

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN FÍSICA

Formación y evolución estelar

Autor:

Héctor Villarrubia Rojo

Director:

José V. García Esteve

24 de junio de 2014

Índice general

Introducción	1
1. Evolución inicial	3
1.1. Inestabilidad gravitatoria: criterio de Jeans	3
1.2. Revisión del criterio de Jeans: esfera isoterma	5
1.3. Fragmentación	7
1.4. Masa mínima	8
2. Producción de energía	11
2.1. Escala de tiempo de Helmholtz-Kelvin	11
2.2. Reacción protón-protón	12
2.3. Otras reacciones	16
3. Transporte de energía	19
3.1. Definiciones generales	19
3.2. Ecuación de transferencia radiativa	21
3.3. Recorrido libre medio	21
3.4. Cuerpo negro. Primera aproximación	22
3.5. Cuerpo negro. Segunda aproximación	23
3.6. Luminosidad	24
3.7. Estabilidad	25
3.7.1. Condiciones de convección	25
3.7.2. Estabilidad nuclear	26
3.7.3. Masa máxima	27
4. Evolución final	29
4.1. Agotamiento del hidrógeno	29
4.2. Finales: estrellas pequeñas, masivas y supermasivas	30
4.2.1. Pequeñas	30
4.2.2. Masivas	31
4.2.3. Supermasivas	31
5. Enanas blancas	33
5.1. Planteamiento del problema	33
5.2. Funciones de Lane-Emden. Casos no relativista y ultrarrelativista	35

5.2.1. No relativista	36
5.2.2. Ultrarrelativista	37
5.3. Consideraciones adicionales	37
5.3.1. Cristalización	37
5.3.2. Equilibrio β	38
5.3.3. Reacciones picnonucleares	38
5.3.4. Relatividad General	38
6. Estrellas de neutrones	39
6.1. Ecuaciones de Oppenheimer-Volkoff	39
A. Ecuaciones de estado	43
A.1. Hidrodinámica	43
A.2. Ecuaciones de estado	44
A.2.1. Gas ideal	44
A.2.2. Gas de Fermi	44
A.2.3. Cuerpo negro	46
A.3. Teorema del virial	46
A.3.1. Clásico	46
A.3.2. Hidrodinámico	47
A.4. Homología	47
B. Ecuaciones de estructura relativistas	49
C. Órdenes de magnitud	51
C.1. Constantes físicas	51
C.2. Escalas estelares	51
Bibliografía	53

Introducción

El estudio de una estrella es la oportunidad perfecta para, mientras se explican fenómenos tan cotidianos como el brillo del Sol, aplicar conocimientos de diversas áreas de la Física. El funcionamiento de una estrella involucra de manera natural la hidrodinámica, la física nuclear y cuántica, la relatividad y la física estadística. Es más, a lo largo de su vida las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza juegan un importante papel. La gravedad es crucial durante la formación y en todas las fases de evolución, las interacciones débil y fuerte participan en la producción de energía y las interacciones electromagnéticas a través de la emisión de luz.

El objetivo central de este trabajo es explicar el origen de las estrellas, sus mecanismos básicos de funcionamiento y repasar los diferentes finales que deben afrontar. El programa es lo bastante amplio para resultar inabordable en toda su generalidad. Nos restringiremos a ejemplos sencillos, con multitud de hipótesis simplificadoras y desarrollos matemáticos elementales. A pesar de la importancia actual de las simulaciones y los métodos numéricos se ha prescindido de ellos a lo largo del trabajo, sólo en el último capítulo aparece una pequeña muestra de un cálculo numérico.

El *Capítulo 1* comienza la historia evolutiva de una estrella, su formación. Debemos intentar explicar por qué existen las estrellas, objetos mucho más densos que sus alrededores y con un rango de masas de entre 0.1 y $100M_{\odot}$. Introduciremos el concepto de inestabilidad gravitatoria y veremos cómo permite explicar la formación de objetos de masas estelares a partir de una nube molecular diluida. La referencia principal para elaborar la mayor parte del capítulo ha sido (Kippenhahn et al., 1990), concretamente 26.2 y 26.3.

El *Capítulo 2* se centra en el problema de la producción de energía. Comienza repasando por qué existe la necesidad de una fuente de energía (bien comprendida ya a finales del siglo XIX). Desde finales de los años 30 es bien sabido que dicha fuente de energía son las reacciones termonucleares. El resto del capítulo se centra en las reacciones nucleares y se realiza el cálculo explícito (muy simplificado) de uno de los mecanismos nucleares: la reacción protón-protón. El resultado final es una estimación para el ritmo de producción de energía en una estrella. Las referencias principales son el artículo divulgativo (Nauenberg and Weisskopf, 1978) y uno de los artículos originales sobre el tema (Bethe and Critchfield, 1938).

Una vez producida la energía, el *Capítulo 3* estudia cómo se transporta por el interior de la estrella. Como antes, hay varios mecanismos de transporte de energía y aquí nos centramos en el transporte por radiación. Con todos los elementos esenciales de la estructura estelar a nuestra disposición analizamos brevemente la estabilidad, poniendo de

manifiesto algunos aspectos muy interesantes. La mayor parte del análisis del transporte radiativo proviene de apuntes personales de la asignatura Astrofísica, impartida por el profesor Manuel Membrado en la Universidad de Zaragoza.

El *Capítulo 4* repasa las fases finales de evolución. Habiendo estudiado el origen y funcionamiento de las estrellas queda preguntarse cómo acaban su vida. Justificaremos, con argumentos sencillos, por qué podemos esperar que las estrellas tengan diferentes finales dependiendo de su masa. Parte importante del contenido proviene de (Kippenhahn et al., 1990), 30.3 y 30.5.

El *Capítulo 5* se centra en uno de los posibles finales de una estrella, la fase de enana blanca. Explicaremos cómo la existencia de las enanas blancas se fundamenta en el comportamiento cuántico de los gases a altas densidades y estudiaremos su estructura en cierto detalle. La referencia principal es (Shapiro and Teukolsky, 2008), capítulo 3.

El *Capítulo 6* estudia objetos aún más exóticos que las enanas blancas, las estrellas de neutrones. Su estructura es muy compleja y nos limitaremos a trabajar sobre un gas ideal de neutrones. Este capítulo sirve además como ejemplo de un cálculo de Relatividad General. Durante el capítulo se han seguido los cálculos del artículo original (Oppenheimer and Volkoff, 1939).

Por último se incluyen algunos apéndices, con resultados que se salían de la discusión general pero que proporcionan información complementaria. El *Apéndice A* contiene una recopilación de resultados importantes de física general: ecuaciones de la hidrodinámica, ecuaciones de estado, implicaciones del teorema del virial y relaciones de homología. El *Apéndice B* recoge el cálculo relativista completo de las ecuaciones de estructura, todo el contenido puede encontrarse en (Weinberg, 1972), 11.1. Finalmente, el *Apéndice C* contiene valores numéricos, tanto de constantes fundamentales como otros datos que pueden ayudar a hacerse una idea de los órdenes de magnitud del problema, la mayoría procedentes de (Zombeck, 2008).

Los cálculos no son detallados y los resultados son por tanto sólo semicuantitativos. No obstante, mostraremos cómo mediante cálculos sencillos y estimaciones de orden de magnitud podemos obtener una verdadera comprensión de las estrellas: por qué están ahí, cuál es el origen de su brillo, a qué se debe que sean tan estables y longevas...

Capítulo 1

Evolución inicial

El primer paso para comprender la historia evolutiva de una estrella es entender su origen. Veremos en este primer apartado cómo explicar la presencia de inhomogeneidades de escalas estelares en una nube molecular.

1.1. Inestabilidad gravitatoria: criterio de Jeans

En 1902, Sir James Jeans se enfrentó al problema de la estabilidad de una nebulosa esférica y encontró el concepto fundamental de inestabilidad gravitatoria. Intuitivamente parece evidente el resultado al que debemos llegar. Si tenemos un fluido sometido a la gravedad que él mismo genera y una fluctuación aumenta la densidad de una región, ésta ejercerá mayor fuerza sobre sus alrededores y tenderá a hacerse más densa. No obstante, la presión del fluido se opone a este fenómeno por lo que la fluctuación debe involucrar una masa lo suficientemente grande para que la gravedad se imponga; todo el que haya jugado con un globo sabe que no suelen colapsar.

Las ecuaciones básicas que describen el fenómeno que hemos comentado son la ecuación de continuidad (conservación de la masa), la ecuación de Euler (conservación del momento, sin viscosidad) y la ecuación de Poisson (ecuación del campo gravitatorio). A falta de especificar la ecuación de estado, el conjunto de ecuaciones queda

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \phi \quad (1.2)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (1.3)$$

donde ρ es la densidad del medio, \mathbf{v} la velocidad, P la presión y ϕ el potencial gravitatorio. El procedimiento ahora será considerar pequeñas desviaciones respecto a una solución de estas ecuaciones, para analizar la estabilidad de dicha solución. En nuestro modelo consideraremos como situación a orden cero una solución homogénea y estática, es decir: ρ_0 y $P_0 = \text{cte.}$ y $\mathbf{v}_0 = 0$. Es muy importante señalar que las condiciones que hemos escogido *no son solución* del sistema de ecuaciones, con esta solución es imposible conciliar el equilibrio hidrostático y la ecuación de Poisson (con $\rho \neq 0$). A pesar de ser fundamentalmente incorrecto, el modelo es suficientemente ilustrativo y simple como para que merezca

la pena seguir adelante antes de refinarlo. Buscamos soluciones de la forma

$$\rho(t) = \rho_0 + \epsilon \rho_1 + \dots \quad P(t) = P_0 + \epsilon P_1 + \dots \quad \mathbf{v}(t) = \epsilon \mathbf{v}_1 + \dots$$

junto con un término potencial ϕ_1 . Las perturbaciones a la presión y a la densidad se relacionan a través de la velocidad del sonido¹ $P_1 = v_s^2 \rho_1$. Sustituyendo tenemos a primer orden en ϵ

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\frac{v_s^2}{\rho_0} \nabla \rho_1 - \nabla \phi_1 \quad (1.5)$$

$$\nabla^2 \phi_1 = 4\pi G \rho_1 \quad (1.6)$$

Aplicando ∂_t a (1.4), ∇ a (1.5) y usando (1.6) tenemos

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \rho_1 + 4\pi G \rho_0 \rho_1 \quad (1.7)$$

Buscamos solución en forma de ondas planas

$$\rho_1 = \int \tilde{\rho}_1(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) d^3k$$

y encontramos la relación de dispersión

$$\omega^2 = k^2 v_s^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (1.8)$$

Como esperábamos, las fluctuaciones de densidad de un determinado tamaño son inestables ($\omega^2 < 0$). Encontramos así el *criterio de Jeans* para la inestabilidad gravitatoria. Las fluctuaciones inestables son aquellas que cumplen

$$k < \left(\frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2} \right)^{1/2} \equiv k_J \quad (1.9)$$

donde k_J se denomina número de Jeans. Nos permite definir una escala de longitudes $\lambda_J \equiv 2\pi/k_J$ y lo que es más importante, una escala de masas

$$M_J = \frac{4\pi \rho_0}{3} \lambda_J^3 \quad \lambda_J = \left(\frac{\pi}{G \rho_0} \right)^{1/2} v_s$$

El criterio de inestabilidad queda finalmente

$$M > M_J \equiv \frac{4\pi}{3} \rho_0 \left(\frac{\pi v_s^2}{G \rho_0} \right)^{3/2} \quad (1.10)$$

¹Para perturbaciones *adiabáticas* es general

$$\delta P = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\text{adb}} \delta \rho \equiv v_s^2 \delta \rho$$

Para perturbaciones *isotermas* también tenemos esta relación (con otra velocidad del sonido) si nos restringimos a un gas ideal $P \propto \rho T$

1.2. Revisión del criterio de Jeans: esfera isoterma

Para superar las dificultades del modelo homogéneo y estático debemos considerar alternativas más realistas.

Una posibilidad es abandonar la suposición de estaticidad. Existe una teoría consistente de crecimiento de inhomogeneidades en un universo en expansión (solución de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker de las ecuaciones de Einstein, con factor de escala $a(t)$) en un marco newtoniano. En este caso lo que se mantiene constante son las magnitudes comóviles, es decir, tenemos soluciones a orden cero de la forma $\rho = \rho_0(a_0/a(t))^3$. Obtenemos así una condición equivalente a la de Jeans²

$$k^2 < \frac{6\pi G \rho_0}{v_s^2}$$

Aunque este enfoque es de interés innegable en cosmología y para explicar el origen de las estructuras cosmológicas, nosotros plantearemos otro modelo más adecuado para nuestro objetivo: explicar la formación de estrellas en una nube molecular fría.

Hasta ahora no hemos hecho especial énfasis en el tipo de fluctuación que estamos tratando. Debemos decidir si tenemos fluctuaciones adiabáticas o isoterma, pues su comportamiento es radicalmente diferente. La diferencia entre ambas se relaciona con la existencia de dos escalas de tiempos: τ_g , la escala de crecimiento de la fluctuación por efecto de la gravedad y τ_{adj} , el tiempo de ajuste térmico o tiempo necesario para equilibrar una variación de temperatura. Si $\tau_g > \tau_{\text{adj}}$ la fluctuación es isoterma, mantiene su temperatura constante mientras crece, el equilibrio térmico no se ve afectado por la contracción. En cambio, si $\tau_{\text{adj}} > \tau_g$ la fluctuación es adiabática, contrae demasiado rápido para intercambiar calor con el entorno. La escala de crecimiento puede leerse directamente de (1.8) como $\tau_g = (G\rho)^{-1/2}$, mientras que la escala de ajuste térmico $\tau_{\text{adj}} \sim \rho$. Para una nube molecular fría diluida esperaremos que las fluctuaciones sean isoterma, al menos al principio.

Busquemos una aproximación menos formal que en el apartado anterior, de orden de magnitud. Consideremos una esfera isoterma embebida en un medio con presión $P^* > 0$. Supondremos que la esfera es de un gas ideal monoatómico y que sólo interacciona con el medio a través de la presión (el exterior tiene simetría esférica).

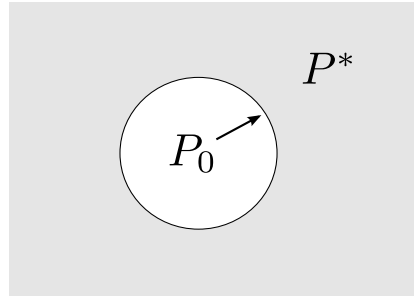


Figura 1.1: Esfera isoterma con presión en superficie P_0 en un medio con presión P^* .

²Ver por ejemplo (Weinberg, 1972).

Del teorema del virial³

$$\begin{aligned} 3 \int P dV &= -E_g + 4\pi R^3 P_0 \\ 3Nk_B T &= -E_g + 4\pi R^3 P_0 \end{aligned}$$

donde E_g es la energía gravitatoria, R el radio de la esfera y P_0 la presión en superficie. Escribimos la energía potencial como $E_g = -\alpha GM^2/R$, donde α es un factor de orden unidad que da cuenta de la distribución interna de materia⁴. Con esto puede despejarse la presión en superficie

$$P_0 = \frac{3Mk_B T}{4\pi R^3 m} - \alpha \frac{GM^2}{4\pi R^4}$$

donde m es la masa del protón, tenemos una competición entre la presión del gas que tiende a expandir la esfera y la gravedad que tiende a encogerla. Analizamos el devenir de esta esfera (nuestra fluctuación) en función de R , para M , T y α fijos. P_0 es negativo para $R \rightarrow 0$ y cero para $R \rightarrow \infty$. Existe un máximo (positivo) de P_0 para un radio

$$R_M = \frac{4\alpha GMm}{9k_B T} \quad (1.11)$$

Partiendo de una situación en la que la esfera se encuentra en equilibrio con el medio $P_0 = P^*$ podemos distinguir dos situaciones

- Cuando $R < R_M$, después de una ligera compresión $P_0 < P^*$. La esfera se comprime más aún por efecto del medio externo, es inestable.
- Cuando $R > R_M$, después de una compresión $P_0 > P^*$. La esfera se expande y se recupera de la compresión, es estable.

Utilizando $M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$ (ρ es la densidad media de la esfera), reescribimos la condición de inestabilidad como

$$R^2 > \frac{27}{16\pi\alpha} \frac{k_B T}{G\rho m} \quad (1.12)$$

que como vemos es equivalente a la condición de Jeans, con $v_s^2 = k_B T/m$

$$\lambda_J^2 = \frac{\pi}{G\rho} v_s^2 = \pi \frac{k_B T}{G\rho m} \quad (1.13)$$

Examinemos ahora sí la masa de Jeans, la mínima masa para que una perturbación sea inestable

$$M_J = \frac{4\pi}{3} \rho \lambda_J^3 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\pi k_B}{Gm} \right)^{3/2} T^{3/2} \rho^{-1/2} \quad (1.14)$$

Utilizando valores típicos $\rho = 10^{-24}$ g/cm³ y $T = 80$ K obtenemos $M_J = 3.6 \times 10^5 M_\odot$. Sólo masas mucho más grandes que las estelares se generan por este proceso.

³Es una consecuencia directa de la condición de equilibrio hidrostático, ver (A.40).

⁴Utilizaremos con frecuencia esta aproximación. Por ejemplo, para una esfera politrópica $P \propto \rho^{1+1/n}$ queda plenamente justificado, la energía puede escribirse $E_g = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}$

1.3. Fragmentación

Los resultados del apartado anterior permiten explicar el colapso de grandes masas, pero necesitamos otro mecanismo para dar lugar a las estrellas. Una explicación prometedora es la fragmentación, mientras que la nube colapsa como un todo algunos fragmentos se vuelven inestables y colapsan más rápido. Esta imagen de subcondensación se ve apoyada también por el hecho de que para fluctuaciones isotermas $M_J \propto \rho^{-1/2}$, cuando la nube se hace más densa regiones cada vez más pequeñas pueden volverse inestables. Si este proceso continuase mucho tiempo nos encontraríamos con un problema ¿Cómo explicar la presencia de estrellas y no sólo un montón de pequeños planetesimales? La respuesta es sencilla, llegado un determinado punto se viola una de nuestras suposiciones y la fragmentación se detiene. Conforme las regiones se hacen más densas τ_g disminuye y τ_{adj} aumenta, hasta que en algún momento las fluctuaciones definitivamente no son isotermas. Como ya habíamos anticipado, las fluctuaciones isotermas y adiabáticas tienen un comportamiento radicalmente diferente

- **Fluctuaciones isotermas.** Recordemos que $M_J \propto T^{3/2}\rho^{-1/2}$, para fluctuaciones isotermas un aumento de ρ conduce a una disminución de M_J .
- **Fluctuaciones adiabáticas.** Para procesos adiabáticos tenemos⁵ $T \propto \rho^{\gamma-1}$ y por tanto

$$M_J \propto T^{3/2}\rho^{-1/2} = \rho^{-\frac{3(1-\gamma)}{2}-\frac{1}{2}} = \rho^{\frac{3}{2}\gamma-2}$$

con $\gamma > 4/3$, vemos que masa de Jeans *aumenta* al aumentar la densidad.

El criterio para que la fragmentación se detenga es que las fluctuaciones dejen de ser isotermas y se aproximen al caso adiabático. Para obtener valores numéricos compararemos el ritmo al que el fragmento gana energía por contracción gravitatoria y el ritmo al que puede radiar (deben igualarse para mantener la temperatura constante).

El ritmo de energía ganada en la contracción es del orden de E_g/τ_g , la energía gravitatoria total entre el tiempo característico

$$R_g \approx \frac{GM^2}{R\tau_g} = \frac{GM^2}{R}(G\rho)^{1/2} \approx \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \frac{G^{3/2}M^{5/2}}{R^{5/2}} \quad (1.15)$$

Por otro lado el ritmo al que radia el fragmento debe ser menor que el de un cuerpo negro a la misma temperatura

$$R_R = 4\pi R^2 \sigma T^4 f \quad (1.16)$$

donde f es un factor menor que 1, para tener en cuenta que no estamos en equilibrio térmico. En el caso isoterma $R_R \gg R_g$, la transición ocurre cuando $R_R \approx R_g$ y esto implica

$$R_g = R_R \quad \rightarrow \quad M^5 = \frac{64\pi^3}{3} \frac{f^2 \sigma^2 T^8 R^9}{G^3} \quad (1.17)$$

Con los argumentos que hemos dado, la fragmentación termina cuando la masa de Jeans iguala esta masa crítica. Es decir, los últimos fragmentos producto de la inestabilidad

⁵(A.9), es una de las relaciones de los procesos adiabáticos en un gas ideal, $PV^\gamma = \text{cte.}$

gravitatoria dejan de ser isotermos y por tanto permanecerán estables mientras se contraen. Sustituyendo M por M_J , R por λ_J y ρ por el resultado de despejar en (1.14) tenemos

$$M_J = \frac{8\pi^{15/4}}{9} \left(\frac{k_B}{m}\right)^{9/4} (G^3 \sigma)^{-1/2} f^{-1/2} T^{1/4} = 0.16 M_\odot \frac{T^{1/4}}{f^{1/2}} \quad (1.18)$$

Para $T = 1000$ K y $f = 0.1$ llegamos a $M_J = 2.8 M_\odot$. Los valores numéricos concretos no son importantes aquí⁶, lo más importante es ver que obtenemos el orden de magnitud de las estrellas y no de planetas o cúmulos estelares.

A partir de aquí entramos en el régimen no lineal. Aunque la linealización de las ecuaciones es muy útil para estudiar la evolución inicial de las fluctuaciones, evidentemente llega un momento en el que el contraste de densidad se hace muy grande $\delta\rho/\rho_0 > 1$. Tenemos que tratar un problema complejo de colapso gravitatorio y los avances pasan en la mayoría de los casos por simulaciones numéricas.

1.4. Masa mínima

En lugar de repasar las distintas fases que atraviesa la protoestrella examinaremos algunos argumentos que permiten concluir la existencia de una masa mínima para las estrellas.

El problema del origen de la energía en las estrellas se tratará en detalle en el siguiente capítulo, pero podemos adelantar que hoy día se sabe que procede de la fusión nuclear. La fusión nuclear requiere una temperatura mínima para que tenga lugar de forma apreciable, las protoestrellas deben alcanzar esta temperatura para funcionar como estrellas propiamente dichas. Sin embargo, ¿Qué impide a los fragmentos alcanzar esta temperatura? Ya hemos visto que la contracción supone un aumento de la energía interna, no habría obstáculo para que cualquier masa alcanzase la temperatura requerida (aunque fuera para un pequeño tamaño). Efectivamente esto no sucede así.

Lo cierto es que aparecen nuevos fenómenos que no habíamos considerado, el gas de electrones se degenera. A densidades suficientemente altas (cuando $T \ll T_F = \frac{\hbar^2}{2m_e k_B} (3\pi^2 n)^{2/3}$)⁷ el gas de electrones cambia radicalmente su comportamiento y su energía interna pasa a ser

$$u_e = \frac{3}{2} P_e = \frac{3\hbar^2}{10m_e k_B} (3\pi^2)^{2/3} n^{5/3}$$

independiente de T (estamos en el límite $T \ll T_F$). En este caso la estrella puede mantener el colapso únicamente por la alta densidad de los electrones, sin necesidad de mantener una alta temperatura.

⁶En efecto pueden parecer arbitrarios, pero podemos comprobar que cualquier elección dentro de un rango razonable conduce al mismo orden de magnitud.

⁷Si durante una contracción aumenta tanto la temperatura como la densidad ¿Qué nos garantiza que pasemos de $T > T_F$ a $T < T_F$? Ya hemos visto las relaciones de homología en (A.52), bajo la suposición de un gas ideal y una contracción uniforme

$$\frac{n_1}{n_0} = \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^3 \quad \frac{T_1}{T_0} = \frac{R_0}{R_1} \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1 = T_0 (R_0/R_1) \\ T_{F1} = T_{F0} (R_0/R_1)^2 \end{array} \right.$$

Vemos que T_F aumenta más rápido que T durante una contracción. La temperatura de Fermi se deduce en (A.28).

La radiación produce una disminución de la energía, que al no verse seguida de una contracción disminuye la temperatura de la protoestrella. Mientras que en el caso no degenerado la energía liberada en la contracción se invertía en aumentar la temperatura aquí se destina a aumentar la energía cinética de los electrones (no tiene impacto en T porque estamos en un gas degenerado). Una estrella necesita alcanzar la temperatura de ignición (10^7 K para H) antes de llegar al punto de degeneración o nunca llegará a encenderse.

Siguiendo este razonamiento podemos hacer una estimación muy sencilla para esta masa mínima. Una primera condición que podríamos imponer para la masa mínima de una estrella es que alcance el punto de ignición y el punto de degeneración a la vez, esto es

$$10^7 \text{ K} = T_F = \frac{\hbar^2}{2m_e k_B} (3\pi^2 n)^{2/3} \quad (1.19)$$

Esto nos da una relación entre el radio, la masa y la temperatura. La otra ecuación que necesitamos para calcular la masa como función de la temperatura viene del teorema del virial, para un gas de hidrógeno ionizado

$$6Nk_B T = \alpha \frac{GM^2}{R} \quad (1.20)$$

donde N es el número de protones. Despejando la masa entre estas dos ecuaciones encontramos

$$M^{2/3} = T_F^{1/2} \frac{6k_B}{\alpha G m_p} \left(\frac{9\pi}{4m_p} \right)^{1/3} \left(\frac{2m_e k_B}{\hbar^2} \right)^{-1/2}$$

$$M = 0.35 \alpha^{-3/2} \left(\frac{T_F}{10^7 \text{ K}} \right)^{3/4} M_\odot \quad (1.21)$$

Para $\alpha = 1$ y $T_F = 10^7$ K tenemos $M = 0.35 M_\odot$. Cálculos detallados⁸ dan una masa de $0.08 M_\odot$, nuestra sencilla estimación es del mismo orden de magnitud y da cuenta de los fenómenos esenciales.

⁸(Kippenhahn et al., 1990). La información en estos casos se obtiene en muchos casos a través de simulaciones. Para un cálculo analítico similar al nuestro, pero teniendo en cuenta diferentes grados de degeneración y el ritmo de la reacción protón-protón, ver (Padmanabhan, 2001)

Capítulo 2

Producción de energía

2.1. Escala de tiempo de Helmholtz-Kelvin

En primer lugar cabe preguntarse acerca de la necesidad de una fuente de energía estelar. Hemos comprobado en el capítulo anterior que un fluido libera energía como consecuencia de una contracción. Si denotamos por L la energía radiada por unidad de tiempo (luminosidad) tenemos para una contracción lenta¹

$$L = -\frac{dE}{dt} = -\frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \frac{dE_g}{dt} \quad (2.1)$$

donde γ es el exponente adiabático de un gas ideal². Esto nos permite estudiar cuánto tiempo puede brillar una estrella con este mecanismo. Escribimos la energía gravitatoria como

$$E_g = -\alpha \frac{GM^2}{R}$$

donde α es del orden de la unidad y da cuenta de la distribución interna de masa. En función de la luminosidad media

$$\bar{L}t = \int L dt = \alpha \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \frac{GM^2}{R} \quad (2.2)$$

Por tanto, el tiempo durante el que una estrella con una luminosidad observada \bar{L} puede haber existido es aproximadamente

$$t_{HK} = \alpha \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \frac{GM^2}{\bar{L}R} \quad (2.3)$$

Tomando datos para el Sol, $\gamma = 5/3$, $\alpha = 3/2$ llegamos a

$$t_{HK}(\text{Sol}) = 2.4 \times 10^7 \text{ años}$$

Mientras que los datos geológicos aportan edades para la Tierra del orden de 4.5×10^9 años. Con este argumento concluimos que para radiar al ritmo observado el Sol (las estrellas en

¹Consecuencia del teorema del virial, (A.44).

²Esencialmente da cuenta de los grados de libertad internos, ver (A.7) y (A.8)

general) necesita fuentes adicionales de energía. El origen de estas fuentes fue un misterio hasta el desarrollo de la física nuclear. Hoy día sabemos que la producción de energía en las estrellas se basa en reacciones termonucleares, que analizamos en la siguiente sección.

2.2. Reacción protón-protón

La liberación de energía en las estrellas proviene fundamentalmente de dos cadenas de reacciones termonucleares: la cadena protón-protón y el ciclo del carbono. Trataremos aquí en detalle la cadena protón-protón, dando mediante argumentos sencillos una estimación del ritmo de producción de energía. Por último se incluyen algunos resultados para otras cadenas.

La cadena de reacciones que tiene lugar en la reacción protón-protón es

$$p + p \rightarrow D + e^+ + \nu_e + 1.44 \text{ MeV} \quad (\times 2) \quad (2.4)$$

$$D + p \rightarrow \text{He}^3 + \gamma + 5.49 \text{ MeV} \quad (\times 2) \quad (2.5)$$

$$\text{He}^3 + \text{He}^3 \rightarrow \text{He}^4 + 2p + 12.85 \text{ MeV} \quad (2.6)$$

El resultado final es la combinación de cuatro protones en un núcleo de helio y dos neutrinos, con una producción de energía de 26.1 MeV (donde se han descontado ~ 0.3 MeV que se pierden en promedio con cada neutrino³). La energía por protón es de 6.5 MeV.

Por otro lado, de las tres reacciones la primera es muchísimo más lenta que el resto. Los dos protones tienen, en primer lugar, que vencer la repulsión coulombiana para quedar confinados dentro del rango de la interacción fuerte. En segundo lugar, durante el poco tiempo que dura este confinamiento uno de los p debe decaer β^+ para formar el deuterón (este proceso débil ya es por sí mismo mucho más lento). Para calcular el ritmo de producción de energía nuclear Q únicamente necesitamos estudiar el primer proceso, que al ser mucho más lento marca el ritmo de toda la reacción.

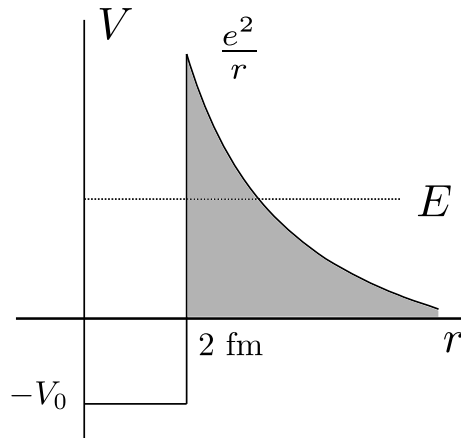


Figura 2.1: Potencial coulombiano entre dos protones. Representaremos la interacción fuerte por un pozo cuadrado de ~ 2 fm.

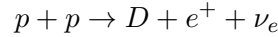
³(Kippenhahn et al., 1990)

Uno de los factores que necesitamos conocer es la probabilidad de atravesar la barrera de la figura 2.1. La probabilidad clásica a las temperaturas consideradas (10^7 K) es ínfima, el proceso debe tener lugar por efecto túnel. Las características del efecto túnel (dependencia exponencial con la anchura de la barrera) nos permite intuir una fuerte dependencia del ritmo de la reacción con la temperatura. Habiendo anticipado algunos de los resultados, pasemos ahora sí a los cálculos.

Debemos tener en cuenta tres factores para calcular la probabilidad de recombinación de los dos protones

- I) La probabilidad de penetración de la barrera durante la colisión de dos protones.
- II) La probabilidad de emisión de un positrón durante la colisión, para lo que utilizaremos la teoría de Fermi de la desintegración β .
- III) La distribución de velocidades de las partículas dentro de la estrella con la estadística de Maxwell-Boltzmann.

El número de reacciones por unidad de tiempo para la reacción



viene dado por la regla de oro de Fermi, para protones con momento \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 tenemos

$$P_{pp} = \frac{2\pi}{\hbar} \int dN_e dN_\nu dN_D \delta(E_i - E_f) |\langle f | H_\beta | i \rangle|^2 \quad (2.7)$$

donde $dN_i = \frac{V}{h^3} d^3p_i$ y $\langle f | H_\beta | i \rangle = H_{fi}$ es el elemento de matriz que conecta los estados inicial y final. Es decir, consideramos la probabilidad de transición $|H_{fi}|^2$ y sumamos sobre todos los posibles estados finales e iniciales cinemáticamente permitidos. Con las aproximaciones habituales de $m_\nu = 0$ y de que el deuterón es mucho más masivo que e^+ y ν (absorbe mucho momento sin contribuir apreciablemente a la energía) tenemos

$$P_{pp} = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{fi}|^2 f(E_0) \quad (2.8)$$

donde E_0 es el máximo valor para la energía del positrón y la función $f(E_0)$ es una integral⁴ sobre el espacio de fases accesible por el positrón y el neutrino. Podemos simplificar la expresión escribiéndola en función de la probabilidad de desintegración del neutrón P_n

$$P_{pp} = \left| \int \psi_D^* \psi_{pp} d^3r \right|^2 \frac{f(E_0(pp))}{f(E_0(n))} P_n \quad (2.9)$$

⁴La forma general es

$$f(Z, E_0) = \int_0^{p_0} F(Z, E) p^2 (E_0 - E)^2 dp$$

donde $F(Z, E)$ es el factor de Fermi, una corrección que da cuenta de que el positrón se encuentra en un potencial coulombiano y no es una onda plana. Si despreciamos esta corrección electrostática $F(0, E) = 1$ y la integral se calcula analíticamente. Más detalles en (Weisskopf and Blatt, 1952) p. 688.

donde ψ_D es la función de ondas del deuterón y ψ_{pp} la función de ondas del sistema protón-protón. Hasta aquí el tratamiento es bastante general. A continuación particularizaremos a nuestro problema en tres pasos. Primero calcularemos el factor estadístico. En segundo lugar calcularemos de forma aproximada el elemento de matriz. Por último promediaremos sobre los posibles estados iniciales (promedio con la estadística de Boltzmann) para obtener el resultado final del ritmo de la reacción.

Factor estadístico. Evaluaremos la energía disponible en los dos procesos. En la desintegración del neutrón

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad E_0 = m_n - m_p - m_e = 0.8 \text{ MeV}$$

Para nuestro proceso

$$p + p \rightarrow D + e^+ + \nu_e \quad E_0 = 2m_p - m_p - m_n - m_e + b(D) = 0.4 \text{ MeV}$$

Recalcamos de nuevo que la formación del deuterón sólo puede tener lugar si los protones están lo suficientemente cerca. El neutrón es más masivo que el protón por lo que $p \rightarrow n$ sólo puede tener lugar si el estado final tiene una energía aún menor, como en el caso del deuterón. En el rango de energías considerado⁵

$$f(E_0) \sim E_0^4 \quad \rightarrow \quad \frac{f(E_0(pp))}{f(E_0(n))} \approx \left(\frac{E_0(pp)}{E_0(n)} \right)^4 = \frac{1}{16}$$

Elemento de matriz. Necesitamos estimar la forma de las funciones de onda para el deuterón y el sistema protón-protón. Representaremos la interacción fuerte por un potencial cuadrado de anchura δ , estrecho. ψ_{pp} se puede calcular exactamente, hay que buscar soluciones con el hamiltoniano

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + \frac{e^2}{r} + V(r)$$

donde μ es la masa reducida, r la distancia relativa y $V(r)$ el potencial de corto alcance. Las soluciones pueden escribirse⁶

$$\psi_{pp} = \frac{G(\mathbf{r})}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.10)$$

donde r y k son las posiciones y momento relativo. Para $r = 0$ (consideraremos que $G(r = \delta) \simeq G(r = 0)$)

$$G(0) = \left(\frac{v^*}{v} \right)^{1/2} e^{-v^*/2v} \quad v^* = \frac{2\pi e^2}{\hbar} \quad (2.11)$$

⁵La forma explícita de la función $f(E_0)$ puede encontrarse en algunos textos de física nuclear o también en (Bethe and Critchfield, 1938).

⁶Ver por ejemplo (Merzbacher, 1998) 13.8, la solución realmente se encuentra para un potencial coulombiano puro pero en nuestra aproximación es indiferente.

donde v es la velocidad relativa entre los protones. La función de ondas del deuterón es (en nuestra aproximación) un autoestado del pozo cuadrado. Éstos oscilan para $r < \delta$ y decaen exponencialmente para $r > \delta$, simplificando aún más tomaremos para todo r la siguiente expresión

$$\psi_D = \frac{1}{\sqrt{\pi\delta^3}} e^{-r/\delta} \quad \delta: \text{“radio” del deuterón} \quad (2.12)$$

Ahora sí podemos calcular el elemento de matriz, por la dependencia de ψ_D la única contribución apreciable viene de la integral sobre el volumen del deuterón

$$\begin{aligned} \int_V \psi_D^* \psi_{pp} d^3r &\approx \psi_{pp}(0) \int_V \psi_D^* d^3r = 4\pi \psi_{pp}(0) \int_0^\infty r^2 \frac{e^{-r/\delta}}{(\pi\delta^3)^{1/2}} dr \\ &= \psi_{pp}(0) 8\pi^{1/2} \delta^{3/2} = 8\pi^{1/2} \left(\frac{v^*}{v}\right)^{1/2} e^{-v^*/2v} \left(\frac{\delta^3}{V}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

Promedio térmico. Con los resultados anteriores tenemos que el número de reacciones que se producen por unidad de tiempo para dos protones con velocidad relativa v es

$$P_{pp} = 4\pi \left(\frac{v^*}{v}\right) e^{-v^*/v} \left(\frac{\delta^3}{V}\right) P_n \quad (2.13)$$

Finalmente para obtener el ritmo de la reacción debemos promediar con la estadística de Maxwell-Boltzmann sobre todas las posibles velocidades iniciales

$$\begin{aligned} R_{pp} &= \langle P_{pp} \rangle = \frac{1}{2} \int P_{pp} \phi(E_1) \phi(E_2) d^3p_1 d^3p_2 \\ \phi(E) &= N \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \quad N^{-1} = v_T^3 \pi^{3/2} m^3 \quad v_T^2 = \frac{2k_B T}{m} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Para evitar el problema de tratar con los módulos $v = |v_2 - v_1|$ podemos promediar directamente sobre velocidades relativas empleando la masa reducida $\mu = m/2$ en lugar de m en $\phi(E)$

$$R_{pp} = \int P_{pp} \phi(E) d^3p = \frac{16\pi^{1/2} v^*}{v_T^3} \left(\frac{\delta^3}{V}\right) P_n \int_0^\infty v e^{-v^*/v} e^{-v^2/v_T^2} dv \quad (2.15)$$

Podemos aproximar la integral en (2.15) dándonos cuenta que el integrando presenta un máximo estrecho en una velocidad v_0 . Desarrollando en torno a este máximo obtenemos

$$R_{pp} \simeq \frac{32\pi}{9\sqrt{3}} S^2(v_0) e^{-S(v_0)} \left(\frac{\delta^3}{V}\right) P_n \quad \text{con} \quad S(v_0) = 3 \left(\frac{v^*}{2v_T}\right)^{2/3} \quad (2.16)$$

En definitiva, la probabilidad por unidad de tiempo de que un par de protones en un volumen V forme un deuterón es

$$R_{pp} = \frac{32\pi}{9\sqrt{3}} S^2 e^{-S} \left(\frac{\delta^3}{V}\right) P_n \quad S = 3 \left(\frac{v^*}{2v_T}\right)^{2/3} \left\{ \begin{array}{l} v^* = \frac{2\pi e^2}{\hbar} \\ v_T^2 = \frac{4k_B T}{m_p} \end{array} \right. \quad (2.17)$$

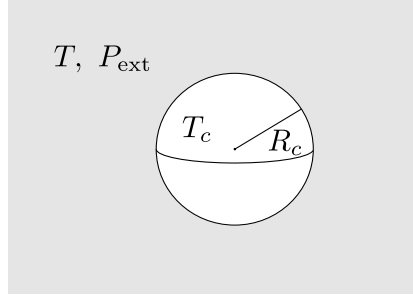


Figura 2.2: Representación del núcleo como una esfera isoterma.

La energía producida por unidad de tiempo en la reacción total se calcula a partir del ritmo, la energía $q/2$ producida por cada par de protones y el número de pares de protones $N_p^2/2$

$$Q = q \frac{N_p^2}{4} R_{pp} \quad (2.18)$$

Tratemos de ver ahora a partir de argumentos sencillos si podemos deducir la dependencia de Q con la temperatura. Consideremos una esfera homogénea e isoterma (núcleo), con radio R_c , masa M_c y temperatura T_c . Tenemos $N_e = N_p$, despreciando la presencia de elementos compuestos y suponiendo que la ecuación de estado es la de un gas ideal monoatómico ($N = N_p + N_e = 2N_p$) del teorema del virial tenemos

$$3 \int P dV = -E_g + 4\pi R_c^3 P_{\text{ext}} \approx -E_g$$

$$6 \frac{M}{m_p} k_B T = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = \frac{4\pi}{5} \frac{GM^2 R^2}{V} \quad \rightarrow \quad M = N_p m_p = 10 \frac{R_c T_c k_B}{G m_p}$$

Si además tomamos $\delta = 4.3 \times 10^{-13}$ cm, $P_n^{-1} = 920$ s y $q = 26.1$ MeV llegamos finalmente a

$$Q = 25q \frac{R_c^2 T_c^2 k_B^2}{G^2 m_p^4} R_{pp} \quad R_{pp} = \frac{24}{\sqrt{3}} P_n \left(\frac{\delta^3}{R_c^3} \right) S^2 e^{-S}$$

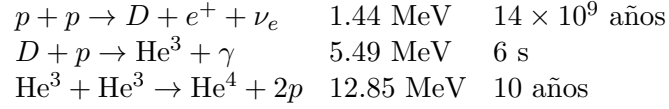
$$Q = 3.5 \times 10^{39} \left(\frac{R_\odot}{R_c} \right) \left(\frac{T_c}{10^7 \text{ K}} \right)^{4/3} \exp \left[-15.7 \left(\frac{10^7 \text{ K}}{T_c} \right)^{1/3} \right] \text{ erg/s} \quad (2.19)$$

Tomando como datos concretos $T_c = 10^7$ K y $R_c = 0.1 R_\odot$ obtenemos $Q = 5.3 \times 10^{33}$ erg/s, del mismo orden de magnitud que la luminosidad solar $L_\odot = 3.8 \times 10^{33}$ erg/s.

2.3. Otras reacciones

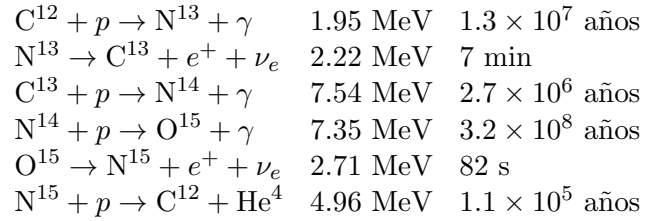
Hemos visto cómo la cadena pp permite estimar la energía producida en las estrellas. Sin embargo este proceso sólo es dominante a bajas temperaturas, en la mayoría de estrellas se producen otras reacciones que comentamos a continuación

- **Cadena pp .** Ya hemos profundizado en esta reacción, repasamos sus características principales



La energía liberada es $q = 26.7 \text{ MeV}$, algo menos si descontamos la energía de los neutrinos (unos 0.3 MeV). Es la más energética entre todas las reacciones de fusión y la menos sensible a los cambios de temperatura (cálculos detallados muestran que para $T \approx 5 \times 10^6 \rightarrow Q \sim T^6$, $T \approx 2 \times 10^7 \rightarrow Q \sim T^{3.5}$)

- **Ciclo del carbono.** Otra manera de unir 4 protones en un núcleo de helio es mediante el ciclo del carbono. Al contrario que la pp , requiere la presencia de elementos pesados (C^{12}), que actúen como catalizadores, reponiéndose al final. El ciclo completo es



Junto con la cadena pp es la fuente principal de energía en las estrellas. La energía liberada descontando las pérdidas de los neutrinos es $q = 25.0 \text{ MeV}$ (la energía de los neutrinos depende de la reacción donde se producen). Es muy sensible a la temperatura, en el rango $T = 1 \dots 5 \times 10^7 \rightarrow Q \sim T^{23} \dots T^{13}$.

- **Otras reacciones.** Si la estrella es suficientemente masiva se alcanza la temperatura de fusión para elementos más pesados, procesos dominantes cuando se agotan las reservas de H. Para $T \gtrsim 10^8 \text{ K}$ comienza la quema del helio, a $T \gtrsim 10^9 \text{ K}$ el oxígeno (con todos los intermediarios). Cuando $T \approx 3 \times 10^9 \text{ K}$ empieza a producirse hierro como producto y la estrella deja de poder obtener energía de la fusión (el hierro es estable, ni su fusión ni su fisión son energéticamente favorables).

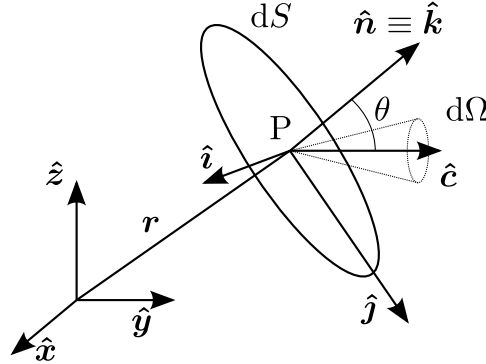
Una vez explicado el origen de la energía en las estrellas, reacciones nucleares de fusión en el núcleo, debemos examinar cómo se transporta esta energía en el interior y relacionarlo con la luminosidad.

Capítulo 3

Transporte de energía

3.1. Definiciones generales

Antes de estudiar el transporte radiativo de energía repasaremos algunos conceptos fundamentales. Consideremos un elemento de superficie dS orientado según \hat{n} y centrado en el punto P , con vector de posición \mathbf{r} . Definimos un sistema de coordenadas $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ sobre el elemento de superficie y denotamos la dirección de emisión de los fotones por \hat{c} .



- **Intensidad.** La dirección de emisión \hat{c} queda definida por los ángulos θ y φ . El diferencial de ángulo sólido en torno a \hat{c} se define como $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$. La energía que atraviesa la superficie dS en un intervalo dt en las direcciones comprendidas por $d\Omega$ en torno a \hat{c} es

$$dE = \mathcal{I}(\hat{c}, \mathbf{r}, t) \hat{c} \cdot d\mathbf{S} d\Omega dt = \mathcal{I}(\hat{c}, \mathbf{r}, t) \cos\theta dS d\Omega dt \quad (3.1)$$

donde \mathcal{I} es la intensidad en el punto P .

- **Flujo.** La energía neta que atraviesa la superficie $d\mathbf{S}$ en un dt puede escribirse

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} dt$$

Donde el flujo (energía por unidad de tiempo y superficie) se obtiene sumando sobre todas las posibles direcciones de emisión

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathcal{I}(\hat{c}, \mathbf{r}, t) \hat{c} d\Omega \quad (3.2)$$

- **Distribución frecuencial.** Para análisis posteriores, es interesante descomponer la energía en sus componentes frecuenciales. De manera análoga al primer caso, la energía que atraviesa la superficie dS en un intervalo dt y con frecuencia comprendida entre ν y $\nu + d\nu$ es

$$dE_\nu = \mathcal{I}_\nu(\hat{\mathbf{c}}, \mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{c}} \cdot d\mathbf{S} d\Omega dt d\nu \quad (3.3)$$

donde \mathcal{I}_ν es la intensidad monocromática y se relaciona con \mathcal{I}

$$\mathcal{I}(\hat{\mathbf{c}}, \mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \mathcal{I}_\nu(\hat{\mathbf{c}}, \mathbf{r}, t) d\nu$$

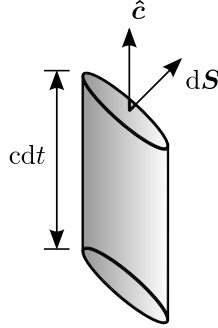
- **Distribución de fotones en el espacio de fases.** Pasamos ahora a considerar la luz compuesta de fotones, buscaremos relacionar la distribución de fotones en el espacio de fases con las intensidades antes calculadas. El número de fotones en un volumen elemental en el espacio de fases

$$dN = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \frac{dV dV_p}{h^3} \cdot 2 = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \frac{2dV}{h^3} p^2 dp d\Omega$$

Utilizando la relación $p = E/c = h\nu/c$, $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{c}}$

$$dN = \frac{2\nu^2}{c^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) dV d\nu d\Omega$$

Ahora nos preguntamos cuántos fotones atraviesan la superficie dS según la dirección $\hat{\mathbf{c}}$ en un intervalo dt . Los fotones viajan a velocidad c , luego serán los contenidos en el cilindro de altura cdt . El volumen del cilindro es $dV = \mathbf{c} \cdot d\mathbf{S} dt$, luego el número de fotones que atraviesan dicha superficie es



$$dN = \frac{2\nu^2}{c^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \mathbf{c} \cdot d\mathbf{S} dt d\nu d\Omega$$

La energía se obtiene sin más que considerar que la energía que lleva cada fotón es $h\nu$, $dE_\nu = h\nu dN$. Relacionamos así la intensidad con la función de distribución

$$\left. \begin{aligned} dE_\nu &= \frac{2h\nu^3}{c^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \mathbf{c} \cdot d\mathbf{S} dt d\nu d\Omega \\ dE_\nu &= \mathcal{I}_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \hat{\mathbf{c}} \cdot d\mathbf{S} dt d\nu d\Omega \end{aligned} \right\} \quad \mathcal{I}_\nu = \frac{2\nu^3}{c^2} f_\nu$$

3.2. Ecuación de transferencia radiativa

La evolución de la distribución de partículas en el espacio de fases viene dada por la ecuación de Boltzmann. Establece una relación entre la variación del número de partículas contenidas en un volumen dV que se mueve con velocidad \mathbf{v} y los procesos de pérdida y ganancia que tienen lugar. En nuestro caso $\mathbf{v} = \mathbf{c}$ y tenemos

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f_\nu = \gamma_\nu^+ - \gamma_\nu^- \quad (3.4)$$

donde γ_+ y γ_- representan los procesos de ganancia y pérdida. O bien multiplicando por $2h\nu^3/c^3$ y definiendo $\Gamma_\pm = 2h\nu^3\gamma_\pm/c^3$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{I}_\nu}{\partial t} + \hat{\mathbf{c}} \cdot \nabla \mathcal{I}_\nu = \Gamma_\nu^+ - \Gamma_\nu^- \quad (3.5)$$

Procesos de pérdida Γ_ν^-

- Absorción (desaparecen fotones del modo)
- Scattering (sacan los fotones del volumen considerado)

Ambos son proporcionales al número de fotones $\sim \mathcal{I}_\nu$ y a la densidad del medio. Para tener en cuenta ambos procesos definimos la opacidad κ_ν

$$\Gamma_\nu^- = \kappa_\nu \rho(\mathbf{r}, t) \mathcal{I}_\nu(\hat{\mathbf{c}}, \mathbf{r}, t) \quad (3.6)$$

Procesos de ganancia Γ_ν^+

- Emisión (las fuentes de energía generan nuevos fotones)
- Scattering (las colisiones pueden introducir fotones dentro del volumen)

Caracterizamos genéricamente estos procesos a través de una función fuente

$$\Gamma_\nu^+ = \kappa_\nu \rho(\mathbf{r}, t) \mathcal{S}_\nu(\hat{\mathbf{c}}, \mathbf{r}, t) \quad (3.7)$$

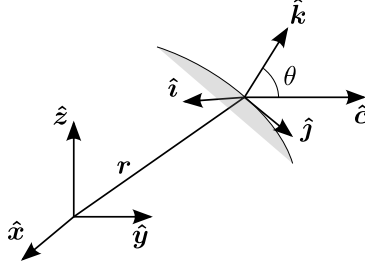
La ecuación de transferencia radiativa queda

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{I}_\nu}{\partial t} + \hat{\mathbf{c}} \cdot \nabla \mathcal{I}_\nu = \kappa_\nu \rho(\mathbf{r}, t) \left[\mathcal{S}_\nu(\hat{\mathbf{c}}, \mathbf{r}, t) - \mathcal{I}_\nu(\hat{\mathbf{c}}, \mathbf{r}, t) \right] \quad (3.8)$$

3.3. Recorrido libre medio

Buscando evaluar el camino libre medio de los fotones en el medio consideremos en primer lugar $\mathcal{S}_\nu = 0$, estudiamos cómo cambian los fotones que hay en el medio si no se inyectan más. Realizamos algunas aproximaciones: situación estacionaria y simetría esférica. En estas circunstancias

$$\hat{\mathbf{c}} \cdot \nabla \mathcal{I}_\nu(\hat{\mathbf{c}}, r) = -\kappa_\nu \rho(r) \mathcal{I}_\nu(\hat{\mathbf{c}}, r) \quad (3.9)$$



$$\hat{\mathbf{c}} = \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}$$

$$\nabla \mathcal{I}_\nu = \hat{\mathbf{k}} \frac{d\mathcal{I}_\nu}{dr} \quad \rightarrow \quad \frac{d\mathcal{I}_\nu}{dr} = -\frac{\kappa_\nu \rho(r)}{\cos \theta} \mathcal{I}_\nu$$

Tomamos como dirección de observación $\hat{\mathbf{c}} = \hat{\mathbf{k}}$ y vemos cómo cambia la intensidad entre r y $r + \delta r$ (δr pequeño). Separando variables e integrando

$$\int_r^{r+\delta r} \frac{d\mathcal{I}_\nu(\hat{\mathbf{k}}, r)}{\mathcal{I}_\nu(\hat{\mathbf{k}}, r)} = - \int_r^{r+\delta r} \kappa_\nu \rho(r) dr \approx -\kappa_\nu \rho(r) \delta r \quad \rightarrow \quad \mathcal{I}_\nu(\hat{\mathbf{k}}, r + \delta r) = \mathcal{I}_\nu(\hat{\mathbf{k}}, r) e^{-\kappa_\nu \rho \delta r}$$

De aquí vemos que podemos interpretar $\ell_{\text{ph}} = 1/\kappa_\nu \rho$ como el recorrido libre medio de los fotones. Hagamos algunas estimaciones numéricas, para el caso del Sol¹

$$\begin{aligned} \kappa &\approx 1 \text{ g}^{-1} \text{ cm}^2 & \rightarrow & \ell_{\text{ph}} \approx 2 \text{ cm} \\ \bar{\rho}_\odot &\approx 1.4 \text{ g cm}^{-3} \\ T(r=0) &= 1.5 \times 10^7 \text{ K} & \rightarrow & \Delta T(2 \text{ cm}) \approx 10^{-3} \text{ K} \\ T(R_\odot) &= 10^4 \text{ K} \end{aligned}$$

Se produce mucha interacción radiación-materia sin apenas variación de T , podemos considerar equilibrio termodinámico local.

3.4. Cuerpo negro. Primera aproximación

A partir de los resultados de la sección anterior parece razonable estimar en primera aproximación la intensidad radiada por la correspondiente en equilibrio: cuerpo negro. De la mecánica estadística en equilibrio sabemos que

$$f_\nu = \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}$$

volviendo a las fórmulas de la primera sección llegamos a la conocida fórmula del cuerpo negro

$$\mathcal{I}_\nu = \mathcal{B}_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}$$

¹Valores procedentes de (Kippenhahn et al., 1990), capítulo 5, κ y $\bar{\rho}_\odot$ son cantidades promedio, sobre todo el interior del Sol. κ_ν puede estimarse teóricamente teniendo en cuenta los procesos microscópicos (dispersiones Thomson entre otros), pero no entraremos en esos detalles aquí.

y a la ley de Stefan-Boltzmann

$$\mathcal{B} = \int_0^\infty \mathcal{B}_\nu \, d\nu = \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

Calculamos el flujo de energía en un punto interior de la estrella, con el mismo convenio que en la figura 3.3,

$$\mathbf{F}_\nu = \oint \mathcal{I}_\nu(\hat{\mathbf{c}}, r) \hat{\mathbf{c}} \, d\Omega = \mathcal{B}_\nu \oint \hat{\mathbf{c}} \, d\Omega \quad \hat{\mathbf{c}} = \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{F}_\nu = \mathcal{B}_\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta [\sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}] = 0$$

No hay flujo de energía si suponemos que la estrella es un cuerpo negro. No sucede así, el equilibrio termodinámico no es perfecto, debemos considerar una pequeña corrección a la situación de equilibrio.

3.5. Cuerpo negro. Segunda aproximación

Debemos buscar las diferencias con un cuerpo negro. Volvamos a las ecuaciones generales de transferencia radiativa (situación estacionaria)

$$\hat{\mathbf{c}} \cdot \nabla \mathcal{I}_\nu(\hat{\mathbf{c}}, \mathbf{r}) = \kappa_\nu \rho(\hat{\mathbf{c}}, \mathbf{r}) [\mathcal{S}_\nu - \mathcal{I}_\nu]$$

Reordenando los términos

$$\mathcal{I}_\nu(\hat{\mathbf{c}}, \mathbf{r}) = \mathcal{S}_\nu(\hat{\mathbf{c}}, \mathbf{r}) - \frac{1}{\kappa_\nu \rho} \hat{\mathbf{c}} \cdot \nabla \mathcal{I}_\nu(\hat{\mathbf{c}}, \mathbf{r})$$

El segundo término es del orden de $\ell_{\text{ph}} \mathcal{I}_\nu / R$, mucho más pequeño que \mathcal{I}_ν . Podemos considerarlo como una perturbación respecto de la situación de cuerpo negro. Tomamos ésta como orden cero y perturbamos hasta primer orden

$$\mathcal{I}_\nu^{(0)} = \mathcal{S}_\nu^{(0)} = \mathcal{B}_\nu \tag{3.10}$$

$$\mathcal{I}_\nu^{(1)} = \mathcal{S}_\nu^{(0)} - \frac{1}{\kappa_\nu \rho} \hat{\mathbf{c}} \cdot \nabla \mathcal{I}_\nu^{(0)} \quad \rightarrow \quad \mathcal{I}_\nu^{(1)} = \mathcal{B}_\nu - \frac{1}{\kappa_\nu \rho} \hat{\mathbf{c}} \cdot \nabla \mathcal{B}_\nu \tag{3.11}$$

De aquí

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\nu^{(0)} &= 0 \\ \mathbf{F}_\nu^{(1)} &= \oint \mathcal{I}_\nu^{(1)} \hat{\mathbf{c}} \, d\Omega = -\frac{1}{\kappa_\nu \rho} \frac{d\mathcal{B}_\nu}{dr} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta [\cos^2 \theta \sin \theta \hat{\mathbf{k}}] \\ &= -\frac{4\pi}{3} \frac{1}{\kappa_\nu \rho} \frac{d\mathcal{B}_\nu}{dr} \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Definimos la *opacidad media de Rosseland*

$$\frac{1}{\kappa} \equiv \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{d\mathcal{B}_\nu}{dr} \, d\nu}{\int_0^\infty \frac{d\mathcal{B}_\nu}{dr} \, d\nu} \tag{3.12}$$

Por otro lado, tenemos

$$\int_0^\infty \frac{d\mathcal{B}_\nu}{dr} d\nu = \frac{dT}{dr} \int_0^\infty \frac{\partial \mathcal{B}_\nu}{\partial T} d\nu = \frac{dT}{dr} \int_0^\infty \left[\frac{3}{T} \mathcal{B}_\nu - \frac{\nu}{T} \frac{\partial \mathcal{B}_\nu}{\partial \nu} \right] d\nu = \frac{4\sigma T^3}{\pi} \frac{dT}{dr}$$

En términos de la opacidad media

$$\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{d\mathcal{B}_\nu}{dr} d\nu = \frac{1}{\kappa} \frac{4\sigma T^3}{\pi} \frac{dT}{dr}$$

Con todo esto el flujo de energía queda

$$\mathbf{F}(r) = \int_0^\infty \mathbf{F}_\nu d\nu = -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr} \hat{\mathbf{k}} \quad (3.13)$$

3.6. Luminosidad

Definimos la luminosidad como la energía por unidad de tiempo que atraviesa un cascarón esférico de radio r

$$L_r = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi r^2 \frac{16\sigma}{3\kappa\rho} \frac{dT^4}{dr} \quad (3.14)$$

Aunque aquí no resolveremos las ecuaciones de estructura intentaremos extraer un poco más de información con argumentos cualitativos. Un resultado especialmente interesante es la relación masa-luminosidad que relaciona dos cantidades accesibles mediante observaciones. La densidad de la estrella varía aproximadamente

$$\rho \propto \frac{M}{R^3}$$

a partir de la condición de equilibrio hidrostático obtenemos también

$$P \propto \frac{M^2}{R^4}$$

para la ecuación de estado de un gas ideal

$$T \propto \frac{M}{R}$$

si finalmente introducimos en la ecuación (3.14), reemplazando las derivadas por diferencias finitas y considerando $\kappa = \text{cte.}$ llegamos a la relación masa-luminosidad

$$L \propto M^3 \quad (3.15)$$

que a pesar de haber sido obtenida con cálculos muy groseros se aproxima razonablemente bien a los datos observacionales.

3.7. Estabilidad

Llegados a este punto tenemos las ecuaciones principales para describir la estructura de una estrella donde el transporte de energía es radiativo. Estamos en disposición de estudiar su estabilidad. Nos centraremos en tres aspectos del problema: la estabilidad del flujo radiativo, la estabilidad de la producción de energía y la estabilidad de un gas de partículas y radiación.

3.7.1. Condiciones de convección

Una vez estudiado el transporte de energía por radiación, examinamos bajo qué condiciones hay otros medios de transferencia energética. La conducción siempre está presente pero es despreciable en la mayoría de los casos², lo que nos deja la convección. La convección permite un transporte efectivo de energía a través de transporte de materia.

Consideremos un elemento de materia δm (burbuja) a una temperatura T y a una presión P . En un momento dado sufre un aumento de temperatura δT que produce un aumento de presión δP . Este repentino aumento de presión de la burbuja sobre la presión exterior produce una expansión, de manera que cuando la presión se equilibra la densidad de la burbuja es menor que la de los alrededores. Debemos estudiar bajo qué circunstancias esta fluctuación se mantiene y asciende o bien se desvanece. Haremos las siguientes suposiciones adicionales

- i) Durante el ascenso de la burbuja se mantiene a la misma presión que su entorno (asciende a velocidades subsónicas).
- ii) Las expansiones (o contracciones) de la burbuja son adiabáticas.
- iii) Como siempre, la presión, temperatura y densidad decrecen hacia el exterior. No hay fuerzas viscosas.

La imagen ahora es muy clara

- La burbuja es menos densa y por tanto asciende hacia el exterior.
- Durante el ascenso está en equilibrio mecánico y por tanto su temperatura debe ajustarse para igualar la presión ambiental.
- El ajuste de la temperatura se lleva a cabo mediante contracciones y expansiones adiabáticas, según $\left. \frac{dT}{dP} \right|_{\text{adb}}$
- La temperatura del entorno varía según $\left. \frac{dT}{dP} \right|_{\text{rad}}$

La burbuja y el entorno varían su temperatura a ritmos diferentes. Si la burbuja se ajusta más lentamente que el entorno siempre estará a una temperatura diferente. En otro caso,

²La conducción térmica es pequeña en la materia estelar ordinaria. La densidad es muy alta y el recorrido libre medio de electrones y núcleos es varios órdenes de magnitud inferior al de los fotones. No obstante, en un gas degenerado el recorrido libre medio aumenta considerablemente y la conducción es significativa. Más detalles en (Kippenhahn et al., 1990), capítulo 5.2.

la temperatura de ambos se iguala en algún momento y la fluctuación desaparece. Por tanto, la condición para que exista convección es

$$\left. \frac{dT}{dP} \right|_{\text{adb}} < \left. \frac{dT}{dP} \right|_{\text{rad}} \quad (3.16)$$

3.7.2. Estabilidad nuclear

Hemos hablado en todo momento de las estrellas como objetos longevos y extraordinariamente estables, pero veremos cómo algunos de los resultados de las últimas secciones pueden parecer contradictorios y requieren un análisis crítico.

La conservación de la energía exige

$$\frac{dE}{dt} = Q - L \quad (3.17)$$

y en equilibrio $Q = L$. Supongamos que una fluctuación en el interior aumenta la temperatura y que Q aumenta, recordemos la extrema dependencia de las reacciones nucleares con la temperatura. Veamos la capacidad de respuesta del flujo radiativo. Pongamos por ejemplo al Sol, encontramos en la sección 3.3 que los fotones tenían un recorrido libre medio $\ell \approx 2$ cm. La distancia promedio que recorren durante el camino aleatorio que siguen entre colisiones (*random-walk*) es

$$\langle r^2 \rangle = 2\ell ct \quad (3.18)$$

y por tanto la escala de tiempo para que un fotón generado en el centro del Sol llegue al exterior es

$$t_{\text{rad}} = \frac{R_{\odot}^2}{2\ell c} \approx 1300 \text{ años} \quad (3.19)$$

El tiempo es extraordinariamente grande comparado con la escala de tiempo de los procesos nucleares, el flujo radiativo no puede estabilizar esta fluctuación.

Si se produce un aumento de temperatura en el núcleo aumenta Q y este incremento de energía no es radiado. Este aumento de energía (E) podría conducir a su vez a un aumento de temperatura y a una reacción nuclear descontrolada. Que esto no suceda así ($dE/dT < 0$) es una característica singular de las estrellas, consecuencia directa del teorema del virial

$$E = E_g + U = -(3\gamma - 4)U \quad \text{con} \quad \gamma > 4/3, \quad dU/dT > 0$$

$$\frac{dE}{dT} = -(3\gamma - 4) \frac{dU}{dT} < 0$$

El tiempo de ajuste mecánico (gravitatorio) es mucho más corto y actúa para mantener la estabilidad. Ante un repentino aumento de la temperatura la estrella se expande ligeramente y produce un enfriamiento, restaurando el equilibrio. Las fuerzas gravitatorias son por tanto las responsables de mantener la estabilidad de la estrella y la condición $Q = L$.

3.7.3. Masa máxima

Hemos visto a lo largo de este capítulo la importancia del gas de radiación en el transporte de energía dentro de la estrella, pero hemos ignorado su contribución a la presión (o lo que es lo mismo, a la energía total). El gas de fotones tiene una presión asociada, (A.32),

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}u_{\text{rad}} = \frac{4\sigma}{3c}T^4 \quad (3.20)$$

que es una parte significativa de la presión total a temperaturas altas (en general en las estrellas más grandes). Con esto la presión total queda

$$P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}} = (\gamma - 1)u_{\text{gas}} + \frac{1}{3}u_{\text{rad}} \quad (3.21)$$

Volvamos al teorema del virial y veamos cómo afecta la inclusión de la radiación

$$3 \int P \, dV = 3(\gamma - 1)U_{\text{gas}} + U_{\text{rad}} = -E_g \quad (3.22)$$

Curiosamente la forma de la energía total no cambia

$$E = E_g + U_{\text{rad}} + U_{\text{gas}} = -3(\gamma - 4/3)U_{\text{gas}} \quad (3.23)$$

Esto nos plantea un problema muy interesante ¿Qué sucede si la radiación domina sobre la energía del gas, $U_{\text{rad}} \gg U_{\text{gas}}$? Del teorema del virial tenemos que U_{rad} y E_g cancelan casi exactamente y son mucho mayores que U_{gas} , pero la energía total sigue siendo proporcional a la energía del gas (es negativa pero pequeña en módulo).

En estas circunstancias es razonable que pequeñas fluctuaciones en U_{rad} o E_g puedan elevar la energía de algunas regiones de la estrella por encima de cero, dando lugar a inestabilidades. Este mecanismo (entre otros) limita la masa máxima que puede alcanzar una estrella. La condición

$$U_{\text{rad}} = U_{\text{gas}}$$

nos permite estimar la masa necesaria para que se den este tipo de inestabilidades

$$M_{\text{max}} = 1.11 \left(\frac{m_p}{\mu} \right)^2 \left(\frac{3\gamma - 2}{\gamma - 1} \right)^{3/2} M_{\odot} \quad (3.24)$$

donde μ es el peso molecular medio, (A.12). Con $\mu = m_p/2$ y $\gamma = 5/3$ obtenemos $M = 42M_{\odot}$. Cálculos más detallados³ dan una masa máxima de aproximadamente $100M_{\odot}$.

³(Balian and Blaizot, 1999)

Capítulo 4

Evolución final

4.1. Agotamiento del hidrógeno

Hemos visto que las estrellas son objetos tremendamente estables, además, gracias a sus grandes reservas de energía nuclear, tienen tiempos de vida muy largos. El primer suceso que perturba significativamente la vida de cualquier estrella, y que marca el inicio de las fases finales de evolución, es el agotamiento del hidrógeno. El tiempo transcurrido hasta que una estrella consume el hidrógeno depende de su masa. Podemos estimar esta escala de tiempo como

$$\tau_H = \frac{E_H}{L} \quad (4.1)$$

donde L es la luminosidad (que se mantiene aproximadamente constante) y E_H la energía disponible. La energía disponible es proporcional a la cantidad de hidrógeno que se consume, si suponemos además que la fracción de combustible consumido es igual para todas las estrellas tenemos $E_H \propto M$. Con esto y la relación $L \propto M^3$ que obtuvimos en (3.15), podemos estimar

$$\tau_H \sim M^{-2} \quad (4.2)$$

Las estrellas más masivas tienen tiempos de vida más cortos, brillan con más intensidad y proceden antes a la siguiente etapa. No sólo eso, veremos ahora cómo dependiendo de su masa tienen finales significativamente distintos.

Las estrellas presentan una estructura estratificada y cada capa tiene un comportamiento diferente. Las mayores temperaturas se alcanzan en el núcleo y las capas interiores, la fusión tiene lugar aquí y no en las capas exteriores. Para nuestros propósitos, tomaremos un modelo elemental de dos capas: un núcleo y su envoltente. En nuestro modelo la fusión únicamente tiene lugar en el núcleo y una vez que éste consume todo el hidrógeno la estrella queda como un núcleo de helio inerte y una envoltente de hidrógeno¹.

En ausencia de fuentes de energía, el núcleo alcanza el equilibrio térmico a una temperatura T_c . Nos encontramos de nuevo con el problema de equilibrio de una esfera isoterma,

¹Por supuesto suponemos un salto abrupto entre el núcleo y la envoltente, no se produce fusión en las zonas internas de la envoltente. Tampoco consideramos convección, que podría suministrar combustible al núcleo. No consideramos tampoco, de momento, expansiones o contracciones del núcleo.

debemos estudiar la estabilidad en función de la relación entre la presión en la superficie del núcleo P_c y la presión de la envoltura P_e . Ya discutimos² que para una masa M_c y una temperatura T_c existe una presión máxima $P_{c_{\max}} = P_{c_{\max}}(M_c, T_c)$. Si $P_e > P_{c_{\max}}$ el núcleo es inestable y se contrae, mientras que si $P_e < P_{c_{\max}}$ existe solución de equilibrio ($P_{c_{\max}} \propto T_c^4/M_c^2$)

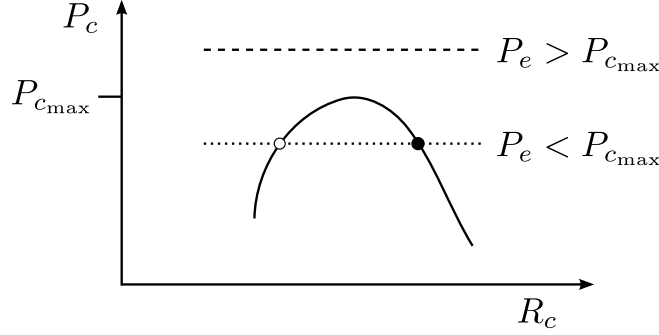


Figura 4.1: Comparativa entre la presión ejercida por la envoltura y la presión en la superficie de la esfera isoterma.

- $P_e > P_{c_{\max}}$, contracción. La contracción produce $T_c \uparrow$ y continúa hasta que aparezcan otros fenómenos (degeneración u otra etapa nuclear).
- $P_e < P_{c_{\max}}$, equilibrio. Realmente, como la fusión de H sigue teniendo lugar en las capas más internas, el tamaño del núcleo de helio aumenta progresivamente. Es decir, $M_c \uparrow$ y por tanto en algún momento llegamos a la condición $P_e > P_{c_{\max}}$ y comienza la contracción.

Llegados a este punto las estrellas pequeñas y grandes siguen caminos diferentes.

4.2. Finales: estrellas pequeñas, masivas y supermasivas

4.2.1. Pequeñas

Una de las características más importantes de las estrellas más pequeñas es que presentan mayores densidades centrales ρ_c durante la quema del hidrógeno. Podemos justificarlo cualitativamente a partir del teorema del virial

$$6Nk_B T = \alpha \frac{GM^2}{R} \quad \rightarrow \quad k_B T = \alpha \frac{GMm}{6R}$$

donde N es el número de protones y m su masa. Entonces, si tenemos dos configuraciones a la misma temperatura (quema de H, por ejemplo)

$$\frac{M_1}{R_1} = \frac{M_2}{R_2}$$

²En la sección 1.2, en concreto la fórmula (1.11) nos permite calcular inmediatamente la presión máxima.

Para esferas homogéneas esto implica³

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \rightarrow R_2 > R_1 \Rightarrow \rho_1 > \rho_2$$

Las estrellas más pequeñas están por tanto más cerca del punto de degeneración. En este tipo de estrellas cuando el núcleo comienza a colapsar se alcanza antes la degeneración que el punto de ignición del helio. La presión del gas de electrones degenerados es superior al gas clásico y el equilibrio ahora sí se mantiene. La envoltura se expulsa progresivamente o bien se enfría y cae sobre el núcleo. El remanente final, este núcleo degenerado, es lo que denominamos una enana blanca (de He).

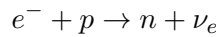
4.2.2. Masivas

Las estrellas más masivas alcanzan la temperatura de fusión del He. Una vez consumido el helio nos encontramos con el mismo problema, o bien se alcanza la degeneración o la temperatura necesaria para la siguiente etapa nuclear. El tamaño de una estrella determina cuántas etapas nucleares recorre. Estas estrellas producen enanas blancas de elementos más pesados (como C, N, O).

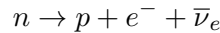
4.2.3. Supermasivas

Las estrellas que recorren todas las fases nucleares hasta el Fe y no alcanzan la degeneración del núcleo tienen un final violento, los fenómenos conocidos como supernovas. Sus productos finales son, dependiendo de la masa, agujeros negros o estrellas de neutrones. Aunque no entraremos en los detalles concretos de la formación de estrellas de neutrones, sí vamos a explicar un fenómeno fundamental para su existencia: la neutronización.

Neutronización Consideremos un gas de electrones y protones, a temperaturas suficientemente altas la energía de las partículas es lo bastante grande para que se produzca la captura electrónica



Para que el proceso tenga lugar el electrón debe tener una energía $E = E_{\text{kin}} + m_e c^2 > (m_n - m_p)c^2 = 1.3 \text{ MeV}$. En nuestra experiencia cotidiana, el neutrón libre es inestable y decae β en unos 15 minutos a través de la reacción inversa



Sin embargo, a densidades suficientemente altas, la desintegración β se bloquea y tenemos una producción neta de neutrones. Veámoslo.

Supongamos que el gas de electrones está degenerado, con energía de Fermi E_F . La energía cinética máxima que puede adquirir el electrón en la desintegración β del neutrón es $Q = (m_n - m_p - m_e)c^2$. En el caso de que $E_F > Q$ el electrón producto no tiene ningún estado libre, el proceso queda inhibido. Se produce así la *neutronización* del gas. Es importante notar que tanto en nuestro gas como en la estrella de neutrones necesitamos

³Sabemos que $R_2 > R_1$ para $M_2 > M_1$ por el equilibrio gravitacional.

mantener una pequeña concentración de protones y electrones para mantener este bloqueo. Las estrellas de neutrones tienen una altísima proporción de neutrones y una pequeña cantidad de electrones y protones que aseguran su estabilidad frente a la desintegración β .

No obstante, en un caso real de formación de una estrella de neutrones no tenemos un gas de protones y electrones sino elementos pesados como el hierro. El proceso de producción de neutrones libres es diferente en este caso, pero el mecanismo subyacente que permite la supervivencia de estos neutrones es el bloqueo β que hemos explicado.

Capítulo 5

Enanas blancas

Trataremos ahora sobre las fases finales de la vida de las estrellas. Involucran en algunos casos estados exóticos de la materia y debemos ser cuidadosos a la hora de escoger una ecuación de estado, así como decidir el papel que debe jugar la relatividad en su estructura.

5.1. Planteamiento del problema

Como ya hemos comentado anteriormente, una de las ecuaciones más importantes en una estrella es la ecuación de balance energético

$$\frac{dE}{dt} = Q - L$$

Paradójicamente, la producción de energía nuclear contribuye a mantener la estrella *fría*. Cuando se agota el combustible nuclear, la pérdida de energía por radiación induce una contracción y consecuentemente un aumento de la temperatura. Sin fuentes internas de energía ¿Debería continuar la contracción indefinidamente haciendo más y más densa la estrella? La respuesta es no. Como ya adelantábamos en el primer capítulo y según los resultados del capítulo anterior, antes se alcanza el límite de degeneración del gas de electrones ($T \ll T_F$). El gas degenerado de electrones es radicalmente diferente de un gas clásico, los electrones se encuentran ocupando todos los estados posibles desde el fundamental y sólo unos pocos cercanos al nivel de Fermi contribuyen a los procesos térmicos¹. En este caso, la energía que se gana en la contracción gravitatoria se invierte en aumentar la energía de los electrones sin que esto se refleje en un aumento de la temperatura. El resultado final es que la estrella se enfría.

Veamos qué información podemos obtener sobre las características de las enanas blancas mediante estimaciones de orden de magnitud. Esto nos ayudará a plantear las ecuaciones y a anticipar resultados.

Ecuación de estado. Según la discusión anterior, nuestra ecuación de estado será la de un gas degenerado para los electrones y un gas clásico para los iones. Esperamos encontrar

¹Notar que la temperatura de Fermi depende de la masa de las partículas que estemos considerando. Mientras que el gas de electrones está degenerado, los protones y otros iones tienen una temperatura de Fermi mucho menor y se comportan como un gas clásico.

tanto el caso no relativista como el ultrarrelativista para el gas de electrones, dependiendo de la densidad.

Masa máxima. Uno de los resultados más importantes que obtendremos es la existencia de una masa límite. En este tipo de objetos estelares la presión cuántica de los electrones (mayor que la de los iones) es la fuerza que se opone al colapso gravitatorio. ¿Cómo varían estas dos fuerzas al variar el volumen? Consideremos el caso más extremo de enana blanca, la ultrarrelativista (más densa)

$$P_g = -\frac{dE_g}{dV} = -\frac{1}{4\pi R^2} \frac{dE_g}{dR} \sim \frac{GM^2}{4\pi R^4} = \frac{GM^2}{4\pi} \left(\frac{4\pi}{3V}\right)^{4/3} \quad (5.1)$$

$$P_e = \frac{2\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \left(\frac{p_F}{m_e c}\right)^4 = \frac{hc}{4} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/3} \left(\frac{N}{V}\right)^{4/3} \quad (5.2)$$

Ambas evolucionan igual con el volumen, si la fuerza gravitatoria es mayor y se inicia la contracción, sigue siendo mayor y la contracción continúa. Por tanto, la masa máxima que puede soportar una enana blanca sin convertirse en algún otro objeto más compacto es la que cumple $P_g = P_e$. Con $M = Nm_p$ esto nos lleva a

$$M_{\max} = N_{\max} m_p \sim \frac{1}{m_p^2} \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} \simeq 1.5 M_{\odot} \quad (5.3)$$

Para masas mayores la gravedad se impone y el destino de la estrella es otro. Este sencillo análisis permite anticipar la existencia de una masa límite y estimar el orden de magnitud de la masa de estos objetos ($\sim M_{\odot}$).

Radio. Hemos calculado la masa para una enana blanca ultrarrelativista ($p_F \gg m_e c$), para estimar² el radio consideramos el caso $p_F = m_e c$. Operando llegamos a

$$R \simeq \frac{\hbar}{m_e c} N^{1/3} \quad (5.4)$$

Sustituyendo de (5.3) llegamos a

$$R \sim 5 \times 10^8 \text{ cm} = 7 \times 10^{-3} R_{\odot} \quad (5.5)$$

Ecuaciones de estructura. Una vez calculados los parámetros característicos del problema estimaremos el rol que jugarán la relatividad especial y general en la estructura. En primer lugar, la energía interna de los constituyentes del sistema

$$U_e = 3PV = \frac{3hc}{4} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/3} \frac{N^{4/3}}{V^{1/3}} \simeq 4.2 \times 10^{49} \text{ erg} \quad (5.6)$$

$$U_p = Nm_p c^2 = 1.5 \times 10^{54} \text{ erg} \quad (5.7)$$

²Obtenemos realmente una cota superior.

Aunque los electrones son la contribución principal en la presión, la energía está dominada por la masa en reposo de los iones. No necesitamos considerar correcciones de relatividad especial. Veamos la relatividad general

$$\frac{GM}{Rc^2} \sim 4.4 \times 10^{-4} \ll 1 \quad (5.8)$$

No esperamos por tanto que las correcciones de relatividad general tengan un rol importante en la estructura³.

Nuestro problema se reduce a resolver las ecuaciones newtonianas, que ya hemos trabajado, con una nueva ecuación de estado.

5.2. Funciones de Lane-Emden. Casos no relativista y ultrarelativista

Las ecuaciones de estado para el gas ideal de Fermi se reducen a la forma simple (politrópica)

$$P = K\rho^\gamma \quad P = (\gamma - 1)u \quad (5.9)$$

en los dos casos límite no relativista ($\gamma = 5/3$) y ultrarelativista ($\gamma = 4/3$). Trataremos de solucionar estos dos casos. Las ecuaciones de estructura son las newtonianas, que pueden agruparse en

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G\rho \quad (5.10)$$

Definimos el índice politrópico n como $\gamma = 1 + 1/n$. Sustituyendo la ecuación de estado (5.9) en (5.10) y realizando los siguientes cambios de variables (ρ_c es la densidad central $\rho_c = \rho(r=0)$)

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_c \theta^n \\ r &= a\xi \\ a &= \left[\frac{(n+1)K\rho_c^{1/n-1}}{4\pi G} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

llegamos a la ecuación de Lane-Emden de orden n

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} = -\theta^n \quad (5.11)$$

con las condiciones de contorno⁴

$$\theta(0) = 1 \quad (5.12)$$

$$\theta'(0) = 0 \quad (5.13)$$

³Las correcciones de relatividad general son importantes para ciertas cuestiones de estabilidad.

⁴La primera condición se obtiene directamente de $\rho(0) = \rho_c$. La segunda es más elaborada. En primer lugar, cuando $r \rightarrow 0$ tenemos $M \sim \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_c$. Por otro lado de la condición de equilibrio hidrostático tenemos

$$\frac{dP}{dr} = K\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr} \sim -\frac{4\pi G}{3} \rho_c^2 r \rightarrow \theta'(0) = 0$$

La ecuación (5.11) puede integrarse numéricamente⁵ desde $\xi = 0$ con las condiciones de contorno anteriores. Se encuentra que para $n < 5$ ($\gamma > 6/5$) las soluciones decrecen monótonamente y se anulan (tienen un cero) en $\xi = \xi_1$. En este punto $P = \rho = 0$, corresponde a la superficie de la estrella. Con esto podemos calcular el radio y la masa a partir de la densidad central, con ello la relación M - R . El radio queda

$$R = a\xi_1 = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{1/2} \rho_c^{(1-n)/2n} \xi_1 \quad (5.14)$$

y la masa

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R 4\pi r^2 \rho \, dr = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n \, d\xi = -4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \, d\xi \\ &= 4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_c^{(3-n)/2n} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| \end{aligned} \quad (5.15)$$

despejando la densidad central obtenemos una relación entre M y R

$$M = 4\pi \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| \left(\frac{R}{\xi_1} \right)^{\frac{3-n}{1-n}} \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{\frac{n}{n-1}} \quad (5.16)$$

Definimos también el peso molecular medio por electrón (número de nucleones n_B por electrón) $\mu_e = A/Z$, con esto

$$\rho = m_p n_B = m_p n_e \mu_e \quad (5.17)$$

Particularicemos los resultados ahora a los casos que nos interesan.

5.2.1. No relativista

$$\gamma = 5/3 \quad n = 3/2 \quad \xi_1 = 3.65375 \quad \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 2.71406$$

$$K_{\text{NR}} = \frac{h^2}{5m_e m_p^{5/3}} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{1}{\mu^{5/3}}$$

Por tanto obtenemos

$$R = 1.12 \times 10^4 \left(\frac{\rho_c}{10^6 \text{ g cm}^{-3}} \right)^{-1/6} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5/6} \text{ km} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} M &= 0.49 \left(\frac{\rho_c}{10^6 \text{ g cm}^{-3}} \right)^{1/2} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5/2} M_\odot \\ &= 0.70 \left(\frac{R}{10^4 \text{ km}} \right)^{-3} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5} M_\odot \end{aligned} \quad (5.19)$$

Uno de los resultados curiosos es que el radio de la estrella es inversamente proporcional a la masa, añadir más masa no hace más grande a la estrella sólo más compacta.

⁵Los valores pueden encontrarse por ejemplo en (Chandrasekhar, 2010).

5.2.2. Ultrarrelativista

$$\gamma = 4/3 \quad n = 3 \quad \xi_1 = 6.89685 \quad \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 2.01824$$

$$K_{\text{UR}} = \frac{hc}{4} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} \frac{1}{(m_p \mu_e)^{4/3}}$$

De aquí obtenemos

$$R = 3.35 \times 10^4 \left(\frac{\rho_c}{10^6 \text{ g cm}^{-3}} \right)^{-1/3} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-2/3} \text{ km} \quad (5.20)$$

$$M = 1.45 M_{\odot} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-2} \quad (5.21)$$

Como ya anticipábamos en (5.3) los cálculos detallados muestran la existencia de una masa máxima, independiente del radio y donde la composición química interviene a través de μ_e . Este es el conocido *límite de Chandrasekhar*. Para masas mayores la presión del gas de electrones es incapaz de contener la contracción gravitatoria y el destino de la estrella es convertirse en una estrella de neutrones, que estudiaremos en el siguiente capítulo.

5.3. Consideraciones adicionales

En este capítulo hemos tratado las enanas blancas primero mediante argumentos cualitativos que nos han permitido estimar las magnitudes del problema y plantear las ecuaciones completas. A continuación hemos presentado la resolución utilizando la ecuación de estado de un gas ideal de fermiones completamente degenerado, cuya ecuación no varía en toda la configuración. En esta sección daremos una visión de los nuevos fenómenos que deben considerarse para mejorar el modelo⁶.

5.3.1. Cristalización

Aunque el gas de iones no alcanza el límite de degeneración y se comporta como clásico, lo cierto es que se encuentra bajo condiciones extremas. La densidad es extremadamente alta (los iones están muy juntos) por lo que parece lógico que conforme la temperatura baje debamos considerar las interacciones coulombianas. Definimos un parámetro Γ que cuantifique la importancia de las interacciones electrostáticas

$$\Gamma \equiv \frac{(Ze)^2}{r_i k_B T} = \frac{\text{energía Coul.}}{\text{energía term.}}$$

aquí r_i cuantifica la distancia entre iones (concretamente la distancia entre iones si se encuentran equiespaciados ocupando toda la estrella) y se define como

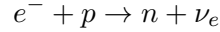
$$\frac{4\pi n_i r_i^3}{3} = 1$$

⁶Evidentemente puede mejorarse considerando estratificación en capas, permitiendo diferentes rangos de degeneración y de “relatividad”. Aquí nombramos fenómenos nuevos, en muchos casos únicos, ocurriendo sólo bajo las circunstancias especiales de las enanas blancas.

donde n_i es la densidad en número de iones. Cuando $\Gamma \gg 1$ la interacción coulombiana predomina sobre la agitación térmica y los iones se disponen en una configuración que minimice la energía electrostática, cristalizan y forman una red. Las ecuaciones del gas de electrones se modifican respecto a la situación de iones libres. La cristalización es especialmente relevante estudiando el enfriamiento de las enanas blancas (cambia el calor específico).

5.3.2. Equilibrio β

Si queremos mejorar nuestra ecuación de estado debemos considerar la reacción de captura electrónica



que a altas densidades puede producirse a un ritmo apreciable, siempre que los electrones alcancen el umbral⁷ de energía $(m_n - m_p - m_e)c^2 = 0.8 \text{ MeV}$. Este proceso debe encontrarse en equilibrio con la desintegración β de los neutrones



5.3.3. Reacciones picnonucleares

Hemos visto que las estrellas obtienen su energía a través de las reacciones termonucleares, la temperatura es lo bastante alta (energía cinética) para que las partículas tengan una probabilidad apreciable de atravesar la barrera coulombiana que repele los iones. Este no es el único camino para que la fusión tenga lugar, las reacciones picnonucleares suceden incluso a temperatura cero.

Una vez que la estrella ha cristalizado los electrones se encuentran en los puntos de una red. Debido a la agitación térmica se mueven en torno a sus posiciones de equilibrio e incluso a temperatura cero tienen la *energía del punto cero*. Con una densidad suficientemente alta esta energía del punto cero puede ser suficiente para que la probabilidad de atravesar la barrera sea apreciable, tenemos entonces fusión nuclear. Estas reacciones ocurren a un ritmo bajo y no juegan un rol muy importante, pero introducen correcciones.

5.3.4. Relatividad General

La relatividad general no juega ningún papel en la estructura de las enanas blancas, pero no podemos ignorarla completamente. El fenómeno principal que limita la estabilidad de las enanas blancas (limita el valor de ρ_c) es la captura electrónica. Sin embargo, para algunas enanas blancas⁸, las correcciones introducidas por la relatividad general imponen un límite más restrictivo. La relatividad general es importante en consideraciones de estabilidad.

⁷Conviene recordar de nuevo que estamos en un gas degenerado. No debemos comparar esta energía con $k_B T$, con lo que obtendríamos unas temperaturas altísimas (unos $9 \times 10^9 \text{ K}$), sino con $\epsilon_F \propto n^{2/3}$. Podemos alcanzar esta energía umbral aumentando la densidad.

⁸Concretamente para las enanas blancas de He y C, no así para las de Fe donde el límite impuesto a la densidad central por el equilibrio β es más restrictivo. Para más detalles ([Shapiro and Teukolsky, 2008](#)), 6.10.

Capítulo 6

Estrellas de neutrones

Las estrellas de neutrones son objetos aún más extremos y compactos que las enanas blancas. Están compuestas casi en su totalidad por neutrones (degenerados), con pequeñísimas cantidades de electrones y protones. Al contrario que en el gas de electrones, la ecuación de estado de la materia nuclear no es tan bien conocida ni tan sencilla. En nuestro tratamiento nos restringimos a considerar un gas de neutrones libres. El tratamiento será por tanto análogo al de las enanas blancas de la sección anterior, cambiando en las fórmulas m_e por m_n y μ_e por 1. Reutilizamos los resultados anteriores para estimar las características de una estrella de neutrones en el límite no relativista

$$R = 15.0 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/3} \text{ km} \quad (6.1)$$

Para una masa típica de $1 M_\odot$ nos da $R = 15$ km. Es un valor extremadamente pequeño, debemos revisar algunos de nuestros supuestos. En concreto, la influencia de la relatividad general

$$\frac{GM}{Rc^2} = 0.1 \quad (6.2)$$

Los supuestos de partida (ecuaciones newtonianas) no son válidos, debemos plantear el problema relativista completo.

6.1. Ecuaciones de Oppenheimer-Volkoff

Tras resolver el problema relativista (ver los detalles en el Apéndice) las nuevas ecuaciones de estructura son¹

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2 \quad (6.3)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \left[1 + \frac{P}{\rho} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P}{M(r)} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{r} \right]^{-1} \quad (6.4)$$

La nueva ecuación (6.4) es simplemente la condición newtoniana de equilibrio hidrostático con tres términos adicionales de origen relativista. Hay que notar que los tres términos

¹ ρ ahora es la densidad de energía, tomaremos también $c = 1$ en toda esta sección.

contribuyen a aumentar el término de la derecha, la Relatividad General “fortalece” la gravedad.

Plantearemos aquí la resolución numérica de este par de ecuaciones diferenciales. Además, aprovechando la potencia de los métodos numéricos utilizaremos la ecuación de estado general para un gas de Fermi completamente degenerado (sin irnos a los límites relativistas). La ecuación de estado puede escribirse en forma paramétrica

$$\rho = K(\sinh t - t) \quad (6.5)$$

$$P = \frac{K}{3}(\sinh t - 8 \sinh \frac{t}{2} + 3t) \quad (6.6)$$

donde ahora ρ es la densidad de energía² y

$$K = \frac{\pi m_n^4 c^5}{4h^3} \quad t = 4 \log(x + \sqrt{1 + x^2}) \quad x = \frac{p_F}{m_n c} \quad (6.7)$$

Aunque la expresión (6.4) es más transparente, la reescribimos en una forma más apropiada para el trabajo numérico

$$\frac{dP}{dr} = \frac{G(P + \rho)}{r(r - 2MG)} [4\pi P r^3 + M]$$

Sustituimos de la ecuación de estado y llegamos al par de ecuaciones que integraremos numéricamente

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 K(\sinh t - t) \quad (6.8)$$

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{4G}{r(r - 2MG)} \frac{\sinh t - 2 \sinh \frac{t}{2}}{\cosh t - 4 \cosh \frac{t}{2} + 3} \left(\frac{4\pi}{3} K r^3 (\sinh t - 8 \sinh \frac{t}{2} + 3t) + M \right) \quad (6.9)$$

Obtenemos el perfil de densidad para varias elecciones de la densidad central ρ_c y la relación entre la masa total y el radio de la estrella, figuras 6.1 y 6.2 respectivamente.

Uno de los resultados más llamativos es la existencia de una masa límite, como en el caso de las enanas blancas. Por encima de esta masa la presión del gas de neutrones no es suficiente para soportar el colapso gravitatorio. No obstante, ya hemos comentado que nuestra aproximación de gas ideal necesariamente flaquea a altas densidades y debemos considerar correcciones a la ecuación de estado incluyendo interacciones nucleares. La predicción de objetos más compactos es sin embargo correcta: los agujeros negros.

²Podríamos haber hecho este tratamiento con las enanas blancas teniendo cuidado en un aspecto. La presión tendría la misma expresión (gas de e^- degenerados) pero la densidad de energía sería diferente. La densidad de energía en las enanas blancas está dominada por la masa en reposo del gas clásico de iones, en las estrellas de neutrones es la energía total de un gas de Fermi de neutrones.

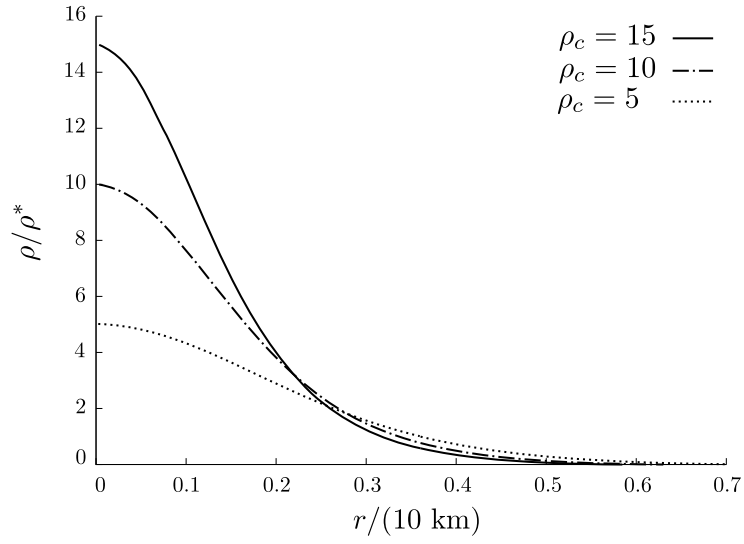


Figura 6.1: Dependencia de la densidad con la distancia al centro de la estrella, para varias densidades centrales ρ_c . El parámetro ρ^* depende de la elección de unidades, en nuestro caso $\rho^* = M_\odot/(10 \text{ km})^3$.

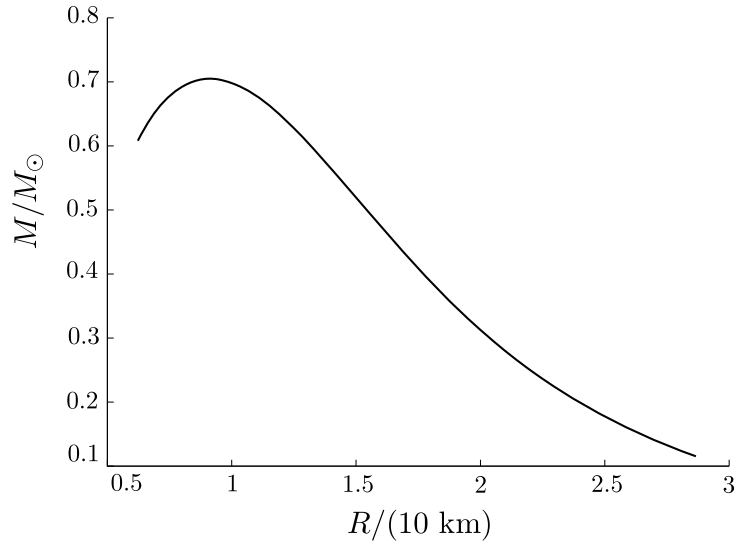


Figura 6.2: Relación entre la masa total y el radio. El máximo se encuentra en $M = 0.71M_\odot$ y $R = 9.3 \text{ km}$.

Apéndice A

Ecuaciones de estado

A.1. Hidrodinámica

Una de las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica es la ecuación de Navier-Stokes

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f} \quad (\text{A.1})$$

donde η , ζ son coeficientes de viscosidad y \mathbf{f} una fuerza externa. En ausencia de viscosidad $\eta = \zeta = 0$ se reducen a

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P + \mathbf{f} \quad (\text{A.2})$$

que se conoce como ecuación de Euler y establece la conservación de momento en un elemento de volumen (modificado únicamente por la acción de \mathbf{f}). Esta ecuación se complementa además con la ecuación de continuidad, que expresa la conservación de la masa de fluido en un elemento de volumen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Por último, la condición de equilibrio hidrostático $\mathbf{v} = 0$ es

$$\nabla P = \mathbf{f} \quad (\text{A.4})$$

La interpretación es clara, para mantener el equilibrio hidrostático las fuerzas del fluido deben contrarrestar las fuerzas externas. Un caso particularmente interesante es el equilibrio hidrostático de una esfera sometida únicamente a la gravedad que genera. En este caso, la condición de equilibrio hidrostático queda

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho \quad M(r) = 4\pi \int_0^r \rho r'^2 dr' \quad (\text{A.5})$$

es decir, por la simetría esférica, la fuerza externa que actúa sobre el cascarón de radio r es la atracción newtoniana de la masa que contiene.

A.2. Ecuaciones de estado

A.2.1. Gas ideal

El comportamiento de un gas ideal viene dado por

$$PV = Nk_B T \quad U = \frac{1}{\gamma - 1} Nk_B T = \frac{1}{\gamma - 1} PV \quad (\text{A.6})$$

La constante γ da cuenta de los grados de libertad internos, por ejemplo¹

$$\gamma = 5/3 \quad (\text{monoatómico}) \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma = 7/5, 9/7 \quad (\text{diatómico}) \quad (\text{A.8})$$

Además, si consideramos procesos adiabáticos en un gas ideal tenemos las relaciones

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cte.} \quad TV^{\gamma-1} = \text{cte.} \quad PV^\gamma = \text{cte.} \quad (\text{A.9})$$

Por último, la ecuación de estado del gas ideal para sistemas multicomponente (n indica densidad numérica de partículas)

$$P = nk_B T = k_B T \sum_i n_i \quad (\text{A.10})$$

puede reescribirse de una forma más conveniente

$$P = k_B T \sum_i n_i = k_B T \sum_i m_i n_i \frac{\sum_i n_i}{\sum_i m_i n_i} = \frac{\rho}{\mu} k_B T \quad (\text{A.11})$$

donde se ha definido el peso molecular medio

$$\mu \equiv \frac{\sum_i m_i n_i}{\sum_i n_i} \quad (\text{A.12})$$

Por ejemplo, en el caso de un gas de protones y electrones, $n_p = n_e$ por la neutralidad de carga y además $m_p \gg m_e$

$$\mu = \frac{m_p n_p + m_e n_e}{n_e + n_p} = \frac{m_p}{2} \quad (\text{A.13})$$

A.2.2. Gas de Fermi

En general, las características de un gas de Fermi se describen por (en el caso no relativista, si no la densidad de estados es más complicada)

$$N = \int f_F(\epsilon, T) D(\epsilon) d\epsilon \quad f_F(\epsilon, T) = \frac{1}{\exp \beta(\epsilon - \mu) + 1} \quad (\text{A.14})$$

$$U = \int \epsilon f_F(\epsilon, T) D(\epsilon) d\epsilon \quad D(\epsilon) = \frac{(2s+1)V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon^{1/2} \quad (\text{A.15})$$

¹El valor para el gas diatómico depende de si consideramos sólo rotaciones o rotaciones y vibraciones.

En el caso degenerado ($T \rightarrow 0$) puede simplificarse la discusión. La función de Fermi es una función escalón, todos los estados se encuentran llenos hasta el momento p_F (último estado ocupado). El número de electrones se obtiene contando todos los estados

$$N = 2 \int f_F \frac{dV}{h^3} dV_p = \frac{2V}{h^3} \int f_F dV_p = \frac{8\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{8\pi V}{3h^3} p_F^3$$

$$p_F = \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{1/3} h \quad (\text{A.16})$$

La energía cinética de las partículas es

$$\epsilon = \sqrt{(cp)^2 + (mc^2)^2} - mc^2 = mc^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc} \right)^2} - 1 \right] \quad (\text{A.17})$$

definiendo

$$x \equiv \frac{p_F}{mc} \quad (\text{A.18})$$

la energía interna y la presión quedan

$$U = \frac{8\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} \epsilon p^2 dp = \frac{8\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} mc^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc} \right)^2} - 1 \right] p^2 dp = \frac{\pi V m^4 c^5}{3h^3} B(x) \quad (\text{A.19})$$

$$P = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_N = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} mc^2 \frac{(p/mc)^2}{\sqrt{1 + (p/mc)^2}} p^2 dp = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} A(x) \quad (\text{A.20})$$

donde

$$A(x) = x(2x^2 - 3)\sqrt{1 + x^2} + 3 \sinh^{-1} x \quad (\text{A.21})$$

$$B(x) = 8x^3[\sqrt{1 + x^2} - 1] - A(x) \quad (\text{A.22})$$

Conviene buscar los casos particulares ultrarrelativista y no relativista ($x \gg 1$ y $x \ll 1$ respectivamente)

$$A(x) = \frac{8}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \dots \quad \text{para } x \ll 1 \quad (\text{NR}) \quad (\text{A.23})$$

$$= 2x^4 - 2x^2 + \dots \quad \text{para } x \gg 1 \quad (\text{UR}) \quad (\text{A.24})$$

$$B(x) = \frac{12}{5}x^5 - \frac{3}{7}x^7 + \dots \quad \text{para } x \ll 1 \quad (\text{NR}) \quad \rightarrow \quad PV = \frac{2}{3}U \quad \text{clásico} \quad (\text{A.25})$$

$$= 6x^4 - 8x^3 + \dots \quad \text{para } x \gg 1 \quad (\text{UR}) \quad \rightarrow \quad PV = \frac{1}{3}U \quad (\text{A.26})$$

Temperatura de Fermi Podemos intuir fácilmente el grado de degeneración de un sistema si definimos una escala de temperaturas

$$T_F \equiv \frac{\epsilon_F}{k_B} \quad (\text{A.27})$$

Por ejemplo, en el caso no relativista $\epsilon_F = p_F^2/2m$ y tenemos

$$T_F = \frac{\hbar^2}{2mk_B} (3\pi^2 n)^{2/3} \quad (\text{A.28})$$

Consideraremos que un sistema está totalmente degenerado cuando $T \ll T_F$.

A.2.3. Cuerpo negro

Las ecuaciones del cuerpo negro pueden obtenerse semiclásicamente, contando los modos en una cavidad, o de manera análoga al gas de Fermi, utilizando la estadística de Bose-Einstein. En este último caso, f_ω es el número (promedio) de fotones en un modo ω y $g(\omega)$ la densidad de estados

$$N = \int f_\omega g(\omega) d\omega \quad f_\omega = \frac{1}{\exp \beta \hbar \omega - 1} \quad (\text{A.29})$$

$$U = \int \hbar \omega f_\omega g(\omega) d\omega \quad g(\omega) = \frac{V \omega^2}{\pi^2 c^3} \quad (\text{A.30})$$

Integrando encontramos

$$\frac{U}{V} = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} T^4 = \frac{4\sigma}{c} T^4 \quad (\text{A.31})$$

También podemos calcular la presión del gas²

$$PV = \frac{\pi^2 V}{45 \hbar^3 c^3} (k_B T)^4 = \frac{1}{3} U \quad (\text{A.32})$$

A.3. Teorema del virial

A.3.1. Clásico

Cosideremos el lagrangiano de un sistema de N partículas

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (\text{A.33})$$

donde además $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ es homogénea de grado k , es decir, cumple

$$V(\lambda \mathbf{r}_1, \dots, \lambda \mathbf{r}_N) = \lambda^k V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad \Rightarrow \quad \sum_i \mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} = kV \quad (\text{A.34})$$

Escribimos las ecuaciones del movimiento y tratamos de explotar la propiedad anterior

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \quad \rightarrow \quad x_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{x}_i} \right) + x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (m_i x_i^2) = \dot{x}_i \frac{\partial T_i}{\partial \dot{x}_i} - x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (\text{A.36})$$

Sumando sobre todas las partículas y definiendo el momento de inercia $I = \sum_i m_i r_i^2$ tenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2T - kV \quad (\text{A.37})$$

Si consideramos la situación estacionaria y un potencial newtoniano de atracción entre las partículas ($k = -1$)

$$2T = -V \quad (\text{A.38})$$

²Para el cálculo de la presión necesitamos recurrir a la función de partición del gas (o justificar mediante algún tipo de consideración cinética adicional). Intuitivamente parece razonable, es la misma relación entre presión y energía que para un gas de Fermi ultrarrelativista.

A.3.2. Hidrodinámico

Podemos obtener el teorema del virial para un fluido en equilibrio hidrostático. La ecuación de equilibrio hidrostático (A.5) para un fluido con simetría esférica es

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho \quad (\text{A.39})$$

Multiplicando por r^3 a ambos lados e integrando por partes encontramos

$$3 \int P \, dV = -E_g + 4\pi R^3 P_s \quad (\text{A.40})$$

donde P_s es la presión en superficie y E_g la energía gravitatoria. Podemos encontrar algunos resultados interesantes concretando la ecuación de estado. Supongamos que la ecuación de estado puede escribirse

$$P = (\gamma - 1)u \quad , \quad \int u \, dV = U \quad (\text{A.41})$$

Nos permite relacionar la energía gravitatoria con la energía interna

$$U = \frac{-1}{3(\gamma - 1)} E_g \quad (\text{A.42})$$

y lo que es más importante, la energía total

$$E = E_g + U = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} E_g \quad (\text{A.43})$$

Consideramos ahora una contracción de este sistema, suficientemente lenta para no perturbar significativamente el equilibrio hidrostático. En una contracción $\Delta E_g < 0$ y tenemos por tanto, para $\gamma > 4/3$,

$$\Delta E = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \Delta E_g < 0 \quad (\text{A.44})$$

El sistema *radia* energía como consecuencia de la contracción.

A.4. Homología

Diremos que dos configuraciones estelares son homólogas si difieren por únicamente por un factor de escala. Concretamente, si la masa *total* y el radio de dos estrellas guarda la relación

$$R' = \alpha R \quad (\text{A.45})$$

$$M' = \beta M \quad (\text{A.46})$$

diremos que son homólogas si para *toda la configuración* se cumple la misma relación

$$r' = \alpha r \quad (\text{A.47})$$

$$M'(r') = \beta M(r) \quad (\text{A.48})$$

A partir de aquí podemos obtener otras relaciones de proporcionalidad. Directamente de la definición de $M(r)$ tenemos

$$\rho'(r') = \frac{1}{4\pi^2 r'^2} \frac{dM'}{dr'} = \frac{\alpha}{\beta^3} \rho(r) \quad (\text{A.49})$$

Por otro lado, de la condición de equilibrio hidrostático

$$dP'(r') = \frac{GM'(r')\rho'(r')}{r'^2} dr' = \frac{\alpha^2}{\beta^4} dP(r) \quad (\text{A.50})$$

Si consideramos la ecuación de estado de un gas ideal podemos evaluar la variación de la temperatura (permitiremos también un cambio de composición $\mu'(r') = \gamma\mu(r)$)

$$T'(r') = \frac{P'(r')\mu'(r')}{\rho'(r')k_B} = \frac{\alpha\gamma}{\beta} T(r) \quad (\text{A.51})$$

En definitiva, podemos resumir las relaciones obtenidas como

$$\frac{\rho'(r')}{\rho(r)} = \frac{M'}{M} \left(\frac{R}{R'}\right)^3 \quad \frac{P'(r')}{P(r)} = \left(\frac{M'}{M}\right)^2 \left(\frac{R}{R'}\right)^4 \quad \frac{T'(r')}{T(r)} = \frac{\mu'}{\mu} \frac{M'}{M} \frac{R}{R'} \quad (\text{A.52})$$

Estas sencillas relaciones nos permiten intuir cómo cambian las variables del problema al cambiar el tamaño de la estrella, ya sea al comparar dos estrellas o en diferentes fases de evolución de una misma estrella (por ejemplo durante un colapso).

Apéndice B

Ecuaciones de estructura relativistas

Elegimos la métrica¹ isótropa e independiente del tiempo, que se puede expresar en la forma general

$$g_{rr} = A(r) \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta \quad g_{tt} = -B(r)$$
$$g_{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu$$

Siguiendo con la consideración de isotropía, tomamos el tensor de energía-momento de un fluido perfecto (verifica la ley de Pascal)

$$T_{\mu\nu} = P g_{\mu\nu} + (P + \rho) U_\mu U_\nu \quad T = 3P - \rho$$

Donde P es la presión y ρ es la densidad de energía (propias, definidas para un observador comóvil). El cuadvectorel vector velocidad está normalizado, de manera que

$$g^{\mu\nu} U_\mu U_\nu = -1$$

Como el fluido está en reposo

$$U_r = U_\theta = U_\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad U_t = -(g^{tt})^{-1/2} = -\sqrt{B(r)}$$

Las componentes del tensor de Ricci son las mismas que en la solución de Schwarzschild (exterior), escribimos las ecuaciones de Einstein (las componentes no triviales)

$$R_{rr} = \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA} = -4\pi G(\rho - P)A \quad (\text{B.1})$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A} \left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) + \frac{1}{A} = -4\pi G(\rho - P)r^2 \quad (\text{B.2})$$

$$R_{tt} = -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rA} = -4\pi G(\rho + 3P)B \quad (\text{B.3})$$

¹Seguimos el convenio de signos de (Weinberg, 1972).

Condición de equilibrio hidrostático. Las ecuaciones de Einstein contienen información tanto sobre la geometría como sobre la dinámica del fluido. Formalmente, para encontrar las ecuaciones que buscamos sólo tendríamos que manipular las ecuaciones adecuadamente. En muchos casos, es más directo hacer uso de leyes de conservación para simplificar el problema. La ley de conservación del tensor de energía-momento se escribe

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$$

para un fluido perfecto

$$T^{\mu\nu} = Pg^{\mu\nu} + (P + \rho)U^\mu U^\nu \quad (\text{B.4})$$

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{\partial P}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} + g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} g^{1/2} (P + \rho) U^\mu U^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} (P + \rho) U^\nu U^\lambda = 0 \quad (\text{B.5})$$

para fluidos estáticos $U^i = 0$ y $U^0 = (-g^{00})^{-1/2}$

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{\partial P}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} + g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^0} g^{1/2} (P + \rho) U^\mu U^0 + \Gamma^\mu_{00} (P + \rho) U^0 U^0 = 0$$

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}$$

Además, en la situación estática todas las derivadas temporales se anulan

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = g^{\mu\nu} \frac{\partial P}{\partial x^\nu} + \frac{1}{2g_{00}} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} (P + \rho) = 0$$

Multiplicando por $g_{\mu\lambda}$ y tomando trazas llegamos a

$$\frac{\partial P}{\partial x^i} = -(P + \rho) \frac{\partial}{\partial x^i} \log(\sqrt{-g_{00}})$$

Para la métrica general que hemos mencionado antes $g_{00} = B(r)$ y nos queda

$$\frac{B'}{B} = -\frac{2P'}{P + \rho} \quad (\text{B.6})$$

Solución interior Operando con las ecuaciones de Einstein, buscamos una ecuación que sólo contenga $A(r)$

$$\begin{aligned} \frac{R_{rr}}{2A} + \frac{R_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{R_{tt}}{2B} &= -\frac{A'}{rA^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 A} = -8\pi G\rho \\ \frac{1}{A} - \frac{A'r}{A^2} &= 1 - 8\pi G\rho r^2 = \left(\frac{r}{A}\right)' \end{aligned}$$

Integrando, la solución de la ecuación anterior con $A(0)$ finito queda

$$A(r) = \left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-1} \quad M(r) = \int_0^r 4\pi\rho(r)r^2 dr \quad (\text{B.7})$$

Introduciendo ahora (B.6) y (B.7) en (B.2) encontramos

$$P' = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \left[1 + \frac{P}{\rho}\right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P}{M(r)}\right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{r}\right]^{-1} \quad (\text{B.8})$$

Llegamos así a la expresión para el equilibrio hidrostático. Con esta expresión se aprecia muy bien el límite no relativista. El primer término es newtoniano, mientras que los tres últimos son puramente relativistas.

Apéndice C

Órdenes de magnitud

C.1. Constantes físicas

Velocidad de la luz	c	$3.00 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$
Constante de la gravitación	G	$6.67 \times 10^{-8} \text{ dyn cm}^2 \text{ g}^{-2}$
Constante de Planck	h	$6.626 \times 10^{-27} \text{ erg s}$
	\hbar	$1.05 \times 10^{-27} \text{ erg s}$
Carga del electrón	e	$4.80 \times 10^{-10} \text{ esu}$
Masa del electrón	m_e	$9.11 \times 10^{-28} \text{ g}$
Masa del protón	m_p	$1.673 \times 10^{-24} \text{ g}$
Masa del neutrón	m_n	$1.675 \times 10^{-24} \text{ g}$
Constante de Boltzmann	k_B	$1.38 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5.67 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ K}^{-4} \text{ s}^{-1}$

C.2. Escalas estelares

Gas interestelar

Densidad media	ρ	$3 \times 10^{-24} \text{ g cm}^{-3}$
Temperatura	T	80 K

Sol

Masa	M_{\odot}	$1.989 \times 10^{33} \text{ g}$
Radio	R_{\odot}	$6.96 \times 10^{10} \text{ cm}$
Luminosidad	L_{\odot}	$3.826 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$
Distancia a la Tierra	1 AU	$1.496 \times 10^{13} \text{ cm}$
Temperatura superficial	T_s	5770 K
Temperatura central	T_c	$1.5 \times 10^7 \text{ K}$
Densidad media	$\bar{\rho}_{\odot}$	1.41 g cm^{-3}
Densidad central	ρ_c	160 g cm^{-3}

Enana blanca

Masa	M	0.5 - 1.4 M_{\odot}
Radio	R	10^9 cm = 10^4 km
Densidad media	ρ	10^6 g cm $^{-3}$
Temperatura central	T_c	10^7 K

Estrella de neutrones

Masa	M	1.4 - 3 M_{\odot}
Radio	R	10^5 cm = 10 km
Densidad media	ρ	10^{15} g cm $^{-3}$
Temperatura central	T_c	10^9 K

Bibliografía

- Bahcall, J. N. and May, R. M. (1969). The rate of the proton-proton reaction and some related reactions. *The Astrophysical Journal*, 155:501.
- Balian, R. and Blaizot, J.-P. (1999). Stars and statistical physics: a teaching experience. *American Journal of Physics*, 67(12):1189–1206.
- Bethe, H. A. and Critchfield, C. L. (1938). The formation of deuterons by proton combination. *Physical Review*, 54(4):248.
- Burrows, A. (2008). The birth of neutron stars and black holes. *Physics Today*, 40(9):28–37.
- Carroll, B. W. and Ostlie, D. A. (2013). *An Introduction to Modern Astrophysics: Pearson New International Edition*. Pearson Education, Limited.
- Chandrasekhar, S. (1984). On stars, their evolution and their stability. *Reviews of Modern Physics*, 56(2):137.
- Chandrasekhar, S. (2010). *An introduction to the study of stellar structure*, volume 2. Courier Dover Publications.
- Collins, G. W. (1989). *The Fundamentals of Stellar Astrophysics*. W.H. Freeman.
- Gould, R. J. and Guessoum, N. (1990). The cross section for $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$. *The Astrophysical Journal*, 359:L67–L69.
- Kippenhahn, R., Weigert, A., and Weiss, A. (1990). *Stellar structure and evolution*, volume 282. Springer.
- Merzbacher, E. (1998). *Quantum Mechanics*. Wiley.
- Mitra, A. (2006). Why gravitational contraction must be accompanied by emission of radiation in both Newtonian and Einstein gravity. *Physical Review D*, 74(2):024010.
- Nauenberg, M. and Weisskopf, V. F. (1978). Why does the sun shine? *American Journal of Physics*, 46(1):23–31.
- Oppenheimer, J. R. and Volkoff, G. M. (1939). On massive neutron cores. *Physical Review*, 55(4):374.
- Padmanabhan, T. (2001). *Theoretical Astrophysics, Volume II: Stars and Stellar Systems*. Cambridge University Press.

- Pathria, R. (1996). *Statistical Mechanics*. Elsevier Science.
- Prialnik, D. (2000). *An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution*. Cambridge University Press.
- Schwarzschild, M. (1958). *Structure and Evolution of the Stars*. Princeton University Press.
- Shapiro, S. L. and Teukolsky, S. A. (2008). *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley.
- Silbar, R. R. and Reddy, S. (2004). Neutron stars for undergraduates. *American Journal of Physics*, 72(7):892–905.
- Weinberg, S. (1972). *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley.
- Weisskopf, V. F. and Blatt, J. M. (1952). *Theoretical nuclear physics*.
- Zombeck, M. V. (2008). *Handbook of Astronomy and Space Physics*. Cambridge University Press.