Trabajo Fin de Grado

Análisis estático y dinámico del duopolio de Cournot bajo diferentes especificaciones de la demanda y los costes

Static and dynamic analysis of the Cournot duopoly under different demand and cost specifications

Autor/es:

Pablo Ranera Pérez.

Director/es:

Gloria Jarne Jarne.

Joaquín Andaluz Funcia.

Facultad de Economía y Empresa

Grado en Economía

2024

Análisis estático y dinámico del duopolio de Cournot bajo diferentes especificaciones de la demanda y los costes

Pablo Ranera Pérez

Resumen.

Este Trabajo Fin de Grado examina cómo las diferentes especificaciones de las funciones de demanda y de costes afectan a los Equilibrios de Cournot-Nash en un duopolio, tanto desde una perspectiva estática como dinámica. Se estudian tres modelos: el Modelo 1 con funciones lineales de demanda y costes, el Modelo 2 con demanda isoelástica y costes lineales, y el Modelo 3 con demanda lineal y costes cuadráticos. Utilizando la Teoría de Juegos, se identifica el equilibrio de Nash en cada caso. Se explora la dinámica mediante expectativas adaptativas, considerando el ajuste de cantidades en respuesta a perturbaciones externas. En cuanto al modelo estático, los modelos se analizan como juegos simultáneos de dos jugadores con estrategias continuas donde utilizando el cálculo diferencial se obtienen los Equilibrios de Nash y se realiza la estática comparativa. El análisis dinámico se centra en la evolución de las decisiones de producción ante perturbaciones externas, utilizando un modelo de tiempo discreto y expectativas adaptativas. Se evalúan los estados estacionarios y su estabilidad: estable, asintóticamente estable o inestable, determinando cómo las perturbaciones afectan la convergencia o divergencia hacia el equilibrio de Cournot-Nash.

Abstract.

This Final Degree Project examines how different specifications of demand and cost functions affect Cournot-Nash Equilibria in a duopoly, both from a static and a dynamic perspective. Three models are studied: Model 1 with linear demand and cost functions, Model 2 with isoelastic demand and linear costs, and Model 3 with linear demand and quadratic costs. Using game theory, the Nash equilibrium is identified in each case. Dynamics are explored using adaptive expectations, considering the adjustment of quantities in response to external shocks. As for the static model, the models are analyzed as simultaneous two-player games with continuous strategies where, using differential calculus, Nash Equilibria are obtained and comparative statics are performed. The dynamic analysis focuses on the evolution of production decisions in the face of external shocks, using a discrete-time model and adaptive expectations. The steady states and their

stability are evaluated: stable, asymptotically stable or unstable, determining how disturbances affect the convergence or divergence to the Cournot-Nash equilibrium.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de este Trabajo Fin de Grado es estudiar en un duopolio de Cournot cómo afectan las distintas especificaciones de la función de demanda y la función de costes a los Equilibrios de Cournot-Nash resultantes de la competencia entre las empresas, desde el punto de vista estático y dinámico.

En este trabajo estudiaremos tres modelos. El Modelo 1 será el modelo básico de Cournot, que tendrá unas funciones de demanda y de costes lineales; el Modelo 2 estará definido por una función de demanda isoelástica y una función de costes lineal; por último, el Modelo 3 dispondrá de una función de demanda lineal y una función de costes cuadráticos.

Tal y como señala Luis Cabral en su libro *Economía Industrial (1997),* el primer modelo formal en el estudio del comportamiento estratégico en el oligopolio es el modelo de Cournot (1838). Las hipótesis básicas de este modelo recogen que el producto de las empresas es homogéneo, con un precio único de mercado que se obtiene de la oferta agregada de las empresas y donde las empresas determinan de forma simultánea la cantidad ofrecida.

Si observamos el duopolio desde el punto de vista de la Teoría de Juegos, el modelo que se plantea es un juego simultáneo de dos jugadores. Cada una de las dos empresas se identifica con un jugador, la variable estratégica de cada jugador es la cantidad producida que toma valores en un intervalo, y la utilidad de cada jugador es el beneficio de la empresa. La solución de este duopolio vendrá dada por el Equilibrio de Nash del juego planteado, que en este contexto es habitual llamarlo Equilibrio de Cournot-Nash. Para una revisión en profundidad de la metodología de la Teoría de Juegos, ver Pérez, J. et al. (2013).

Aunque el Modelo de Cournot sea un modelo estático, el equilibrio de mercado se puede interpretar como el resultado de un proceso de ajuste dinámico de forma que, si en el instante inicial las cantidades de producción elegidas por las empresas no fueran las dadas por el equilibrio de Cournot-Nash, se desencadenaría un proceso de ajuste de forma que las cantidades podrían converger o no al equilibrio. Ello dependerá del modo en el que las empresas ajusten sus cantidades, es decir, su esquema de expectativas. En este trabajo se considerará únicamente el esquema de expectativas adaptativas, aunque en la literatura se consideran otros tipos de esquemas de expectativas como son el basado en la Regla del gradiente.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera. En la sección 2 se analizan los modelos presentados desde un punto de vista estático. En cada caso, se obtiene el equilibrio de Nash y se lleva a cabo un estudio de estática comparativa. La segunda parte del trabajo se basará en analizar la dinámica de cada uno de los tres modelos obtenidos al introducir el tiempo mediante un proceso de ajuste basado en las expectativas adaptativas. En cada uno de ellos. obtendremos el equilibrio o estado estacionario y analizaremos la estabilidad dinámica de dicho equilibrio. Por último, obtendremos las conclusiones más relevantes.

2. ANÁLISIS DEL MODELO ESTÁTICO.

A continuación, vamos a estudiar tres modelos distintos. La diferencia entre ellos radica en la especificación de la función de demanda y de las funciones de costes consideradas para representar la estructura del mercado. Cada uno de los modelos se planteará como un juego simultáneo de dos jugadores con un conjunto de estrategias continuo, cuya resolución, utilizando las técnicas analíticas del Cálculo Diferencial, permitirá obtener el Equilibrio de Nash. A partir de esta solución, se obtendrán los valores óptimos de las variables consideradas en el modelo, lo que permitirá realizar un ejercicio de estática comparativa

El Modelo 1 es el modelo básico de Cournot, donde las funciones de demanda y de costes son lineales, siendo estas las siguientes:

$$P(Q) = a - bQ = a - b\,(q_1 + q_2)$$

$$c_i(q_i) = c_i q_i \text{ , con } 0 < c_i < a, \;\; \forall i = 1,2$$

En el caso del Modelo 2, nos enfrentamos a una función de demanda isoelástica con una función de costes lineales. En este caso, la función de demanda será:

$$P(Q) = \frac{1}{Q} = \frac{1}{q_1 + q_2}$$

Por último, el Modelo 3 estará compuesto por una función de demanda lineal y una función de costes cuadráticos, siendo esta última la siguiente:

$$c_i(q_i) = c_i \frac{q_i^2}{2}, \text{ con } c_i > 0 \;\; \forall i = 1, 2.$$

2.1. Modelo 1

En este modelo se analiza un duopolio de Cournot donde operan dos empresas (1 y 2) en un mercado en el que cada una produce una determinada cantidad (q_1, q_2) de un bien homogéneo con la siguiente curva inversa de demanda lineal:

$$P(Q) = a - bQ = a - b\ (q_1 + q_2)$$

con los parámetros $a > 0$, $b > 0$, donde "a" es el valor que toma la variable dependiente "$P(Q)$", cuando la variable independiente "Q" vale 0, siendo una cota superior del valor del coste marginal que indica el nivel máximo del precio y, económicamente, puede interpretarse como el tamaño de la demanda. El parámetro "b" determina la pendiente de la recta, es decir, su grado de inclinación.

Las empresas tienen una función de costes lineal $c_i(q_i) = c_i q_i$, con $0 < c_i < a,\ \forall i = 1, 2$, denotando c_i el coste marginal y medio de la empresa i.

Teniendo en cuenta las especificaciones dadas de costes y demanda, la función objetivo de la empresa 1 será su función de beneficios:

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c_1)$$

La función de beneficios de la empresa 2 es:

$$\pi_2(q_1, q_2) = q_2(a - bq_1 - bq_2 - c_2)$$

Para obtener el equilibrio de Cournot-Nash habrá que resolver los dos problemas de optimización siguientes:

$$\max_{q_1} \pi_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c_1)$$
$$\max_{q_2} \pi_2(q_1, q_2) = q_2(a - bq_1 - bq_2 - c_2)$$

2.1.1. *Condición de Primer Orden para las empresas 1 y 2*:

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = a - \ 2bq_1 - bq_2 - c_1 = 0$$

$$\frac{d\pi_2}{dq_2} = a - \ bq_1 - 2bq_2 - c_2 = 0$$

de donde se obtendrán los valores para los que se maximizará el beneficio de cada empresa.

2.1.2. *Condición de Segundo Orden para las empresas 1 y 2*:

$$\frac{d^2\pi_1}{d{q_1}^2} = -2b < 0$$

$$\frac{d^2\pi_2}{d{q_2}^2} = -2b < 0$$

cuyo cumplimiento garantiza que los valores que se obtengan a partir de las condiciones de primer orden constituyen un máximo de la función de beneficio de cada empresa.

2.1.3. *Cálculo del equilibrio de Cournot-Nash*:

Despejando de las ecuaciones obtenidas al imponer las condiciones de primer orden la cantidad producida por cada empresa en función de la producida por su rival, se hallan las Funciones de Mejor Respuesta (R_1, R_2) de las empresas 1 y 2:

$$\begin{array}{l} q_1 = R_1(q_2) = \frac{a-c_1-bq_2}{2b} \\ q_2 = R_2(q_1) = \frac{a-c_2-bq_1}{2b} \end{array} \qquad (1)$$

que corresponde a la cantidad que maximiza el beneficio de la empresa *i* dada la cantidad producida por su rival, la empresa *j* (*i, j* = 1, 2).

Es importante recalcar que las funciones de reacción tienen pendiente negativa. Esto implica que las cantidades, como variables de decisión de cada empresa, son sustitutivas estratégicas.

Resolviendo el sistema (1) se obtienen las cantidades óptimas de equilibrio:

$$q_1^* = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}$$

$$q_2^* = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3b}$$

Por lo tanto, el Equilibrio de Cournot-Nash de este primer modelo es:

$$EN(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a-2c_1+c_2}{3b}, \frac{a-2c_2+c_1}{3b}\right) \qquad (2)$$

Notar que para que el equilibrio tenga sentido económico ($q_1^* \geq 0, q_2^* \geq 0$) se ha de verificar:

$$\begin{array}{l} a \geq 2c_1 - c_2 \\ a \geq 2c_2 - c_1 \end{array}$$

El Equilibrio de Nash es una combinación de estrategias en la que ninguna empresa tendrá incentivos para cambiar unilateralmente su decisión. Se caracteriza por ser, para cada jugador, su mejor respuesta dadas las estrategias elegidas por su rival.

La cantidad, el precio y los beneficios de cada empresa óptimos serán, por lo tanto:

$$Q^* = q_1^* + q_2^* = \frac{2a - c_1 - c_2}{3b}$$

$$P^* = \frac{a + c_1 + c_2}{3}$$

$$\pi_1^* = \frac{(a - 2c_1 + c_2)^2}{9b}$$

$$\pi_2^* = \frac{(a - 2c_2 + c_1)^2}{9b}$$

2.1.4. *Estática Comparativa*:

La Estática Comparativa nos es útil para mostrar como afectarían las variaciones de los parámetros sobre los resultados del modelo.

$$\frac{\partial \pi_1^*}{\partial a} = \frac{2(a - 2c_1 + c_2)}{9b} > 0$$

$$\frac{\partial \pi_2^*}{\partial a} = \frac{2(a - 2c_2 + c_1)}{9b} > 0$$

$$\frac{\partial \pi_1^*}{\partial b} = -\frac{(a - 2c_1 + c_2)^2}{9b^2} < 0$$

$$\frac{\partial \pi_2^*}{\partial b} = -\frac{(a - 2c_2 + c_1)^2}{9b^2} < 0$$

$$\frac{\partial \pi_1^*}{\partial c_1} = -\frac{4(a - 2c_1 + c_2)}{9b} < 0$$

$$\frac{\partial \pi_2^*}{\partial c_2} = -\frac{4(a - 2c_2 + c_1)}{9b} < 0$$

$$\frac{\partial \pi_1^*}{\partial c_2} = \frac{2(a - 2c_1 + c_2)}{9b} > 0$$

$$\frac{\partial \pi_2^*}{\partial c_1} = \frac{2(a - 2c_2 + c_1)}{9b} > 0$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial c_1} = \frac{dP^*}{dc_2} = \frac{dP^*}{da} = \frac{1}{3} > 0$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial c_1} = \frac{dQ^*}{dc_2} = -\frac{1}{3b} < 0$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial a} = \frac{2}{3b} > 0$$

Vemos como un aumento de "*a*" llevaría a un aumento en los beneficios de ambas empresas, mientras que un aumento de "b" los reduciría. En consecuencia, un incremento en el tamaño de la demanda provoca un aumento en los beneficios, mientras que una demanda menos rígida (menor valor de "b") conduce a una reducción en los niveles de beneficios. En cuanto a los costes de la empresa 1 (c_1), un aumento de estos afectaría de forma negativa al beneficio de su empresa, mientras que afectaría de forma positiva al beneficio de la empresa 2. Lo mismo pasaría con los costes de la empresa 2 (c_2), pero de forma inversa.

2.2. Modelo 2

En este modelo se analiza un duopolio de Cournot donde operan dos empresas (1 y 2) en un mercado en el que cada una produce una determinada cantidad (q_1, q_2) de un bien homogéneo y tienen, como en el modelo 1, una función de costes lineal $c_i(q_i) = c_i q_i$, con $c_i > 0$ $\forall i$= 1, 2.

Sin embargo, en este segundo escenario las empresas se enfrentan a la siguiente curva inversa de demanda no lineal:

$$P(Q) = \frac{1}{Q} = \frac{1}{q_1 + q_2}$$

En este caso, el equilibrio de Cournot-Nash se obtiene resolviendo los dos problemas de optimización siguientes:

$$\max_{q_1} \pi_1(q_1, q_2) = q_1 \left(\frac{1}{q_1 + q_2} - c_1\right)$$
$$\max_{q_2} \pi_2(q_1, q_2) = q_2 \left(\frac{1}{q_1 + q_2} - c_2\right)$$

2.2.1. *Condición de Primer Orden para las empresas 1 y 2*:

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_1}{dq_1} &= \frac{q_2}{(q_1+q_2)^2} - c_1 = 0 \\ \frac{d\pi_2}{dq_2} &= \frac{q_1}{(q_1+q_2)^2} - c_2 = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

2.2.2. *Condición de Segundo Orden para las empresas 1 y 2*:

$$\frac{d^2\pi_1}{dq_1{}^2} = -\frac{2q_2}{(q_1+q_2)^3} < 0$$

$$\frac{d^2\pi_2}{dq_2{}^2} = -\frac{2q_1}{(q_1+q_2)^3} < 0$$

2.2.3. *Cálculo del Equilibrio de Cournot-Nash*:

Despejando de (3) se obtienen las funciones de mejor respuesta para este modelo:

$$\begin{aligned} (q_1+q_2)^2 = \tfrac{q_2}{c_1} \rightarrow q_1 = R_1(q_2) = \sqrt{\tfrac{q_2}{c_1}} - q_2 \\ (q_1+q_2)^2 = \tfrac{q_1}{c_2} \rightarrow q_2 = R_2(q_1) = \sqrt{\tfrac{q_1}{c_2}} - q_1 \end{aligned} \qquad (4)$$

Un análisis detallado permite comprobar que, a diferencia del modelo 1, las funciones de mejor respuesta no presentan la misma pendiente en todo su dominio. Concretamente, muestran un tramo creciente y un tramo decreciente, alcanzando un valor máximo. Dicho, en otros términos, las cantidades tienen una naturaleza tanto sustitutiva como complementaria desde el punto de vista estratégico. Como veremos posteriormente, dicho aspecto es crucial desde el punto de vista dinámico.

Operando en las expresiones anteriores se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} q_1+q_2 = \sqrt{\tfrac{q_2}{c_1}} \\ q_1+q_2 = \sqrt{\tfrac{q_1}{c_2}} \end{aligned}\right\} \rightarrow \sqrt{\tfrac{q_2}{c_1}} = \sqrt{\tfrac{q_1}{c_2}} \rightarrow \tfrac{q_2}{c_1} = \tfrac{q_1}{c_2} \rightarrow \tfrac{q_2}{q_1} = \tfrac{c_1}{c_2} \qquad (5)$$

Teniendo en cuenta la relación obtenida en (5) y las Funciones de Mejor Respuesta de las empresas 1 y 2 dadas en (4) se obtienen las cantidades óptimas de equilibrio:

$$q_1^* = \frac{c_2}{(c_1+c_2)^2}$$

$$q_2^* = \frac{c_1}{(c_1+c_2)^2}$$

Por lo tanto, el Equilibrio de Cournot-Nash (EN) es para el modelo 2:

$$EN(q_1^*, q_2^*) = \left(\tfrac{c_2}{(c_1+c_2)^2}, \tfrac{c_1}{(c_1+c_2)^2}\right) \qquad (6)$$

La cantidad, el precio y los beneficios de cada empresa óptimos serán, por lo tanto:

$$Q^* = q_1^* + q_2^* = \frac{1}{c_1 + c_2}$$

$$P^* = c_1 + c_2$$

$$\pi_1^* = \frac{{c_2}^2}{(c_1 + c_2)^2}$$

$$\pi_2^* = \frac{{c_1}^2}{(c_1 + c_2)^2}$$

2.2.4. *Estática Comparativa*:

$$\frac{\partial \pi_1^*}{\partial c_1} = \frac{-2{c_2}^2}{(c_1 + c_2)^3} < 0$$

$$\frac{\partial \pi_2^*}{\partial c_2} = \frac{-2{c_1}^2}{(c_1 + c_2)^3} < 0$$

$$\frac{\partial \pi_1^*}{\partial c_2} = \frac{\partial \pi_2^*}{\partial c_1} = \frac{2c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^3} > 0$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial c_1} = \frac{dP^*}{dc_2} = 1 > 0$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial c_1} = \frac{\partial Q^*}{\partial c_2} = -\frac{1}{(c_1 + c_2)^2} < 0$$

En el caso del Modelo 2, vemos como un aumento en los costes de cada empresa (c_1 y c_2) afecta de manera negativa al beneficio de ella misma, pero de forma positiva al beneficio de la otra y al precio, de forma que aumentaría. Sin embargo, afectaría de forma negativa a la cantidad total producida.

2.3.Modelo 3

En este modelo se analiza un duopolio de Cournot donde operan dos empresas (1 y 2) en un mercado en el que cada una produce una determinada cantidad (q_1, q_2) de un bien homogéneo y tienen una función de costes de costes no lineal, en concreto cuadrática, $c_i(q_i) = c_i \frac{q_i^2}{2}$ con $c_i > 0$ $\forall i$ *= 1, 2.*

En este escenario las empresas se enfrentan a la misma curva inversa de demanda lineal que en el modelo 1:

$$P(Q) = a - bQ = a - b\,(q_1 + q_2)$$

En este caso, el equilibrio de Cournot-Nash se obtiene resolviendo los dos problemas de optimización siguientes:

$$\max_{q_1} \pi_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2) - c_1 \frac{q_1^2}{2}$$
$$\max_{q_2} \pi_2(q_1, q_2) = q_2(a - bq_1 - bq_2) - c_2 \frac{q_2^2}{2}$$

2.3.1. *Condición de Primer Orden para las empresas 1 y 2*:

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_1}{dq_1} &= a - 2bq_1 - bq_2 - q_1c_1 = 0 \\ \frac{d\pi_2}{dq_2} &= a - \ bq_1 - 2bq_2 - q_2c_2 = 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

2.3.2. *Condición de Segundo Orden para las empresas 1 y 2*:

$$\frac{d^2\pi_1}{dq_1{}^2} = -2b - c_1 < 0$$

$$\frac{d^2\pi_2}{dq_2{}^2} = -2b - c_2 < 0$$

2.3.3. *Cálculo del equilibrio de Cournot-Nash*:

Despejando de (7) la cantidad producida por cada empresa en función de la producida por su rival, se hallan las Funciones de Mejor Respuesta de las empresas 1 y 2:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= R_1(q_2) = \frac{a - bq_2}{2b + c_1} \\ q_2 &= R_2(q_2) = \frac{a - bq_1}{2b + c_2} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

que corresponde a la cantidad que maximiza el beneficio de la empresa *i* dada la cantidad producida por su rival, la empresa *j* (*i, j* = 1, 2).

Es importante recalcar que las funciones de reacción tienen pendiente negativa. Esto implica que las cantidades, como variables de decisión de cada empresa, son sustitutivas estratégicas.

Resolviendo el sistema (8) se obtienen las cantidades óptimas de equilibrio:

$$q_1^* = \frac{a(b + c_2)}{3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2}$$

$$q_2^* = \frac{a(b + c_1)}{3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2}$$

Por lo tanto, el Equilibrio de Nash (EN) será:

$$EN(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a(b+c_2)}{3b^2+2b(c_1+c_2)+c_1c_2}, \frac{a(b+c_1)}{3b^2+2b(c_1+c_2)+c_1c_2}\right) \quad (9)$$

La cantidad, el precio y los beneficios de cada empresa óptimos serán, por lo tanto:

$$Q^* = q_1^* + q_2^* = \frac{a(2b + c_1 + c_2)}{3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2}$$

$$P^* = a\frac{b^2 + b(c_1 + c_2) + c_1c_2}{3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2}$$

$$\pi_1^* = a^2\frac{(b + c_2)(2b^2 + bc_1 + 2bc_2 + c_1c_2)}{2(3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2)}$$

$$\pi_2^* = a^2\frac{(b + c_1)(2b^2 + 2bc_1 + bc_2 + c_1c_2)}{2(3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2)}$$

2.3.4. Estática Comparativa:

$$\frac{\partial Q^*}{\partial a} = \frac{(2b + c_1 + c_2)}{3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2} > 0$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial b} = \frac{2a(3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2) - a(2b + c_1 + c_2)(6b + 2(c_1 + c_2))}{(3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2)^2} =$$

$$= \frac{a\left(-6b^2 - 6b(c_1 + c_2) - 2{c_1}^2 - 2{c_2}^2\right)}{(3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2)^2} < 0$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial c_1} = \frac{\partial Q^*}{\partial c_2} = a\frac{(3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2) - (2b + c_1 + c_2)(2b + c_2)}{(3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2)^2} =$$

$$= a\frac{-b^2 - 2bc_2 - {c_2}^2}{(3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2)^2} < 0$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial c_1} = \frac{\partial P^*}{\partial c_2} = -b\frac{\partial Q^*}{\partial c_i} > 0 \text{ ya que } \frac{\partial Q^*}{\partial c_i} < 0$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial a} = \frac{b^2 + b(c_1 + c_2) + c_1c_2}{3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2} > 0$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial b} = a\frac{-b^2(c_1 + c_2 - c_1c_2) - c_1c_2(c_1 + c_2 + 6b)}{(3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2)^2} < 0$$

En el caso del Modelo 3, vemos como un aumento en los costes de cada empresa (c_1 y c_2) afecta de manera negativa a la cantidad total y al precio. En cuanto al parámetro *a,* afecta de manera positiva a la cantidad total y al precio. Sin embargo, el parámetro *b* afecta de manera contraria. Un aumento de b disminuiría la cantidad total y también disminuiría el precio.

3. ANÁLISIS DEL MODELO DINÁMICO.

Como Andaluz et al. (2019) señalan, el análisis dinámico se enfoca en estudiar cómo evolucionan las decisiones de producción de las empresas cuando se enfrentan a perturbaciones externas que las alejan de sus decisiones óptimas.

Para ello se ha de introducir en el modelo la perspectiva temporal que se puede hacer considerando la variable tiempo como variable continua o discreta. En este trabajo optamos por variable discreta.

La variable temporal se introduce en el modelo mediante la especificación de un esquema de expectativas que siguen las empresas a la hora de ajustar sus cantidades tal y como se explicará más adelante.

De esta manera se obtiene un sistema dinámico discreto bidimensional en el que realizaremos un análisis dinámico cualitativo que consiste básicamente en el cálculo de los estados o equilibrios estacionarios y en el análisis de su estabilidad dinámica. Para una revisión en profundidad del análisis dinámico ver Gandolfo (2010) o Fernández Pérez et al. (2003).

El Equilibrio o Estado Estacionario es el estado en el que, sin perturbaciones externas, las variables del sistema permanecen constantes.

Un Equilibrio Estable es aquel en el que, frente a una perturbación externa, las desviaciones se corrigen de manera que las variables estratégicas permanecen cerca del equilibrio.

El Equilibrio Asintóticamente Estable es un tipo de equilibrio estable donde las perturbaciones externas se disiparán a largo plazo, permitiendo que el sistema retorne a su estado de equilibrio. En este caso, se dice que el equilibrio es un atractor del sistema.

El Equilibrio Inestable es un tipo de equilibrio donde las perturbaciones externas se acentúan con el tiempo, haciendo que el sistema se aleje de su estado de equilibrio. En este caso, se dice que el equilibrio es un repulsor del sistema.

De esta forma, cuando ocurre una perturbación externa que aleja las cantidades del equilibrio, las decisiones de producción de los agentes pueden converger hacia el equilibrio o alejarse de él con el tiempo. Esto depende del tipo de expectativas que los agentes tienen sobre el futuro y de la estructura de mercado considerada.

3.1.¿Cómo se introduce el tiempo?

A pesar de que el Modelo de Cournot se trata de un modelo estático, el equilibrio se puede interpretar como el resultado de un proceso de ajuste dinámico. Suponiendo que, a causa de un shock exógeno en un determinado periodo, una de las empresas escogiera una cantidad distinta a la de equilibrio, en los siguientes periodos veríamos un proceso de ajuste de forma que las empresas corregirían sus cantidades producidas hasta llegar de nuevo al Equilibrio de Nash-Cournot (véase la Figura 1).

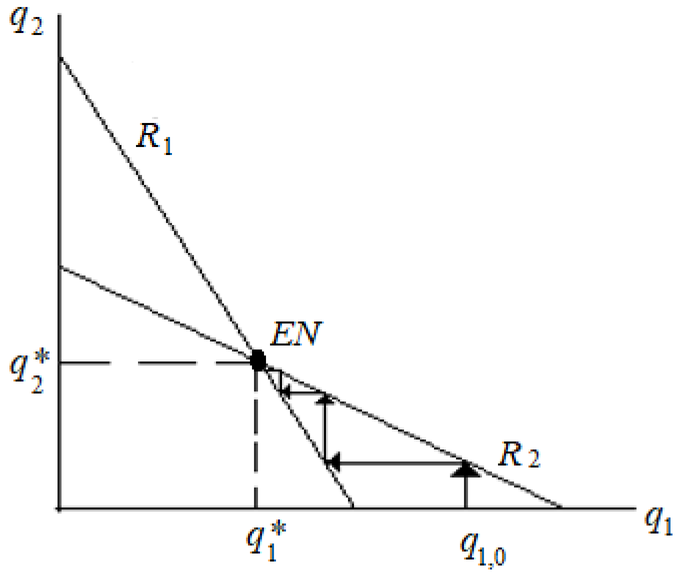


Figura 1 (Fuente: Elaboración propia)

En el Modelo de Cournot, el proceso de ajuste se produce mediante las funciones de mejor respuesta, como puede verse en la Figura 1. Nos podemos preguntar qué ocurriría cuando el proceso de ajuste se produce siguiendo otro patrón de comportamiento, o en otras palabras cuando las empresas tienen otro esquema de expectativas. Como puede verse en Capó, A. (2019): *Análisis dinámico del equilibrio de Cournot con delegación estratégica*. Trabajo Fin de Grado, Zaragoza y Casinos, J. (2017): *Un modelo teórico para el estudio dinámico del duopolio*. Trabajo Fin de Grado, Zaragoza, hay esquemas de expectativas que se basan en las funciones de mejor respuesta y otros más complejos como puede ser el conocido como Regla del gradiente. En este trabajo únicamente se considera el caso de expectativas adapatativas.

3.2. Expectativas adaptativas

Bajo este tipo de expectativas, los jugadores calculan su nivel de producción con una ponderación entre las cantidades del último periodo y su función de mejor respuesta, tomando las ecuaciones dinámicas la siguiente expresión:

$$T\colon \begin{Bmatrix} q_{1,t+1} = (1-\beta_1)q_{1,t} + \beta_1 R_1\big(q_{2,t}\big) \\ q_{2,t+1} = (1-\beta_2)q_{2,t} + \beta_2 R_2\big(q_{1,t}\big) \end{Bmatrix} \tag{10}$$

siendo $\beta_1\ y\ \beta_2$ los parámetros de ponderación tales que: $0 < \beta_i < 1,\ \forall i$= 1, 2 y R_1, R_2 son las funciones de mejor respuesta calculadas para cada modelo en la sección 2 dedicada al análisis estático.

El esquema de expectativas adaptativas supone que las decisiones de producción de cada empresa en el instante *t*+1, son el resultado de una ponderación entre la cantidad producida por dichas empresas el instante *t* y el valor proporcionado por su función de mejor respuesta. Si $\beta = 1$, entonces aparecen como caso particular las expectativas Naïve o de Cournot que son las que se consideran en la interpretación dinámica que hemos hecho del modelo de Cournot a través del proceso de ajuste descrito.

Los puntos de equilibrio o estados estacionarios del sistema dinámico (10) se calculan imponiendo en el sistema la condición:

$$q_{1,t+1} = q_{1,t} = q_1^*$$

$$q_{2,t+1} = q_{2,t} = q_2^*$$

Imponiendo esta condición en (10) se obtiene:

$$q_1^* = (1-\beta_1)q_1^* + \beta_1 R_1(q_2^*)$$
$$q_2^* = (1-\beta_2)q_2^* + \beta_2 R_2(q_1^*)$$

Y teniendo en cuenta que $0 < \beta_1, \beta_2 < 1$, se obtiene:

$$q_1^* = R_1(q_2^*)$$
$$q_2^* = R_2(q_1^*)$$

Por tanto, en los tres modelos se obtendrá que el estado estacionario coincidirá con el equilibrio de Cournot-Nash calculado en cada uno de ellos.

Para llevar a cabo el análisis de la estabilidad dinámica del punto estacionario se calcula la matriz jacobiana del sistema *T* dado en (10):

$$JT_1(q_1,q_2) = \begin{pmatrix} 1-\beta_1 & \beta_1 \dfrac{dR_1}{dq_1} \\ \beta_2 \dfrac{dR_2}{dq_2} & 1-\beta_2 \end{pmatrix}$$

y se evalúa en el estado estacionario considerado, obteniendo la matriz $JT_1(q_1^*, q_2^*)$.

La condición que garantiza que el equilibrio o estado estacionario es asintóticamente estable (o atractor) es que los valores propios de la matriz $JT_1(q_1^*, q_2^*)$ sean en módulo menor que uno. Y esta condición es equivalente a que se cumplan tres condiciones conocidas como *Condiciones de Schur*:

$$\left.\begin{array}{c} (i)\ 1-T+D>0 \\ (ii)\ 1+T+D>0 \\ (iii)\ 1-D>0 \end{array}\right\} \tag{11}$$

donde:

$$T = Traza\left(JT_1(q_1^*, q_2^*)\right)$$
$$D = Determinante\left(JT_1(q_1^*, q_2^*)\right)$$

3.2.1. Modelo 1

3.2.1.1. Equilibrio o Estado estacionario

Sustituyendo las funciones de mejor respuesta dadas en (1) en el modelo dinámico general (10), se obtiene el siguiente sistema dinámico lineal:

$$T_1: \left\{\begin{array}{l} q_{1,t+1} = (1-\beta_1)q_{1,t} + \beta_1 \frac{a-c_1-bq_{2,t}}{2b} \\ q_{2,t+1} = (1-\beta_2)q_{2,t} + \beta_2 \frac{a-c_2-bq_{1,t}}{2b} \end{array}\right\} \tag{12}$$

El estado estacionario es el EN dado en (2):

$$EN(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a-2c_1+c_2}{3b}, \frac{a-2c_2+c_1}{3b}\right)$$

3.2.1.2.Estabilidad dinámica del Equilibrio de Nash

Para estudiar su estabilidad dinámica se calcula la matriz jacobiana de T_1:

$$JT_1(q_1,q_2) = \begin{pmatrix} 1-\beta_1 & -\dfrac{\beta_1}{2} \\ -\dfrac{\beta_2}{2} & 1-\beta_2 \end{pmatrix} = JT_1(q_1^*, q_2^*)$$

que resulta ser constante al ser T_1 un sistema lineal como ya hemos señalado.

$$T = Traza = 2 - (\beta_1 + \beta_2)$$

$$D = Determinante = 1 - (\beta_1 + \beta_2) + \frac{3}{4}\beta_1\beta_2$$

Imponiendo las Condiciones de Schur dadas en (11):

$$(i)\ 1 - T + D = 1 - 2 - (\beta_1 + \beta_2) + 1 - (\beta_1 + \beta_2) + \frac{3}{4}\beta_1\beta_2 = \frac{3}{4}\beta_1\beta_2 > 0$$

$$(ii)\ 1 + T + D = 1 + 2 - (\beta_1 + \beta_2) + 1 - (\beta_1 + \beta_2) + \frac{3}{4}\beta_1\beta_2$$

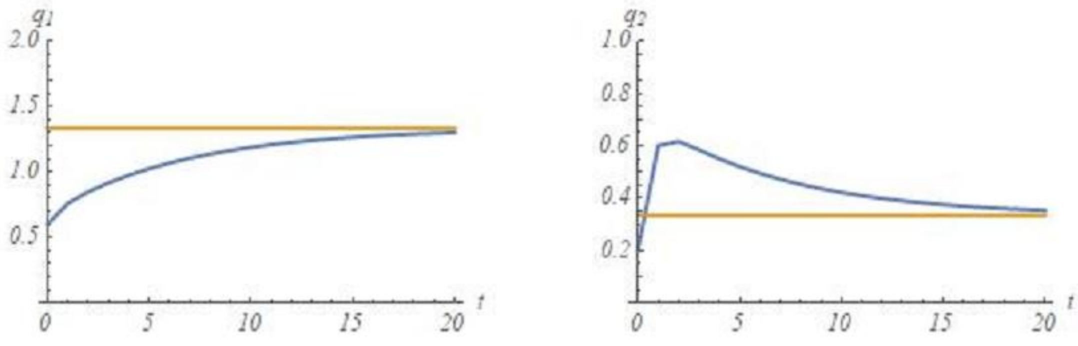
$$= 2(2 - (\beta_1 + \beta_2)) + \frac{3}{4}\beta_1\beta_2 > 0$$

$$(iii)\ 1 - D = 1 - \left[1 - (\beta_1 + \beta_2) + \frac{3}{4}\beta_1\beta_2\right] = \beta_1 + \beta_2(1 - \frac{3}{4}\beta_1) > 0$$

Se concluye que se cumplen las tres condiciones al verificarse $0 < \beta_i < 1,\ \forall i = 1, 2$.

Por tanto, el Equilibrio de Cournot-Nash es asintóticamente estable, o lo que es lo mismo, constituye un atractor del sistema dinámico dado en (12). Esto implica que, en el caso de que las empresas se encontrasen fuera del punto de equilibrio óptimo en algún momento, con el tiempo tenderían a acercase al equilibrio de equilibrio hasta converger a dicho valor.

En la siguiente simulación (Figura 2) hecha con el software Mathematica, vemos cómo partiendo desde una condición inicial que no se corresponde con el Equilibrio de Nash, las empresas irían ajustando sus cantidades a lo largo del tiempo hasta llegar al equilibrio.



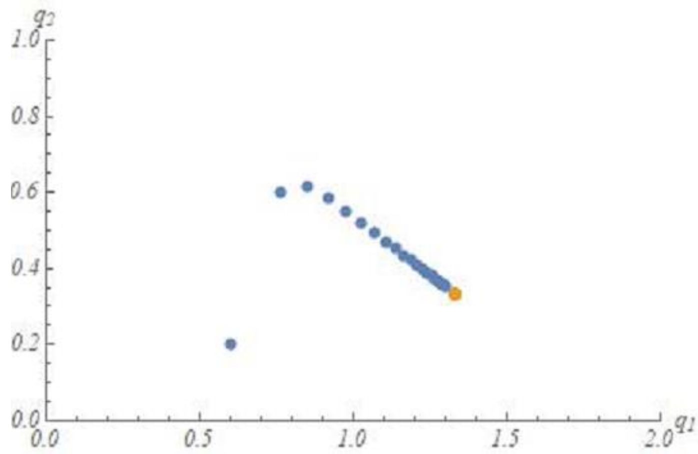


Figura 2. Parámetros: $a = 4,\ b = 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ \beta_1 = \frac{1}{5},\ \beta_2 = \frac{4}{5}$

Condiciones iniciales: $q_{1,0} = 0.6,\ q_{2,0} = 0.2$

3.2.2. Modelo 2

3.2.2.1. Equilibrio o Estado estacionario

Sustituyendo las funciones de mejor respuesta dadas en (4) en el modelo dinámico general (10), se obtiene el siguiente sistema dinámico no lineal:

$$T_2: \begin{cases} q_{1,t+1} = (1-\beta_1)q_{1,t} + \beta_1\left(\sqrt{\frac{q_{2,t}}{c_1}} - q_{2,t}\right) \\ q_{2,t+1} = (1-\beta_2)q_{2,t} + \beta_2\left(\sqrt{\frac{q_{1,t}}{c_2}} - q_{1,t}\right) \end{cases} \tag{13}$$

El estado estacionario es el equilibrio de Cournot-Nash dado en (6):

$$EN(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{c_2}{(c_1 + c_2)^2}, \frac{c_1}{(c_1 + c_2)^2}\right)$$

3.2.2.2. Estabilidad dinámica del Equilibrio de Nash

Para estudiar su estabilidad dinámica se calcula la matriz jacobiana de T_2:

$$JT(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 1-\beta_1 & \beta_1\left(\frac{1}{2\sqrt{c_1 q_2}} - 1\right) \\ \beta_2\left(\frac{1}{2\sqrt{c_2 q_1}} - 1\right) & 1-\beta_2 \end{pmatrix}$$

que resulta ser no ser constante al no ser lineal T_2. Evaluando esta matriz en el equilibrio de Cournot-Nash se obtiene:

$$JT(q_1^*, q_2^*) = \begin{pmatrix} 1-\beta_1 & \beta_1\left(\frac{c_2 - c_1}{2c_1}\right) \\ \beta_2\left(\frac{c_1 - c_2}{2c_2}\right) & 1-\beta_2 \end{pmatrix}$$

cuya traza y determinante son:

$$T = Traza = 2 - (\beta_1 + \beta_2)$$

$$D = Determinante = 1 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_1\beta_2\frac{(c_1 + c_2)^2}{4c_1c_2}$$

Imponiendo las Condiciones de Schur dadas en (11):

$$(i)\ 1 - T + D = \beta_1\beta_2\frac{(c_1 + c_2)^2}{4c_1c_2} > 0$$

$$(ii) 1 + T + D = 4 - 2\beta_1 - 2\beta_2 + \beta_1\beta_2\frac{(c_1 + c_2)^2}{4c_1c_2}$$

$$= 2(2 - (\beta_1 + \beta_2)) + \beta_1\beta_2\frac{(c_1 + c_2)^2}{4c_1c_2} > 0$$

$$(iii)\ 1 - D = \beta_1 + \beta_2 - \beta_1\beta_2\frac{(c_1 + c_2)^2}{4c_1c_2} = \beta_1 + \beta_2\left[1 - \beta_1\frac{(c_1 + c_2)^2}{4c_1c_2}\right]$$

En este caso el cumplimiento de la condición iii) no está garantizada. Para poder obtener algún resultado hacemos la siguiente simplificación $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ que significa que ambas empresas consideran en el proceso de ajuste de sus decisiones respecto a las cantidades producidas, la misma ponderación entre las cantidades del último periodo y su función de mejor respuesta. Con este supuesto la condición iii) queda:

$$1 - D = 2\beta - \beta^2\frac{(c_1 + c_2)^2}{4c_1c_2} = \beta\left(2 - \beta\frac{(c_1 + c_2)^2}{4c_1c_2}\right) > 0 \Leftrightarrow \beta < \frac{8c_1c_2}{(c_1 + c_2)^2}$$

De lo anterior se deduce la existencia de un umbral de estabilidad dado por:

$$\hat{\beta}(c_1, c_2) = \frac{8c_1c_2}{(c_1 + c_2)^2}$$

de manera que:

Si $\beta < \hat{\beta}(\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2)$ entonces 1-*D* > 0 y el equilibrio de Cournot-Nash es asintóticamente estable

Si $\beta > \hat{\beta}(\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2)$ entonces 1-*D* < 0 y el equilibrio de Cournot-Nash no es asintóticamente estable.

Para los valores de los parámetros $c_1 = 1.5,\ c_2 = 0.25$, el valor del umbral de estabilidad es $\hat{\beta}(1.5{,}0.25) = 0.9796$. Considerando que el parámetro β está por debajo de ese valor ($\beta = \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2} < 0.9796$, se obtiene una simulación en la que se observa el carácter atractor del equilibrio de Cournot-Nash (Figura 3).

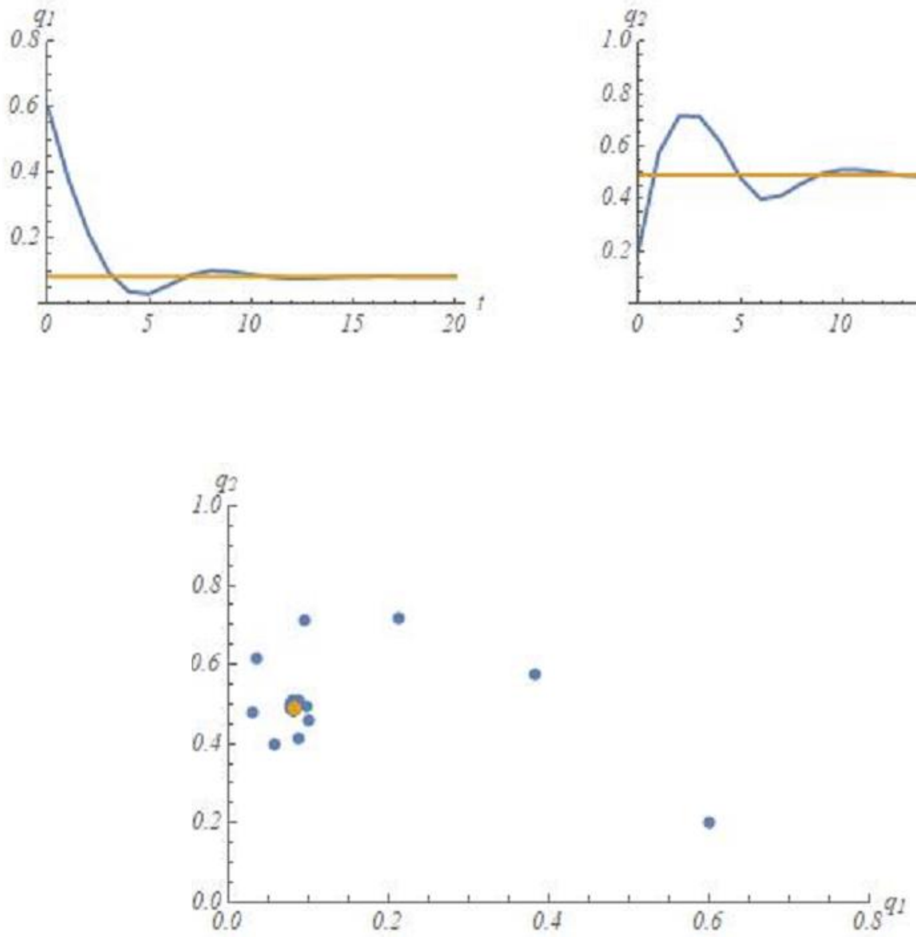


Figura 3. Parámetros: $c_1 = 1.5,\ c_2 = 0.25,\ \beta_1 = \frac{1}{2},\ \beta_2 = \frac{1}{2}$

Condiciones iniciales: $q_{1,0} = 0.6,\ q_{2,0} = 0.2$

Vemos cómo partiendo desde una condición inicial que no se corresponde con el Equilibrio de Nash, las empresas irían ajustando sus cantidades, aunque no de forma monótona, sino con oscilaciones, a lo largo del tiempo hasta llegar al equilibrio.

Siguiendo con los mismos valores paramétricos $c_1 = 1.5$, $c_2 = 0.25$, pero ahora considerando que el parámetro β está por encima del umbral de estabilidad ($\beta = \beta_1 = \beta_2 = \frac{481}{490} > 0.9796$, se obtiene una simulación en la que se observa que el equilibrio de Cournot-Nash no es asintóticamente estable (Figura 4).

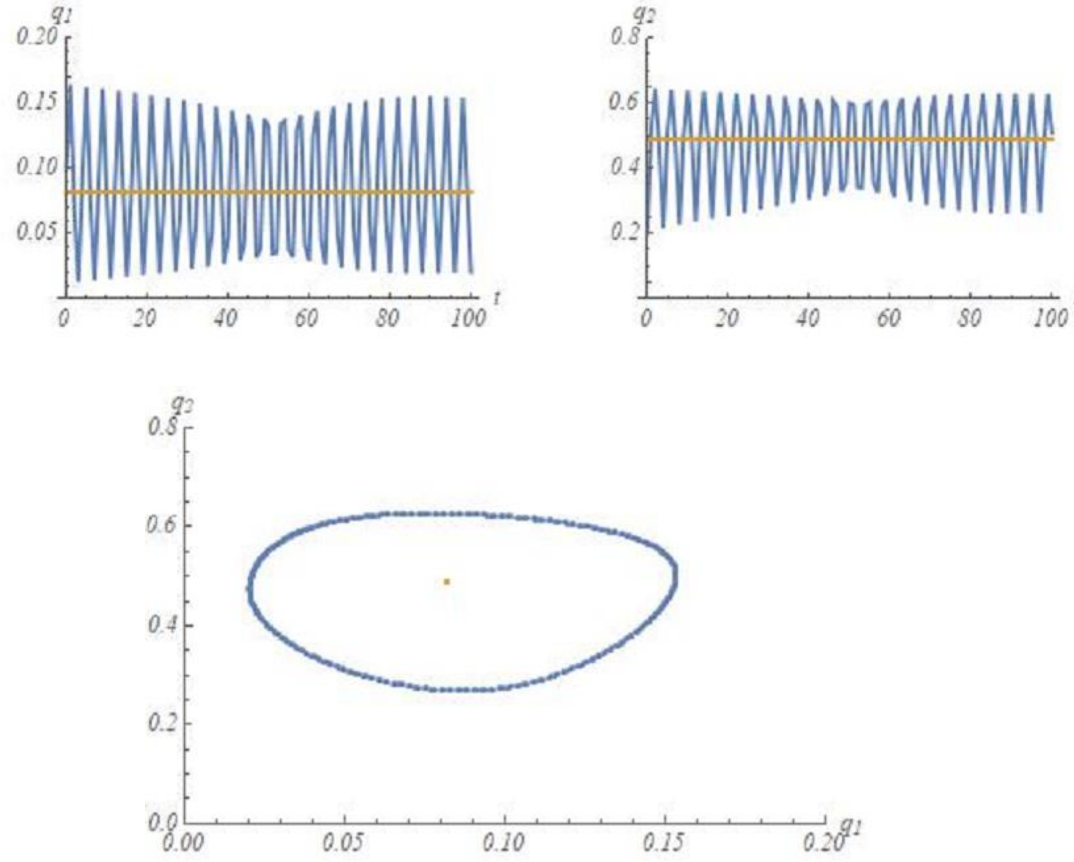


Figura 4. Parámetros: $c_1 = 1.5,\ c_2 = 0.25,\ \beta_1 = \frac{481}{490},\ \beta_2 = \frac{481}{490}$

Condiciones iniciales: $q_{1,0} = 0.1,\ q_{2,0} = 0.2$

En esta simulación podemos observar cómo partiendo desde una condición inicial que no se corresponde con el Equilibrio de Nash, las empresas irían cambiando sus cantidades con el paso del tiempo, pero bajo ningún caso conseguirían llegar al Equilibrio de Nash.

3.2.3. Modelo 3

3.2.3.1. Equilibrio o Estado estacionario

Sustituyendo las funciones de mejor respuesta dadas en (8) en el modelo dinámico general (10), se obtiene el siguiente sistema dinámico lineal:

$$T_3\!:\begin{Bmatrix} q_{1,t+1} = (1-\beta_1)q_{1,t} + \beta_1 \frac{a-bq_{2,t}}{2b+c_1} \\ q_{2,t+1} = (1-\beta_2)q_{2,t} + \beta_2 \frac{a-bq_{1,t}}{2b+c_2} \end{Bmatrix} \tag{14}$$

El estado estacionario es el equilibrio de Cournot-Nash dado en (9):

$$EN(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a(b+c_2)}{2b^2+2b(c_1+c_2)+c_1c_2}, \frac{a(b+c_1)}{2b^2+2b(c_1+c_2)+c_1c_2}\right)$$

3.2.3.2. Estabilidad dinámica del Equilibrio de Nash

Para estudiar su estabilidad dinámica se calcula la matriz jacobiana de T_3:

$$JT_3(q_1,q_2) = \begin{pmatrix} 1-\beta_1 & \beta_1\left(\frac{b}{2b+c_1}\right) \\ \beta_2\left(\frac{b}{2b+c_2}\right) & 1-\beta_2 \end{pmatrix} = JT(q_1^*, q_2^*)$$

$$T = Traza = 2 - (\beta_1+\beta_2)$$

$$D = Determinante = 1-(\beta_1+\beta_2) + \beta_1\beta_2\left(\frac{3b^2+2b(c_1+c_2)+c_1c_2}{(2b+c_1)(2b+c_2)}\right)$$

$$= T - 1 + \beta_1\beta_2\left(\frac{3b^2+2b(c_1+c_2)+c_1c_2}{(2b+c_1)(2b+c_2)}\right)$$

Imponiendo las Condiciones de Schur dadas en (11):

$$(i)\ 1-T+D = 1-T+T-1+\beta_1\beta_2\left(\frac{3b^2+2b(c_1+c_2)+c_1c_2}{(2b+c_1)(2b+c_2)}\right) =$$

$$= \beta_1\beta_2\left(\frac{3b^2+2b(c_1+c_2)+c_1c_2}{(2b+c_1)(2b+c_2)}\right) > 0$$

$$(ii)\ 1+T+D = 1+T+T-1+\beta_1\beta_2\left(\frac{3b^2+2b(c_1+c_2)+c_1c_2}{(2b+c_1)(2b+c_2)}\right) =$$

$$= 2T + \beta_1\beta_2\left(\frac{3b^2+2b(c_1+c_2)+c_1c_2}{(2b+c_1)(2b+c_2)}\right) =$$

$$= 2(2-(\beta_1+\beta_2)) + \beta_1\beta_2\left(\frac{3b^2+2b(c_1+c_2)+c_1c_2}{(2b+c_1)(2b+c_2)}\right) > 0$$

$$(iii)\ 1 - D = 1 - T + 1 - \beta_1\beta_2\left(\frac{3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2}{(2b + c_1)(2b + c_2)}\right)$$

$$= 2 - T - \beta_1\beta_2\left(\frac{3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2}{(2b + c_1)(2b + c_2)}\right)$$

$$= \beta_1 + \beta_2 - \beta_1\beta_2\left(\frac{3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2}{(2b + c_1)(2b + c_2)}\right)$$

$$= \beta_1 + \beta_2\left(1 - \beta_1\frac{3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2}{(2b + c_1)(2b + c_2)}\right) > 0$$

si $\left(1 - \beta_1\frac{3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2}{(2b + c_1)(2b + c_2)}\right) > 0 \Leftrightarrow \beta_1\frac{3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2}{(2b + c_1)(2b + c_2)} < 1;$

$$\frac{3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2}{(2b + c_1)(2b + c_2)} < 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{3b^2 + 2b(c_1 + c_2) + c_1c_2}{(2b + c_1)(2b + c_2)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{(2b + c_1)(2b + c_2)} > 0$$

Se concluye que se cumplen las tres condiciones al verificarse $0 < \beta_1, \beta_2 < 1$.

Por tanto, el Equilibrio de Cournot-Nash es asintóticamente estable, o lo que es lo mismo constituye un atractor del sistema dinámico dado en (14).

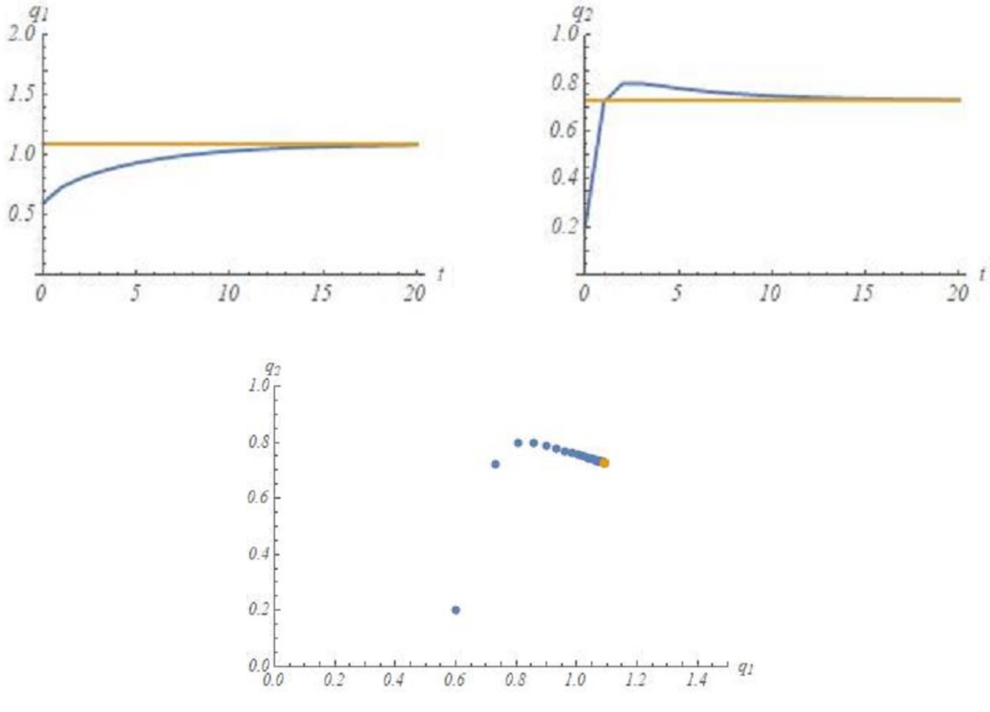


Figura 5. Parámetros: $a = 4,\ b = 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ \beta_1 = \frac{1}{5},\ \beta_2 = \frac{4}{5}$

Condiciones iniciales: $q_{1,0} = 0.6,\ q_{2,0} = 0.2$

En esta simulación (Figura 5) vemos cómo partiendo desde una condición inicial que no se corresponde con el Equilibrio de Nash, las empresas irían ajustando sus cantidades de forma oscilante a lo largo del tiempo hasta llegar al equilibrio.

4. CONCLUSIONES

El análisis del duopolio de Cournot con diferentes especificaciones de las funciones de demanda y costes revela resultados importantes sobre el comportamiento y el equilibrio en mercados oligopólicos dependiendo de las características de la estructura del mercado. A continuación, se presentan las conclusiones derivadas del estudio estático y dinámico de los tres modelos planteados.

En los modelos, el equilibrio se obtiene cuando las empresas maximizan sus beneficios dadas las cantidades producidas por su rival. Las cantidades óptimas se determinan obteniendo el equilibrio de Nash del juego simultáneo planteado. En el Modelo 1, el análisis de la estática comparativa permite concluir que un aumento en el tamaño de la demanda (parámetro a) incrementa los beneficios de ambas empresas, mientras que un aumento en la pendiente de la función de demanda (parámetro b) los reduce. Para cada empresa, un aumento en su propio coste marginal afecta negativamente al beneficio de la propia empresa, pero positivamente al de su rival.

El Modelo 2 tiene una función de demanda isoelástica. La cantidad total producida y el precio dependen de la suma de los costes marginales. Una vez realizada la estática comparativa, vemos que los incrementos en los costes de cada empresa afectan negativamente a sus propios beneficios, pero benefician a la otra empresa. Los aumentos en los costes elevan el precio de mercado y disminuyen la cantidad total producida.

Por último, el Modelo 3 se define bajo una función de costes cuadráticos, donde las cantidades y el precio óptimos se derivan de la resolución del problema de maximización de los beneficios bajo dicha forma funcional. En cuanto a la estática comparativa se refiere, los aumentos en los costes afectan negativamente tanto a la cantidad total producida como al precio. El tamaño de la demanda (parámetro a) tiene un efecto positivo en la cantidad total y en el precio, mientras que la pendiente de la función de demanda (valor de b) tiene un efecto negativo.

Introduciendo la perspectiva temporal mediante un esquema de expectativas adaptativas, y en un contexto de tiempo discreto, se observa cómo las decisiones de producción evolucionan con el tiempo. Si las perturbaciones externas alejan a las empresas del equilibrio de Nash-Cournot, las cantidades producidas podrán converger o no hacia el equilibrio a lo largo del tiempo. La estabilidad del equilibrio dependerá de los parámetros del modelo y de las tasas de ajuste de las expectativas de las empresas. Los modelos dinámicos discretos permiten analizar cómo los sistemas alcanzan un estado estacionario. La estabilidad dinámica del equilibrio de Nash-Cournot varía según el modelo y las especificaciones de demanda y costes.

El Modelo 1 tiene un sistema dinámico lineal que llega a un equilibrio de Cournot-Nash cuando las empresas ajustan sus cantidades de producción para maximizar sus beneficios dados los costos de producción y la demanda del mercado. El análisis de su estabilidad muestra que, bajo ciertas condiciones ($0 < \beta_i < 1$), el equilibrio es asintóticamente estable. Esto implica que, si las empresas comienzan fuera del equilibrio de Nash, tenderán a ajustarse de manera continua hacia el equilibrio con el tiempo. En una simulación, partiendo desde un punto inicial fuera del equilibrio, las empresas ajustan sus cantidades hasta alcanzar el equilibrio óptimo.

El sistema dinámico no lineal del Modelo 2 describe cómo las empresas ajustan sus producciones considerando cuadrática. El análisis de su estabilidad muestra que el equilibrio puede ser estable o inestable dependiendo de los valores de β_1 y β_2. Si los parámetros satisfacen ciertas condiciones, el equilibrio será un atractor y las empresas se ajustarán de manera oscilante pero convergente hacia el equilibrio. Sin embargo, si estas condiciones no se cumplen, el equilibrio puede ser inestable, lo que significa que las empresas no alcanzarán el equilibrio de Nash. Las simulaciones confirman ambos casos: una situación estable con ajustes oscilantes y otra inestable donde las empresas no logran llegar al equilibrio.

En el caso del análisis de estabilidad del Modelo 3, cuyo sistema dinámico es lineal, con diferentes parámetros y bajo ciertas condiciones el equilibrio es también asintóticamente estable. La matriz jacobiana evaluada en el equilibrio indica que, si se satisfacen las condiciones de Schur, el sistema será estable y las empresas ajustarán sus cantidades de manera oscilante hasta alcanzar el equilibrio. Las simulaciones demuestran que partiendo de un punto fuera del equilibrio, las empresas se ajustan hacia el equilibrio óptimo con oscilaciones, confirmando la estabilidad asintótica.

En resumen, el Modelo 1 y el Modelo 3, ambos lineales, presentan equilibrios de Nash que son asintóticamente estables, lo que garantiza que las empresas ajustarán sus producciones hacia el equilibrio óptimo. Sin embargo, el Modelo 2 presenta un comportamiento más complejo debido a su naturaleza no lineal, con condiciones específicas que determinan si el equilibrio es estable o inestable. Por lo que podemos deducir que el análisis dinámico de los modelos de Cournot confirma que, bajo ciertas condiciones, las empresas tenderán a ajustarse hacia un equilibrio estable, aunque el camino hacia dicho equilibrio puede variar entre ajustes lineales continuos y oscilaciones no lineales.

Para concluir, podemos decir que el estudio de estos modelos de duopolio de Cournot proporciona una comprensión profunda de cómo las variaciones en las funciones de demanda y de costes afectan el equilibrio de Nash-Cournot, tanto en un contexto estático como dinámico. Estas ideas son fundamentales para el análisis de mercados oligopólicos y la formulación de estrategias empresariales en contextos competitivos.

Este Trabajo Fin de Grado me ha ayudado de gran manera a ampliar mis conocimientos y entender más profundamente el funcionamiento de la competencia entre empresas dependiendo de las características de cada una de ellas. Por otro lado, me ha sido muy útil para aprender a pensar con mayor calma y claridad e ir más allá de los conocimientos adquiridos en las distintas asignaturas impartidas durante el grado, además de mejorar mi capacidad de redacción.

5. BIBLIOGRAFIA

Andaluz, J., Jarne, G. y Perote, J. (2019). *Modelos matemáticos que introducen la perspectiva dinámica en la enseñanza de la teoría económica*. Anales de ASEPUMA nº 27

Cabral, L. (1997). *Economía Industrial*. Ed. McGraw-Hill

Capó, A. (2019): *Análisis dinámico del equilibrio de Cournot con delegación estratégica*. Trabajo Fin de Grado (Repositorio Zaguan), Zaragoza.

Casinos, J. (2017): *Un modelo teórico para el estudio dinámico del duopolio*. Trabajo Fin de Grado (Repositorio Zaguan), Zaragoza.

Cournot, A. (1838): *Recherches sur les Principles Mathématiques de la Théorie des Richeses*

Fernández Pérez, C.,Vázquez Hernández, F.J. y Vegas Montaner, J.M. (2003). *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas Dinámicos*. Ed. Thomson.

Gandolfo, G. (2010). *Economic Dynamics*. Springer.

Pérez, J., Jimeno, J.L. y Cerdá, E. (2013). *Teoría de juegos* (2ª edición) Ed. Garceta.