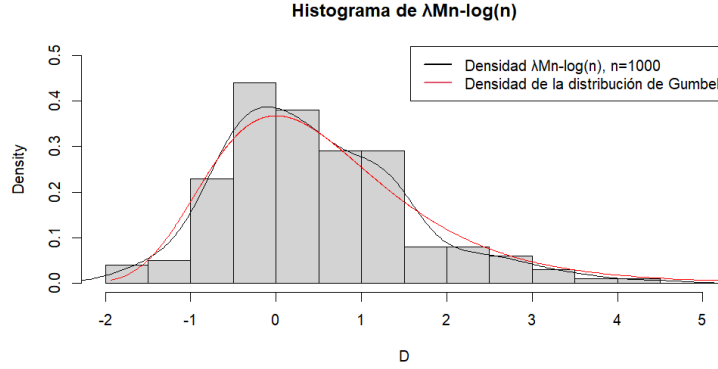


Figura 1.1: Simulación de Monte Carlo con 200 repeticiones de la distribución de $0,5M_{1000} - \log(1000)$, siendo M_{1000} el máximo de 1000 variables $Exp(0,5)$. Se compara con la distribución de Gumbel.

Ejemplo 2. (Distribución de Cauchy).

La función de distribución de una distribución de Cauchy de parámetros x_0 (posición) y γ (de escala) viene dada por $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Al ser $x_F = +\infty$, aplicando el Teorema 1.10, descartamos que la Cauchy pertenezca al máximo dominio de atracción de la distribución de Weibull (TIPO III 1.5). Fijamos un $x > 0$, pasamos a calcular

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{tx-x_0}{\gamma}\right)}{\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{t-x_0}{\gamma}\right)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{x}{(tx-x_0)^2 + \gamma^2}\right)}{\left(\frac{1}{(t-x_0)^2 + \gamma^2}\right)} = \frac{1}{x}.$$

En definitiva, teniendo en cuenta las condiciones del Teorema 1.10, llegamos a que la *distribución de Cauchy pertenece al dominio de atracción de la distribución de Fréchet de parámetro $\alpha = 1$ (TIPO II, (1.4))*.

Calculamos γ_n :

$$F(\gamma_n) = 1 - \frac{1}{n} \iff \gamma_n = \gamma \cotg\left(\frac{\pi}{n}\right) + x_0.$$

Aplicando la Nota 2, tenemos que $a_n = \frac{1}{\gamma \cotg(\frac{\pi}{n}) + x_0}$ y $b_n = 0$.

Es decir, $P\left(\frac{M_n}{\gamma \cotg(\frac{\pi}{n}) + x_0} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}}$, si $x > 0$ y $P\left(\frac{M_n}{\gamma \cotg(\frac{\pi}{n}) + x_0} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, si $x \leq 0$.

Al igual que en el ejemplo anterior, hemos comprobado con una simulación de Monte Carlo con 200 repeticiones que el ajuste es bueno. En la Figura 1.2 se puede ver el resultado de una simulación de cómo $\frac{M_n}{\cotg(\frac{\pi}{n})}$ converge en distribución a una Fréchet de parámetro $\alpha = 1$.

Ejemplo 3. (Distribución Uniforme).

La función de distribución de $U(a, b)$ viene dada por $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$, $\forall x \in (a, b)$. $x_F = b < +\infty$ y además:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - F(x_F - xh)}{1 - F(x_F - h)} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\frac{xh}{b-a}}{\frac{h}{b-a}} = x.$$

Por tanto, aplicando el Teorema 1.10, llegamos a que $U(a, b) \in MDA(G)$, siendo G la función *distribución de Weibull con $\alpha = 1$ (TIPO III, (1.5))*.

1.2. Convergencia en distribución del máximo

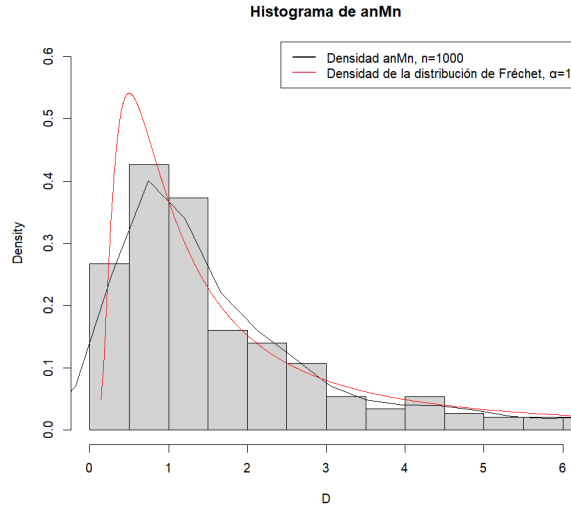


Figura 1.2: Simulación de Monte Carlo con 200 repeticiones de la distribución de $M_{1000}/\cot g(\pi/1000)$, siendo M_{1000} el máximo de 1000 variables Cauchy estándar ($\gamma = 1$, $x_0 = 0$). Se compara con la distribución de Fréchet de parámetro $\alpha = 1$.

Utilizando la Nota 2, como $\gamma_n = b - \frac{b-a}{n}$, obtenemos que $a_n = \frac{n}{b-a}$, $b_n = b$.

Por tanto, $P\left(\frac{n(M_n-b)}{b-a} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$, si $x < 0$ y $P\left(\frac{n(M_n-b)}{b-a} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, si $x \geq 0$.

Realizando con R una simulación de Monte Carlo con 200 repeticiones, comprobamos que efectivamente $\frac{n(M_n-b)}{b-a}$ converge en distribución a la distribución de Weibull de parámetro 1. En la Figura 1.3 muestra una simulación considerando $U(0,1)$ y $n=1000$.

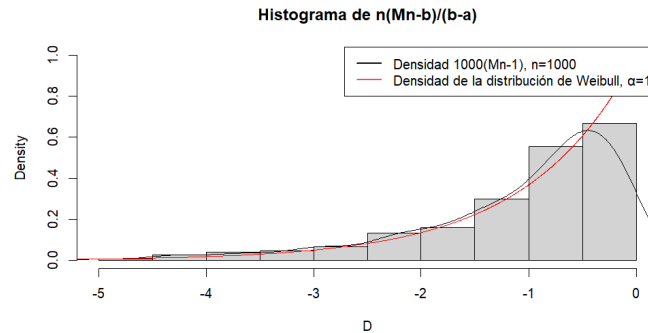


Figura 1.3: Simulación de Monte Carlo con 200 repeticiones de la distribución de $1000(M_{1000} - 1)$, siendo M_{1000} el máximo de 1000 variables $U(0,1)$. Se compara con la distribución de Weibull con $\alpha = 1$.

Ejemplo 4. (Distribución Geométrica).

La función de distribución de una Geométrica de parámetro p viene dada por $F(x) = 1 - (1-p)^{\lfloor x \rfloor}$, $\forall x \geq 0$, siendo $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{N} \mid k \leq x\}$. La función de probabilidad viene dada por $p(r) = P(X = r) = (1-p)^{r-1}p$, si $r = 1, 2, 3, \dots$ y 0 de otro modo. Tenemos que

$$\frac{p(n)}{1 - F(n-1)} = \frac{(1-p)^{n-1}p}{(1-p)^{n-1}} = p.$$

Por tanto, como $x_F = +\infty$, no se cumple (1.18) del Teorema 1.9. Esto implica que no existe ninguna sucesión $\{u_n\}$ tal que $P\{M_n \leq u_n\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$ con p distinto de 0 o 1. En definitiva, el máximo de n variables

1.2. Convergencia en distribución del máximo

Geométricas no converge en distribución y la distribución geométrica no pertenece al máximo dominio de atracción de ninguna distribución max-estable.

Una observación interesante es que la distribución exponencial de parámetro $\lambda = -\log(p)$ puede considerarse como la distribución continua equivalente a una distribución geométrica de parámetro p . De hecho, tal como se puede ver en la Figura 1.4, las colas de sus distribuciones son prácticamente iguales. Por lo que hemos estudiado, la convergencia en distribución del máximo se basa en el comportamiento de la cola de la distribución. Sin embargo, el máximo de n variables exponenciales converge en distribución pero el máximo de n variables geométricas no.

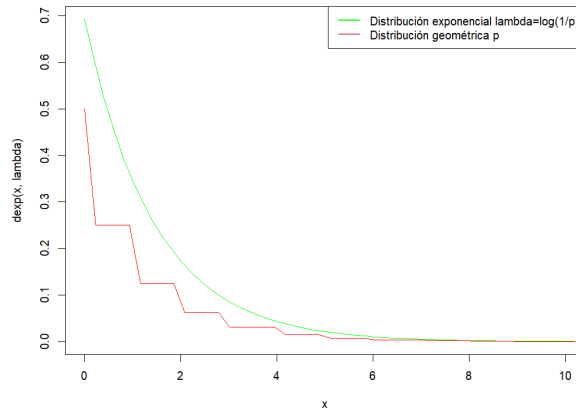


Figura 1.4: Distribución de una $Exp(-\log(p))$ y una Geométrica de parámetro p .

1.3. Convergencia en probabilidad y convergencia casi segura para el máximo

En esta sección vamos a considerar dos tipos de distribuciones, según si $x_F < +\infty$ o no. Estudiaremos por separado en cada uno de los tipos la convergencia en probabilidad y casi segura del máximo.

En primer lugar, consideramos las distribuciones con $x_F < +\infty$. La siguiente proposición nos da el resultado sobre las convergencias que andamos buscando.

Proposición 1.11. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias i.i.d. con F su función de distribución y sea $x_F < +\infty$. Tenemos que $M_n \xrightarrow{c.s.} x_F$.

Demostración. Primero probamos que $M_n \xrightarrow{P} x_F$.

Esto es equivalente a ver que $\forall \varepsilon > 0$, $P(M_n \notin (x_F - \varepsilon, x_F + \varepsilon))$ converge a 0. Teniendo en cuenta que $P(M_n \notin (x_F - \varepsilon, x_F + \varepsilon)) = P(M_n \leq x_F - \varepsilon) + P(M_n \geq x_F + \varepsilon)$, demostramos que estos dos últimos sumandos tienden ambos a 0:

Sea $\lambda < x_F$, tenemos que $1 - F(\lambda) > 0$. Por tanto, $n(1 - F(\lambda)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Luego, si aplicamos el Teorema 1.8 con $u_n = \lambda$, $\forall n \geq 1$, llegamos a que $P(M_n \leq \lambda) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Es decir, $\forall \varepsilon > 0$, $P(M_n \leq x_F - \varepsilon) \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow +\infty$.

Por otra parte, sabemos que $P(M_n > x_F) = 0$, $\forall n \geq 1$. Entonces $\forall \varepsilon > 0$, $P(M_n \geq x_F + \varepsilon) \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow +\infty$. Con esto probamos la convergencia en probabilidad.

Finalmente, como $\{M_n\}$ es una sucesión no decreciente acotada, converge casi seguramente. Necesariamente convergerá a x_F casi seguramente, ya que la convergencia casi segura implica convergencia en probabilidad. \square

1.3. Convergencia en probabilidad y convergencia casi segura para el máximo

Por tanto, podemos establecer que si $x_F < +\infty$ entonces:

$$\frac{M_n}{x_F} \xrightarrow{P} 1 \quad y \quad \frac{M_n}{x_F} \xrightarrow{c.s.} 1. \quad (1.22)$$

En segundo lugar, estudiamos la convergencia en probabilidad y casi segura del máximo de las distribuciones con $x_F = +\infty$. A continuación, vemos condiciones sobre la sucesión $\{a_n\}$ para que $\frac{M_n}{a_n} \xrightarrow{P} 1$.

Teorema 1.12. (Convergencia en probabilidad).

Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias i.i.d. con F su función de distribución y sea $x_F = +\infty$. Dada una sucesión $\{a_n\}$, las condiciones necesarias y suficientes para que $\frac{M_n}{a_n} \xrightarrow{P} 1$ son:

$$n(1 - F(ta_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \quad \forall t \in (0, 1), \quad (1.23)$$

$$n(1 - F(ta_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \forall t > 1. \quad (1.24)$$

Demostración. $\frac{M_n}{a_n} \xrightarrow{P} 1$ es equivalente a que $\forall \varepsilon > 0$, $P\left(\frac{M_n}{a_n} \notin (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Por tanto, tenemos que ver las condiciones necesarias y suficientes para que $P(M_n \leq a_n(1 - \varepsilon)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ y $P(M_n > a_n(1 + \varepsilon)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Estas condiciones nos las da el Teorema 1.8:

$$P(M_n \leq a_n(1 - \varepsilon)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \iff n(1 - F(a_n(1 - \varepsilon))) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

$$P(M_n < a_n(1 + \varepsilon)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \iff n(1 - F(a_n(1 + \varepsilon))) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Las condiciones obtenidas son equivalentes a (1.23) y (1.24). □

Definición 7. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de sucesos. Se define el suceso *límite superior* de $\{A_n\}$ de la siguiente manera:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

También se denota $\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n$ como $\{A_n \text{ i.o.}\}$.

Pasamos a probar la existencia de números reales $\{a_n\}$ tal que $\frac{M_n}{a_n}$ converja a 1 casi seguramente. Esto es equivalente a probar que existe una sucesión $\{a_n\}$ tal que $\forall \varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{M_n}{a_n} - 1\right| > \varepsilon \text{ i.o.}\right) = 0$. Es decir, que se cumplan las dos siguientes condiciones $\forall \varepsilon > 0$:

$$P(M_n > (1 + \varepsilon)a_n \text{ i.o.}) = 0 \quad y \quad P(M_n < (1 - \varepsilon)a_n \text{ i.o.}) = 0.$$

Antes de presentar la ley (Teorema 1.16), se necesita conocer unos resultados previos que están escritos a continuación. El Teorema 1.14 nos dará condiciones necesarias y suficientes para probar la primera condición, mientras que el Teorema 1.15 nos proporcionará condiciones suficientes para probar la segunda condición.

Lema 1.13. (Lema de Borel-Cantelli). Sea $\{A_n\}$ una sucesión de sucesos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, entonces $P(A_n \text{ i.o.}) = 0$.

Si los A_n son independientes y $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$, entonces $P(A_n \text{ i.o.}) = 1$

1.3. Convergencia en probabilidad y convergencia casi segura para el máximo

Teorema 1.14. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias i.i.d. con función de distribución F tal que $x_F = +\infty$. Sea $\{u_n\}$ una sucesión de números reales no decreciente tal que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Entonces

$$P(M_n > u_n \text{ i.o.}) = P(X_n > u_n \text{ i.o.}). \quad (1.25)$$

En particular,

$$P(M_n > u_n \text{ i.o.}) = 0 \text{ si y solo si } \sum_{j=1}^{+\infty} [1 - F(u_j)] < +\infty,$$

$$P(M_n > u_n \text{ i.o.}) = 1 \text{ si y solo si } \sum_{j=1}^{+\infty} [1 - F(u_j)] = +\infty.$$

Demostración. Consideramos los sucesos $A_n = \{M_n > u_n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si probamos que los sucesos A_n ocurren para infinitos valores de n si y solo si los sucesos $\{X_j > u_j\}$ ocurren para infinitos valores de j , entonces habremos demostrado la igualdad (1.25).

\Leftarrow) Esta implicación es inmediata: por definición del máximo $M_n \geq X_j$, con $1 \leq j \leq n$, y por hipótesis $X_j > u_j$ para infinitos valores de j . Luego, A_n ocurrirá también para infinitos valores de n .

\Rightarrow) Ahora suponemos que $M_n > u_n$ para infinitos valores de n . Por la definición de máximo, esto implica la existencia de un $j \leq n$ de modo que $X_j > u_n$. Al ser $\{u_n\}$ una sucesión no decreciente, $X_j > u_n \geq u_j$. Para cada valor de n , definimos $k_n = k(n) = \max\{j \leq n : X_j > u_n\}$. Así obtenemos una subsucesión de índices no decreciente. Al no estar la sucesión $\{u_n\}$ acotada ($u_n \rightarrow +\infty$), tenemos que $X_{k_n} > u_n \geq u_{k_n}$. Es decir, hemos encontrado infinitos valores de índices j para los que $X_j > u_j$.

Finalmente, los sucesos $\{X_j > u_j\}$ son independientes entre sí por ser las variables independientes. Por tanto, basta combinar los dos resultados del Lema de Borel Cantelli (Lema 1.13) junto a lo que acabamos de probar:

$$\begin{aligned} 0 &= P(M_n > u_n \text{ i.o.}) = P(X_n > u_n \text{ i.o.}) \iff +\infty > \sum_{j=1}^{\infty} P(X_j > u_j) = \sum_{j=1}^{\infty} [1 - F(u_j)], \\ 1 &= P(M_n > u_n \text{ i.o.}) = P(X_n > u_n \text{ i.o.}) \iff +\infty = \sum_{j=1}^{\infty} P(X_j > u_j) = \sum_{j=1}^{\infty} [1 - F(u_j)]. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.15. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias i.i.d. con F su función de distribución. Sea $\{u_n\}$ una sucesión no decreciente cumpliendo que $1 - F(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $n(1 - F(u_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} [1 - F(u_n)] \exp\{-n[1 - F(u_n)]\} < +\infty$. Entonces $P(M_n \leq u_n \text{ i.o.}) = 0$.

Demostración. Los detalles de esta demostración se pueden encontrar en [4] (pág. 170, Teorema 3.5.2)

□

Pasamos a presentar las condiciones necesarias y suficientes sobre $\{a_n\}$ para que $\frac{M_n}{a_n} \xrightarrow{c.s.} 1$.

Teorema 1.16. (Convergencia casi segura). Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias i.i.d. con función de distribución F tal que $x_F = +\infty$. Sea $\{\gamma_n\}$ la sucesión definida por $\gamma_n = F^{-1}(1 - \frac{1}{n})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y suponemos que $n(1 - F(1 - \varepsilon)\gamma_n) \uparrow \infty$, $\forall \varepsilon > 0$.

Entonces

$$\frac{M_n}{\gamma_n} \xrightarrow{c.s.} 1 \quad (1.26)$$

si y solo si, $\forall k > 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [1 - F(k\gamma_n)] < +\infty. \quad (1.27)$$

Nota 3. La condición $n(1 - F(1 - \varepsilon)\gamma_n) \uparrow \infty$, $\forall \varepsilon > 0$ es razonable. La convergencia a $+\infty$ es necesaria para que $\frac{M_n}{\gamma_n} \xrightarrow{P} 1$, y la convergencia casi segura implica convergencia en probabilidad.

Demostración. Empleando la definición de convergencia casi segura, tenemos que:

$$\frac{M_n}{\gamma_n} \xrightarrow{c.s.} 1 \iff \forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{M_n}{\gamma_n} - 1\right| > \varepsilon \text{ i.o.}\right) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \begin{cases} P(M_n > (1 + \varepsilon)\gamma_n \text{ i.o.}) = 0 & (1) \\ P(M_n < (1 - \varepsilon)\gamma_n \text{ i.o.}) = 0 & (2) \end{cases}$$

Pasamos a ver qué condiciones son necesarias y suficientes para que se cumplan las condiciones (1) y (2).

Aplicando el Teorema 1.14 (ya que $\gamma_n \rightarrow x_F = +\infty$), obtenemos que $\sum_{n=1}^{+\infty} [1 - F((1 + \varepsilon)\gamma_n)] < +\infty$, $\forall \varepsilon > 0$ es una condición necesaria y suficiente para que $P(M_n > (1 + \varepsilon)\gamma_n \text{ i.o.}) = 0$. En particular, $\sum_{n=1}^{+\infty} [1 - F(k\gamma_n)] < +\infty$, $\forall k > 1$ será una condición necesaria para que $\frac{M_n}{\gamma_n} \xrightarrow{c.s.} 1$ y suficiente para (1).

A continuación, demostramos que esta última condición también es suficiente para (2). Para cumplir nuestro objetivo fijamos $\varepsilon > 0$ y aplicamos el Teorema 1.15 con $u_n = (1 - \varepsilon)\gamma_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Antes que nada, comprobamos que $\{u_n\}$ satisface las condiciones para poder aplicarlo:

- 1) $\{\gamma_n\}$ es una sucesión no decreciente por definición, por tanto, $\{u_n\}$ también lo será. Además $u_n \rightarrow +\infty$, luego $1 - F(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- 2) Por hipótesis.
- 3) La parte complicada es ver que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [1 - F(u_n)] \exp\{-n[1 - F(u_n)]\} < +\infty. \quad (1.28)$$

Lo vamos a demostrar en el caso de que F sea absolutamente continua. En primer lugar probamos que (1.27) ocurre si y solo si dado $t \in (0, 1)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(y)}{1 - F(ty)} dy < +\infty, \quad (1.29)$$

siendo f la densidad de F .

Definimos $G(y) = F^{-1}(1 - 1/y)$. Se trata de una función no decreciente con $G(n) = \gamma_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $G(y) \geq G(n) \Rightarrow 1 - F(kG(y)) \leq 1 - F(kG(n))$, $\forall y \in [n, n+1]$, $\forall k > 1$. Esto implica que

$$\int_n^{n+1} (1 - F[kG(y)]) dy \leq 1 - F(k\gamma_n) \leq \int_{n-1}^n (1 - F[kG(y)]) dy.$$

Aplicando sumatorios vemos que la condición (1.27) es equivalente a

$$\int_1^{+\infty} (1 - F[kG(y)]) dy < +\infty.$$

Desarrollamos esta última expresión:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} (1 - F[kG(y)]) dy &= \int_1^{+\infty} \left(\int_{kG(y)}^{+\infty} f(x) dx \right) dy = \int_{kG(1)}^{+\infty} \left(\int_1^{\frac{1}{1-F(x/k)}} dy \right) f(x) dx \\ &= \int_{kG(1)}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 - F(x/k)} - 1 \right) f(x) dx = \int_{kG(1)}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{1 - F(x/k)} + F(kG(1)) - 1. \end{aligned}$$

La convergencia de esta integral está determinada por la convergencia de (1.29), (tomar $t = 1/k$). A continuación, veremos que al verificarse (1.29) la condición que estamos buscando se satisface.

Antes que nada, demostramos que (1.28) es equivalente a que $\sum_{n=1}^{+\infty} [1 - F(u_{n+1})] \exp\{-(n+1)[1 - F(u_n)]\} < +\infty$. Para ello, definimos $x_n = 1 - F(u_n)$. Se cumple que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} e^{-(n+1)x_n}}{x_{n+1} e^{-nx_n}} = 1.$$

1.3. Convergencia en probabilidad y convergencia casi segura para el máximo

Es decir, el carácter de $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{n+1} e^{-(n+1)x_n}$ es el mismo que el de $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{n+1} e^{-nx_n}$.

Por otra parte, basta ver que existen $A, B > 0$ tal que $A < \frac{x_{n+1}}{x_n} < B$, $\forall n \in \mathbb{N}$, para determinar que a su vez el comportamiento de $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{n+1} e^{-nx_n}$ es equivalente al comportamiento de $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n e^{-nx_n}$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{nx_n}{nx_n} \leq \frac{1}{2} \frac{(n+1)x_{n+1}}{nx_n} \leq \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1.$$

En la primera desigualdad aplicamos que $n(1 - F(u_n))$ es una sucesión creciente (por la condición 2). En la segunda desigualdad usamos que $(n+1)/n \leq 2$. En la tercera utilizamos que es x_n es una sucesión decreciente (por la condición 1).

En definitiva, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{n+1} e^{-(n+1)x_n}$ tiene el mismo carácter que $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n e^{-nx_n}$.

Una vez vista la equivalencia de las series, razonando de una forma análoga a la llevada a cabo previamente,

$$[1 - F(u_{n+1})] \exp\{-(n+1)[1 - F(u_n)]\} \leq \int_n^{n+1} (1 - F[tG(y)]) \exp\{-y[1 - F(tG(y))]\} dy.$$

Tendremos que la última serie convergerá si

$$\int_1^{\infty} (1 - F[tG(y)]) \exp\{-y[1 - F(tG(y))]\} dy < +\infty.$$

Desarrollamos la integral haciendo el cambio de variable $x = G(y)$:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} (1 - F[tG(y)]) \exp\{-y[1 - F(tG(y))]\} dy &= \int_{G(1)}^{\infty} \left(\frac{1 - F(tx)}{1 - F(x)} \right)^2 \exp\left\{-\frac{1 - F(tx)}{1 - F(x)}\right\} \frac{f(x)}{1 - F(tx)} dx \\ &\leq M \int_{G(1)}^{\infty} \frac{f(x)}{1 - F(tx)} dx < +\infty \end{aligned}$$

Para la primera desigualdad basta definir $u(x) = \frac{1 - F(tx)}{1 - F(x)} \geq 0$, y ver que $u^2(x)e^{-u}$ es una función acotada, tomamos M como la cota. La segunda desigualdad es consecuencia de nuestra hipótesis tal y como hemos visto previamente.

Queda probado que se satisface la tercera condición.

En conclusión, podemos aplicar el Teorema 1.15 y establecer que $\forall \varepsilon > 0$, $P(M_n < (1 - \varepsilon)\gamma_n \text{ i.o.}) = 0$. \square

1.3.1. Ejemplos

A continuación, empleando los conocimientos adquiridos en esta sección, vemos ejemplos de distribuciones en los que su máximo dividido por una sucesión converge a 1 casi seguramente y distribuciones en las que esta convergencia no ocurre.

Ejemplo 5. (Distribución Weibull).

Consideramos $\{X_n\}$ variables i.i.d. con $X_n \sim \text{Weibull}(\beta, \alpha)$, siendo $\beta, \alpha > 0$.

La función de distribución es continua y viene dada por $F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}$, si $x > 0$, $F(x) = 0$, si $x \leq 0$. Tenemos que $x_F = +\infty$ y que $\gamma_n = \beta \log(n)^{\frac{1}{\alpha}}$ (calculado en el Ejemplo 1). Ahora fijamos $k > 1$ y vemos si (1.27) converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - F\left(k\beta \log(n)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} 1 - \left(1 - e^{-k^\alpha \log(n)} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k^\alpha}} < +\infty.$$

La convergencia se debe a que $k^\alpha > 1$, por ser $k > 1$, $\alpha > 0$.

Basta aplicar Teorema 1.16 para determinar que $\frac{M_n}{\log(n)^{\frac{1}{\alpha}}} \xrightarrow{c.s.} \beta$.

1.3. Convergencia en probabilidad y convergencia casi segura para el máximo

Recordando que la distribución exponencial es un caso particular de la distribución de Weibull ($\beta = 1/\lambda$, $\alpha = 1$), podemos establecer lo siguiente: *El máximo de n variables (independientes) exponenciales de parámetro λ divididas por $\log(n)$ converge casi seguramente a su media ($1/\lambda$).*

Con la ayuda de R, tomamos $\lambda = 0,5$ y generamos 100 trayectorias para $M_n/\log(n)$, cogiendo para cada una 1000 datos de una $Exp(0,5)$. Observando la Figura 1.5, vemos que las trayectorias convergen a 2, la media de la distribución.

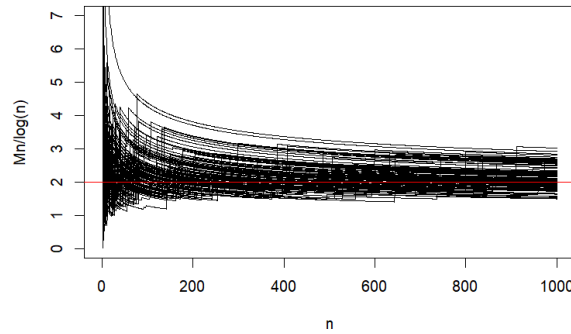


Figura 1.5: 100 trayectorias de la función $M_n/\log(n)$, siendo M_n el máximo de n variables exponenciales de parámetro 0,5.

Ejemplo 6. (Distribución Uniforme).

Consideramos $\{X_n\}$ variables i.i.d con $X_n \sim U(a,b)$, $0 < a < b < +\infty$. La función de distribución es $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$, $\forall x \in (a,b)$. Por tanto, $x_F = b < +\infty$. Aplicando la Proposición 1.11, $M_n \xrightarrow{c.s} b \Rightarrow M_n \xrightarrow{P} b$. En la Figura 1.6 se puede ver una simulación donde se refleja la veracidad de este resultado para el máximo de variables $U(0,1)$, las 100 trayectorias generadas convergen a 1.

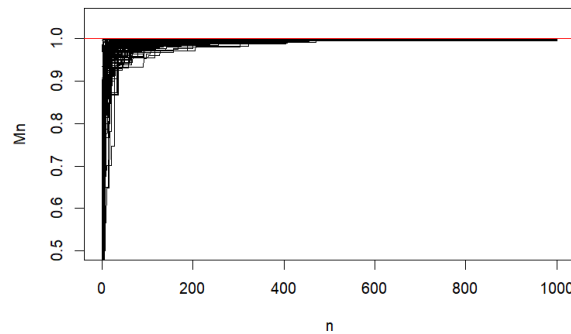


Figura 1.6: 100 trayectorias del máximo de n variables $U(0,1)$.

Ejemplo 7. (Distribución Pareto).

Consideramos $\{X_n\}$ variables i.i.d con $X_n \sim \text{Pareto}(\alpha)$, $\alpha > 0$.

La función de distribución es continua y viene dada por $F(x) = 1 - \frac{1}{x^\alpha}$, si $x \geq 1$.

Tenemos que $x_F = +\infty$, calculamos γ_n , $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$F(\gamma_n) = 1 - \frac{1}{n} \iff \gamma_n = n^{\frac{1}{\alpha}}.$$

1.3. Convergencia en probabilidad y convergencia casi segura para el máximo

Dado un $\varepsilon \in (0, 1)$, $n(1 - F((1 - \varepsilon)\gamma_n)) = (1 - \varepsilon)^{-\alpha}$. Por tanto, $n(1 - F((1 - \varepsilon)\gamma_n)) \not\rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Aplicando el Teorema 1.12 obtenemos que $n^{-\frac{1}{\alpha}}M_n$ no converge en probabilidad a 1. Por tanto, $n^{-\frac{1}{\alpha}}M_n$ tampoco convergerá a 1 casi seguramente.

La Figura 1.7 muestra una simulación de 100 trayectorias de M_n , con $\alpha = 2$. Efectivamente, observamos que hay trayectorias que no convergen a 1 (línea roja).

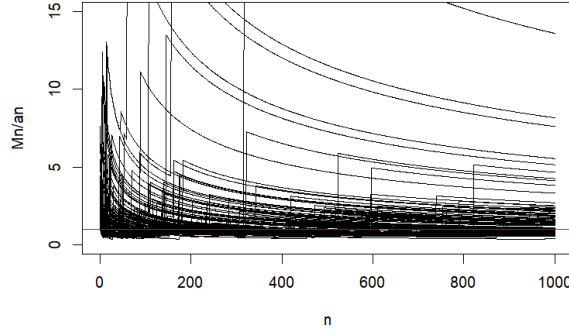


Figura 1.7: 100 trayectorias de $n^{-1/\alpha}M_n$, siendo M_n el máximo de n variables Pareto con $\alpha = 2$.

Ahora pasamos a ver que no existe ninguna sucesión $\{u_n\}$ tal que $\frac{M_n}{u_n} \xrightarrow{P} 1$, y por lo tanto tampoco c.s. Para ello vamos a emplear el Teorema 1.8:

$$\begin{aligned} \frac{M_n}{u_n} \xrightarrow{P} 1 &\iff \forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{M_n}{u_n} - 1\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \begin{cases} P(M_n \leq (1 + \varepsilon)u_n) \rightarrow 1, \\ P(M_n \leq (1 - \varepsilon)u_n) \rightarrow 0. \end{cases} \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \begin{cases} n(1 - F((1 + \varepsilon)u_n)) \rightarrow 0, \\ n(1 - F((1 - \varepsilon)u_n)) \rightarrow +\infty. \end{cases} \iff \forall \varepsilon > 0, \begin{cases} \frac{n}{(1 + \varepsilon)^\alpha u_n^\alpha} \rightarrow 0, \\ \frac{n}{(1 - \varepsilon)^\alpha u_n^\alpha} \rightarrow +\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Esto último no puede ocurrir para ninguna sucesión $\{u_n\}$.

Ejemplo 8. (*Distribución de Cauchy*).

Consideramos $\{X_n\}$ variables i.i.d con $X_n \sim \text{Cauchy}(x_0, \gamma)$, siendo $x_0, \gamma > 0$. La función de distribución es continua y viene dada por $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tenemos que $x_F = +\infty$.

Razonando de manera análoga al Ejemplo 7, se demuestra que no existe ninguna sucesión $\{u_n\}$ tal que $\frac{M_n}{u_n} \xrightarrow{P} 1$. Para que existiera se debería de satisfacer que:

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} n(1 - F((1 + \varepsilon)u_n)) \sim \frac{n\gamma}{\pi[(1 + \varepsilon)u_n - x_0]} \rightarrow 0, \\ n(1 - F((1 - \varepsilon)u_n)) \sim \frac{n\gamma}{\pi[(1 - \varepsilon)u_n - x_0]} \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

(La equivalencia viene de que $\pi/2 - \arctg(h) \sim 1/h$, si $h \rightarrow +\infty$).

No existe ninguna sucesión que satisfaga esas dos condiciones a la vez.

Por tanto, $\frac{M_n}{\gamma_n}$ no converge casi seguramente a 1, siendo $\gamma_n = \gamma \cotg\left(\frac{\pi}{n}\right) + x_0$. Si ocurriese esta convergencia, ocurriría a su vez la convergencia en probabilidad.

La Figura 1.8 muestra una simulación de 100 trayectorias de M_n con $x_0 = 0$, $\gamma = 1$. Observamos que las trayectorias no convergen a 1 (línea roja).

Ejemplo 9. (*Distribución Geométrica*).

La función de distribución de una Geométrica de parámetro p viene dada por $F(x) = 1 - (1 - p)^{\lfloor x \rfloor}$,

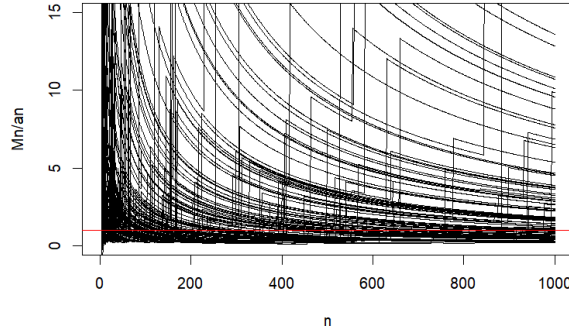


Figura 1.8: 100 trayectorias de M_n/γ_n , siendo M_n el máximo de n variables Cauchy de parámetros $x_0 = 0$, $\gamma = 1$.

$\forall x \geq 0$, donde $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{N} \mid k \leq x\}$.

$x_F = +\infty$ y F no es continua al estar definida a trozos. En este caso resulta más laborioso sacar los valores de γ_n :

$$\begin{aligned} \gamma_n = \inf \left\{ x \mid \frac{1}{n} \geq (1-p)^{\lfloor x \rfloor} \right\} &\iff \gamma_n = \inf \left\{ x \mid \lfloor x \rfloor \geq \frac{-\log(n)}{\log(1-p)} \right\} \iff \gamma_n = \inf \left\{ x \mid \lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{-\log(n)}{\log(1-p)} \right\rfloor + 1 \right\} \\ &\iff \gamma_n = \left\lfloor \frac{-\log(n)}{\log(1-p)} \right\rfloor + 1 \iff \gamma_n = \left\lceil \frac{-\log(n)}{\log(1-p)} \right\rceil. \end{aligned}$$

Siendo $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{N} \mid x \leq k\}$.

Pasamos a ver que la serie (1.27) converge para todo $k > 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{\lfloor k \lceil \frac{-\log(n)}{\log(1-p)} \rceil \rfloor} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{k \lceil \frac{-\log(n)}{\log(1-p)} \rceil} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{k \left(\frac{-\log(n)}{\log(1-p)} + 1 \right)} = (1-p)^k \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-k \log(n)}{\log(1-p)} \log(1-p)} = (1-p)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} < +\infty \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando el Teorema 1.16 llegamos a que $\frac{M_n}{\log(n)} \xrightarrow{c.s.} \frac{-1}{\log(1-p)}$.

Simulando con R, hemos generado 100 trayectorias de $M_n/\log(n)$, siendo M_n el máximo de n variables $Geom(0,5)$, (Figura 1.9). Se observa la convergencia a la línea $y = 1/\log(2)$, aunque dicha convergencia resulta ser lenta.

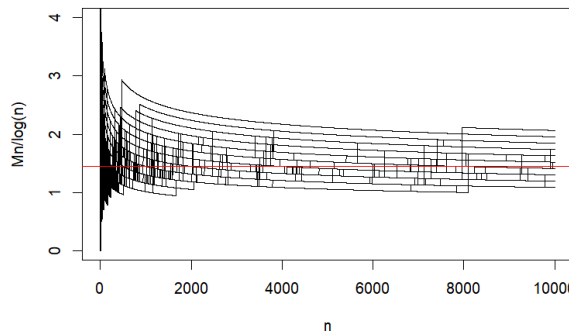


Figura 1.9: 100 trayectorias de $M_n/\log(n)$, siendo M_n el máximo de n variables $Geom(0,5)$.

1.3. Convergencia en probabilidad y convergencia casi segura para el máximo

Capítulo 2

La estadística en valores extremos

2.1. Introducción

Tras haber estudiado en profundidad toda la base probabilística que hay detrás de la teoría de valores extremos, en este capítulo pasamos a ver cómo se manifiestan los valores extremos en datos reales.

Para ello, vamos a analizar un conjunto de datos utilizando varias de las técnicas descritas en el Capítulo 6 de [4] y en el Capítulo 3 de [3].

Los estadísticos ordenados van a jugar un papel fundamental en este capítulo, los definimos de la siguiente manera:

Definición 8. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria, se define $X_{i,n}$ como el i -ésimo valor más grande de la muestra ($i \in \{1, \dots, n\}$). Es decir, $X_{n,n} \leq \dots \leq X_{1,n}$.

2.2. Aplicación

Los datos con los que vamos a trabajar consisten en las rachas máximas de viento registradas diariamente en el aeropuerto de Almería durante el mes de octubre, desde el año 1961 hasta el año 2019.

Para nuestro análisis, tomamos el valor máximo registrado en el mes de octubre de cada año, es decir, el máximo de 31 datos, obteniendo así 59 valores para nuestra distribución máximo. Nuestro objetivo es determinar si esta distribución pertenece al máximo dominio de atracción de uno de los tres tipos de distribuciones valores extremos. Esto nos permitirá realizar estimaciones fuera del rango de nuestros datos.

Es importante señalar que los datos diarios del mismo año no se pueden considerar independientes, ya que la presencia de viento en un día puede influir en la presencia del viento el día siguiente. Sin embargo, esta dependencia se considera débil, puesto que la influencia de un día no se extiende a muchos días posteriores. Bajo esta hipótesis, los resultados discutidos en el Capítulo 1 se verifican de manera aproximada. Por otro lado, las máximas rachas de viento en octubre de cada año sí son independientes entre sí e igualmente distribuidas.

En primer lugar, analizamos nuestros datos, observando que su rango es considerable, variando entre 48 km/h y 163 km/h. Además, evaluamos si nuestra distribución es de cola pesada, es decir, con cola más pesada que la distribución exponencial. Desde el punto de vista estadístico, estas son especialmente importantes ya que permiten la posibilidad de valores extremos que pueden ser significativamente mayores que los observados hasta ahora, lo que es crucial para realizar estimaciones y gestionar riesgos asociados a eventos extremos.

La manera de detectarlo es utilizando la gráfica de la función de exceso medio empírica (definida en la pág. 296 de [4]). En la Figura 2.1 se representa esta gráfica utilizando nuestros datos. A partir del valor 80 observamos un patrón creciente, lo cual indica que estamos ante una distribución de cola pesada.

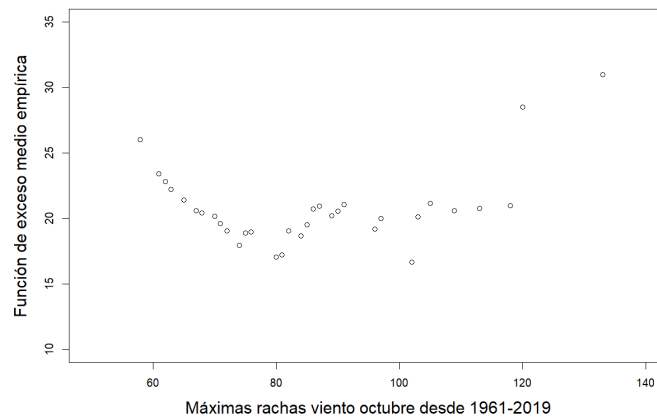


Figura 2.1: Gráfica de la función de exceso medio empírica.

En el capítulo anterior se ha establecido que $a_n(M_n - b_n)$ converge a uno de los tres tipos de distribuciones de valores extremos, con a_n , b_n adecuadas. El objetivo ahora es determinar a cuál de estas distribuciones converge nuestros datos normalizados y estimar las constantes normalizadoras a_n y b_n . La manera de proceder para detectar a cuál de los tres tipos de máximos dominios de atracción pertenece la distribución M_n es estimar el parámetro de forma de la *distribución de valor extremo generalizada*.

Definición 9. La función de *distribución de valor extremo generalizada* viene dada por:

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\{-(1 + \varepsilon x)^{-1/\varepsilon}\} & \text{si } \varepsilon \neq 0 \\ \exp\{-e^{-x}\} & \text{si } \varepsilon = 0 \end{cases}$$

siendo $1 + \varepsilon x > 0$.

Nota 4. Si $\varepsilon = 0$, entonces H_ε se trata de la distribución de **Gumbel (TIPO I, (1.3))**. Si $\varepsilon = \alpha^{-1} > 0$, H_ε se corresponde con la distribución de **Fréchet (TIPO II, (1.4))**, mientras que si $\varepsilon = -\alpha^{-1} < 0$, H_ε se corresponde con la distribución de **Weibull, (TIPO III, (1.5))**.

Utilizamos el estimador de Hill para estimar el parámetro de forma, ya que, al tratarse de una distribución de cola pesada, sabemos que el parámetro será no negativo. El estimador de Hill se define de la siguiente manera:

Definición 10. (*Estimador de Hill*).

Sean X_1, \dots, X_n los datos muestrales y sea $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\hat{\varepsilon}_{k,n} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \log(X_{j,n}) - \log(X_{k,n}).$$

Nuestro objetivo es escoger el valor óptimo de k que mejor ajuste nuestros datos. Los resultados teóricos relativos a este estimador indican que debe tomarse como una proporción (ni muy grande ni muy pequeña) de k . Para seleccionar el k adecuado, representamos el estimador de Hill en función de k (Figura 2.2), y elegimos un valor donde la gráfica se vea estable.

Observamos que al tomar un valor de k entre 20 y 40, el estimador se estabiliza entrono a 0.2. Decidimos fijar $k = 34$ obteniendo así el siguiente parámetro de forma: $\hat{\varepsilon}_{34,59} = 0,2014$.

Empleando el Lema 6.4.13 de la pág.346 de [4], escogiendo $k = 34$, obtenemos que nuestras cons-

2.2. Aplicación

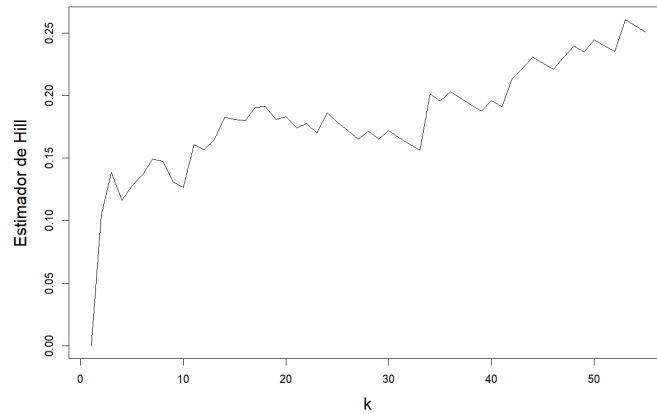


Figura 2.2: Estimador de Hill en función de k.

tantes normalizadoras son:

$$\hat{a}_{34,59} = \left(\frac{1}{34} \sum_{j=1}^{34} \log(X_{j,n}) - \log(X_{34,59}) \right)^{-1} = (\hat{\epsilon}_{34,59})^{-1} = 4,965.$$

$$\hat{b}_{34,59} = \log(1 \vee X_{34+1,59}) = 4,331.$$

En definitiva, hemos obtenido que la distribución de nuestros datos máximos normalizados se aproxima a una Fréchet de parámetro $\alpha = (\hat{\epsilon}_{34,59})^{-1} = 4,965$.

Para evaluar la calidad de esta aproximación, hemos realizado una QQ-plot (Figura 2.3). El comportamiento lineal de la gráfica indica que nuestros resultados se ajustan bien a la teoría, lo que nos permite afirmar que nuestra aproximación es buena.

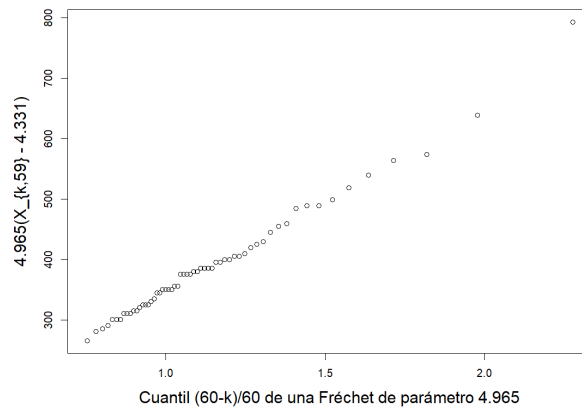


Figura 2.3: QQ-plot de los cuantiles $\frac{60-k}{60}$ de una Fréchet $\alpha = 4,965$ frente a $\hat{a}_{34,59}(X_{k,59} - \hat{b}_{34,59})$, con $k \in \{1, \dots, 59\}$.

Lo anterior nos permite obtener una estimación de la cola de la distribución ($\bar{F}(x) = 1 - F(x)$) así como una estimación de los cuantiles ($x_p = F^{-1}(p)$):

$$\widehat{\bar{F}}(x) = 1 - \widehat{F}(x) = \frac{34}{59} \left(\frac{x}{X_{34+1,59}} \right)^{-\hat{a}_{34,59}} = 0,576 \left(\frac{x}{76} \right)^{-4,965}, \quad \text{con } x > 76. \quad (2.1)$$

2.2. Aplicación

$$\hat{x}_p = X_{34+1,59} \left(\frac{59}{34} (1-p) \right)^{-1/\hat{\alpha}_{34,59}} = 68,032(1-p)^{-0,201}, \quad \text{con } p \in (0,1). \quad (2.2)$$

(Los detalles de cómo se obtienen estas expresiones se pueden encontrar en la pág. 347 de [4]).

Esta última estimación se utiliza para estimar cuantiles fuera del rango de nuestros datos. La razón es que, para estimar cuantiles dentro del rango de nuestros datos, $X_{k,n}$ se presenta como un estimador natural del cuantil $1 - \frac{k-1}{n}$. Por tanto, dentro del rango de valores [48, 163] podemos hallar, utilizando nuestros datos, cuantiles hasta el cuantil 0,983. Sin embargo, lo que nos interesa estudiar son valores más grandes de los registrados. No haber observado rachas de viento mayores que 163 km/h no significa que no exista la probabilidad de que en un futuro haya rachas que superen este último valor. La probabilidad de ocurrencia de una racha de viento mayor que 163 km/h puede ser estimada usando la estimación de la cola de la distribución (2.1).

Pasamos a ver cómo emplea toda esta información en problemas de la vida real. Previamente, necesitamos conocer qué es *el periodo de retorno de un suceso* (pág. 305 de [4]):

Definición 11. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias igualmente distribuidas y u un valor umbral. Definimos el *tiempo del primer éxito* como $L(u) = \min\{i \leq 1 : X_i > u\}$ y el *periodo de retorno de los sucesos* $\{X_i > u\}$ como $EL(u) = (\bar{F}(u))^{-1}$.

Los ingenieros utilizan los periodos de retorno para diseñar infraestructuras. A través de ellos evalúan la probabilidad de ocurrencia de eventos extremos (como vientos fuertes), durante la vida útil de una estructura para asegurar la seguridad y funcionalidad a largo plazo. La ISO 4354 [8], establece que las estructuras críticas para la seguridad, la integridad operativa, y la protección de vidas humanas deben soportar rachas de viento con un periodo de retorno de al menos 200 años. Dentro de un aeropuerto, se considera que estructuras como los hangares, las torres de control y las torres de iluminación y antenas están dentro del tipo mencionado anteriormente. Por tanto, si se quisiera construir un nuevo hangar en el aeropuerto de Almería, utilizando nuestra estimación de la cola de la distribución (2.1), se llegaría a que la probabilidad de que haya rachas mayores que 200 km/h es menor que 0,005. En consecuencia, el periodo de retorno asociado a esas rachas extremas de viento es mayor que 200 años. En definitiva, construyendo un hangar que resistiera rachas de viento de hasta 200 km/h se aseguraría tanto la protección de aeronaves como la seguridad del personal.

Los periodos de retorno de vientos extremos se utilizan en los aeropuertos no solo en el diseño de estructuras, sino que también en la planificación de procedimientos operacionales. Algunos ejemplos son la imposición de restricciones en las operaciones de despegue y aterrizaje en situaciones extremas de viento, o el diseño de procedimientos de emergencia eficaces, con el fin de asegurar una respuesta apropiada ante eventos poco frecuentes.

Por otra parte, las compañías de seguro también utilizan el periodo de retorno de rachas extremas de viento para evaluar el riesgo y determinar las primas de seguro. Es así, ya que rachas de viento muy grandes no registradas anteriormente pueden causar consecuencias catastróficas. Por lo que, haciendo un análisis sobre la probabilidad de ocurrencia y la posible magnitud de los daños, se establecen las primas adecuadas y se recomiendan acciones preventivas a los aeropuertos para reducir posibles pérdidas.

En conclusión, con el análisis hecho previamente, hemos podido aproximar la distribución de nuestros datos normalizados, utilizando unas constantes estimadas, a una Fréchet de parámetro $\alpha = 4,965$. Esto nos ha permitido estimar tanto la cola de la distribución de nuestros datos (2.1) como los cuantiles (2.2). Todo esto es imprescindible para el estudio de la probabilidad de ocurrencia de rachas de viento extremas, lo cual nos permite calcular los periodos de retorno. Esta herramienta es comúnmente empleada en la vida diaria en muchos ámbitos, entre los que se encuentran la ingeniería y las compañías de seguros.

Apéndices

Código R ejemplos Capítulo 1

A continuación se adjuntan los códigos de R que se han usado en cada una de las simulaciones de los ejemplos.

■ Ejemplo 1

```
#Definicion de la distribucion de Gumbel

pgumbel<-function(x)
{
  Gx<-exp(-exp(-x))
  return(Gx)
}

qgumbel<-function(p)
{
  xp<- -log(-log(p))
  return(xp)
}

dgumbel<-function(x)
{
  dx<-exp(-exp(-x))*exp(-x)
  return(dx)
}
#-----

n<-1000
m<-200
lambda<-0.5
M<-matrix(rexp(n*m, rate=lambda), nrow=n, ncol=m)
mn<-apply(M, MARGIN = 2, FUN=max)
D<-lambda*mn-log(n)

library(RcmdrMisc)
par(mfrow = c(1, 1))
hist(D, freq=FALSE, ylim=c(0,0.5), xlim=c(-2,5), breaks = 20,
      main="Histograma_de_Mn -log(n)")
kf<-density(D)
lines(kf)
xx<-qgumbel(seq(0,1,length.out=1000))
lines(xx, dgumbel(xx), col='red')
```

```

legend( x= "topright" ,
        legend = c( "Densidad_ Mn -log (n) ,_n=1000" ,
        "Densidad_de_la_distribucion_de_Gumbel" ) ,
        col = c(1 , 2) ,
        lwd = 2)

```

■ Ejemplo 2

```

#Definicion de la distribucion de Frechet

pfrechet<-function(x, alpha)
{
  if (x>0)
  {Gx<-exp( -(x^(-alpha))) }
  else {Gx<-0}
  return (Gx) }

qfrechet<-function (p, alpha)
{
  xp<- (-log (p))^(-1 / alpha)
  return (xp)
}

dfrechet<-function (x, alpha)
{
  dx<-exp( -(x^(-alpha))) *(x^(-alpha -1))*alpha
  return (dx)
}
#-----

n<-1000
m<-300
xo<-0 #parametro de posicion
sigma<-1 #parametro de escala

alpha<-1 #parametro de la distribucion de Frechet

M<-matrix(rcauchy(n*m, location =xo, scale=sigma), nrow=n, ncol=m)
mn<-apply(M, MARGIN = 2, FUN=max)
D<-mn/( qcauchy(1-(1/n), location = xo, scale=sigma))

library (RcmdrMisc)
par(mfrow = c(1 , 1))
hist(D, freq=FALSE, ylim=c(0,0.6), xlim=c(0,6), breaks= 700,
main="Histograma_de_anMn")
kf<-density (D)
lines (kf)
xx<-qfrechet (seq(0,1, length.out=1000), alpha=alpha )
lines (xx, dfrechet (xx, alpha=alpha), col='red')
legend( x= "topright" ,
        legend = c( "Densidad_anMn,_n=1000" ,
        "Densidad_de_la_distribucion_de_Frechet ,_n =1_") ,

```

```
col = c(1, 2),
lwd = 2)
```

■ Ejemplo 3

#Definicion de la distribucion de Weibull

```
pWeibull<-function(x, alpha)
{
  if(x>0)
  {
    Gx<-1
  }
  else {Gx<-exp(-((-x)^(-alpha)))}
  return(Gx)
}

qWeibull<-function(p, alpha)
{
  xp<- -((-log(p))^(1/alpha))
  return(xp)
}

dWeibull<-function(x, alpha)
{
  dx<-exp(-((-x)^(alpha)))*(x^(alpha-1))*alpha
  return(dx)
}
#-----

n<-1000
m<-300
#Consideramos U(a,b)
a<-2
b<-6

alpha<-1 #parametro de la distribucion de Weibull

M<-matrix(runif(n*m,min=a,max=b), nrow=n, ncol=m)
mn<-apply(M, MARGIN = 2, FUN=max)
D<-n*(mn-b)/(b-a)

library(RcmdrMisc)
par(mfrow = c(1, 1))
hist(D, freq=FALSE, ylim=c(0,1),
      main="Histograma_de_n(Mn-b)/(b-a)")
kf<-density(D)
lines(kf)
xx<-qWeibull(seq(0,1,length.out=1000), alpha=alpha)
lines(xx, dWeibull(xx, alpha=alpha), col='red')
legend(x= "topright",
```

```

legend = c( "Densidad_1000(Mn-1),_n=1000" ,
              "Densidad_de_la_distribucion_de_Weibull ,_ =1" ) ,
col = c(1 , 2) ,
lwd = 2)

```

■ Ejemplo 5

```

n<-1000
m<-100
lambda<-0.5 #parametro de la exponencial
Maxdebil<-function(n,x) #x es un vector
{
  mx<-max(x[1:n])
  an<-log(n)
  Mn<-mx/an
  return(Mn)
}
seqdebil<-function(x,nn)
{
  seqD<-sapply(nn,FUN=Maxdebil,x=x)
  return(seqD)
}

M<-matrix(rexp(n*m,rate=lambda), nrow=n, ncol=m)
nn<-c(1:n)

Maxd<-apply(M,MARGIN=2,FUN=seqdebil,nn=nn)

plot(nn, Maxd[,1], pch=16, ylim=c(0,7), type='l')
aux<-function(y,nn) { lines(nn,y) }
baux<-apply(Maxd[,2:ncol(Maxd)], MARGIN=2, FUN=aux, nn=nn)
abline(h=1/lambda, col='red')

```

■ Ejemplo 6

```

Maxdebil<-function(n,x) #x es un vector
{
  mx<-max(x[1:n])
  return(mx)
}
seqdebil<-function(x,nn)
{
  seqD<-sapply(nn,FUN=Maxdebil,x=x)
  return(seqD)
}

n<-1000
m<-100
a<-0
b<-1

```

```

M<-matrix( runif( n*m,min=a ,max=b ) , nrow=n , ncol=m)
nn<-c( 1:n)

Maxd<-apply( M,MARGIN=2,FUN=seqdebil , nn=nn)
plot( nn , Maxd[,1] , pch=16, ylim=c(0.5,1.05) , type='l' )
aux<-function( y, nn) { lines( nn,y) }
baux<-apply( Maxd[,2:ncol( Maxd)] , MARGIN=2, FUN=aux , nn=nn)
abline( h=b , col='red' )

```

■ Ejemplo 7

```

Maxdebil<-function( n,x,alpha) #x es un vector
{
  mx<-max( x[ 1:n ] )
  an<-n^(1/alpha) #qpareto(1-1/n)
  Mn<-mx/an
  return( Mn)
}

seqdebil<-function( x, nn , alpha)
{
  seqD<-sapply( nn,FUN=Maxdebil , x=x , alpha=alpha)
  return( seqD)
}

library( EnvStats )
n<-1000
m<-100
alpha<-2
M<-matrix( rpareto( n*m, location=1, shape=alpha ) , nrow=n , ncol=m)
nn<-c( 1:n)

Maxd<-apply( M,MARGIN=2,FUN=seqdebil , nn=nn , alpha=alpha)
plot( nn , Maxd[,1] , pch=16, ylim=c(0,15) , type='l' )
aux<-function( y, nn) { lines( nn,y) }
baux<-apply( Maxd[,2:ncol( Maxd)] , MARGIN=2, FUN=aux , nn=nn)
abline( h=1 , col='red' )

```

■ Ejemplo 8

```

n<-1000
m<-100
xo<-0 #parametro de posicion
sigma<-1 #parametro de escala
Maxdebil<-function( n,x,xo,sigma) #x es un vector
{
  mx<-max( x[ 1:n ] )
  an<-qcauchy( 1-(1/n) , location=xo , scale=sigma)
  Mn<-mx/an
  return( Mn)
}

seqdebil<-function( x, nn , xo , sigma)

```

```

{
  seqD<-sapply (nn,FUN=Maxdebil ,x=x,xo=xo,sigma=sigma)
  return (seqD)
}

M<-matrix (rcauchy (n*m, location=xo, scale=sigma), nrow=n, ncol=m)
nn<-c (1:n)

Maxd<-apply (M,MARGIN=2,FUN=seqdebil ,nn=nn,sigma=sigma,xo=xo)
plot (nn, Maxd[,1], pch=16, ylim=c(0,15), type='l')
aux<-function (y,nn) { lines (nn,y) }
baux<-apply (Maxd[,2:ncol (Maxd)], MARGIN=2, FUN=aux, nn=nn)
abline (h=1, col='red')

```

■ Ejemplo 9

```

n<-10000
m<-100
p<-0.5
Maxdebil<-function (n,x,p) #x es un vector
{
  mx<-max (x [1:n])
  an<-log (n)
  Mn<-mx/an
  return (Mn)
}
seqdebil<-function (x,nn,p)
{
  seqD<-sapply (nn,FUN=Maxdebil ,x=x,p=p)
  return (seqD)
}
par (mfrow = c(1, 1))
M<-matrix (rgeom (n*m, prob=p), nrow=n, ncol=m)
nn<-c (1:n)

Maxd<-apply (M,MARGIN=2,FUN=seqdebil ,nn=nn,p=p)
plot (nn, Maxd[,1], pch=16, ylim=c(0,4), type='l')
aux<-function (y,nn) { lines (nn,y) }
baux<-apply (Maxd[,2:ncol (Maxd)], MARGIN=2, FUN=aux, nn=nn)
abline (h=-1/log (1-p), col='red')

```

Código R aplicación estadística

Seguidamente se adjunta el código de R implementado para llevar a cabo la aplicación estadística.

```

##FUNCIONES NECESARIAS
#Funcion de exceso medio
mean_fun<-function (x,u)
{
  i<-0
  sum<-0

```



```

for (j in x){

  if (j>u)
  {
    sum=sum+(j-u)
    i=i+1
  }
}
e_n=sum/i
return(e_n)
}

#Estimador de Pickands
pickands<-function(k,x)
{
  order<-sort(x,decreasing=TRUE) #ordenamos de mayor a menor
  pick<-log((order[k]-order[2*k])/(order[2*k]-order[4*k]))/log(2)
  return(pick)
}

#Estimador DedH
Dedh<-function(k,x)
{
  order<-sort(x,decreasing=TRUE)
  H_1<-0
  H_2<-0
  for (j in 1:k)
  {
    H_1=H_1+log(order[j])-log(order[k+1])
    H_2=H_2+(log(order[j])-log(order[k+1]))^2
  }
  H_1=H_1/k
  H_2=H_2/k
  est=1+H_1+1/(2*(H_1^2/H_2-1))
  return(est)
}

#Estimador de Hill
Hills<-function(k,x)
{
  est<-0
  order<-sort(x,decreasing=TRUE) #de mas a menos
  for (j in 1:k)
  {
    est=est+log(order[j])
  }
  est=est/k-log(order[k])
  return(est)
}

#Estimacion de los cuantiles

```

```

cuantil<-function(p,k,x)
{
  n<-length(x)
  order<-sort(x, decreasing=TRUE)
  cuantil=(n/k*(1-p))^-Hills(k=k,x=x)*order[k+1]
  return(cuantil)
}

#Estimaci n de la cola de la distribuci n
colaF<-function(k,x)
{
  order<-sort(Datos_TFG$Almeria, decreasing = TRUE)
  est=(k/59)*(x/order[k+1])^(-1/Hills(k=k,x=Datos_TFG$Almeria))
  return(est)
}

#-----

##EXTRACCION DE LOS DATOS QUE NOS INTERESAN
library(readxl)
library(dplyr)
Datos <- read_excel("C:/Users/Usuario/OneDrive/Escritorio/4 Matemáticas
/TFG/Simulaciones_con_R/Aplicaci n_estadística/Datos_TFG.xlsx")
View(Datos)
New_data<-select(Datos,"Date","63250") #Seleccionar solo la base de Almeria
colnames(New_data)<-c("Fecha","Almeria")
New_data<-filter(New_data,
                  substr(Fecha,start=6,stop=7)=="10") #seleccionar solo Octubre

years<-seq(1961,2019)
max_aire<-rep(0,59)
i<-1
for (year in years){

  valores<-as.integer(New_data$Almeria
                      [which(substr(New_data$Fecha,start=1,stop=4)==year)])
  #seleccionar los días de octubre del mismo año
  max_aire[i]=max(valores)
  i=i+1
}

#Datos con los que vamos a trabajar
Datos_TFG<-data.frame("A o "=years, "Almeria"=max_aire)
View(Datos_TFG)

#-----

##ANALISIS
par(mfrow=c(2,2))
summary(Datos_TFG$Almeria) #valores entre 48 y 163
#qqnorm(Datos_TFG$Almeria)

```

```

library(rstatix)
identify_outliers(Datos_TFG, variable="Almeria")

#Detectamos si es de cola pesada o no
e_n<-rep(0,59)
for (i in 1:59){
  e_n[i]=mean_fun(x=Datos_TFG$Almeria ,u=Datos_TFG$Almeria[i])
}
plot(Datos_TFG$Almeria ,e_n)

#-----

#Grafica estimador Pickands
k<-seq(1,floor(59/4))
est_pick<-sapply(k,FUN=pickands ,x=Datos_TFG$Almeria)
plot(k,est_pick , type="l") #parece que tienda a -1

#Grafica estimador de Hill
par(mfrow=c(1,1))
k<-seq(1,55) #se tiene que cumplir la condicion de k/n ->0
est_hills<-sapply(k,FUN = Hills ,x=Datos_TFG$Almeria)
plot(k,est_hills ,type="l",ylab="Estimador_de_Hill")

#Grafica estimador DedH
k<-seq(1,55) #se tiene que cumplir la condicion de k/n ->0
est_DedH<-sapply(k,FUN = Dedh ,x=Datos_TFG$Almeria)
plot(k,est_DedH,type="l") #tomando k entre 44 y 45 se estabiliza en -1

#-----

#Q-Q plot para ver si se aproxima bien a la Frechet
par(mfrow=c(1,1))
K_fix<-34
order<-sort(Datos_TFG$Almeria , decreasing = TRUE)
cuantil<-rep(0,59)
est<-Hills(K_fix ,x=Datos_TFG$Almeria)
for(k in 1:59)
{
  cuantil[k]=(-log((59-k+1)/(59+1)))^(-est)
}
plot(cuantil ,( order-log(order[K_fix+1]))/est)

#-----

quantile(Datos_TFG$Almeria , p=0.96) #cuantiles entre nuestros datos
cuantil(0.995 ,k=34,x=Datos_TFG$Almeria)

#Periodo de retorno
T<- (colaF(K_fix ,198))^( -1)
T

```


Bibliografía

- [1] M.R LEADBETTER, GEORG LINDGREN, HOLGER ROOTZÉN. *Extremes and related properties of random sequences and processes*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [2] JANOS GALAMBOS, *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics 2nd Edition*. Krieger, Malabar, Florida, 1987.
- [3] LAURENS DE HAAN, ANA FERREIRA. *Extreme Value Theory, An introduction*, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [4] P.EMBRECHTS, C.KLÜPPELBERG, T.MIKOSCH. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg, 1997.
- [5] LAURENS DE HAAN *Sample extremes: an elementary introduction*. *Statistica Neerlandica* 30, págs. 161-172, 1976.
- [6] FERNANDO VELASCO LUNA Y SERGIO HERNÁNDEZ GONZÁLEZ, *Teoría de valores extremos: Una introducción*, Revista de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, volumen 6 número 1 págs. 10–16, 2007.
Disponible en <https://revistas.ujat.mx/index.php/jobs/article/view/923/768>.
- [7] PEDRO A. HERNÁNDEZ DELGADO, *Diseño Estructural Sostenible para Vientos Extremos*, Revista de Arquitectura e Ingeniería de la Universidad de Matanzas, Vol.12 número 2, 2018,
Disponible en <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6548145.pdf>.
- [8] INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION (ISO), *Wind Actions on Structures*, ISO 4354:2009, 2009, Geneva, Switzerland.
Disponible en <https://www.iso.org/standard/38882.html>.
- [9] INTERNATIONAL CIVIL AVIATION ORGANIZATION (ICAO), *Aerodrom Design Manual, (Doc 9157)*, 2006.
Disponible en <https://www.icao.int/publications/Pages/default.aspx>.
- [10] CONTRIBUIDOR DE WIKIPEDIA. *Teorema de Fisher-Tippett-Gnedenko*, Wikipedia: La enciclopedia libre, 2020.
Disponible en https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Fisher-Tippett-Gnedenko.
- [11] REAL ACADEMIA ESPAÑOLA, <http://www.rae.es/>.
- [12] WORDREFERENCE, <https://www.wordreference.com/>.