ANALES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS
DE ZARAGOZA

AÑO II JUNIO DE 1908 NÚM. 6

# El IV Congreso internacional de matemáticos

El acontecimiento más importante de este año ha sido el IV Congreso internacional de matemáticos de Roma, y lo ha sido, no solo por la calidad de los congresistas, entre los que se hallaban los matemáticos más eminentes del mundo, salvo alguna excepción digna de sentirse, como la ausencia de los ilustres profesores Klein, Hilbert y Cantor, sino por el número, que ha superado al de los Congresos anteriores, pues asistieron cerca de quinientos, entre los que se hallaban no pocos pertenecientes á la enseñanza media.

Francia se hallaba representada por los ilustres miembros del Instituto, Darboux, Goursat, Jordán, Picard, Poincaré, por los sabios profesores Borel, Hadamard, etc. De Alemania citaremos entre otros notabilísimos, á los profesores Gordan y Noether; casi puede asegurarse que no faltó ninguno de los más eminentes matemáticos italianos; y en verdad, que ninguna nación dejó de estar representada, siquiera por la asistencia de algún profesor ó matemático.

En cuanto á las solemnidades que han tenido lugar, con motivo del Congreso, y que le han dado un realce digno de la importancia del acontecimiento, su relación no cabe en los estrechos límites de una reseña, principiando con la recepción familiar de los congresistas, por el Rector de la Universidad, Sr. Tonelli, la sesión inaugural en la sala de los Horacios y Curacios, bajo la presidencia de S. M. el rey de Italia, donde después de los discursos del Síndico, el presidente Sr. Blaserna, y el Sr. Ministro de Instrucción pública, el Sr. Volterra leyó su interesante trabajo: *Le mathematiche in Italia nella seconda metá del secolo XIX*.

En la primera sesión plenaria (6 de Abril), á propuesta del Sr. Blaserna, constituyeron por aclamación, la presidencia, los Sres. Cerruti, D'Ovidio, Forsyth, Gordan, Jordan, Lorentz, Mertens, Mittag-Leffler, Newcomb, Vassilief, y Zeuthen; siendo nombrados secretarios los Sres. Castelnuovo, Fano, Reina, Barnes, Hadamard, Holgate, Krazer, Phragmen, Schlesinger.

Acto seguido, se adjudicó la medalla Guccia al profesor señor Severi por su trabajo acerca de la *Geometria sopra le superficie algebriche.*

El profesor Sr. Mittag-Leffler leyó su trabajo: *Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques*, y Mr. Forsyth la suya: *On the present condition of parcial differential equations of the second order as regards formal integration.*

*Segunda sesión plenaria* (7 de Abril), Mr. Darboux leyó su conferencia: *Les méthodes et les problèmes de la géométrie infinitesimale*, y el profesor von Dick, en sustitución del profesor Herr Klein, que no pudo asistir, leyó la conferencia, como la anterior interesantísima: *Ueber die mathematische Encyclopädie.*

*Tercera sesión plenaria* (8 de Abril). Los profesores señores Newcomb y Lorentz, leyeron sus trabajos respectivos: *La théorie de la lune: son histoire et son état actuel* y *Le partage de l'énergie entre la matiére ponderable et l'éther.*

*Cuarta sesión plenaria* (9 de Abril). Por no poder asistir M. Poincaré, se encargó M. Darboux de leer su trabajo: *L'avenir des mathématiques*, y M. Picard leyó el suyo: *L'Analyse dans ses rapports avec la Physique mathématique.*

La *quinta sesión plenaria* estaba á cargo de los ilustres profesores Herr Hilbert y Sr. Veronese, cuyas memorias sobre *el método de las variables independientes* y *la Geometría, no arquimédea*, no pudieron ser leídas por graves ocupaciones que retuvieron al primero en Gottinga y por enfermedad del segundo, con general sentimiento de los congresistas.

Por ser larga la enumeración de los trabajos presentados en las cuatro secciones, nos limitaremos á una simple exposición de los nombres de los autores, pues dichos trabajos se publicarán en el tomo correspondiente á este Congreso.

*Sección. I. Aritmética, Algebra, Análisis.* Se leyeron 37 comunicaciones presentadas por los Sres. Gordán, Zermelo, Borel, Riesz, Frizell, Koebe, Boutroux, Petrovitch, Pincherle, Young, Hadamard, Schlesinger, Remoundos, Pick, Saltykow, Lalesco, Volterra, Zervos, E, G. Moore, Fredholm, Adhémar, Orlando, De Donder, Pascal, Stéphanos, Montessus, Pucciano, Capelli, Niccoletti, Fubini, Dickson, B. Levi, Frattini, Severini, Zaremba, Boggio y Autonne.

Los conceptos predominantes fueron los de conjuntos, ecuaciones diferenciales, singularidades, series y grupos.

*Sección II. Geometría.* Se leyeron 17 comunicaciones presentadas por los Sres. Andrade, Varicak, Zeuthen, Montesano, Severí, Bagnera De Franchis, Rados, Bianchi, Pannelli, Dingeldey, Finsterbusch, Gallucci, Brückner, Brouver, Tzitzeica y Pfeiffer.

Las cuestiones principales fueron, las geometrías no-eudídeas, la geometría algebraica, morfología de los poliedros, grupos, etcétera.

*Sección III*. A. *Mecánica y Física matemática*. Se leyeron 27 comunicaciones presentadas por los Sres. Darwin, Lamb, Lauricella, Somigliana, M. Abraham, J. Andrade, Korn, Levi-Civita, Garbasso, Greenhill, Sommerfeld, Boggio, Brocardi, Genese, Macfarlane, Tedone, G. H. Bryan, Poynting and Barlow, Kolosoff y Marcolongo.

*Sección III*. B. *Ciencias del actuario*. Se leyeron 12 comunicaciones presentadas por los Sres. Toja, Quiquet, Poussin, Elderton, Bohlmann, Borel, March, De Helguero, Lembourg, Gini, Dawson y Castelli.

*Ciencias del ingeniero*. Se leyeron 6 comunicaciones presentadas por los Sres. Luiggi, Canevazzi, D'Ocagne, Claxton-Fidler y Swain.

*Sección IV*. En esta sección se leyeron 39 comunicaciones distribuídas en tres secciones: Filosofía, Historia y Enseñanza. En la primera sección, leyeron sus comunicaciones los Sres. Enriques, Hessenberg, Boutroux, Itelson, Simón, Bernstein, Pastore, Gallucci, Broggi, Casazza y Brouver. En la segunda sección leyeron sus comunicaciones los Sres. G. Loria, H. G. Zeuthen, Dav. Eug. Smith, P. Duhem, Giacomelli, G. Pitarelli, Emch, Marcolongo y Amodeo. En la tercera sección leyeron sus comunicaciones los Sres. Gutzmer, Borel, C. Godfrey, Dav. Eug. Smith, M. Archenhold, Suppanschitsch, Beke, Vailati, Fehr, Stéphanos, Archenhold, Andrade, Conti, Galdeano, E d' Amicis y Delitala.

Al terminar la última sesión de la sección IV.ª se acordó, en conformidad con una proposición presentada por Mr. Smith, nombrar una comisión internacional con el objeto de estudiar las reformas de la enseñanza matemática en los establecimientos secundarios, formada por los Sres. Klein, Greenhill y Fehr, y que *L'Enseignement mathématique*, cuyo director es M. Fehr, sea el órgano de dicha comisión.

El nombramiento de esta Comisión fué aprobado, con general aplauso, en la solemne sesión de clausura celebrada el 11 de Abril, donde se tomaron importantes acuerdos tales como el de *unificación de las notaciones vectoriales*, propuesto por Mr. Hadamard, que las matemáticas aplicadas y la ciencia del ingeniero sean objeto de una sección especial en el próximo Congreso, y que una comisión internacional prepare los trabajos de dicha sección, según propuso M. D'Ocagne; la publicación de las obras de Euler, á cuyo fin, el Congreso dirigió una súplica á la Asociación internacional de las Academias y, especialmente, á las de Berlín y San Petersburgo para auxiliar dicha empresa.

Finalmente, á propuesta del profesor Mr. A. R. Forsyth, se acordó por unanimidad, que el próximo Congreso internacional se verifique en Cambridge, con la recomendación, en las actas del Congreso, de que el siguiente tenga lugar en Stockolmo, según propuso el profesor Mittag-Leffler; y conforme al deseo expuesto por Mr. Hadamard que se facilite la aproximación de los matemáticos y físicos, por convocaciones simultáneas de los próximos congresos.

Mr. Darboux terminó el acto expresando su gratitud á S. M. el Rey de Italia, al Excmo. Sr. Ministro de Instrucción pública, al Sindicato, etc., por la cortés hospitalidad y las numerosas distinciones que dispensaron á todos los miembros del Congreso.

Z. G. de G.

# Observación á una nota concerniente á la espiral de Poinsot

1. Un autor portugués ha deducido erróneamente, el 1896, en una publicación titulada: *Sobre as propriedades geometricas da espiral de Poinsot*, é insistido recientemente en otra de título: *Un aditamento ao Instituto, 1908*, en el error de que «la sub-normal y la sub-tangente á la espiral de Poinsot, son iguales y de signo contrario al vector».

Esto no es exacto, como lo había advertido ya Gino Loria en su notable Memoría sobre las curvas, premiada por la Academia de Ciencias de Madrid, y que apareció en 1902, traducida en alemán por F. Schültze, (*Spezielle algebraische und transcendante ebene Kurben. Theorie und Geschichte*, Leipzig, 1902, 2ª parte, pág. 588), es decir no se tiene de ningún modo

$$S_n = S_t = -r. \qquad (1)$$

En efecto, la ecuación de la espiral de Poinsot viene dada, con las funciones hiperbólicas, bajo la forma

$$r = \frac{1}{ch\, m\omega},$$

y se tendrá

$$S_n = \frac{dr}{d\omega} = -\frac{m\, sh\, m\omega}{ch^2\, m\omega} = -r\, m\, th\, m\omega$$

$$S_t = \frac{r^2}{d\omega} = -\frac{ch^2\, m\omega}{m\, ch^2\, m\omega\, .\, sh\, m\omega} = -\frac{1}{m\, sh\, m\omega}$$

$$= -r \frac{1}{m\, th\, m\omega},$$

igualadades que están lejos de la (1), puesto que $m\, th\, m\omega$ no es idéntico á 1.

2. Es además fácil, como lo observa M. Wasteels, encontrar las curvas que gozan de la propiedad expresada por

$$S_n = -r \quad \text{y} \quad S_t = -r.$$

En efecto, $S_n = - r$ da

$$\frac{dr}{d\omega} = - r \quad \text{ó} \quad \frac{dr}{r} = - d\omega$$

de donde

$$r = C e^{-\omega}.$$

De igual modo $S_t = - r$, da

$$\frac{r^2}{\frac{dr}{d\omega}} = - r \quad \text{ó} \quad \frac{dr}{d\omega} = - r$$

de donde resulta igualmenre

$$r = C e^{-\omega}.$$

Como se podía preveer, no se encuentra la propiedad (1) más que en las espirales equiángulas.

R. Guimaraes.

Elvas, Mayo de 1908.

# LECCIONES ELEMENTALES

DE

# Geometría analítica vectorial

## LECCIÓN PRIMERA

### SUMA DE VECTORES. COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN DE LOS MISMOS.

1.—*Vectores; sus elementos. Igualdad.*—En la Mecánica, la Física y la Geometría intervienen dos especies de cantidades; unas como las masas, trabajos, temperaturas, segmentos, ángulos, etc., quedan determinadas por los números que las miden en una cierta escala, y se denominan por eso *escalares;* en otras, como las fuerzas, translaciones, rotaciones, etc., es preciso conocer para su determinación, no solo el *valor numérico y el signo* correspondiente á su sentido, sino también su *dirección ú orientación*. Estas cantidades dirigidas, se denominan *vectoriales*.

En particular, se llama *vector, á la diferencia de posición entre dos puntos $A, B$,* apreciada mediante el segmento rectilíneo determinado y limitado por ellos. El primer punto $A$ es el *origen* del vector, el $B$ su *extremo*; el sentido de $A$ á $B$ es el *sentido* del vector, y la dirección de la recta que lo contiene su *dirección*.

El origen de un vector no es atributo esencial del mismo, pudiendo según las cuestiones, ser un punto determinado ó por el contrario tener origen indiferente. En este caso queda definido el vector por su *longitud ó módulo, la dirección y el sentido*. Dos vectores del mismo módulo, dirección y sentido se llaman *iguales;* si además están situados sobre la misma recta se suelen denominar *equivalentes;* y cuando siendo iguales tienen el mismo origen son *idénticos*.

2.—Para representar un vector se usan muy varias notaciones, y podemos adoptar una letra minúscula del tipo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ..... en la cual suponemos representados todos los elementos del vector.

Cuando queramos referirnos solamente á su longitud, denominada por Hamilton *tensor*, por varios autores *escalar* y por otros *módulo*, adoptaremos esta última palabra escribiendo mod $\mathbf{a}$, mod $\mathbf{b}$, ....., y á veces lo designaremos también con la misma letra del tipo $a, b, c$ .....

Conocidos el origen $A$ y extremo $B$ de un vector lo representan casi todos los autores por $AB$ ó $\overline{AB}$, pero es más apropiada la notación $B - A$ usada por Grassmann y Hamilton, que tiene la ventaja de obedecer en las operaciones á leyes formales semejantes á las universalmente conocidas del análisis algébrico, y que conduce á resultados conformes con sistemas mecánico-geométricos más generales que el vectorial.

Así, por ejemplo, para expresar la igualdad de dos vectores *opuestos* ó sea de igual módulo y dirección pero de sentidos contrarios, escribiremos

$$B - A = -(A - B).$$

Del mismo modo de la igualdad de dos vectores

$$B - A = C - D,$$

se deduce aplicando las leyes ordinarias del cálculo

$$B - C = A - D,$$

conclusión evidente en el paralelógramo $ABCD$ (fig. 1.ª) formado por los vectores iguales $B - A$ y $C - D$. Cambiando de signo á los dos miembros, vemos que tampoco se altera la igualdad matemática.

Si $\mathbf{a}$ es un vector y ponemos

$$B - A = \mathbf{a} \quad \text{será} \quad B = A + \mathbf{a};$$

y expresaremos de ese modo que $B$ es el extremo del vector $\mathbf{a}$ cuyo origen es $A$. *Un vector determina pues la posición de un punto B respecto de otro punto dado A.* Se puede por consiguiente decir, en un cálculo geométrico de leyes análogas á las del algébrico, que:

*La diferencia de dos puntos es un vector; la suma de un punto y un vector es otro punto.*

3. *Suma de vectores.*—En cuanto cantidades, aunque distintas de las escalares, se aplican á los vectores las operaciones del cálculo, con las diferencias que correspondan á su modo de ser. Así, de la suma de segmentos resulta la de vectores sin más que tomar en cuenta dirección y sentido.

*Sumar vectores* es llevar el uno á continuación del otro, cada cual en su dirección y sentido; el vector que tiene por origen el del primero y por extremo el del último *sumando*, es la *suma de los vectores*. También suele llamarse *resultante* á la suma geométrica de vectores, y entonces los sumandos reciben el nombre de *componentes*.

Si se trata de dos vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, para obtener la suma tomaremos $B - A = \mathbf{a}$, á partir de un origen cualquiera $A$ y después $C - B = \mathbf{b}$, con lo que obtendremos el punto $C$ y el *vector suma*

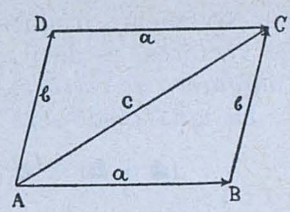


Fig. 1.ª

$$C - A = (B - A) + (C - B) = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Si desde el mismo origen $A$ tomamos primero $D - A = \mathbf{b}$ y después $C - D = \mathbf{a}$, obtendríamos el mismo punto $C$ y el mismo vector suma, diagonal del paralelógramo $ABCD$. Por consiguiente, la *suma de los vectores es conmutativa*, es decir

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

Como tenemos que

$$(B - A) + (C - B) = C - A,$$

será

$$(B - A) + (C - B) + (A - C) = 0;$$

de donde resulta, como en la figura, que cada vector ó lado del triángulo $ABC$, tomado en sentido contrario, es suma de los otros dos, y que la suma geométrica de los tres es idénticamente nula.

La suma

$$(A - B) + (B - A) = 0,$$

de dos vectores opuestos es también inénticamente nula. Podemos decir en ambos casos que la suma es un *vector nulo;* un punto es un vector cuyo origen y extremo coinciden ó sea un vector nulo.

4. Para efectuar la suma de varios vectores, se podrá agregar á la suma de los dos primeros el tercero, á la de estos tres el cuarto y así sucesivamente; ó lo que es lo mismo formar la línea poligonal (plana ó no plana) $ABC \ldots\ldots F$, cuyo origen es un punto cualquiera $A$, y sus lados consecutivos son iguales á los vectores sumandos ó componentes. La suma es el vector $F - A$ que une el origen y extremo de esa línea.

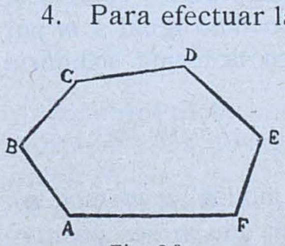


Fig. 2.ª

Por ser conmutativa la suma de dos vectores, podremos escribir

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})$$

ó bien

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a};$$

y del mismo modo podríamos escribirlos en un orden cualquiera. Sucesivamente iríamos viendo lo mismo para cualquier número de vectores, es decir, que en general: *la suma de un número cualquiera de vectores es conmutativa.*

De igual modo será

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}),$$

Y lo mismo para cualquier número de vectores, ó sea que: *la suma de vectores es también asociativa.* Por consiguiente, podrán tomarse los sumandos en un orden cualquiera y substituir grupos de sumandos por su suma.

De la definición de la suma resulta inmediatamente que

$$(B-A)+(C-B)+\ldots\ldots+(F-E)+(A-F)=0,$$

esto es, que *en todo polígono (plano ó no plano), la suma geométrica de sus lados considerados como vectores es idénticamente nula.*

Si consideramos tres vectores no coplanarios, se ve inmediatamente que su suma es diagonal del paralelepípedo construído sobre tres vectores coiniciales iguales á los sumandos (fig. 3.ª).

5. *Producto de un vector por un número. Vectores paralelos.* —Al tratar de multiplicar un vector por un número real, positivo ó negativo, como éste número carece en cuanto tal de dirección, solo habremos de atender á su valor y signo, que en la operación afectarán respectivamente al módulo y sentido del vector.

Se llama *producto de un vector* $\boldsymbol{a}$ *por un número real* $m$; á un vector de igual dirección que $\boldsymbol{a}$, de sentido igual ó contrario, según que $m$ sea positivo ó negativo y de módulo igual á $m$ por mod $\boldsymbol{a}$. La operación podremos indicarla en la forma ordinaria por la igualdad

$$\boldsymbol{a}'=m\,\boldsymbol{a},$$

la cual supone: dirección $\boldsymbol{a}'$ = dirección $\boldsymbol{a}$; mod $\boldsymbol{a}'=m$ (mod $\boldsymbol{a}$), y sentido $\boldsymbol{a}'$ igual ó contrario al de $\boldsymbol{a}$; según que $m$ sea positivo ó negativo.

Resulta así que: el vector $\boldsymbol{a}/_{\text{mod a}}$ será un vector de *módulo* *uno*, paralelo al $\mathbf{a}$ y del mismo sentido. Este se llama *vector unitario* de los de dirección $\mathbf{a}$, y si lo llamamos $\mathbf{i}$, cualquier vector de esa dirección lo podemos representar por $x\,\mathbf{i}$ siendo $x$ el módulo del vector; dando á $x$ el valor de todos los números reales tendremos todos los vectores de dirección $\mathbf{i}$. Para multiplicar una suma de vectores por un número se multiplicarán por éste cada uno de los sumandos.

Multiplicando un vector por un número se obtiene, pues, otro vector situado en la misma recta ó en una recta paralela, esto es, de la misma dirección. Recíprocamente, dados dos vectores de la misma dirección $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}'$ existe un solo número $m$ tal que

$$\mathbf{a}' = m\,\mathbf{a},$$

número que será $m = \frac{\text{mod } \mathbf{a}'}{\text{mod } \mathbf{a}}$, con el signo $+$ ó $-$ según que los dos vectores tengan el mismo ó distinto sentido. Por consiguiente, *dos vectores no nulos solo tienen la misma dirección cuando el uno es múltiplo del otro.*

6. *Descomposición de vectores.*—Como operación inversa de la adición ó composición de vectores, podemos considerar la *resta ó la descomposición* de los mismos.

La *resta ó substracción geométrica,* como operación inversa de la suma, se propone obtener uno de dos sumandos conocida la suma y el otro sumando. Para obtener el resultado ó *diferencia,* se ve fácilmente que bastará *sumar al vector suma ó minuendo el vector sustraendo con sentido contrario al que tiene,* y la operación será

$$(B - A) - (D - A) = (B - A) + (A - D) = B - D.$$

El vector diferencia será la diagonal $DB$ del paralelógramo $ABCD$ construido sobre los dos vectores (fig. 1.ª).

Si tenemos un vector cualquiera de origen $O$ y extremo $P$, considerando una línea poligonal cualquiera (plana ó no plana), $OABC \ldots\ldots NP$ de origen $O$ y extremo $P$ será

$$P - O = (A - O) + (B - A) + (C - B) + \ldots\ldots + (P - N),$$

y aparecerá dicho vector descompuesto en sumandos, que pueden indicarnos las posiciones sucesivas ocupadas por $O$ hasta llegar á $P$.

En particular, si nos dan tres direcciones ó *ejes no coplanarios* $OX$, $OY$, $OZ$, cualquier vector $P - O$ *se descompondrá de un modo único y determinado* en los vectores $A - O$, $B - O$, $C - O$ dirigidos según esos ejes, proyectando $P$ sobre cada uno de éstos paralelamente al plano de los otros dos. Estas componentes, según tres direcciones dadas, no son pues otra cosa que la proyección del vector sobre cada una de esas direcciones paralelamente al plano de las otras dos, y para evitar ambigüedades se eligen sobre cada uno de los ejes los sentidos positivos.

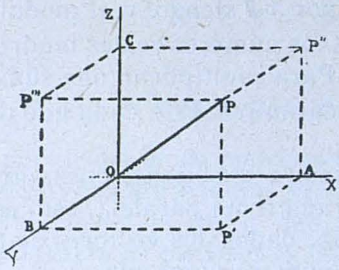


Fig. 3.ª

Cuando el vector esté en el plano de dos de esas direcciones la componente correspondiente á la tercera dirección será nula, y tendrá sólo dos componentes $A - O$, $B - O$, que se obtienen proyectando el vector sobre cada uno de los ejes paralelamente al otro. Recíprocamente dos componentes $A - O$ y $B - O$, nos determinan un vector único en su plano, que será diagonal del paralelógramo construído sobre esas componentes; y tres $A - O$, $B - O$, $C - O$ nos dan un vector único de origen $O$, diagonal del paralelepípedo construído sobre ellas.

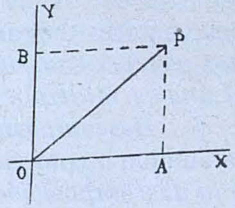


Fig. 4.ª

7. *Expresión de un vector.*—Si $\mathbf{p}$ es el vector y $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sus vectores componentes será evidentemente

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

En particular, si en cada eje tomamos un vector *unitario*, que podemos representar respectivamente con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, llamando $a, b, c$, á los módulos de los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, será

$$\mathbf{p} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

Las cantidades escalares $a, b, c$ se llaman *coordenadas del vector* $\mathbf{p}$ *respecto de los vectores unitarios* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Cada vector tiene unas coordenadas únicas respecto del sistema $O$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$; y recíprocamente á cada terno de números considerados como coordenadas de un vector corresponde un vector único en dicho sistema.

En general, la expresión $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, donde $a$, $b$, $c$ tomen todos los valores reales posibles é $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sean vectores no nulos ni coplanarios, representa todos los vectores posibles mediante los tres antedichos. Si el vector está en el plano de dos de esos vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ la coordenada $c$ será nula, y

$$a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

nos dará todos los vectores coplanarios con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, cuando $a$, $b$ tomen todos los valores posibles. Finalmente, $a\mathbf{i}$, $b\mathbf{j}$, $c\mathbf{k}$, sabemos que nos definen los vectores contenidos en los ejes.

Es de evidencia inmediata, en virtud de todo lo dicho hasta aquí, que se podrá operar con las expresiones de los vectores como con los vectores mismos. Por tanto si

$$\mathbf{p} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}, \qquad \mathbf{p}' = a'\mathbf{i} + b'\mathbf{j} + c'\mathbf{k}$$

son dos vectores será

$$\mathbf{p} + \mathbf{p}' = (a + a')\,\mathbf{i} + (b + b')\,\mathbf{j} + (c + c')\,\mathbf{k};$$

y también para varios vectores, tendremos

$$\Sigma\mathbf{p} = \Sigma a\,.\,\mathbf{i} + \Sigma b\,.\,\mathbf{j} + \Sigma c\,.\,\mathbf{k}.$$

Del mismo modo

$$m\mathbf{p} = ma\mathbf{i} + mb\mathbf{j} + mc\mathbf{k};$$

esto es: *las coordenadas de un vector suma son la suma de las coordenadas; y las del producto de un vector por un número, el producto de las coordenadas por ese número.*

Esta conclusión se suele también enunciar en la siguiente forma: *las proyecciones de la resultante, son sumas de las correspondientes proyecciones de las componentes.* Por tanto, si la resultante es nula, lo han de ser necesariamente sus coordenadas, y tendremos

$$\Sigma a = 0, \quad \Sigma b = 0, \quad \Sigma c = 0;$$

y recíprocamente si eso se verifica para tres ejes no coplanarios, la resultante es evidentemente nula.

Como la resultante ó suma de vectores forma con estos un polígono, el *teorema general de las proyecciones* se enuncia también diciendo que: *la proyección de un contorno cerrado sobre un eje es nula.* Recíprocamente, *si las proyecciones sobre tres ejes no coplanarios son nulas, el contorno será cerrado.*

8. *Consecuencias. Vectores coplanarios. Puntos en línea recta, ó pertenecientes á un plano.*—Si consideramos un vector $\mathbf{h}$ coplanario con los $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ no nulos ni paralelos, los vectores de dirección $\mathbf{h}$ tendrán por expresión, según hemos visto $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, de modo que

$$l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{h} = 0,$$

será la *condición para que tres vectores no nulos ni paralelos sean coplanarios,* puesto que cada uno de los vectores $l\mathbf{i}$, $m\mathbf{j}$, $n\mathbf{h}$ tomado con sentido contrario puede expresarse como suma de los otros dos. Si se toman $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ como vectores axiales unitarios, las coordenadas del vector $n\boldsymbol{h}$ se ve que son $-l$, $-m$, y las del vector $\boldsymbol{h}$ serán $-\frac{l}{n}$, $-\frac{m}{n}$.

Si los vectores $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ no son nulos ni paralelos, *cuando tengamos* $l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} = 0$, *será necesariamente* $l = 0$, $m = 0$; pues $l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j}$ representa el vector suma de los no nulos ni paralelos $l\boldsymbol{i}$, $m\boldsymbol{j}$, y para que esta suma sea nula habrán de serlo los sumandos ó bien sus módulos $l$ y $m$. Por siguiente, $l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} = 0$, supone ó $l = 0$, $m = 0$, ó que $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ son paralelos.

Cuando sea

$$l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} = l'\boldsymbol{i} + m'\boldsymbol{j},$$

no siendo $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ nulos ni paralelos habrá de verificarse $l = l'$, $m = m'$, como consecuencia inmediata de lo antedicho. Si los tres vectores coplanarios $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{h}$ ligados por la relación

$$l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{h} = 0,$$

*son coiniciales y se verifica que* $l + m + n = 0$, *sus extremos están en línea recta.*

En efecto, eliminando $n$ será

$$l(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{h}) + m(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{h}) = 0,$$

y no siendo $l$, $m$ nulos, habrán de ser de la misma dirección los dos vectores $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{j} - \boldsymbol{h}$, que por tener común el extremo de $\boldsymbol{h}$ estarán en la misma recta, demostrándonos el teorema.

EJEMPLOS.—1.º *Si los lados opuestos de un cuadrilátero* ABCD *son paralelos, dichos lados son también iguales.*

En efecto, tendremos

$$(B - A) + (C - B) = (D - A) + (C - D),$$

pero $(B - A) = m(C - D)$ y $(C - B) = n(D - A)$ por ser paralelos, luego

$$m(C - D) + n(D - A) = (C - D) + (D - A),$$

lo que exige $m = 1$, $n = 1$, según queríamos demostrar.

2.º *Las diagonales de un paralelógramo* ABCD *se bisecan mútuamente.*

Llamemos $E$ al punto de intersección de las diagonales, y se verificará

$$(B - A) + (E - B) = E - A,$$

$$(D - C) + (E - D) = E - C,$$

ó por ser $B - A = -(D - C)$ obtendremos sumando

$$(E - B) + (E - D) = (E - A) + (E - C).$$

Pero $E - B = m(E - D)$ y $E - A = n(E - C)$ por ser de las mismas direcciones, luego

$$(m + 1)(E - D) + (n + 1)(C - E) = 0,$$

lo que exige $m = -1$, $n = -1$ por no ser $E - D$ y $C - E$ ni nulos ni paralelos.

9. Si $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ son tres vectores no paralelos, ni nulos, ni coplanarios, $a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ sabemos que representa un vector no coplanario con dos de los anteriores, cuando $a$, $b$, $c$ son distintos de cero. Si consideramos un cuarto vector $\boldsymbol{h}$ se podrá expresar pues en función de aquellos tres, y tendremos en general

$$l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k} + p\boldsymbol{h} = 0.$$

Las cantidades escalares $l$, $m$, $n$, $p$, son en general no nulas cuando los vectores dichos no están de tres en tres en un plano; y uno cualquiera de los vectores $l\boldsymbol{i}$, $m\boldsymbol{j}$, $n\boldsymbol{k}$, $p\boldsymbol{h}$ podrá considerarse como suma de los otros tres tomados con signos contrarios. Así referido el vector $p\boldsymbol{h}$ á los vectores unitarios axiales $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, sus coordenadas serán $-l$, $-m$, $n$, y las del vector $\boldsymbol{h}$ serían

$$-\frac{l}{p}, -\frac{m}{p}, -\frac{n}{p}.$$

*Si* $l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k} = 0$, *no siendo* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ *ni paralelos, ni nulos, ni coplanarios, será* $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$ por la misma razón que antes vimos. De igual modo cuando sea

$$l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k} = l'\boldsymbol{i} + m'\boldsymbol{j} + n'\boldsymbol{k},$$

será $l = l'$, $m = m'$, $n = n'$.

*Si cuatro vectores coiniciales no nulos ligados por la relación*

$$l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k} + p\boldsymbol{h} = 0,$$

*son tales que* $l + m + n + p = 0$, *sus cuatro extremos son coplanarios*. Pues eliminando $p$ obtenemos

$$l(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{h}) + m(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{h}) + n(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{h}) = 0,$$

lo cual, por no ser $l$, $m$, $n$ nulos, nos prueba que los vectores $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{j} - \boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{k} - \boldsymbol{h}$ son de la misma orientación, pero como tienen común el extremo de $\boldsymbol{h}$ estarán en plano, según queríamos demostrar.

10. *Formaciones geométricas de primera especie. Baricentros.*—Vimos en otro lugar (2), lo que podía entenderse por suma de un punto con un vector, que no es otra cosa que aplicar á ese punto la translación representada por el vector. Con eso y la

notación empleada podremos escribir

$$A + (B - A) = B,$$

y de la igualdad de dos vectores

$$B - A = C - D,$$

deduciremos

$$B = A + (C - D).$$

Para que estas igualdades y las análogas que puedan establecerse, gocen de todas las propiedades de la igualdad algébrica, será preciso establecer lo que se entiende por suma de puntos y por producto de un punto por un número, interpretación que dará á conocer la ventaja de la notación vectorial $B - A$.

Todo eso tiene un significado geométrico preciso en las *formaciones geométricas de primera especie* de GRASSMANN, y está implícitamente contenido en el *cálculo baricéntrico* de MÖBIUS. La importancia de ambas teorías prueba cuan oportuno resulta extender el algoritmo estudiado, de modo que, por puntos y vectores, con las operaciones de adición, substracción y producto numérico se obtenga un cálculo geométrico idéntico al algébrico.

Si $x_i$ son números reales y $A_i$ puntos ($i = 1, 2. 3 \ldots\ldots n$) la suma

$$\Sigma x_i A_i = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + \ldots\ldots + x_n A_n,$$

se llama *formación geométrica de primera especie,* según denominación de GRASSMANN. Una formación se dice *nula* cuando siendo $O$ un punto cualquiera se tenga

$$\Sigma x_i (A_i - O) = 0;$$

y dos formaciones se llaman *iguales*, si análogamente

$$\Sigma x_i (A_i - O) = \Sigma x'_i (A'_i - O).$$

Una formación es *no nula*, si hay algún punto $O$ tal que

$$\Sigma x_i (A_i - O) \gtrless 0.$$

De ese modo quedan definidas las formaciones geométricas por medio de los vectores. Así la formación

$$A + B$$

estará definida por

$$(A - O) + (B - O),$$

que representa precisamente el doble del vector que va de $O$ al punto $I$ medio de $B - A$; luego cualquiera que sea $O$ tendremos

$$(A - O) + (B - O) = 2(I - O),$$

ó escrito de otro modo

$$A + B = 2I;$$

ó bien: *la suma de dos puntos es el doble del punto medio.*

*Todo punto es una formación de primera especie.* Si $A_1$ es un punto existe al menos otro distinto de $A_1$; si $A_1$, $A_2$ son dos puntos distintos existirá al menos uno fuera de la recta $A_1A_2$; si $A_1$, $A_2$, $A_3$ son tres puestos no colineares, existe al menos un punto no situado en el plano $A_1A_2A_3$. Las formaciones $x_1A_1$, $x_1A_1 + x_2A_2$, $x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3$ de los puntos antedichos no serán nulas, por consiguiente, *existen formaciones no nulas.* Por el contrario si $A_1$, $A_2$, $A_3$ son puntos de una recta, ó $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ puntos de un plano, tendremos (8, 9) que, cualquiera que sea $O$, las formaciones $x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3$, $x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4$ serán necesariamente nulas; luego, también *existen formaciones nulas.* La *existencia de las formaciones iguales* resulta también de lo estudiado acerca de los vectores.

A las formaciones se les puede aplicar las operaciones de adición, substracción y producto por un número, ya directamente, ya por el intermedio de los vectores. De modo que podremos poner

$$\Sigma x_i A_i \pm \Sigma y_i B_i = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots\ldots \pm (y_1 B_1 + y_2 B_2 + \ldots\ldots)$$

y

$$m \Sigma x_i A_i = m x_1 A_1 + m x_2 A_2 + \ldots\ldots + m x_n A_n.$$

Por extensión de lo dicho para los vectores, resultará que esa suma y producto gozará de las propiedades de la suma y del producto algébrico ordinarios.

11. Toda formación geométrica

$$\Sigma x_i A_i$$

cuando se refiera á un origen $O$, equivaldrá á un vector nulo ó no nulo $\boldsymbol{g}$, y podremos escribir

$$\Sigma x_i (A_i - O) = \boldsymbol{g}.$$

Pero $\Sigma x_i (A_i - O) = \Sigma x_i A_i - x O$, llamando $x$ á la cantidad escalar $\Sigma x_i$ ó *masa* de la forma, será

$$\frac{1}{x} \Sigma x_i A_i = O + \frac{1}{x} \boldsymbol{g} = G,$$

cuando $x \gtrless 0$. Esto nos dice que $\frac{1}{x} \Sigma x_i A$ representa un punto, denominado por Möbius *baricentro* del sistema de puntos $A_i$ afectados de los *pesos* $x_i$. La anterior relación podrá también escribirse

$$x_1(A_1-G)+x_2(A_2-G)+x_3(A_3-G)+\ldots\ldots+x_n(A_n-G)=0,$$

lo que nos dice que *la suma de los vectores que unen el baricentro con los puntos del sistema, multiplicado cada vector por su peso correspondiente, es nula,* ó también de otro modo, que existe un polígono de lados paralelos á esos vectores.

Si $x=0$, podrán separarse los pesos en dos grupos $x'$, $x''$, cuya diferencia será $x=0$, y tendremos

$$\Sigma x_i A_i=\Sigma x'_i A'_i-\Sigma x''_i A''_i,$$

y por tanto,

$$\frac{1}{x'}\Sigma x'_i A'_i-\frac{1}{x''}\Sigma x''_i A''_i=G'-G'';$$

es decir, que entonces la formación equivale á un vector.

Cuando todos los pesos son iguales

$$\Sigma x A_i = x\Sigma A_i, \quad \text{y por tanto,} \quad \Sigma A_i = nG,$$

siendo $n$ el número de puntos. Entonces $G$ se llama centro de distancias medias, y será

$$(A_1-G)+(A_2-G)+\ldots\ldots+(A_n-G)=0,$$

esto es, *la suma de los vectores que unen el centro de distancias medias con los puntos del sistema es nula,* ó bien existe un polígono de lados iguales á esos vectores.

Si son dos los puntos, la formación

$$mA+nB,$$

cuando $m+n=0$ ó $m=-n$, equivaldrá al vector

$$n(B-A).$$

Si $m+n \neq 0$ será

$$mA+nB=(m+n)\left[A+\frac{n}{m+n}(B-A)\right]=(m+n)\left[B-\frac{m}{m+n}(B-A)\right],$$

cuyos paréntesis representan *el punto de la recta $AB$ que divide interior ó exteriormente, según que $m$, $n$ son del mismo ó distinto signo, al vector $B-A$ en la razón $\frac{n}{m}$ inversa de la de los pesos.*

Cuando $m=n$, ese punto será el punto medio $I$ de $A$ y $B$, y ya vimos que teníamos $A+B=2I$.

Para la formación de tres puntos

$$x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3=(x_1+x_2)G_1+x_3A_3=(x_1+x_2+x_3)G,$$

el baricentro se obtendrá considerando el de dos en la forma dicha, y luego este punto $G_1$ de masa $(x_1+x_2)$ que divide á $A_2-A_1$ en la razón $-\frac{x_2}{x_1}$, se compone con $x_3 A_3$, para obtener el punto $G$. Como

$$x_1(A_1-G)+x_2(A_2-G)+x_3(A_3-G)=0,$$

vemos que el punto $G$ está en el plano $A_1A_2A_3$, como también resulta de su construcción. Si los tres puntos están en una recta, su baricentro está en la misma recta; si además de estar en línea recta $x_1+x_2+x_3=0$, uno cualquiera de los puntos es baricentro del sistema de los otros dos.

De un modo análogo podríamos construir el baricentro de una formación cualquiera, hallando el $G_1$ de masa $x_1+x_2$, que divide al vector $A_2-A_1$ en la razón $-\frac{x_2}{x_1}$; después el $G_2$ de masa $x_1+x_2+x_3$ que divide á $A_3-G_1$ en la razón $-\frac{x_3}{x_1+x_2}$; y así sucesivamente hasta considerar todos los elementos de la formación. Como vemos que la suma de formaciones es conmutativa y asociativa, el orden de composición de sus elementos es indiferente, y también se podrán substituir algunos de ellos por su baricentro.

Cuando los puntos de la formación están en una recta ó plano, el baricentro pertenecerá á esa recta ó plano. Si además $\Sigma x=0$, la formación equivale á un vector paralelo á esa recta ó plano, porque llamando $G$ al baricentro de $n-1$ puntos, será

$$\Sigma x_i A_i=(x_1+x_2+\ldots\ldots+x_{n-1})\,G+x_n A_n=x_n(A_n-G).$$

Para el caso de ser la formación nula y $\Sigma x_i=0$, uno cualquiera de los puntos será baricentro del sistema formado por los demás.

Ejercicios.—1.° *La recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo $ABC$ es paralela al tercero é igual á su mitad.*

Sean $M$, $N$ los puntos medios de $B-A$ y $C-A$, tendremos

$$2M=A+B,\qquad 2N=A+C;$$

y por consiguiente,

$$2(N-M)=C-B,$$

según queríamos demostrar.

2.° *El centro de distancias medias de un triángulo es el punto común á sus medianas.*

Sea $G$ ese centro y será

$$A+B+C=3G,$$

pero

$$A+B+C=A+2\frac{B+C}{2}=B+2\frac{A+C}{2}=C+2\frac{A+B}{2}=G;$$

lo cual nos demuestra el teorema, porque $\frac{B+C}{2}$, $\frac{A+C}{2}$, $\frac{A+B}{2}$ son los puntos medios de los lados opuestos á $A$, $B$, $C$. Se ve además que divide á cada mediana en la relación de 1 á 2. Y también por ser

$$\frac{B+C}{2}+\frac{C+A}{2}+\frac{A+B}{2}=A+B+C=3G,$$

resulta que, *el triángulo formado por los puntos medios tiene el mismo baricentro.*

3.º *Las bisectrices de un triángulo dividen al lado opuesto en partes proporcionales á las longitudes de los lados adyacentes.*

Sean $a$, $b$, $c$ las longitudes ó módulos de los lados $C-B$, $A-C$, $B-A$, de los lados del triángulo. La suma ó diferencia de los vectores unitarios $\frac{A-C}{b}$, $\frac{B-A}{c}$ tendrán las direcciones de las bisectrices del ángulo $A$. Por consiguiente, siendo $x$ un número real cualquiera

$$A+x\left(\frac{B-A}{c}\pm\frac{C-A}{b}\right)=\left(1-\frac{x}{c}\mp\frac{x}{b}\right)A+\frac{x}{c}B\pm\frac{x}{b}C$$

representa los puntos de esas bisectrices. Ese punto se encontrará en el lado $BC$, cuando el coeficiente de $A$ es nulo, es decir, cuando sea

$$(b\pm c)\,x=bc \qquad \text{ó bien} \qquad \frac{x}{c}B\pm\frac{x}{b}C=\frac{1}{b\pm c}(bB\pm cC).$$

Esto nos prueba que los puntos de los bisectrices del ángulo $A$ situadas en el lado $BC$, son baricentros de las formaciones $bB\pm cC$, es decir, dividen á ese lado en las razones $\mp\frac{c}{b}$, según queríamos demostrar.

Llamando $A'$ $B'$ $C'$ los puntos en que las bisectrices interiores encuentran á los lados opuestos, será

$$(b+c)\,A'=bB+cC;\ (c+a)\,B'=cC+aA;\ (a+b)\,C'=aA+bB,$$

y por tanto

$$aA+bB+cC=aA+(b+c)\,A'=bB+(c+a)\,B'=cC+(a+b)\,C';$$

lo que nos prueba que las bisectrices interiores se encuentran en el baricentro de la formación $aA+bB+cC$. Del mismo modo veríamos que los centros de los círculos ex-inscritos, son baricentros de la formación que resulta de cambiar en la anterior el signo de una de las cantidades escalares $a$, $b$, $c$.

4.º *Las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos y de las diagonales de un cuadrilátero (plano ó no plano) se bisecan mútuamente.*

En efecto, llamemos $G$ el centro de distancias medias, ó sea

$$A + B + C + D = 4G;$$

y tendremos

$$A + B + C + D = 2\,\frac{A + B}{2} + 2\,\frac{C + D}{2}$$

$$= 2\,\frac{A + C}{2} + 2\,\frac{B + D}{2} = 2\,\frac{B + C}{2} + 2\,\frac{A + D}{2} = 4G.$$

Si los cuatro puntos $A$, $B$, $C$, $D$ fuesen vértices de un tetraedro; observando que

$$A + B + C + D = 3\,\frac{A + B + C}{3} + D = 3\,\frac{A + B + D}{3} + C \ldots\ldots = 4G,$$

tendremos que: *las rectas que unen los vértices de un tetraedro con los baricentros de las caras opuestas concurren en un punto, que biseca las rectas que unen los puntos medios de los pares de aristas opuestas.* Este punto es el que se suele denominar *baricentro* del tetraedro.

5. *Si en los lados de un polígono $A_1\,A_2\,A_3 \ldots\ldots A_n$ se toman puntos $B_1$, $B_2 \ldots\ldots B_n$ tales que*

$$\frac{A_1B_1}{A_1A_2} = \frac{A_2B_2}{A_2A_3} = \ldots\ldots = k,$$

*ó bien*

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_1} = \frac{A_2B_2}{A_3B_2} = \ldots\ldots = k;$$

*los polígonos $A_1A_2A_3 \ldots\ldots A_n$ y $B_1B_2B_3 \ldots\ldots B_n$ tienen el mismo centro de distancias medias.*

En efecto, se verificará que

$$B_1 - A_1 = k(A_2 - A_1),\ B_2 - A_2 = k(A_3 - A_2) \ldots\ldots B_n - A_n = k(A_1 - A_n),$$

ó bien

$$B_1 - A_1 = k(B_1 - A_2),\ B_2 - A_2 = k(B_2 - A_3) \ldots\ldots B_n - A_n = k(B_n - A_1);$$

de donde resultan por suma

$$\Sigma B_i = \Sigma A_i \quad \text{y} \quad (1 - k)\,\Sigma B_i = (1 - k)\,\Sigma A_i$$

ó bien en ambos casos

$$\Sigma B_i = \Sigma A_i = n G,$$

según queríamos demostrar.

12. Aplicando al baricentro $G$ de una formación, que podremos suponer definido por la identidad

$$\Sigma x_i\,(A_i - G) = 0,$$

el teorema general de las proyecciones (7), suponiendo el plano $XOY$ pasando por $G$, será

$$\Sigma x_i\,c_i = 0,$$

siendo $c_i$ ($i = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$) el valor algébrico de las proyecciones de los vectores $(A_i - G)$ sobre el eje $OZ$, ó también las proyectantes de los puntos $A_i$ sobre el plano $XOY$ que pasa por $G$. Por consiguiente: *la suma algébrica de las distancias de los puntos de una formación á un plano que pase por su baricentro, multiplicada cada una por su peso correspondiente, es nula, cualquiera que sea la dirección común de esas distancias.*

Recíprocamente, *si la suma de las distancias de los puntos $A_i$ de una formación á un plano, multiplicada cada distancia por un peso $x_i$, es nula, el baricentro de la formación $\Sigma x_i\,A_i$ está en ese plano,* pues si $A'_i$ es la proyección de $A_i$ será por hipótesis

$$\Sigma x_i\,(A_i - A'_i) = 0, \quad \text{ó bien,} \quad \Sigma x_i\,A_i = \Sigma x_i\,A'_i,$$

lo cual nos prueba que el baricentro de la formación dicha, es el de la formación proyectada $\Sigma x_i\,A'_i$, y está por tanto en el plano de ésta.

Para el centro de distancias medias *será nula la suma algébrica de las distancias de los puntos á un plano cualquiera que pase por ese centro, y recíprocamente.*

# Una lección [1] de química mineral

SEÑORES:

Dicen Willm y Hanriot [2]: «En cuanto al boro, que hemos estudiado á continuación de los metaloides de la familia del Nitrógeno, se distingue de ellos por un gran número de puntos..... no se parece á la familia del Nitrógeno, sino por su trivalencia.....»

Vamos á tratar de demostrar lo contrario: que el boro, bajo el punto de vista de sus caracteres químicos, puede y debe clasificarse juntamente con los nitrogenoideos.

No es éste el criterio generalmente seguido por los autores: Dumas y Fremy, lo clasifican con el carbono y el silicio. En las clasificaciones de Mendeléef y Wendt si es cierto que lo ponen junto al Nitrógeno (las analogías son mayores, como veremos, con el fósforo, arsénico y antimonio), también lo ponen junto al carbono; la série 2.ª de Mendeléef, *Li, Gl, Bo, C, N, O, Fl*, es próximamente igual á la série 1.ª de Wendt, *H, Li, Gl, Bo, C, N, O*, pero el grupo III de Mendeléef, *Bo, Al, Sc, Ga, It, In, Di, Er, Tl*, ya no es tan parecido á la familia 4.ª de Wendt, donde se agrupan: *Bo, Al, Sc, It, La*. Todo esto no tiene nada de particular por tratarse de dos clasificaciones completamente artificiales.

En la curva de Lotario Meyer, *N, Ph, As* y *Sb*, están en las ramas ascendentes de la curva y *Bo* está próximo al *N*, en la misma depresión de la curva que representa el II período de la clasificación de Mendeléef, en su mínimo. No ocupan, pues, lugar semejante como ocurre con los elementos semejantes.

Únicamente en las clasificaciones por la valencia, está junto á los elementos nitrogenoideos y esto es justo y razonable, no pudiendo ser de otro modo, por ser el *Bo* un elemento, netamente trivalente.

---

(1) Resumen de la *Lección 35*, de mi Programa de Química Inorgánica.

(2) Es el libro por el que recomiendo á mis alumnos que estudien sus lecciones.

En la clasificación de Moissan, que dice agrupar los cuerpos simples por familias naturales conforme al conjunto de sus propiedades físicas y químicas, se estudia el *Bo* después del *N, Ph, As, Sb, Bi, Va, Nb* y *Ta*, separado de éstos, aunque antes del *C*, que á su vez está separado del *Si* y congéneres. Justifica esto Moissan con la opinión de Dumas.

—En nuestro entender, el *Bo* tiene grandes analogías con los elementos nitrogenoideos. Comienzan estas por su trivalencia, carácter que decididamente le separa del *C* y el *Si*, elementos claramente tetravalentes.

El hidruro de boro, tiene fórmula $BoH_3$ completamente análoga á las del amoniaco, $NH_3$, fosfamina, $PhH_3$, arsenamina, $AsH_3$ y estibamina, $SbH_3$ y aunque es cierto que el *Ph* y el *As* tienen hidruros diversamente condensados líquido y sólidos y hasta cristalino el $Ph_2H_3$, no lo es menos que los autores admiten hasta siete hidruros de boro con diversos modos de condensación y concatenación

$$BoH_3 \qquad H_2Bo - BoH_2 \qquad H_2Bo - BoH - BoH_2$$

(Saturados)

$$HBo = BoH \qquad H_2Bo - Bo = BoH$$

(No saturados)

$$\begin{array}{c} H \\ Bo \\ \diagup \quad \diagdown \\ HBo - BoH \end{array}$$

(Saturado cíclico)

$$\begin{array}{c} H \\ Bo \\ \diagup \quad \diagdown \\ Bo = Bo \end{array}$$

(No saturado cíclico)

siendo probablemente sólido según Reitnizer, el compuesto no saturado cíclico.

Todavía las analogías son mayores con la arsenamina y estibamina, pues si éstas dan manchas y anillos en el aparato de Marhs, el $BoH_3$ arde en su combustión completa con llama verde, mientras que cuando la combustión se incompleta cortando la llama con la porcelana, deja mancha parda sobre ella, según dicen los libros.

Pero las mayores analogías, se notan en la composición y constitución de los ácidos.

El ácido ortobórico $BoO_3H_3$ es de fórmula semejante al fosforoso $PhO_3H_3$, pero también hay un ácido metabórico $BoO_2H$ cuya fórmula es en un todo semejante á las del ácido nitroso y del antimonioso y á la del hidrato $As_2O_3 . H_2O$, que Walden admite en la solución del anhidrido arsenioso en pequeña cantidad de agua.

Todos los elementos del grupo, presentan completa ó incompleta, la série orto-, piro-, meta-, de los ácidos terminados en *oso*.

El $N$, da $NO_2H$ y además nitritos correspondientes á las fórmulas $N_2O_5H_4$ y $NO_3H_3$ de ácidos desconocidos.

El $Ph$, da ácido pirofosforoso $Ph_2O_5H_4$ y fosforoso $PhO_3H_3$.

El $As$, da el hidrato ya dicho y el $AsO_3H_3$.

El $Sb$, además de $SbO_2H$, da el $Sb_2O_5H_4$ (dudoso) y el $SbO_3H_3$.

Al anhidrido bórico corresponden teóricamente los ácidos orto, piro y meta, conociéndose de hecho el meta y el orto.

Tenemos en resumen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $NO_2H$ | — | $AsO_2H$ | $SbO_2H$ | $BoO_2H$ |
| $N_2O_5H_4$ | $Ph_2O_5H_4$ | — | $Sb_2O_5H_4$ | — |
| $NO_3H_3$ | $PhO_3H_3$ | $AsO_3H_3$ | $SbO_3H_3$ | $BoO_3H_3$ |

Si los ácidos bóricos, corresponden con los ácidos *-oso* de los nitrogenoideos, también da el boro un ácido semejante al nítrico.

Se conocen perboratos cuya fórmula corresponde á la de un ácido que se llama perbórico y es: $BoO_3H$ semejante al nítrico, metafosfórico, metaarsenicico y metaantimónico.

Es cierto que la serie de los perbóricos no presenta más que un término y aún éste desconocido, pero tampoco es completa esta serie en todos los nitrogenoideos.

Del $N$, se conoce bien el $NO_3H$ metanítrico y se admite la existencia del pironítrico $N_2O_7H_4$.

El $Ph$, presenta completa la serie de ácidos bien diferenciados, pero es el único.

El $As$, da tres hidratos, pero sin caracteres diferenciales, como tienen los ácidos fosfóricos, por cuya razón algunos autores no admiten que sean tres ácidos distintos.

El $Sb$, si bien da los tres hidratos, no hay antimoniatos orto.

La falta de existencia real del ácido perbórico aislable no es un argumento en contra de nuestra tésis, pues la existencia de perboratos correspondientes á esa fórmula demuestra la existencia del edificio molecular, que es lo principal, y lo restante es una simple substitución de metal por hidrógeno.

Además del oxicloruro $BoOCl$, correspondiente al ácido bórico, se conoce el oxicloruro $BoOCl_3$ y si sustituímos $Cl$ por $OH$, tendremos $BoO(OH)_3$ ó sea el ácido teórico ortoperbórico y teóricamente también, tendríamos la reacción:

$$BoOCl_3 + 3H_2O = BoO_4H_3 + 3HCl.$$

Se ha presentado como diferencia del boro y los nitrogenoideos la formación de ácidos polibóricos, pero los ácidos piro- son di- y además, también el *Ph* forma ácidos polimetafosfóricos.

Respecto de la valencia del boro, hay que ver que el ácido $BoO_3H$ corresponde al anhídrido $Bo_2O_5$ y siendo su composición semejante á la del $Ph_2O_5$ su constitución también será semejante

$$\begin{array}{l} O = Bo \begin{array}{l} \diagup\!\!\diagup\, O \\ \diagdown \end{array} \\ \qquad\qquad\; O \\ O = Bo \begin{array}{l} \diagup \\ \diagdown\!\!\diagdown\, O \end{array} \end{array}$$

resultando el boro pentavalente, como también habría de serlo en el ácido ortoperbórico.

Nótese nuevamente que los ácidos bóricos corresponden á los terminados en *oso* y el perbórico al nítrico.

Resumiendo: En virtud de las analogías vistas, el ácido bórico, debiera llamarse *boroso* y los boratos, *boritos* y el ácido perbórico, *bórico* simplemente, siendo los perboratos verdaderos *metaboratos*. Y por todo esto el boro puede figurar junto á los nitrogenoideos y más bien junto al arsénico y al antimonio.

El conjunto de sus propiedades físicas, lo separa un poco, porque en virtud de su peso atómico = 11, debiera colocarse á la cabeza de la série *N, Ph, As, Sb,* separándose del *Sb* y del *As* sus más semejantes y rompiendo así la gradación existente de comenzar por un gas y acabar por los sólidos, pero este inconveniente se obvia formando con él un subgrupo, no de los metaloides trivalentes sino de los nitrogenoideos.

Salamanca, Febrero, 1908.

M. Sesé,
Catedrático de Química Inorgánica
en la Facultad de Ciencias de Salamanca, antiguo
alumno de la de Zaragoza.

# LÍQUENES DE ARAGÓN

POR EL R. P. LONGINOS NAVÁS, S. J.

## INTRODUCCIÓN

1. **Fin de este trabajo.**—Mejor que un catálogo descriptivo de los líquenes que en Aragón existen, este trabajo es más bien una introducción á su estudio. Estamos muy lejos de conocer medianamente nuestra vegetación liquénica; mas para conseguirlo hace falta alguna obra que facilite su estudio, y esto es lo que pretendo. Me dirijo á todos en general y muy en particular á los principiantes, poco impuestos en estos estudios, en gracia de los cuales expondré algunas nociones previas y en las mismas descripciones procuraré, en cuanto sea dable, la facilidad y sencillez, ahorrando de tecnicismo y sutiles investigaciones.

2. **Fuentes.**—Por lo mismo no me detendré en citar los autores clásicos, antiguos y modernos, que me han servido de guía en mi investigación. El material de estudio de que he dispuesto es debido casi exclusivamente al que he recogido en mis diferentes excursiones. En su respectivo sitio consignaré los materiales que otros me hayan proporcionado.

Debo sin embargo advertir que algunos líquenes incluiré en este catálogo que no los he visto de Aragón, ni los he leído citados de esta comarca, pero que segura ó muy probablemente se hallan en ella, lo cual igualmente consignaré en la forma conveniente. De este modo podrá ser útil este mi trabajo para determinar los más de otras regiones de España.

Algunas formas ó muy difíciles de distinguir ó poco definidas las suprimiré de intento por no arredrar á mis lectores y por aguardar á nuevas y más ciertas investigaciones.

3. **Qué son los líquenes.**—Si atendemos á su estructura observaremos en los líquenes dos clases de elementos: uno de la serie fúngica, filamentos cilíndricos llamados *hifas*, y otro de la serie clorofílica, corpúsculos esferoidales llamados *gonidios*. Esto ha dado pie para creer que los líquenes son una asociación de algas y hongos que viven en simbiosis. Aunque ello sea así, los líquenes

no son propiamente ni hongos ni algas, sino que constituyen una clase autónoma de plantas celulares.

4. **Cómo se conocen.**—Suponiendo ante todo que leerán estas líneas algunas personas que no conocen ningún liquen, les daré algunas nociones generales conducentes á distinguirlos de otras plantas similares.

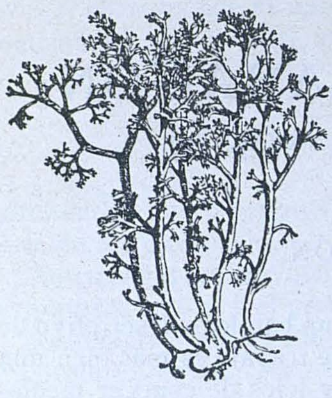


Fig. 1.ª
Liquen fruticuloso. *Cladina rangiferina* L.

Son de tal índole y porte exterior los líquenes, que una vez conocidos algunos ya es imposible confundirlos. Su figura es parecida á la de los musgos ó de las algas, ó intermedia entre estos vegetales. Jamás ofrecen el color verde franco de los musgos y hepáticas, con los cuales tienen mucho parecido.

5. **Sus formas.**—Preséntanse ya en dimitutos arbolillos, líquenes *fruticulosos* (fig. 1.ª); ya de hojas ó escamas más ó menos orbiculares adheridas á su soporte y fácilmente separables, líquenes *foliáceos* (fig. 2.ª); ya finalmente á manera de costras, á veces cual manchas, incorporadas al mismo soporte en que vegetan, y son los llamados líquenes cructáceos (fig. 3.ª).

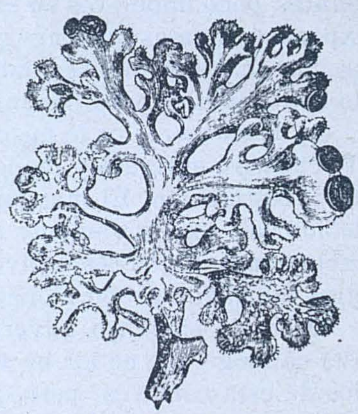


Fig. 2.ª
Liquen foliáceo. *Cetraria islandica* L.

6. **Dónde se encuentran.**—No hay que buscar los líquenes en sitios donde estén sumergidos constantemente en el agua, que es ésta habitación propia de las algas. Pero sí en las cercanías de aquélla, en parajes húmedos y frescos. Las altas montañas, las quebradas de los barrancos, las frondosas selvas, son la habitación predilecta de los líquenes. Quieren sombra los más, para conservar mejor la humedad, pero no obscuridad excesiva; mas bien prefieren el aire y cierta cantidad de luz. Así es que bosques muy sombríos, suelos tapizados de musgos y de helechos

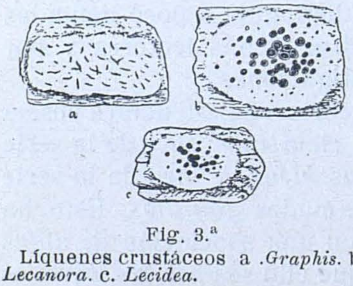


Fig. 3.ª
Líquenes crustáceos a. *Graphis*. b. *Lecanora*. c. *Lecidea*.

ahogan toda vegetación liquénica. Sus *soportes* son muy variados: el suelo de cualquiera naturaleza mineralógica que sea, las piedras y rocas calcáreas, silíceas, feldespáticas, etc.; finalmente las cortezas de árboles y arbustos.

7. **Cómo se recogen.**—La recolección de los líquenes no siempre es fácil. Los fruticulosos facilísimamente se desprenden de su soporte; algunos foliáceos con bastante facilidad, para otros también foliáceos se hace preciso usar una navaja, cuya punta pasando al rededor y por debajo lo haga desprender entero; y si están muy adheridos, no conviene sacarlos en seco, que se desmenuzarían, pero se arrancarán enteros humedeciéndolos previamente. Los líquenes crustáceos son los que dan más que hacer para obtenerlos. Si son cortícolas, una buena y fuerte navaja los separará con la misma corteza ó con una lámina de ella en que se encuentran. Si saxícolas, será menester más trabajo, mediante un cincel ya de corte, el cual se aplicará á un canto de la piedra que sustenta al liquen, para hacer saltar una lámina de la misma, ya de punta, que lo hará desprender descarnándolo en su contorno.

Muchas veces sucede que los líquenes saxícolas vegetan en los cantos mismos de las pizarras, y en tal caso hácese poco menos que imposible obtenerlos enteros. Pero aun entonces, si se examina bien, se encontrarán acaso las mismas especies y bellos ejemplares en la cara plana de la pizarra, con lo cual se facilita en gran manera su arranque.

Como quiera que sea y en toda recolección procúrense, á ser posible, ejemplares enteros, grandes y adultos, provistos de apotecios ó fructificaciones, pequeños discos, líneas ó esferillas de color ordinariamente más intenso que lo restante y que se ven implantados ya en la lámina, ya en las ramificaciones (fig. 3.ª).

En toda época del año se pueden recoger los líquenes, pero son preferibles días húmedos y los siguientes á lluvias, no sólo por la mayor facilidad con que se desprenden sin quebrarse, sino también porque se encuentran entonces en plena vegetación, la cual durante la sequía está aletargada ó en suspenso. Por lo que el invierno, primavera y últimos de otoño, precisamente cuando escasean ó no existen plantas en flor son los más indicados para hacer esta recolección; con lo cual se ve que los botánicos en toda época del año tendrán ocasión de emplear bien sus diligencias en sus excursiones científicas por el campo.

8. **Su rotulación.**—A fin de no confundir unas localidades con otras conviene envolver juntos los líquenes que son de una misma localidad y poner el nombre de ésta en el mismo envoltorio, ó bien en un rótulo que dentro se coloque. Otras indicaciones de fecha no son necesarias, aunque no huelgan. La especie del árbol

en que se desarrolla, si se conoce, será bueno indicarla; la naturaleza de las rocas que sirven de soporte ellas mismas lo están diciendo. Ejemplares pequeños y delicados convendrá envolverlos y rotularlos separadamente; algunos los colocan en cajitas de fósforos ú otras análogas para defenderlos mejor é impedir que no se quiebren y desmenucen.

8. **Su preparación.**—Para quien desee formar colección de líquenes ó reunir sus recolecciones, añadiré someras instrucciones como complemento de lo dicho.

Si bien no falta quien coloque los líquenes tal como se encuentran en la naturaleza en sus correspondientes cajas y cajitas á la manera de los minerales; pero este sistema es poco seguido á causa del considerable espacio que exige.

Lo más cómodo es pegarlos en papeles como en un herbario. Los crustáceos que están en soporte lapídeo ó leñoso se pegan sin más preparación, con goma en un papel recio. Los demás convendrá prensarlos previamente, como se hace con las plantas fanerógamas, cargando encima un peso suficiente, que lo será de unos diez kilos. Cuando estén secos podrán pegarse ó bien en cartulina del tamaño acomodado al ejemplar, ó bien en hojas todas iguales del tamaño de cuartillas, cuidando de no colocarlos todos en medio, sino en las esquinas y en el centro, á fin de que al apilarlos resulte el cuaderno igualmente abultado por todas partes.

El rótulo se escribirá ni más ni menos que el de otros herbarios, con indicación de la especie, localidad, nombre del colector, fecha y otras circunstancias que se estimen convenientes.

10. **Su organización.**—En los líquenes hay que considerar los aparatos de *vegetación* y de *reproducción*.

11. **Órganos de vegetación.**—El aparato general de vegetación se llama *talo*. Su estructura puede ser homogénea (talo *homeómero*) y estratificada (talo *heterómero*), según no presente capas bien distintas ó las tenga.

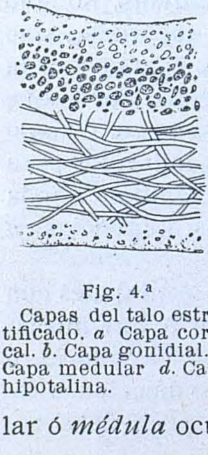



Fig. 4.ª
Capas del talo estratificado. *a* Capa cortical. *b*. Capa gonidial. *c*. Capa medular *d*. Capa hipotalina.

En el talo estratificado puede distinguirse tres capas: 1.ª *cortical*, exterior, otra inferior á ésta, *gonidial*, rica en elementos globosos que pueden ser de dos clases: *gonidios*, con cubierta bien visible y contenido verde franco y *gonimios*, con cubierta muy fina y contenido azulado ó amarillento; finalmente otra *medular*, compuesta exclusivamente de hifas (figura 4.ª). En los talos fruticulosos la capa medular ó *médula* ocupa el centro, en los foliáceos la cara inferior.

Atendiendo al contorno sobre todo en los líquenes crustáceos, el talo se llama *determinado* si está bien limitado por una línea de color generalmente más obscuro, llamada *hipotalo*, que es la capa primera por la que comenzó el crecimiento del liquen, é *indeterminado* cuando su contorno se confunde insensiblemente con el soporte (fig. 3.ª).

La cara superior del liquen se llama *epitalo* y la inferior *hipotalo*. Esta en los líquenes foliáceos lleva unos apéndices cortos radiciformes llamados *ricinas*, que fijan el talo al soporte.

Son órganos accesorios del talo las *cifelas*, los *cefalodios*, el *isidio* y los *soredios*.

Las *cifelas* son pequeñas cavidades lisas á manera de escudillas, blancas ó amarillas que se hallan en el envés de algunos líquenes, v. gr. *Sticta*.

*Cefalodios* son abultamientos diformes tuberculosos, ordinariamente de color más pálido que el talo. Se hallan en muchos géneros, como *Usnea*, *Ramalina*, *Stereocaulon*, etc.

Forma el *isidio* unas prolongaciones cilíndricas, á veces ramificadas, de la cara superior del talo y del mismo color que ella. Frecuente en el género *Parmelia*, etc.

Llámanse *soredios* unas masas diformes, pulverulentas, compuestas de hifas y gonidios. Desprendiéndose sirven para la propagación del liquen, á la manera de lo que hacen los acodos, estacas, etc., en los vegetales superiores. Ejemplo en el género *Evernia*.

12. **Órganos de reproducción.**—Los líquenes se reproducen normalmente por medio de *apotecios* y con menos frecuencia por *espermogonios* y *picnidios*.

Los *apotecios* constan de dos capas: *hipotecio* é *himenio*. El hipotecio es una capa inferior dispuesta á manera de dedal para encerrar el himenio. En el *himenio* ó tecio se hallan las *ascas*, que son unos saquitos más ó menos ovales ó elipsoidales que encierran las esporas, y las *paráfisis*, órganos similares pero mucho más delgados y sin esporas (figura 5.ª). A veces se encuentran en el himenio gonidios himeniales, á veces faltan las paráfisis. La capa superior del himenio, formada por el extremo de las ascas y paráfisis, se llama *epitecio*.

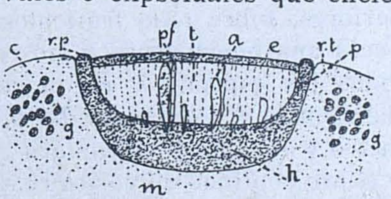


Fig. 5.ª
Estrultura del apotecio. *e*. epitecio. *p*. paratecio. *h*. hipotecio. *c* corteza. *m*. médula. *r. p*. reborde propio. *r.t*. reborde talino. *t*. tecio ó himenio. *a*. ascas. *pf*. paráfisis *g*. gonidios.

Las *formas* de los apotecios son diversas y características. Las principales son las *lirelas*, de forma alargada y con frecuencia ramosa, los apotecios *lecanori-*

*nos*, á manera de disco rodeado de reborde del color y tejido del talo y los *lecidinos*, sin reborde talino, pero con reborde propio, ó sea del mismo color del himenio (figura 6.ª). Con frecuencia el apotecio lecanorino, cóncavo ó plano al pricipio, se torna convexo en la madurez, ocultando el reborde, por lo que parece lecidino.

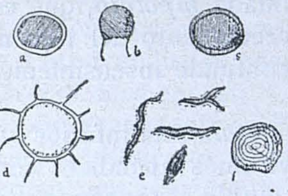



Fig 6.ª
Formas de apotecios. a. *Lecanora*. b. *Peltigera*. c. *Lecidea*. d. *Usnea*. e. *Graphis*. f. *Gyrophora*.

Las *esporas* están encerradas en las ascas en número determinado, de ocho en muchos casos. Pueden ser *simples*, ó bien estar divididas por uno ó más tabiques, llamándose entonces la espora *bilocular*, *trilocular*, etc., y *mural* ó muriforme, si las divisiones son muchas y en todas direcciones (fig. 7.ª). Las dimensiones se expresan por micras, variando su longitud de 1μ á 300μ. Su forma desde la globosa hasta la filiforme.

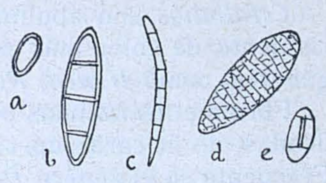



Fig. 7.ª
Formas de esporas. *a*. Simple. *b*. fusiforme. *c* plurilocular. *d*. mural. *e*. polar.

Los *espermogonios* son cavidades por lo común sumergidas en el tejido del talo y solamente visibles al exterior por un poro. Su pared inferior está tapizada de unas células alargadas llamadas *esterigmas*, en cuya extremidad se produce un órgano muy pequeño á manera de célula, recta ó curva, llamada *espermacio*, la cual reproduce la planta al modo de las esporas, pero no en el agua. Los esterigmas compuestos de piezas cortas se llaman artroesterigmas.

Los *picnidios* son órganos parecidos á los espermogonios, pero de células más gruesas que los esterigmas, y siempre simples. Á su vez dan origen á las *estilosporas*, que germinan en el agua lo mismo que las esporas propias.

13. **Estudio de los líquenes.**—Para distinguir las especies superiores, sobre todo fruticulosas y foliáceas, bastará no pocas veces una buena lente y un reactivo, pero si se quiere estudiar todas las especies y reconocer la estructura interna, se hace indispensable el manejo del *microscopio*, provisto de un micrómetro y además de la cámara clara si se pretende sacar dibujos, y el uso continuo de varios reactivos.

14. **Reactivos.**—Los más frecuentes son tres: *potasa*, ó sea el hidrato potásico ó la potasa cáustica disuelta en agua, *hipoclorito cálcico* y la solución de *yodo*.

El hipoclorito cálcico, sobre todo, se altera con facilidad, y es menester renovarlo con frecuencia, cada mes ó cada quince días. Para ver si la potasa conserva su eficacia téngase á mano algún liquen muy sensible á su acción, v. gr. la vulgar *Xanthoria parietina*, que se tiñe de rojo de sangre á su contacto.

Para abreviar se expresan las reacciones, mediante una fórmula. $K \pm$ indica que el epitalo ó corteza es sensible á la potasa y no lo es la médula al mismo reactivo. Para aplicar éste á la médula se rasca la corteza con un escalpelo. $M + K =$ A expresa que la médula por la acción de potasa se torna amarilla. $R$ expresaría que el color es el rojo y $O$ que no cambia de color.

A veces da resultado emplear un reactivo en pos de otro. $TK\,(Ca\,C) +$ indicará que hemos obtenido efecto positivo aplicando al talo el hipoclorito cálcico á continuación de la potasa.

15. **Examen microscópico.** — Inspeccionar simplemente las esporas es cosa muy fácil. Basta tomar un ejemplar bien maduro, impregnarlo en agua y dejándolo sobre la mesa, aplicar encima una lámina de cristal. Al cabo de algún tiempo, si se pasa esta lámina á la platina del microscopio, se la verá llena de las esporas de aquella especie, expulsadas por la presión que han ejercido sobre las tecas las paráfisis y gelatina himenial al hincharse (Olivier).

Con más rapidez aún se observarán rasgando con un alfiler ó escalpelo un apotecio maduro y humedecido.

16. **Técnica del abate Hue.**—Para el estudio más atento del tejido de los apotecios, tecas, paráfisis, etc., expondré brevemente la técnica del abate Hue (Causerie sur les Pannaria, p. XXXIII et seq.)

Además de un buen microscopio hace falta un micrótomo, que puede ser el Lelong, médula de saúco ó de *Ferdinanda eminens*, una navaja bien afilada, escalpelos, agujas, etc. Antes de emplear el saúco se le tiene cortado en cubitos sumergidos en alcohol de 90° para darles consistencia. No se empleará sino después de haberlo mantenido durante meses en él, á fin de que todas las células estén empapadas en el líquido, y sólo se le sacará el tiempo que dure la operación.

Se abre la médula para depositar en la rendija un trozo del apotecio ó talo bien orientado en la dirección en que se ha de seccionar, manteniendo abierta la hendidura con una cuña de marfil. Antes de comenzar los cortes se pasa la navaja por la correa ó piedra y mientras funciona se moja con agua. Los cortes se sacan de la médula con unas pinzas finas y se depositan en agua, ó bien los unos se ponen en agua glicerinada [1] para que conserven su aspecto natural y los otros en agua destilada para tratarlos con los colorantes.

(1) El agua glicerinada es una solución que tiene $^1/_3$ de glicerina y la restante de agua.

Se observa una preparación con débil aumento. Luego se examina con la potasa [1], depositando una gota al lado de la preparación y haciéndola pasar por capilaridad entre la lámina y la laminilla. Para que llegue con más facilidad, con papel chupón se atraerá el líquido al lado opuesto.

Se quita la potasa, poniendo agua destilada por un lado y papel chupón por el otro.

Luego por el mismo procedimiento se aplica el ácido nítrico, que devuelve el color natural y aclara. Se quita con agua por un lado y papel chupón por el otro que se arroja.

El mejor colorante es el *azul* que llaman *de algodón* (bleu coton) que es ácido y pertenece al grupo del llamado azul de metilo. Se pone un poco de esta solución y menos de ácido láctico fuera de la laminilla, se hace pasar por capilaridad y se observa. Se quitará el color con agua glicerinada.

Las esporas se miden en estado natural, antes de teñirlas y prepararlas, á fin de que no se hinchen.

Si los líquenes son calcícolas será conveniente descalcificarlos, lo cual se obtiene con ventaja con el licor de Perenyi, que no altera los tejidos. Su composición es la siguiente:

| | |
|---|---|
| Acido nítrico, 10 por 100. . . . . . . | 4 vol. |
| Alcohol. . . . . . . . . . . . . . | 3 vol. |
| Acido crómico, 0·5 por 100 . . . . . . . | 3 vol. |

Los preparaciones podrán conservarse en agua glicerinada; se cerrarán con bálsamo del Canadá ó del Markenlack, que es soluble en alcohol.

(1) Al hablar de potasa entiéndese siempre la solución que tenga de potasa $^1/_5$ ó algo más del peso del agua.

# CLASE LÍQUENES

Plantas celulares, con gonidios é hifas en el talo, ascas ó tecas en los apotecios y esporas en las arcas.

Su forma es membranácea, fruttculosa ó filamentosa, crustácea.

Plantas terrestres ó que no viven constantemente sumergidas en el agua.

## PRIMERA SUBCLASE

## HETERÓMEROS (Heteromerici Wallr.)

*Talo* formado por tres ó cuatro capas más ó menos distintas: la *cortical*, superior ó epitalina (fig. 4.ª), constituída por tejido celular apretado, comúnmente incoloro; la *gonidial* (fig. 4.ª, *b)*, compuesta principalmente de gonidios, los que dan el color verdoso al liquen, más visible ordinariamente cuando se le moja; la *medular* ó médula (fig. 4.ª *c)*, de tejido flojo formado por hifas; y finalmente el *hipotalo*, con frecuencia nulo, especialmente en los talos fruticulosos y en muchos crustáceos. Forma una capa celular ó filamentosa, que se prolonga inferiormente en las ricinas.

*Apotecios* manifiestos en la superficie del talo (gimnocarpos) ó hundidos en su masa (pirenocarpos).

Al ser mojados se hacen más fiexibles y blandos, pero no tanto que parezcan una masa gelatinosa y transparente.

### 1. Orden DISCOCARPALES (1)

*Talo* muy variable. *Apotecios* puestos al descubierto en forma de disco más ó menos redondeado, á veces como una placa en la superficie ó bordes del talo. Dicho disco puede ser cóncavo, plano ó convexo, sobre todo en la maduración, llegando á ser hemisférico á veces.

(1) Por ajustarme á las recomendaciones del Congreso botánico de Viena de 1905 (Reglas de Nomenclatura botánica, Recom. III) adopto la desinencia *ales* para los órdenes, diciendo, v. gr. *Discocarpales*, *Graficarpales* etc.; en vez de Discocarpos, Graficarpos, como se venía diciendo.

### 1. Familia Estictáceos

*Talo* foliáceo, extenso, más ó menos consistente, á veces apergaminado, en la cara superior liso, rugoso, en su cortorno lobado ó laciniado; su cara inferior no venosa, provista de ricinas en casi toda su extensión, y á veces de cifelas ó pseudocifelas. *Apotecios* lecanorinos, ó con reborde talino, esparcidos por el talo ó marginales. *Ascas* de ocho esporas. *Esporas* fusiformes, con tabiques (fig. 8.ª). Gelatina himenial azul con el yodo. *Espermogonios* con esterigmas articulados.

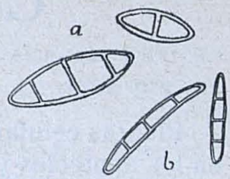



Fig. 8.ª
*a.* Esporas de *Lobaria pulmonaria* L. *b.* Esporas de *Ricasolia amplissima* Leight.

Son estos reputados por los líquenes más perfectos, «los patricios de los líquenes», según frase de Taylor y Hooker.

### 1. Género **Lobaria** Schreb

*Talo* extenso, fuerte, apergaminado, escrobiculado, ó sea con abolladuras abundantes (fig. 9.ª). Cara inferior sin cifelas ni pseudocifelas con glomérulos de ricinas no distintas, esparcidos á trechos. *Apotecios* lecanorinos (raros).

1. **Lobaria pulmonaria** L. *(Lichen pulmonarius* L.).—Talo ancho, hasta la anchura de algunos decímetros, apergaminado, lagunoso, reticulado, dividido en lacinias anchas, alargadas, sinuoso-lobadas. Epitalo de un verde rojizo, verde intenso en estado húmedo; hipotalo de un pardo pálido ó negruzco, con manchas blanquizcas (fig. 9.ª). Apotecios raros, marginales los más, algunos esparcidos, con disco rojo pardo, de 2-5 milímetros. Esporas bi-,tri-,tetraloculares (fig. 8.ª).

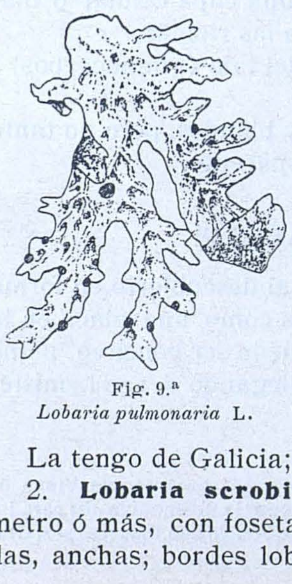


Fig. 9.ª
*Lobaria pulmonaria* L.

Hállase en los troncos y rocas musgosas de antiguas selvas. Odesa (Huesca; P. Aguilar S. J.), Moncayo.

Var. **papillaris** Del. Con isidio abundante en los márgenes y en algunas líneas de la cara superior.

La tengo de Galicia; debe de hallarse en Aragón.

2. **Lobaria scrobiculata** Scop.—Talo ancho hasta un decímetro ó más, con fosetas ó lagunas poco profundas y mal limitadas, anchas; bordes lobados ó festonados, no laciniados. Epitalo

garzo, con algunas verrugas farináceas esparcidas. Apotecios de 1-1'5 mm. Casi siempre estéril.

En las rocas musgosas. Moncayo, Benasque, etc.

2. GÉNERO **RICASOLIA** DE NOT.

*Talo* ancho, plano, no lagunoso ó abollado, recio, apergaminado. Ricinas bien distintas, reunidas en grupos, fasciculadas á trechos. Sin cifelas ni pseudocifelas. *Apotecios* elevados, cupuliformes. *Esporas* fusiformes, biloculares (fig. 8.ª). *Espermogonios* en prominencias mastoideas. Esterigmas articulados.

3. **Ricasolia amplissima** Scop. *(glomulifera* Lightf).—Talo extenso de 4-6 decímetros y más; lacinias principales de 6-8 centímetros, otro tanto más largas que anchas. Epitalo con unas pelotas de 1-2 centímetros de filamento negro-verdosos.

Troncos de los árboles. No lo tengo de Aragón, donde debe de hallarse en los bosques profundos.

4. **Ricasolia lætevirens** Lightf. *(herbacea* Huds.*)*.—Talo orbicular, extenso de 4-5 decímetros y más, con lacinias principales de 3-4 cent., otro tanto más largas que anchas y con bordes festonados. Cara superior sin glomérulos negro-verdosos.

En los bosques. Falta hallarla de Aragón.

3. GÉNERO **STICTA** SCHREB.

*Talo* plano, no escrobiculado, con frecuencia sorediosо; envés con cifelas ó pseudocifelas, con ricinas esparcidas por igual, no aglomeradas en fascículos. *Apotecios* lecanorinos ó parmelinos. Esporas tabicadas (fig. 8.ª).

5. **Sticta silvatica** L.—Talo grande, rígido, casi mate, escrobiculado, laciniado-lobado, pardusco; haz furfuráceo; envés tomentoso, pardo, más pálido en la periferia; cifelas pálidas. Apotecios esparcidos, pequeños, con margen lampiño. Esporas con 1-3 tabiques, fusiformes, incoloras (fig. 8.ª).

Moncayo.

6. **Sticta fuliginosa** Dicks.—Talo mediano ó pequeño, casi mate, pardo ó cervino, con lóbulos redondeados, cubiertos de isidio pardo ó negruzco. Envés con tomento pardo; cifelas blanquizcas ó pálidas. Apotecios pequeños, esparcidos, rojo-parduscos, con reborde pestañoso al principio; esporas como en la *silvatica*.

Moncayo?

7. **Sticta limbata** Sm.—Talo pequeño, monofilo, apenas escrobiculado, algo brillante, garzo ó pardusco; envés pálido, más ó menos tomentoso, con cifelas blanquizcas; lóbulos redondeados

salpicados de soredios ceniciento-azulados, más densos hacia el margen. Sin apotecios.

De Aragón no la he visto aún.

8. **Sticta aurata** Sm.—Talo extenso, mate ó con muy poco brillo, rojizo ó pardusco; lóbulos festonado-ondulados, generalmente con soredios de un amarillo de limón en el margen. Envés con pseudocifelas (1) pulverulentas servidores sorediformes; con tomento corto, negruzco en el centro, pardo en la circunferencia. Apotecios pardos, con margen delgado inflexo. Esporas fusiformes, con tres tabiques.

Creí verlo en el Moncayo, donde es fácil exista.

N. B. Wainio le incluye en el género *Pseudocyphellaria* Wain.

## Clave de las especies del género STICTA

1. Envés con cifelas pálidas; haz y márgenes de los lóbulos con soredios ó isidio pardo, negro ó azulado . . . . . . . . 2

—Envés con pseudocifelas pulverulentas sorediformes de un color amarillo de limón y del mismo color numerosos soredios marginales. . . . . . . . . . . . . . . . *aurata* Sm.

2. Bordes cubiertos de soredios de un gris azulado y algunos otros del mismo color esparcidos por el haz del talo, que es casi liso. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *limbata* Sm.

—Sin soredios azulados; de ordinario pardos ó negruzcos. . 3

3. Talo laciniado-lobado, pardusco; haz furfurácea, envés con cifelas pálidas; apotecios con margen lampiño. . . . *silvatica* L.

—Talo pardo ó cervino, con lóbulos redondeados, cubiertos de un isidio negruzco. Apotecios con margen pestañoso al principio. . . . . . . . . . . . . . . . . *fuliginosa* Dicks.

## Clave de los géneros de la familia de los ESTICTÁCEOS

1. Envés con cifelas ó pseudocifelas . . . 3. *Sticta* Schreb.

—Envés sin cifelas ni pseudocifelas . . . . . . . . . . 2

2. Apotecios sentados, esparcidos ó marginales. Haz reticulado-lagunosa, envés con tomento corto, con manchas pálidas y ricinas apenas distintas entre sí, agrupadas en pequeños hacecillos. . . . . . . . . . . . . . . . 1. *Lobaria* Schreb.

—Apotecios algo pedicelados. Talo liso, no lagunoso. Envés con tomento corto y ricinas bien distintas entre sí, agrupadas por hacecillos en pequeño número. . . . . . 2. *Ricasolia* Ne Not.

(1) Cifelas sorediformes ó pulverulentas, no lisas, como lo son las verdaderas cifelas.

## 2. Familia Peltigeráceos

*Talo* foliáceo, más ó menos orbicular, bien desarrollado. Capa *cortical* superior distinta, celular, ordinariamente nula la inferior. Capa *gonidial* formada de gonimios ó gonidios. Envés marcado ordinariamente de venas salientes. *Apotecios* peltiformes, ó sea á manera de una placa ó escudo aplanado, marginales ordinariamente en el extremo de los lóbulos, ó bien esparcidos por la superficie del talo. *Ascas* con 8 esporas, rara vez 4 ó 2, fusiformes, incoloras. *Paráfisis* libres y articuladas. *Espermogonios* con esterigmas articulados (fig. 10).

Fig. 10
*Peltigera venosa* L.

### 4. Género **PELTIGERA** Wildenow

Talo pardusco ó verdoso, aplicado al soporte ó con los lóbulos ascendentes; sin ó con cefalodios; con gonidios ó gonimios azulados, dispuestos de dos en dos ó más. Apotecios peltiformes, situados en el extremo de los lóbulos y nacidos en la cara superior del talo.

9. **Peltigera canina** L.—Talo grande, á veces de dos ó más decímetros de diámetro, orbicular en su conjunto, mate, algo aterciopelado, redondeado-lobado, cuando seco grisáceo, pardo verdoso cuando mojado; envés blanquizco, con nervios muy marcados, salientes, del mismo color ó más obscuros, con ricinas blanquizcas. Apotecios más largos que anchos, dispuestos en el extremo de lóbulos ascendentes, pardo-rojizos. Esporas alargado-fusiformes, de 3 — 5 tabiques.

El tipo, con venas muy marcadas hasta la periferia, comunísimo en todas partes, en el suelo de los bosques, hendiduras de las rocas, entre el musgo, etc.

Ofrece buen número de variedades.

Var. **ulorrhiza** Flk. Nervios obscuros ó casi negros, talo consistente.

Parece la más común. Moncayo, Veruela, Benasque, Sallent, Beceite, etcétera.

Var. **leucorrhiza** Flk. Talo grande, delgado, finamente tomentoso, con lóbulos anchamente redondeados; nervios blancos y ricinas del mismo color.

Moncayo, Sallent, etc.

Var. **membranacea** Ach. Muy parecida á la anterior. Talo muy delgado, tomentoso, anchamente lobado; nervios y ricinas blancos; apotecios pequeños redondeados.

Veruela.

Var. **tectorum** Del. Parecida á la var. *ulorrhiza*. Lóbulos muy crispados en los bordes.

Moncayo, Sallent.

Var. **prætextata** Flk. (*undulata* Del.). Talo de 6 — 15 ctm.; con lóbulos anchos, redondeados, los del centro muy divididos y casi ramosos, con soredios dispersos y marginales. Venas obscuras hacia el centro, blanquizcas hacia la periferia.

Moncayo.

Var. **rufescens** Neck. Talo pequeño, de 5 — 8 ctm., frecuentemente pruinoso, con lóbulos poco adherentes al soporte, ascendentes y crispados en la periferia. divididos y estrechos; apotecios grandes, casi tanto como los lóbulos; venas poco distintas, desvanecidas ó confundidas hacia los bordes, dejando intersticios pálidos.

Calatayud (Vicioso), Sierra de Albarracín (Pau), Veruela, Moncayo, Benasque, etc.

10. **Peltigera malacea** Ach.—Talo mediano, grisáceo garzo en seco, pardo lívido mojado, mate, salpicado de soredios; envés sin venas bien distintas, negro en el centro, pálido en los bordes. Apotecios redondeados, en lóbulos algo estrechados en el extremo.

Con seguridad está en Aragón, aunque de esta región no la tengo.

11. **Peltigera spuria** Ach.— Talo pequeño, con lóbulos fértiles de 1 — 3 cent., con dos ó tres divisiones (por lo cual se parece á la *polydactyla*), ceniciento; envés con venas bien distintas cenicientas que forman malla y dejan intersticios blancos. Apotecios pequeños, redondeados primero y alargados después y revueltos, pardos, con margen festoneado ó denticulado. Esporas aciculares fusiformes, con 3 — 7 tabiques.

No la he visto.

12. **Peltigera polydactyla** Neck.—Talo grande, con frecuencia de más de un decímetro, imperfectamente orticular, lampiño, brillante por encima, rojizo ó grisáceo; envés con las venas fundidas en un tomento homogéneo negruzco en el centro, rojizo en la periferia, con intersticios pálidos. Apotecios más largos que anchos, alargados, colocados en el extremo de lóbulos dispuestos en forma radiante como los dedos de la mano.

Moncayo.

Var. **erumpens** Tayl. (*sorediata* Schær.). Talo pepueño, ceniciento, delgado, salpicado de soredios redondos azulados y pulverulentos ó blanquizcos. Venas rojizas formando malla con intersticios blancos.

Rara, Moncayo.

13. **Peltigera horizontalis** L.--Talo grande, brillante, pardusco, algo escrobiculado, con lóbulos anchos. Envés con venas negras y distintas en medio formando malla, desvanecidas en la periferia. Apotecios grandes, horizontales, más anchos que largos, rojizo-parduscos. Ascas con 6 — 8 esporas fusiformes 4 — loculares.

Moncayo, Benasque, Sallent, etc.

14. **Peltigera aphthosa** L.—Talo grande de 4 — 10 cent.; delgado, verdoso en seco, de un hermoso verde humedecido, algo brillante, lobado, salpicado de cefalodios parduscos á manera de pústulas de 0′ 3 — 1 mm. Envés negro en el centro, pálido en la periferia, frecuentemente en forma de venas muy planas sobre un fondo más claro. Apotecios anchos de 2 — 8 mm., alargados, rojizos, rugosos en la cara inferior. Esporas alargadas, fusiformes, de 3 — 5 tabiques.

Moncayo, Veruela, Benasque, Sallent, etc.

15. **Peltigera venosa** L.—Talo pequeño, de unos 2 centímetros, sencillo, lobado en abanico, ceniciento-rojizo, algo brillante; envés con venas negruzcas dispuestas claramente en abanico. Apotecios grandes de 2 — 6 mm., horizontales, redondeados, pardo-rojizos (fig. 10). Esporas fusiformes con tres tabiques.

Moncayo, Sallent. En el Moncayo es algo frecuente al pie de las hayas.

### Cuadro de las especies del género PELTIGERA

1. Talo con gonimios azulados, dispuestos de dos en dos ó más. Sin cefalodios. (Subgénero *Peltigera*). . . . . . . . . 2

—Talo con gonidios. Con ó sin cefalodios. (Subgénero *Peltidea* Ach.) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

2. Talo más ó menos orbicular, borroso ó afelpado en la cara superior; envés esponjoso ó venoso . . . . . . . . . . 3

—Talo lampiño, brillante, uniforme ó algo escrobiculado. Envés con venas apenas distintas ó aplanadas formando malla . 5

3. Talo grande, orbicular, pardusco, sin soredios dispersos, á veces algunos marginales (var.); envés con venas ordinariamente estrechas, prominentes y bien distintos; apotecios redondeados, algo más largos que anchos . . . . . . . . . . . *canina* L.

—Talo mediano ó pequeño, con ó sin soredios; lóbulos fértiles estrechados ó divididos en el extremo. . . . . . . , . . . 4

4. Talo mediano, con soredios dispersos; envés sin venas bien

distintas, negro en el centro, pálido en el borde; apotecios redondeados . . . . . . . . . . . . . . . . *malacea* Ach.

—Talo pequeño, sin soredios; lóbulos fértiles divididos en dos ó tres; envés con venas pálidas formando malla; apotecios pequeños, alargados. . . . . . . . . . . . . . *spuria* Anh.

5. Talo apenas orbicular, algo brillante, liso; lóbulos alargados y estrechados, dispuestos como los dedos de la mano; envés con venas fundidas en un tomento homogéneo negruzco en el centro, rojizo en la periferia; apotecios alargados. *polydactyla* Neck.

—Talo orbicular, brillante, parcialmente foveolado; envés con venas aplanadas, formando red, negras hacia el centro, desvanecidas en la periferia; apotecios más anchos que largos. *horizontalis* L.

6. Talo grande, de un centímetro ó más, verde grisáceo, salpicado de numerosos cefaladios á manera de pústulas ó verruguitas . . . . . . . . . . . . . . . . . *aphthosa* L.

—Talo pequeño, de 2 — 4 ctm., rojizo envés con venas negras distintas en forma de abanico . . . . . . . . . *venosa* L.

### 5. Género **NEPHROMA** Ach.

Talo más ó menos orbicular, grande, liso por encima, velloso comúnmente ó aterciopelado por debajo, con gonidios ó gonimios. Apotecios marginales redondeados ó reniformes, nacidos en la cara inferior del talo en el extremo de los lóbulos y por fin revueltos hacia arriba. Ascas con ocho esporas oblongas, de 1 — 3 tabiques. Esterigmas articulados. Espermacios engrosados en los extremos (fig. 13).

16. **Nephroma resupinatum** L. (*tomentosum* auct.—Talo orbicular, de 6 — 10 centímetros, membranoso, mate, pardo-cinéreo, aterciopelado ó densa y cortamente velloso en el envés, incluso bajo los apotecios; éstos pardo-rojizos.

Moncayo.

Var. **lævigata** Ach. Algo menor, insensible á la potasa en la corteza y médula, inferiormente lampiño.

Sallent.

Var. **lusitanica** Schær. Médula enrojecida por la potasa.

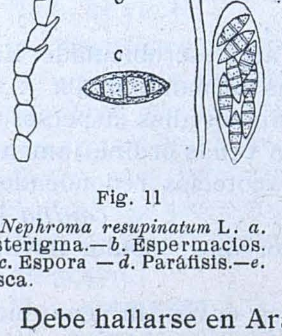



Fig. 11

*Nephroma resupinatum* L. *a*. Esterigma.—*b*. Espermacios. —*c*. Espora —*d*. Paráfisis.—*e*. Asca.

Debe hallarse en Aragón.

Var. **parilis** Arch. Negro por debajo; bordes con soredios azulados.

Creo que lo he visto del Moncayo.

6. Género **SOLORINA** Ach.

Talo ceniciento ó rojizo, poco extenso, frágil, mate; envés liso ó con pocas venas y ricinas, adherente á la tierra en que vegeta. Apotecios esparcidos en la superficie del talo, redondeados. Ascas con 2 — 8 esporas oblongas, biloculares. Espermacios cilíndricos y algo engrosados en sus extremos (fig. 12).

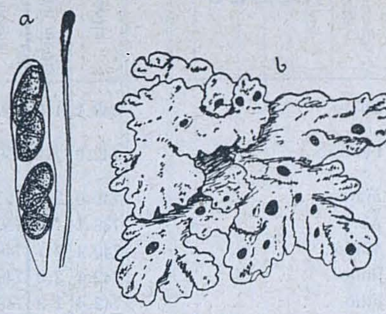


Fig. 12
*Solorina saccata* L. — *a*. Teca y paráfisis.— *b*. Talo fructífero.

Hállanse en la tierra entre las rocas, en sitios húmedos.

17. **Solorina saccata** L.— Talo ceniciento verdoso en seco, muy verde al ser mojado; envés leonado claro; apotecios muy hundidos en la superficie del talo, pardo-negruzcos.

Sierra de Guara (Pau), Sallent, Benasque, Beceite.

18. **Solorina crocea** L.—Talo rojizo en seco, verde intenso mojado; envés de un anaranjado vivo, con venas pardo-rojizas; apotecios grandes, de 4 — 7 mm., salientes como un parche sobre el talo, pardo-rojizos.

Moncayo, cerca de la cumbre (á 2.000 y más metros).

**Cuadro de los géneros de la familia de los PELTIGERÁCEOS**

1. Apotecios marginales situados en el extremo de los lóbulos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

—Apotecios esparcidos en la cara superior á manera de placas ó de fosetas, nunca marginales . . . . . . . 2. *Solorina* Ach.

2. Apotecios nacidos en la cara inferior del talo y luégo revueltos hacia arriba. . . . . . . . . . 2. *Nephroma* Ach.

—Apotecios nacidos en la cara superior del talo, no revueltos, horizontales ó levantados. . . . . . . . . 1. *Peltigera* Ach.

*(Continuará).*

## OBSERVACIONES METEOROLÓGICAS. ESTACIÓN

Latitud geográfica 41° 38'.—Longitud al E. de Madrid, 11ᵐ 13ˢ.

| MESES | BARÓMETRO, EN mm Y Á 0° | | | | | | | TERMÓMETROS CENTÍGRADOS | | | | | | | Psicrómetro | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Altura media. | Oscilación media | Atura máxima. | Fecha. | Altura mínima. | Fecha. | Oscilación extr.ª | Temperatª media | Oscilación media | Temperat. máx.ª | Fecha. | Temp.ª mínima. | Fecha. | Oscilación extr.ª | Humedad relativa media. | Tensión media en milímetros. |
| Enero | 749.1 | 1.8 | 756.0 | 18 | 739.8 | 30 | 16.2 | 4.6 | 9.8 | 15.8 | 1 | -4.6 | 19, 20 | 20.4 | 76 | 5.4 |
| Febrero | 742.9 | 2.1 | 750.7 | 27 | 732.2 | 7 | 18.5 | 6.4 | 9.5 | 18.2 | 12, 18, 28 | -5.1 | 4 y 5 | 23.3 | 64 | 5.1 |
| Marzo | 746.9 | 2.3 | 753.9 | 9 | 738 7 | 31 | 15.2 | 10.7 | 12.9 | 23.1 | 19 | 0.8 | 16 | 22.3 | 58 | 6.3 |
| Abril | 738.1 | 1.4 | 750.6 | 23 | 726.6 | 4 | 25.5 | 12.2 | 11.5 | 30.2 | 26 | 2.6 | 27 | 27 6 | 54 | 6.2 |
| Mayo | 740.4 | 2.1 | 748.0 | 2 | 732.6 | 23 | 15.4 | 16.0 | 11.8 | 29.4 | 31 | 5.3 | 2 | 24.1 | 53 | 8.1 |
| Junio | 742.1 | 2.0 | 748.7 | 24 | 736 5 | ·9 | 12.2 | 21.8 | 14.8 | 37.5 | 20 | 11.3 | 4 y 7 | 26.2 | 47 | 10.6 |
| Julio | 742.4 | 2 3 | 748 8 | 20 | 736.7 | 23 | 12.1 | 22.9 | 15.5 | 38.6 | 29 | 9.0 | 3 | 29.6 | 52 | 12.5 |
| Agosto | 743.1 | 2.1 | 748.2 | 21 | 737.5 | 1 | 10.7 | 24.7 | 15.6 | 39.8 | 5 | 12.9 | 24, 26 | 26.9 | 55 | 15.1 |
| Septiembre | 742 8 | 1.9 | 747.4 | 14 | 733.3 | 27 | 14.1 | 21.0 | 12.6 | 32.6 | 6 | 9.5 | 29 | 23.1 | 69 | 14.6 |
| Octubre | 738.6 | 1.3 | 746 1 | 11 | 725.8 | 16 | 20.3 | 14 2 | 9.2 | 26.6 | 7 | 2.6 | 18 | 24.0 | 75 | 9.2 |
| Noviembre | 741.5 | 1.1 | 748.5 | 16 | 734.8 | 2 | 17.7 | 10.6 | 8.2 | 19.9 | 2 | -0.2 | 23 | 20.1 | 80 | 8.3 |
| Diciembre | 742.5 | 1.0 | 752.9 | 18 | 732 9 | 26 | 20.0 | 9 5 | 7.4 | 17.8 | 9 | 1.4 | 19 | 16.4 | 81 | 7.7 |

## OBSERVACIONES METEOROLÓGICAS. ESTACIÓN

Latitud geográfica, 42° 7' 0''.—Longitud al E. Madrid, 3° 15' 15''.

| MESES | BARÓMETRO, EN mm Á 0° | | | | | | | TERMÓMETROS CENTÍGRADOS | | | | | | | Psicrómetro | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Altura media. | Oscilación media | Altura máxima. | Fecha. | Altura mínima. | Fecha. | Oscilación ext.ª | Temperatª media | Oscilación media | Temperat. máx.ª | Fecha. | Temp.ª mínima. | Fecha. | Oscilación extr.ª | Humedad relativamente media. | Tensión media en milímetros. |
| Enero | 724.0 | 1.1 | 730.3 | 18 | 714.7 | 30 | 15.6 | 4.2 | 10.6 | 16.0 | 7 | - 5 5 | 18 | 15.6 | 74 | 4.9 |
| Febrero | 717.8 | 1.3 | 726.1 | 27 | 707.8 | 7 | 18.3 | 5.1 | 12.4 | 19.9 | 28 | -10.3 | 3 | 20.4 | 62 | 5.0 |
| Marzo | 722.4 | 1.8 | 728.4 | 20 | 715 4 | 31 | 13.0 | 10.3 | 14.0 | 23.3 | 19 | - 5 6 | 13 | 20.8 | 50 | 5.4 |
| Abril | 713.7 | 1.0 | 726.7 | 23 | 703.3 | 4 | 23.4 | 10.9 | 12.6 | 29 0 | 25, 26 | 0 7 | 5 | 20.4 | 47 | 5.3 |
| Mayo | 717.1 | 1.4 | 724.2 | 2 | 710.4 | 23 | 13.8 | 14.6 | 13.4 | 29.2 | 31 | 1.3 | 2 | 22.6 | 54 | 7.5 |
| Junio | 718.8 | 1 5 | 724.5 | 24 | 711.9 | 30 | 12.6 | 20.9 | 16.0 | 36.4 | 20 | 7.4 | 4 | 24.1 | 40 | 9.2 |
| Julio | 719.3 | 1.5 | 725.3 | 10 | 713.9 | 1 | 11.7 | 22.4 | 15.6 | 38.1 | 29 | 6.9 | 3 | 21.0 | 44 | 10.0 |
| Agosto | 720.2 | 1.7 | 725.6 | 13 | 716.2 | 5 | 9.4 | 25 0 | 16.3 | 39.1 | 5 | 10.5 | 21 | 22.3 | 44 | 11·8 |
| Septiembre | 719 7 | 1.2 | 724.9 | 9 | 710.7 | 27 | 14.2 | 20.2 | 13.1 | 33.5 | 10, 11 | 7.4 | 17 | 19.9 | 56 | 10.7 |
| Octubre | 715.2 | 0.8 | 721.4 | 11 | 702.2 | 16 | 19.2 | 12.3 | 8.3 | 24.8 | 7 | 2.7 | 17 | 14.0 | 73 | 8.4 |
| Noviembre | 718.2 | 0.9 | 724.8 | 14 | 709.2 | 3 | 16 5 | 9 5 | 8.5 | 19.0 | 1 | - 1.0 | 25 | 12.1 | 79 | 7.5 |
| Diciembre | 718.3 | 0.6 | 729.0 | 18 | 704 9 | 27 | 24.1 | 7.5 | 7.8 | 15.6 | 9 | - 0.2 | 13 | 11.8 | 80 | 6 9 |

(*) Los números que se refieren á la dirección y fuerza del viento corresponden á dos observaciones diarias,

## DE ZARAGOZA. RESÚMENES DEL AÑO 1907.

-Altitud, en metros, 237, (cubeta del barómetro).

| ANEMOMETRO (*) | | | | | | | | | | | | | | DÍAS | | | DÍAS DE | | | | Lluvia total en mm. | Máxima en un día | Evaporación media en milímetros |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dirección del viento — FRECUENCIA DE LOS VIENTOS | | | | | | | | Fuerza aproximada — DÍAS DE | | | | Vel. media por día en kilómetros | Veloc. máxima en un día | Despejados | Nubosos | Cubiertos | Llovizna | Niebla | Nieve | Tempestad | | | |
| N. | N.E. | E. | S.E. | S. | S.O. | O. | N.O. | Calma | Brisa | Viento | Viento fuerte | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 4 | » | 6 | » | » | 1 | 50 | 9 | 21 | 25 | 7 | 495.7 | 1101.8 | 11 | 11 | 9 | 2 | 6 | » | » | 27 | 12 | 3.3 |
| » | 2 | 1 | 3 | » | » | 1 | 49 | 8 | 14 | 25 | 9 | 560.7 | 1248.3 | 16 | 9 | 3 | 1 | » | » | » | 81 | 4 | 5.4 |
| 3 | » | 1 | 12 | » | » | » | 46 | 2 | 38 | 11 | 11 | 497.6 | 1373.9 | 18 | 10 | 3 | 1 | » | » | » | 1 | 1 | 8.5 |
| 2 | 4 | » | 5 | » | 1 | » | 48 | 9 | 36 | 15 | 6 | 523.1 | 1103.1 | 12 | 12 | 6 | 1 | » | » | 1 | 20 | 7 | 10.9 |
| » | » | 5 | 22 | 2 | 2 | » | 31 | 4 | 13 | 9 | 5 | 411.0 | 794.0 | 11 | 12 | 8 | 4 | » | » | 4 | 48 | 14 | 12.3 |
| » | 1 | 1 | 16 | » | » | » | 42 | 6 | 26 | 21 | 7 | 482.8 | 1880.3 | 12 | 17 | 1 | » | » | » | » | 10 | 5 | 10.3 |
| 2 | 5 | » | 14 | » | 1 | » | 40 | 34 | 15 | 12 | 1 | 300.6 | 809.4 | 16 | 14 | 1 | » | » | » | » | 13 | 6 | 11.2 |
| » | 1 | » | 26 | » | » | » | 35 | 29 | 28 | 5 | 5 | 328.4 | 38.7 | 19 | 12 | » | » | » | » | » | 17 | 7 | 11.3 |
| » | 1 | 4 | 33 | » | 1 | » | 21 | 14 | 12 | 3 | 1 | 231.0 | 601.0 | 12 | 17 | 1 | » | » | » | » | 45 | 13 | 7.9 |
| » | 4 | » | 17 | 1 | 11 | 2 | 27 | 12 | 28 | 21 | 1 | 378.7 | 910.3 | 8 | 15 | 8 | » | » | » | » | 47 | 18 | 6.7 |
| 1 | 5 | 7 | 18 | » | 3 | 4 | 22 | 17 | 32 | 11 | » | 246.4 | 890.0 | 9 | 10 | 11 | 2 | 12 | » | » | 40 | 2 | 5.1 |
| 2 | 5 | 1 | 32 | » | 1 | 2 | 19 | 24 | 24 | 14 | » | 249.9 | 530.2 | 6 | 13 | 12 | 2 | 17 | » | » | 20 | 8 | 3 6 |

## DE HUESCA. RESÚMENES DEL AÑO 1907.

-Altitud, en metros, 503, (cubeta del barómetro),

| ANEMOMETRO (*) | | | | | | | | | | | | | | DÍAS | | | DÍAS DE | | | | Lluvia total en mm. | Máxima en un día | Evaporación media en milímetros |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dirección del viento — FRECUENCIA DE LOS VIENTOS | | | | | | | | Fuerza aproximada — DÍAS DE | | | | Vel. media por día en kilómetros | Veloc. máxima en un día | Despejados | Nubosos | Cubiertos | Llovizna | Niebla | Escarcha | Tempestad | | | |
| N. | N.E. | E. | S.E. | S. | S.O. | O. | N.O. | Calma | Brisa | Viento | Viento fuerte | | | | | | | | | | | | |
| » | 11 | 4 | 1 | 3 | 10 | 5 | 18 | 23 | 6 | 3 | 5 | 203 | 722 | 11 | 14 | 6 | 5 | 5 | 14 | » | 5 | 4 | 1.8 |
| 3 | 4 | 2 | 5 | » | 4 | 7 | 19 | 19 | 4 | 4 | 9 | 221 | 554 | 15 | 10 | 3 | 2 | » | 6 | » | 7 | 6 | 3.0 |
| » | 7 | 3 | 8 | 4 | 8 | 5 | 13 | 23 | 4 | 5 | 9 | 236 | 838 | 17 | 10 | 4 | 3 | 1 | » | 1 | 11 | 5 | 4.6 |
| 1 | 1 | 1 | 5 | 1 | 6 | 8 | 19 | 13 | 3 | 5 | 18 | 396 | 657 | 7 | 16 | 7 | 7 | » | » | 1 | 29 | 15 | 4.8 |
| » | 2 | 8 | 12 | 4 | 6 | 6 | 14 | 19 | 11 | 10 | 10 | 317 | 886 | 9 | 7 | 15 | 11 | » | » | 5 | 50 | 14 | 4.7 |
| 2 | 4 | 2 | 6 | 3 | 15 | 7 | 10 | 26 | 7 | 7 | 4 | 283 | 765 | 9 | 16 | 5 | 7 | » | 1 | 5 | 12 | 5 | 7.5 |
| 1 | 3 | 6 | 13 | 1 | 10 | 4 | 12 | 25 | 8 | 3 | 4 | 239 | 675 | 17 | 10 | 4 | 6 | » | » | 4 | 15 | 6 | 7.2 |
| » | 2 | 6 | 17 | 7 | 13 | 4 | 5 | 30 | 10 | 4 | » | 215 | 417 | 16 | 10 | 5 | 4 | » | » | 4 | 15 | 12 | 7.1 |
| » | 7 | 7 | 14 | 3 | 10 | 2 | 10 | 29 | 10 | 3 | » | 193 | 468 | 12 | 8 | 10 | 11 | » | » | 5 | 54 | 16 | 3.6 |
| » | 11 | 3 | 6 | 1 | 7 | 1 | 16 | 18 | 6 | 11 | 8 | 302 | 598 | 3 | 14 | 14 | 20 | » | 1 | 4 | 179 | 32 | 1.8 |
| 1 | 10 | 6 | 12 | 2 | 5 | 3 | 9 | 29 | 2 | 2 | » | 157 | 463 | 3 | 13 | 14 | 8 | 4 | 6 | » | 78 | 60 | 0.8 |
| 1 | 9 | 5 | 11 | 5 | 5 | 4 | 15 | 34 | 20 | » | 6 | 207 | 601 | 2 | 14 | 15 | 16 | 2 | 4 | » | 27 | 5 | 0.9 |

deficientes para Huesca.

## OBSERVACIONES METEOROLÓGICAS. ESTACIÓN

Latitud geográfica 41° 49′ 10″. - Longitud al E. de

| MESES | TERMÓMETRO, EN mm Y Á 0° | | | | | | | TERMÓMETROS CENTÍGRADOS | | | | | | | Psicrómetro | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Altura media. | Oscilación media | Altura máxima. | Fecha. . . . | Altura mínima. | Fecha. . . . | Oscilación extr.ª | Temperatª media | Oscilación media | Temperatª máx.ª | Fecha. . . . | Temp.ª mínima. | Fecha. . . . | Oscilación extr.ª | Humedad relativa media. . . | Tensión media en milímetros. . |
| Enero. . . . . . . . . | 677.9 | 0.8 | 684.6 | 6 | 668.4 | 23 | 16.2 | 3.3 | 3.3 | 13.4 | 14 | - 6.0 | 19 | 19.4 | 70 | 4.4 |
| Febrero . . . . . . . . | 671.8 | 0.7 | 680.0 | 17 | 660.6 | 7 | 19 4 | 2.2 | 9.8 | 17.8 | 28 | -10.8 | 6 | 28.6 | 72 | 4.2 |
| Marzo . . . . . . . . | 676.0 | 1.2 | 683.7 | 9 | 668.1 | 31 | 15.6 | 7.4 | 14.3 | 20.4 | 18 | - 4.4 | 13 | 24.8 | 54 | 5.2 |
| Abril . . . . . . . . . | 668.6 | 0.7 | 679.7 | 23 | 658.2 | 4 | 21.5 | 8.0 | 11.3 | 26.8 | 25 | - 1.8 | 5 | 28.6 | 63 | 5 8 |
| Mayo . . . . . . . . . | 670.7 | 0 9 | 676 8 | 2 | 662.7 | 5 | 14.1 | 11.3 | 12.0 | 25.2 | 4 | 0.2 | 2 | 25.0 | 59 | 7.2 |
| Junio . . . . . . . . . | 674.1 | 0.9 | 678.3 | 23 | 667.8 | 30 | 10.5 | 17.9 | 15.1 | 33.4 | 19 | 5.0 | 14 | 28.4 | 49 | 9.7 |
| Julio . . . . . . . . . | 674.4 | 0.9 | 679.4 | 10 | 669.2 | 1 | 10.2 | 19.0 | 15.0 | 34.8 | 29 | 3.8 | 3 | 31.0 | 44 | 9.2 |
| Agosto . . . . . . . . | 675.5 | 1.1 | 680.8 | 13 | 671.6 | 1 | 9.2 | 21.8 | 16.0 | 36.0 | 3 | 7.6 | 22 | 28.4 | 49 | 12.0 |
| Septiembre . . . . . . . | 674.2 | 1.0 | 679.7 | 9 | 665.1 | 29 | 14.6 | 16.7 | 12.4 | 30.6 | 6 | 5.6 | 28 | 25.0 | 72 | 11.5 |
| Octubre . . . . . . . . | 669 4 | 0.9 | 677.1 | 6 | 658.9 | 16 | 18.2 | 9.3 | 6.7 | 18.8 | 7 | 1.2 | 17 | 17.6 | 84 | 7.8 |
| Noviembre . . . . . . . | 671.4 | 0.8 | 678.7 | 13 | 663.9 | 3 | 14.8 | 6.2 | 7.2 | 15.0 | 1 | - 2.4 | 22 | 17.4 | 86 | 6.5 |
| Diciembre . . . . . . . | 672.0 | 0.6 | 680.5 | 18 | 662.4 | 31 | 18.1 | 4.8 | 5.4 | 11.0 | 16 | - 1.6 | 30 | 12.6 | 90 | 6.0 |

## OBSERVACIONES METEOROLÓGICAS. ESTACIÓN

Latitud geográfica 40° 21′.—Longitud al E. de

| MESES | BARÓMETRO | | | | TERMÓMETROS | | | | | | PSICRÓMETRO | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | Máximas | | Mínimas | | 9 mañana | | 3 tarde | |
| | 9 mañana . . . | 3 tarde . . . | Altura media . . | Oscilación . . | Temper.ª media . . | Oscilación . . . | Sol . . . | Sombra . . | Cubierto . . | Reflector . . | Humedad relativa . . | Tensión . . | Humedad relativa . . | Tensión . . |
| Enero . . . . . . . . . . | 689.9 | 687.7 | 688.8 | 2.2 | 2.6 | 13.4 | 13.4 | 9.3 | — 4.1 | — 6.5 | 76 | 3.4 | 66 | 5.3 |
| Febrero. . . . . . . . . | 683 8 | 682.8 | 683.3 | 1.0 | 2.0 | 12.2 | 12.6 | 8.1 | — 4.1 | — 6.1 | 79 | 3.6 | 64 | 4.5 |
| Marzo . . . . . . . . . . | 688·3 | 686.7 | 687.1 | 1:7 | 7.3 | 17.3 | 20.4 | 16.0 | — 1.3 | — 4.3 | 65 | 5.2 | 49 | 6.1 |
| Abril . . . . . . . . . . | 680.6 | 679.3 | 679.9 | 1.3 | 8.5 | 13.6 | 19.6 | 15:3 | 1.8 | — 0.9 | 66 | 5.5 | 59 | 9.1 |
| Mayo . . . . . . . . . . | 683.4 | 681.9 | 682 6 | 1.5 | 12.9 | 15.5 | 25.0 | 20.2 | 5.2 | 2.0 | 69 | 8 0 | 49 | 7.4 |
| Junio . . . . . . . . . . | 685.8 | 684.7 | 685.3 | 1.1 | 19.6 | 18.5 | 31.7 | 28.9 | 10.4 | 7 3 | 60 | 10 8 | 36 | 14.4 |
| Julio. . . . . . . . . . | 685.7 | 684.2 | 685 1 | 1.2 | 20 6 | 18.9 | 34.3 | 30.4 | 10.5 | 8 3 | 58 | 11.6 | 52 | 14.4 |
| Agosto. . . . . . . . . . | 687.0 | 685.5 | 686 2 | 1.6 | 23.2 | 18.5 | 33.8 | 32.6 | 14.0 | 11.1 | 61 | 13.0 | 56 | 18.2 |
| Septiembre . . . . . . . . | 686.7 | 685.6 | 686.2 | 1.1 | 17.3 | 14.5 | 20.0 | 24.8 | 10.0 | 7.4 | 76 | 10.7 | 64 | 12.9 |
| Octubre . . . . . . . . . | 682.1 | 680.5 | 681.2 | 1.6 | 10.8 | 9.3 | 19.4 | 15.4 | 6.2 | 3.9 | 80 | 7.1 | 74 | 8.6 |
| Noviembre . . . . . . . . | 684.2 | 682.8 | 683.5 | 1.4 | 8 0 | 10.7 | 17.2 | 13.4 | 2.6 | 0.4 | 82 | 6.1 | 71 | 7.2 |
| Diciembre. . . . . . . . . | 685.2 | 684.0 | 684.6 | 1.2 | 6.8 | 9.6 | 15.7 | 11.6 | 2.0 | — 0 5 | 87 | 5.6 | 73 | 6.8 |

(*) Las observaciones de dirección y fuerza aproximada del viento se refieren á dos observaciones diarias.

## DE SORIA. RESUMEN DEL AÑO 1907.

Madrid 1° 9′ 30″.—Altitud, en metros 1058,50.

| ANEMÓMETRO (*) Dirección del viento FRECUENCIA DE LOS VIENTOS N. | N.E. | E. | S.E. | S. | S.O. | O. | N.O. | F.ª aproximada DÍAS DE Calma. | Brisa. | Viento. | Vel. media por día en kilómetros. | Veloc. máxima en un día. | DÍAS Despejados. | Nubosos. | Cubiertos. | DÍAS DE Llovizna. | Niebla. | Escarcha. | Nieve. | Tempestad. | Lluvia total en mm. | Máxima en un día. | Evaporación media en milímetros. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 2 | 5 | » | 1 | 7 | » | 11 | 22 | 32 | 8 | 316 | 847 | 14 | 7 | 10 | » | » | 12 | 4 | » | 15 | 4 | 0.9 |
| 18 | 8 | 4 | » | » | 11 | 4 | 11 | 18 | 31 | 7 | 381 | 858 | 9 | 7 | 12 | » | » | 11 | 8 | » | 16 | 4 | 1.0 |
| 23 | 15 | 9 | 2 | 2 | 4 | 5 | 2 | 28 | 29 | 5 | 236 | 808 | 15 | 13 | 3 | 4 | » | 14 | 1 | » | 4 | 4 | 2.4 |
| 12 | 5 | 1 | 3 | 2 | 15 | 12 | 10 | 18 | 30 | 12 | 363 | 706 | 6 | 6 | 18 | 4 | » | 1 | 8 | 1 | 42 | 9 | 2 7 |
| 9 | 1 | 2 | 7 | 24 | 13 | 5 | 1 | 21 | 37 | 4 | 267 | 726 | 2 | 13 | 16 | 5 | » | 1 | » | 4 | 89 | 44 | 3.2 |
| 11 | 14 | 3 | 5 | 8 | 10 | 6 | 3 | 24 | 33 | 3 | 249 | 597 | 4 | 25 | 1 | 3 | » | » | » | 7 | 23 | 13 | 5.6 |
| 14 | 11 | 7 | 4 | 11 | 7 | 6 | 2 | 35 | 24 | 3 | 202 | 416 | 11 | 16 | 4 | 4 | » | » | » | 4 | 12 | 10 | 5.9 |
| 12 | 16 | 4 | 6 | 9 | 9 | 5 | 1 | 34 | 24 | 4 | 208 | 439 | 17 | 9 | 5 | 3 | » | » | » | 6 | 12 | 6 | 5.7 |
| 9 | 19 | 11 | 6 | 5 | 5 | 2 | 3 | 30 | 28 | 2 | 186 | 558 | 8 | 9 | 13 | 1 | » | » | » | 5 | 65 | 12 | 2.5 |
| 8 | 1 | 2 | 10 | 10 | 20 | 7 | 4 | 3 | 45 | 14 | 357 | 587 | » | 4 | 27 | 3 | » | » | 1 | 1 | 97 | 22 | 1.1 |
| 9 | 11 | 8 | 12 | 5 | 12 | 2 | 1 | 32 | 26 | 2 | 180 | 516 | 4 | 9 | 17 | 2 | 3 | 11 | » | » | 24 | 13 | 0.5 |
| 1 | 1 | 11 | 4 | 13 | 26 | 6 | » | 28 | 21 | 13 | 332 | 832 | 2 | 3 | 26 | 1 | 6 | 4 | 4 | » | 55 | 9 | 0.6 |

## DE TERUEL. RESUMEN DEL AÑO 1907.

Madrid 10m 10s.—Altitud en metros 919.

| ANEMÓMETRO (*) Dirección del viento FRECUENCIA DE LOS VIENTOS N. | N.E. | E. | S.E. | S. | S.O. | O. | N.O. | Fuerza aproximada DÍAS DE Calma. | Brisa. | Viento. | Viento fuerte. | Velocidad. | DÍAS Despejados. | Nubosos. | Cubiertos. | DÍAS DE Llovizna. | Niebla. | Escarcha. | Nieve. | Tormenta. | Lluvia en milímetros. | Agua evaporada en milímetros. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 42 | 2 | 6 | 4 | 4 | » | 2 | 2 | 49 | 7 | 4 | 2 | 342 | 18 | 6 | 7 | 1 | 23 | 21 | 5 | » | 52.6 | 15.4 |
| 39 | 6 | 4 | » | 1 | 1 | 1 | 4 | 39 | 12 | 4 | 1 | 449 | 9 | 12 | 7 | 1 | 13 | 11 | 6 | » | 5.7 | 10.2 |
| 21 | 6 | 17 | 6 | 1 | » | 2 | 9 | 49 | 5 | 3 | 3 | 421 | 22 | 6 | 3 | 2 | 10 | 12 | 1 | 1 | 35.4 | 16.2 |
| 28 | 4 | 4 | 2 | 5 | 2 | 6 | 9 | 40 | 7 | 6 | 7 | 510 | 6 | 16 | 8 | 6 | 5 | » | » | 1 | 32 0 | 14.3 |
| 15 | 3 | 4 | 3 | 25 | 4 | 7 | 1 | 52 | 8 | » | 2 | 286 | 8 | 13 | 10 | 6 | » | » | » | 1 | 53 4 | 16.9 |
| 13 | 4 | 6 | 5 | 20 | 2 | 3 | 7 | 50 | 9 | 1 | » | 111 | 11 | 15 | 4 | 2 | » | » | » | 2 | 27.9 | 10.1 |
| 8 | 5 | 5 | 6 | 22 | 2 | 9 | 5 | 57 | 5 | » | » | 318 | 19 | 11 | 1 | 2 | » | » | » | » | 3.9 | 29.6 |
| 6 | 2 | 9 | 9 | 27 | 3 | 4 | 2 | 62 | » | » | » | 204 | 19 | 8 | 4 | 5 | 1 | » | » | 2 | 36.1 | 30.0 |
| 9 | 6 | 16 | 10 | 13 | 2 | 4 | » | 58 | 2 | » | » | 150 | 10 | 7 | 13 | 8 | 5 | » | » | 3 | 78.6 | 12.8 |
| 19 | 3 | 2 | 4 | 22 | 5 | 2 | 5 | 49 | 11 | 2 | » | 463 | 3 | 14 | 14 | 11 | 4 | 3 | » | » | 102.4 | 2.5 |
| 27 | 1 | 5 | 12 | 9 | 3 | 1 | 2 | 59 | 1 | » | » | 129 | 7 | 14 | 9 | 3 | 15 | 6 | » | » | 14.9 | 2.1 |
| 11 | » | 2 | 5 | 18 | 3 | 14 | 9 | 53 | 7 | 1 | 1 | 180 | 6 | 13 | 12 | 8 | 16 | 8 | » | » | 16.0 | 1.6 |

# ESTACIÓN ME

## Observaciones verificadas duran

| DIAS | ABRIL — TEMPERATURA — MÁXIMA — Sol — Vacío | Aire | Sombra | MÍNIMA — Cubierto | Reflector | HUMEDAD RELATIVA — A las 9h | A las 15h | DIRECCIÓN DEL VIENTO — A las 9h | A las 15h | MA — TEMPERATURA — MÁXIMA — Sol — Vacío | Aire | Sombra | MÍNIMA — Cubierto | Reflector |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 54.5 | 25.0 | 18.5 | 10.0 | 7 8 | 55 | 51 | NO | NO | 58.5 | 40 8 | 32.0 | 10.8 | 9.0 |
| 2 | 53.2 | 27.5 | 21 0 | 10.0 | 9.6 | 60 | 52 | NO | NO | 58.5 | 38.0 | 29.7 | 12.0 | 10 3 |
| 3 | 53.3 | 25 5 | 18.9 | 5 8 | 6.2 | 68 | 52 | NO | NO | 63.3 | 37.8 | 29.8 | 11.5 | 8 3 |
| 4 | 55.0 | 19.5 | 15.0 | 8.3 | 6·7 | 54 | 42 | NO | NO | 65.5 | 38.8 | 32.3 | 13.5 | 10 1 |
| 5 | 53.5 | 15 0 | 10.5 | 6 0 | 4.5 | 63 | 63 | NO | NO | 61.5 | 34.0 | 28.9 | 16.5 | 12 3 |
| 6 | 48.0 | 18 9 | 9.8 | 2 0 | 0.0 | 95 | 51 | NO | NO | 60.0 | 31.3 | 24.1 | 13.8 | 11.0 |
| 7 | 43.0 | 15.0 | 9.5 | —3.0 | —6.4 | 66 | 59 | NO | NO | 57.0 | 29.8 | 26.0 | 11.0 | 8.8 |
| 8 | 46.5 | 16 5 | 12.8 | —6.8 | -10 0 | 64 | 59 | NO | NO | 68.8 | 32.8 | 28 9 | 11.5 | 8.9 |
| 9 | 54.6 | 16.4 | 12.7 | 4.2 | 2.2 | 65 | 48 | NO | NO | 60.3 | 34 0 | 31.2 | 12.5 | 9.8 |
| 10 | 50.4 | 20.7 | 15.2 | 6.4 | 4.1 | 58 | 50 | NO | NO | 62.0 | 36.0 | 32.8 | 14.5 | 11.1 |
| 11 | 53.5 | 23 0 | 16.0 | 4.5 | 2.6 | 61 | 41 | NO | NO | 60.5 | 35 4 | 31.2 | 16.6 | 12.8 |
| 12 | 47.0 | 15.2 | 11.8 | 5.0 | 2.5 | 63 | 56 | NO | NO | 46.5 | 18.6 | 14.2 | 12.0 | 9.5 |
| 13 | 51 1 | 22.8 | 14 4 | 5 0 | 2.3 | 56 | 46 | NO | NO | 53.0 | 25.5 | 18.3 | 9.0 | 7 2 |
| 14 | 53.5 | 29.5 | 18.0 | 4 5 | 2.2 | 55 | 41 | NO | NO | 68.0 | 41 0 | 25.6 | 9.0 | 5.2 |
| 15 | 33.5 | 11 6 | 9.8 | 7.5 | 4.8 | 90 | 95 | SE | SE | 61.8 | 32 8 | 25.8 | 11.2 | 9.0 |
| 16 | 43.0 | 22 5 | 16 2 | 7.2 | 6.1 | 81 | 80 | E | NE | 56.6 | 29 6 | 22.6 | 13.5 | 11.0 |
| 17 | 52.5 | 25.5 | 12.3 | 8.2 | 6.2 | 78 | 47 | S | NE | 57.0 | 27.3 | 23.2 | 11.6 | 9.1 |
| 18 | 48.6 | 18.6 | 13.8 | 6.2 | 4 1 | 98 | 76 | NO | NO | 60.2 | 38.2 | 30.0 | 12.5 | 9.0 |
| 19 | 52.4 | 19.6 | 14.8 | 6.5 | 4.2 | 56 | 46 | NO | NO | 59.3 | 40.0 | 30.5 | 12.5 | 9.8 |
| 20 | 48.6 | 16.0 | 13.2 | 4 5 | 2.4 | 63 | 41 | NO | NO | 63.5 | 40 6 | 32.5 | 16 0 | 13.6 |
| 21 | 49 0 | 19.3 | 14.5 | 1.5 | 0.0 | 42 | 36 | NO | NO | 63.5 | 39.8 | 31.2 | 14.0 | 11 0 |
| 22 | 52.2 | 27.2 | 16.6 | 1.5 | —0.4 | 59 | 31 | NO | N | 45.6 | 19 0 | 15.4 | 10.0 | 7.4 |
| 23 | 59.2 | 28.5 | 22.2 | 4.5 | 2.2 | 66 | 32 | SE | SO | 54.0 | 23.1 | 18.9 | 8.0 | 5.5 |
| 24 | 57.2 | 19.0 | 13.6 | 9.0 | 9.4 | 55 | 76 | O | NO | 55.0 | 30.5 | 23 6 | 7.5 | 4.7 |
| 25 | 51.2 | 30 3 | 15.8 | 3.0 | 0.8 | 53 | 64 | O | NO | 59.2 | 35.5 | 29.2 | 9.5 | 6.2 |
| 26 | 57.8 | 31.6 | 21.0 | 5.0 | 2.2 | 74 | 50 | O | O | 60.6 | 39 1 | 33 3 | 12.0 | 9.3 |
| 27 | 52.3 | 28.6 | 23.8 | 9.0 | 7.1 | 58 | 77 | SE | SE | 63.6 | 43.6 | 33.9 | 12.5 | 9.8 |
| 28 | 50.3 | 30 1 | 22.1 | 9.5 | 7.0 | 68 | 57 | SE | NO | 61.3 | 39.0 | 32.6 | 15.0 | 12.5 |
| 29 | 61.2 | 35.1 | 25.8 | 10 5 | 8.2 | 62 | 31 | NO | NE | 60.0 | 34 4 | 28.9 | 16.5 | 13.8 |
| 30 | 60.6 | 40.1 | 28.0 | 9.0 | 6.8 | 64 | 39 | NO | NE | 38 3 | 21.5 | 19.3 | 13 2 | 10 1 |
| 31 | | | | | | | | | | 47.8 | 25 0 | 19.6 | 14.0 | 12.8 |

# TEOROLÓGICA

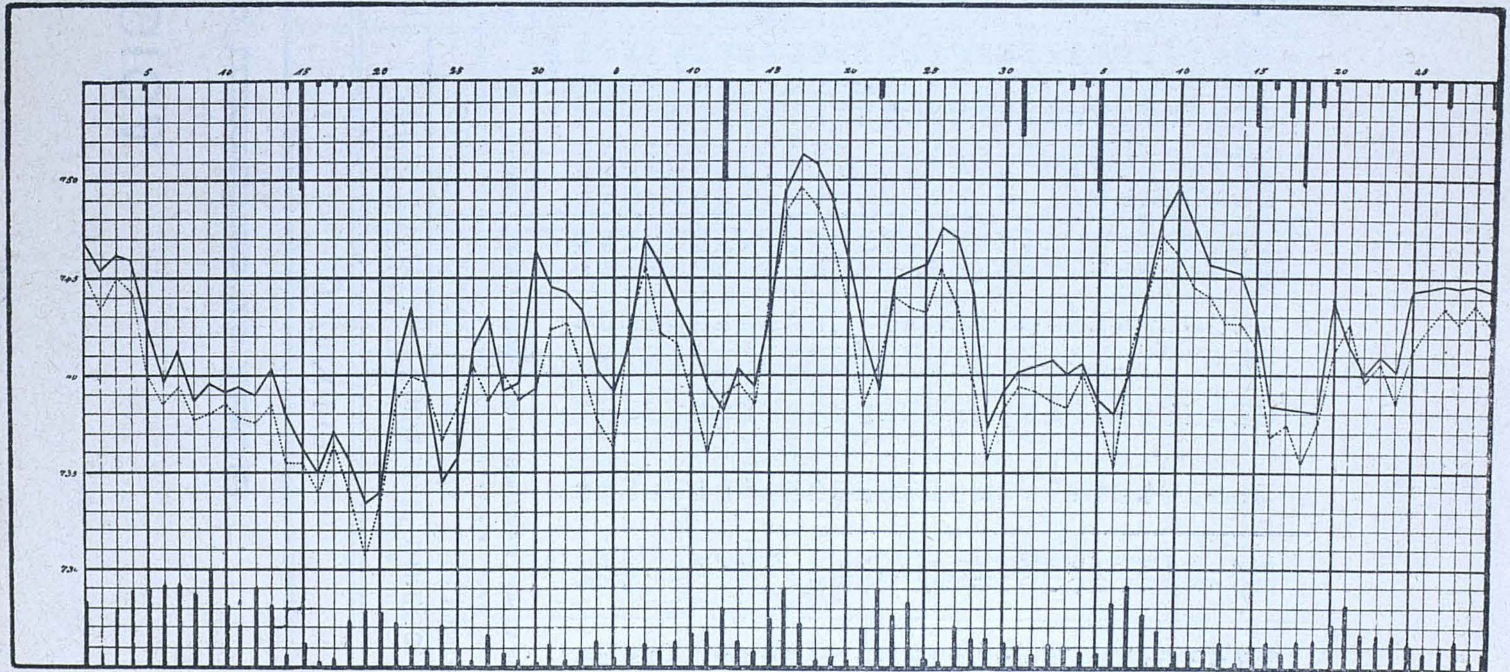
## te el segundo trimestre de 1908

| YO | | | | JUNIO | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| HUMEDAD RELATIVA | | DIRECCIÓN DEL VIENTO | | TEMPERATURA | | | | | HUMEDAD RELATIVA | | DIRECCIÓN DEL VIENTO | |
| | | | | MÁXIMA | | | MÍNIMA | | | | | |
| A las 9h | A las 15h | A las 9h | A las 15h | Sol | | Sombra | Cubierto | Reflector | A las 9h | A las 15h | A las 9h | A las 15h |
| | | | | Vacío | Aire | | | | | | | |
| 59 | 29 | SE | SE | 63.0 | 34 1 | 27.2 | 13.2 | 11.5 | 78 | 44 | SE | E |
| 50 | 38 | SE | SE | 61.5 | 35 5 | 27.8 | 15.0 | 12.2 | 93 | 41 | SE | SE |
| 55 | 42 | E | SE | 54.0 | 30 0 | 24.4 | 14.0 | 11.2 | 97 | 53 | SE | SE |
| 69 | 27 | NE | O | 50.0 | 31.4 | 20.4 | 15.0 | 12.5 | 93 | 76 | O | NO |
| 51 | 30 | NO | O | 59.1 | 33 5 | 25 4 | 14.0 | 11.7 | 73 | 58 | O | S |
| 48 | 25 | NO | NO | 59.2 | 41.5 | 25 3 | 12.5 | 9.8 | 70 | 43 | NO | NO |
| 53 | 32 | NO | NO | 55.1 | 39 0 | 21.4 | 8.6 | 6 4 | 46 | 42 | NO | NO |
| 49 | 36 | SE | SE | 54.5 | 29.2 | 21.4 | 8.3 | 6.4 | 54 | 47 | NO | NO |
| 50 | 34 | SE | SE | 56.5 | 28 3 | 24 2 | 8.6 | 6.0 | 56 | 40 | NO | NO |
| 50 | 32 | SE | SE | 59.5 | 35.2 | 30 2 | 12.5 | 11.5 | 62 | 36 | N | NE |
| 51 | 39 | SE | NE | 60.5 | 36 1 | 32.5 | 16.2 | 13.8 | 90 | 43 | NE | NE |
| 80 | 93 | O | NO | 64.5 | 41.3 | 34.0 | 15.5 | 13.2 | 43 | 35 | SE | SE |
| 62 | 45 | NO | NO | 63.5 | 40.8 | 34.5 | 13.0 | 9.6 | 40 | 34 | SE | E |
| 60 | 36 | E | SE | 65.0 | 45 3 | 35.5 | 18.5 | 16 9 | 54 | 49 | E | NE |
| 64 | 34 | O | NO | 64.0 | 41.3 | 32 5 | 19.0 | 16.8 | 53 | 83 | E | SE |
| 56 | 45 | NO | NO | 63.4 | 25 0 | 25.0 | 16.4 | 15.0 | 90 | 74 | SE | SE |
| 58 | 46 | NO | NO | 65.7 | 30 0 | 26.8 | 14.0 | 12.9 | 64 | 43 | SE | NO |
| 64 | 42 | NO | S | 45.0 | 28.0 | 21 0 | 15.5 | 13.8 | 79 | 77 | SE | SE |
| 45 | 96 | S | S | 55.0 | 30.0 | 20.0 | 11.5 | 9.8 | 66 | 61 | NO | NO |
| 56 | 34 | N | SE | 58.0 | 26.8 | 18.4 | 8.5 | 7.5 | 52 | 75 | NO | O |
| 44 | 76 | E | SE | 56.7 | 25 1 | 18.5 | 11.0 | 8.3 | 67 | 63 | NO | NO |
| 90 | 57 | NO | NO | 60.5 | 23 4 | 20 5 | 12.5 | 9.8 | 62 | 52 | NO | NO |
| 52 | 39 | NO | NO | 56.0 | 28 0 | 22.5 | 9.5 | 7.8 | 59 | 48 | NO | NO |
| 46 | 35 | NO | NO | 56.0 | 29.3 | 28.0 | 13 0 | 11.5 | 65 | 50 | NO | NO |
| 63 | 30 | E | E | 63.0 | 40 1 | 33.0 | 13.5 | 11.0 | 59 | 45 | NO | S |
| 54 | 39 | E | E | 63.5 | 43 0 | 33.2 | 17.0 | 15 5 | 59 | 39 | SE | NE |
| 55 | 39 | NO | NO | 63 0 | 36 5 | 30.0 | 17.8 | 15 5 | 56 | 54 | SE | SE |
| 52 | 30 | N | NO | 63.5 | 38.0 | 31.5 | 14.5 | 13.3 | 71 | 43 | O | N |
| 52 | 53 | NO | NO | 63.1 | 38.4 | 34.5 | 15.5 | 13.0 | 86 | 33 | NO | SE |
| 92 | 73 | SE | SE | 67.0 | 36 2 | 36.2 | 18.0 | 16.5 | 50 | 37 | SE | SE |
| 96 | 82 | SE | SE | | | | | | | | | |

# GRÁFICAS DE LAS OBSERVACIONES DEL SEGUNDO TRIMESTRE

## BARÓMETRO, PLUVIÓMETRO, ANEMÓMETRO

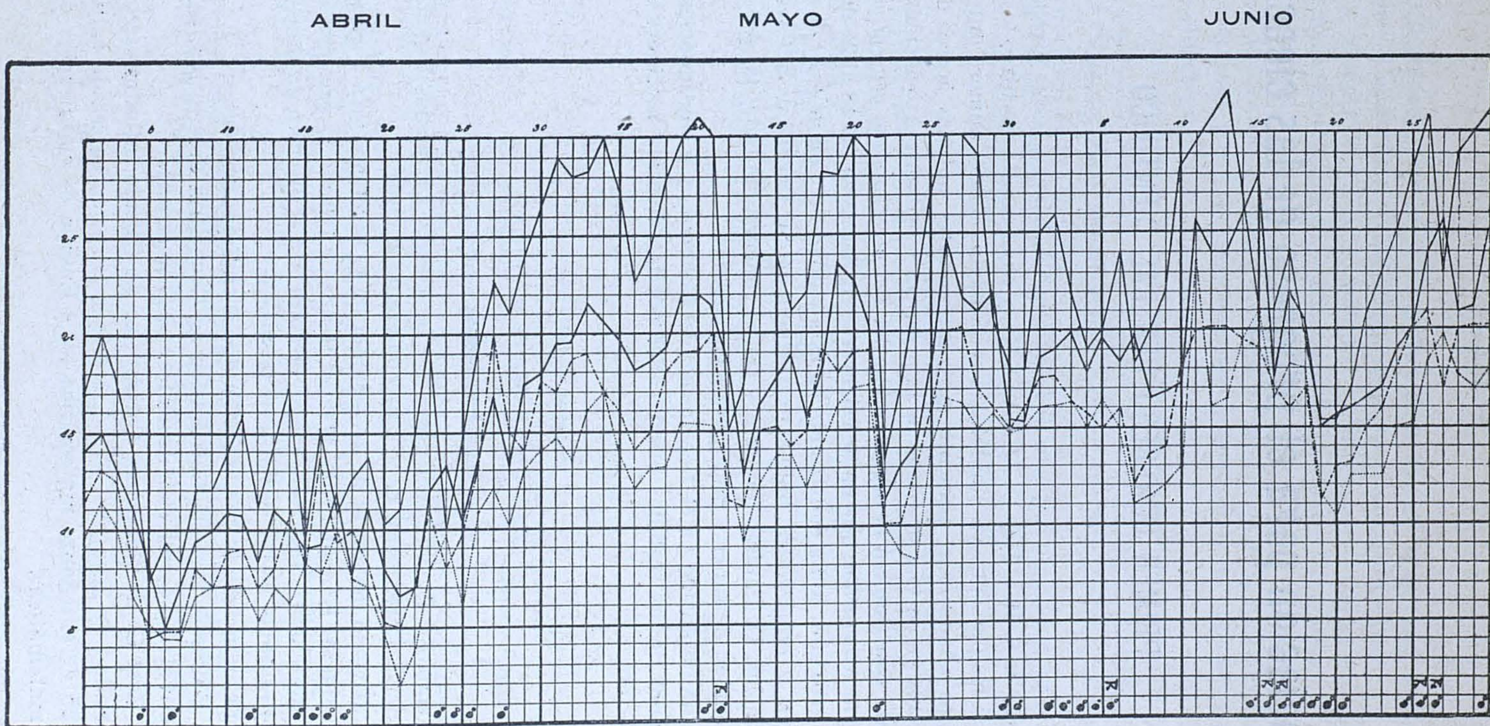
ABRIL MAYO JUNIO



**NOTA.**—Las líneas llenas y de puntos representan respectivamente las presiones á 0° y corregidas de capilaridad, á las $9^h$ y $15^h$.

Los trazos gruesos inferiores representan el recorrido diurno del viento, $1^{mm} = 100^{km}$, y los superiores el agua de lluvia, $1^{mm} = 1^{mm}$ de lluvia.

# TERMÓMETRO




**NOTA.**—Las líneas continuas representan respectivamente las temperaturas del termómetro seco á las 15h y á las 9h.

Las de puntos y trazos y puntos las temperaturas del termómetro húmedo á las mismas horas.

Los signos intercalados indican los principales fenómenos meteorológicos según el convenio internacional.

# Asociación para el progreso de las ciencias

## PRIMER CONGRESO GENERAL CIENTÍFICO

A lo ya publicado respecto de la naciente Asociación, cuyo presidente de honor es S. M. el Rey D. Alfonso XIII, y cuyo comité ejecutivo lo constituyen las personas ya nombradas en la página 49 del número anterior, debemos añadir en el presente muy interesantes noticias acerca de los proyectos ya en vías de hecho de la próspera y brillante Asociación.

Para contribuir á la organización del *Primer Congreso general científico de la Asociación*, que ha de celebrarse en Zaragoza del 18 al 25 de Octubre próximo, se ha constituído en esta ciudad un *Comité local de organización y propaganda*, bajo la presidencia del Sr. Decano de la Facultad de Ciencias, D. Paulino Savirón, y con el concurso de todas las personas de la ciudad de saber y prestigio en las ciencias.

Se ha publicado ya el *Reglamento del Congreso*, y á continuación nos ocupamos de los trabajos proyectados por las diversas Secciones de la Asociación.

### PRIMERA SECCION

### CIENCIAS MATEMATICAS

**Presidente**

Excmo. Sr. D. José Echegaray, de las Reales Academias Española y de Ciencias, Catedrático de la Universidad de Madrid.

El discurso inaugural de las sesiones de la Sección estará á cargo del vicepresidente Excmo. Sr. D. Manuel Benítez y Parodi. El presidente, excelentísimo Sr. D. José Echegaray, pronunciará el discurso de clausura y hará el resumen de los trabajos de la Sección.

Está anunciada la presentación de los trabajos siguientes:

D. Eduardo Torroja, Catedrático de Geometría descriptiva.—De la proyectividad y correlaciáu de las formas geométricas.

D. Zoel G. de Galdeano, Catedrático de Cálculo infinitesimal de la Universidad de Zaragoza.—1.° Las matemáticas en su estado actual.—2.° Plan de enseñanza matemática.—3.° Ensayo de clasificación de las ideas matemáticas.

D. Esteban Terradas, Catedrático de la Facultad de Ciencias de Barcelona.—La mecánica estadística: Nociones acerca de la misma.

D. Vicente Ventosa, Académico y Astrónomo.—Determinación por métodos astronómicos de la dirección de los vientos superiores.

D. Antonio Velá, del Observatorio astronómico y profesor de la Facultad de Ciencias de Madrid.—Métodos modernos de la Astronomía.

D. Ramón Pérez Muñoz, Profesor de la Escuela de ingenieros de minas.—Ideas sobre los cuaternios.

D. Luis Octavio de Toledo, Catedrático de análisis matemático de la Universidad de Madrid.—Notas sobre los determinantes cúbicos.

D. Vicente Vera, Profesor del Instituto de San Isidro.—El paralelo internacional de gravitación.

D. Cecilio Jiménez Rueda, Catedrático de Geometría Métrica de la Universidad de Madrid.—Algunas cuestiones elementales de geometría métrica.

D. Gabriel Galán, Catedrático de Astronomía esférica y Geodesia de la Universidad de Zaragoza.—Un abaco para el cálculo de las horas de orto y ocaso de todos los astros.

D. Juan J. Durán Lóriga, Comandante de artillería retirado.—Notas de Geometría.—Sobre la enseñanza de la matemática.

Los Sres. D. Graciano Silván y D. José Rius y Casas, han ofrecido trabajos sobre cuestiones no determinadas todavía.

## SEGUNDA SECCION

## CIENCIAS FISICO-QUIMICAS

### Presidente

Excmo. Sr. D. Francisco de Paula Rojas, de la Real Academia de Ciencias, Catedrático jubilado de Física matemática.

El discurso inaugural de las sesiones de la Sección estará á cargo del Vicepresidente Ilmo. D. José Muñoz del Castillo, y versará sobre Mecánica química.

Se han encargado de presentar Memorias ó dar conferencias sobre temas libres ó previamente designados por la Sección, los señores siguientes:

D. José M.ª Madariaga, ingeniero de minas.—(Asunto no determinado todavía).

D. Esteban Terradas, Catedrático de Acústica y Optica de la Universidad de Barcelona.—Teorías modernas sobre la emisión, dispersión y difracción.

D. Blas Cabrera, Catedrático de Electricidad y Magnetismo de la Universidad de Madrid.—Electrones y teoría de la materia.

D. José R. Carracido, Catedrático de Química biológica de la Universidad de Madrid.—Coloides.

D. Carlos Banús, Director del Laboratorio de Ingenieros Militares.—Explosivos.

D. José Casares, Catedrático de Análisis Química de la Facultad de Farmacia de Madrid.—Aplicación de los iones á la explicación de algunos fenómenos químicos.

D. José R. Mourelo, Profesor de la Escuela Superior de Artes é Industrias de Madrid.—Fosforescencia.

El Sr. D. Paulino Savirón, en nombre de los Catedráticos de la Facultad de Ciencias Químicas de la Universidad de Zaragoza, presentará una Memoria con el título: «Proyecto de unificación de los métodos de análisis químico, con aplicación á las industrias agrícolas de Aragón.«

Los señores D. Juan Fages, D. José Muñoz del Castillo, D. Antonio de Gregorio Rocasolano, D. José R. Mourelo y D. Blas Cabrera, han ofrecido notas sobre cuestiones en cuyo estudio se ocupan actualmente.

CONFERENCIAS PUBLICAS

El Ilmo. Sr. D. José Muñoz del Castillo dará una conferencia sobre Radiactividad.

SECCION TERCERA

## CIENCIAS NATURALES

**Presidente**

Excmo. Sr. D. Santiago Ramón y Cajal, de las Reales Academias Española, de Ciencias y de Medicina, Catedrático de la Universidad de Madrid y Director del Laboratorio de investigaciones biológicas.

El discurso de apertura de las sesiones de la Sección estará á cargo del Catedrático de Antropología de la Universidad de Madrid, D. Manuel Antón.

Presentarán Memorias los señores siguientes:

D. Telesforo Aranzadi, Catedrático de la Universidad de Barcelona.—Materiales para el estudio del pueblo español.

D. Daniel Jiménez de Cisneros, Catedrático del Instituto general y Técnico de Alicante.—Trabajos acerca de Geología y Paleontología del S. E. de España.

D. Manuel M. de la Escalera, Naturalista.—Sobre Coleópteros de la meseta Central de España.

D. Lucas Fernández Navarro, Catedrático de Cristalografía de la Universidad de Madrid.—La forma de las costas de la Península ibérica. Ensayo tectónico.

D. José Rioja, Director de la Estación de biología marina de Santander.—(Asunto no determinado todavía).

D. Florentino Azpeitia, Profesor de la Escuela de Ingenieros de Minas.—La diatomología española en los comienzos del siglo XX.

D. Ignacio Bolívar, Catedrático de Entomología de la Universidad de Madrid.—Extensión de la fauna paleártica en Marruecos.

D. Eduardo Boscá, Catedrático de Mineralogía y Botánica de la Universidad de Valencia.—(Asunto no determinado todavía).

D. Salvador Calderón, Catedrático de Mineralogía de la Universidad de Madrid.—Sobre la solubilidad del cuarzo.

D. Cayetano Escribano, Conservador del Museo de Ciencias Naturales.—Del polimorfismo de los pedicelos florales.

D. Santiago Ramón y Cajal, Catedrático de Histología de la Universidad de Madrid.—(Asunto no determinado todavía).

D. Luis Simarro, Catedrático de Psicología experimental de la Universidad de Madrid.—Psicología experimental del concepto.

D. José Gogorza, Catedrático de Organografía y Fisiología animal de la Universidad de Madrid.—Las glándulas cutáneas del gallipato.

D. Pedro Ferrando, Catedrático de Mineralogía y Botánica de la Universidad de Zaragoza.—Sobre la enseñanza de la Geología en España.

D. Blas Lázaro é Ibiza, Catedrático de Botánica descriptiva de la Universidad de Madrid.—(Asunto no determinado todavía).

D. Ramón Llord y Gamboa, de la Sociedad Española de Física y Química.—Minerales zincíferos de Picos de Europa.

D. Angel Cabrera Latorre, Naturalista.—Roedores de España.

D. Domingo Sánchez, del Laboratorio de Investigaciones Biológicas. El método de Cajal en el sistema nervioso de los invertebrados.

D. Odón de Buen, director de la Estación de Biología marina de Baleares.—(Asunto no determinado todavía).

D. Celso Arévalo, Profesor Auxiliar de la Facultad de Ciencias de Zaragoza.—Estudio del granito de Segovia.

D. Ricardo García Mercet, Secretario de la Real Sociedad Española de Historia Natural.—Los insectos que atacan al olivo y la remolacha.

## CUARTA SECCION

## CIENCIAS SOCIALES

### Presidente

Sr. D. Gumersindo de Azcárate, de las Reales Academias de Ciencias Morales y Políticas y de la Historia; Catedrático de la Universidad de Madrid; Presidente del Instituto de Reformas Sociales.

El discurso inaugural de las sesiones de la Sección estará á cargo del Presidente de la misma.

Se abarcará tres grupos de estudios generales: 1.º Derecpo. 2.º Sociología y 3.º Criminología.

Dentro de ellos han anunciado presentar Memorias ó dar conferencias los señores siguientes:

D. Adolfo G. Posada, Catedrático de Derecho administrativo de la Universidad de Oviedo.—La reforma social en España.

D. Rafael Salillas, Director de la Escuela de Criminología.—Sentido y tendencia de las últimas reformas en Criminología.—La casa como célula social.

D. Eduardo Dato, Presidente de la Academia de Jurisprudencia.—Sentido de la legislación y de las instituciones protectoras de la infancia en España y el extranjero.

D. Gumersindo Azcárate, Catedrático de Legislac,ón comparada de la Universidad de Madrid.—Consecuencias prácticas de la Sociología.

D. Adolfo Buylla, Catedrático de Economía política de la Universidad de Oviedo.—¿Socialismo ó socialismos? (Revista de opiniones).

D. Gregorio Herrainz, Director de la Escuela Normal Superior de Maestros de Zaragoza.—Virtualidad de la educación y enseñanza en la niñez para los ulteriores éxitos del progreso de las Ciencias.

D. José Ortega y Gaset, Doctor en Filosofía y Letras.—Los problemas cardinales de la Etica científica: El Hombre; La Ley moral; la Libertad; el Estado y la Virtud.

Han anunciado la presentación de trabajos los Sres. D. Manuel Sales y Ferré, D. Pedro Sangro, D. José Gascón, D. Marceliano Isabal, D. Miguel de Unamuno, D. Pedro Dorado Montero y D. Nicolás Tello.

### CONFERENCIAS PUBLICAS

La Sección ha designado al Excmo. Sr. D. José Canalejas para dar una conferencia durante las tareas del Congreso.

### QUINTA SECCION

## CIENCIAS FILOSOFICAS

### Presidente

Excmo. Sr. D. Marcelino Menendez Pelayo, de las Reales Academias Española, de la Historia, de Bellas Artes y de Ciencias Morales y Políticas, Director de la Biblioteca Nacional.

El discurso inaugural de las sesiones de la Sección lo leerá el vicepresidente Excmo. Sr. D. Eduardo Sanz Escartín.

Está anunciada la presentación de los trabajos siguientes:

D. Edmundo González Blanco.—1.º El tecnicismo filosófico y su reforma posible.—2.º El método en la Historia de la Filosofía.

D. Ricardo Iranzo, Profesor en el Ateneo de Madrid.—Filosofía de la asistencia social.

D. Eduardo Ibarra, Decano de la Facultad de Filosofía y Letras de Zaragoza.—Cómo debe enseñarse la Historia.

D. José R. Carracido, Académico.—El criterio teleológico en la investigación científica.

D. Fernando del Río, Doctor en Filosofía y Letras.—Nacimiento de la política en los sofistas y Platón.

D. Domingo Barnés, Doctor en Filosofía y Letras.—Notas acerca del estudio del niño.

D. Adolfo Buylla, Catedrático de Economía política de la Universidad de Oviedo.—Notas sobre Economía filosófica.

D. Adolfo Bonilla, Catedrático de Historia de la Filosofía de la Universidad de Madrid.—Un problema de Historia de la Filosofía.

D. José Ortega y Gaset, Doctor en Filosofía y Letras.—Teoría de las ideas en Platón: Un capítulo de Historia sistemática de la Filosofía.

D. Francisco Giner de los Ríos, Catedrático de Filosofía del Derecho de la Universidad de Madrid.—La función de los leyes.

D. Ricardo Codorníu, Ingeniero de Montes.—Conveniencia de una lengua auxiliar internacional para el progreso científico.

D. Francisco Santa María, Doctor en Filosofía y Letras.—La Psicología experimental del testimonio y la veracidad en los niños.

## SEXTA SECCION

## CIENCIAS MEDICAS

### Presidente

Excmo. Sr. D. Julián Calleja, de las Reales Academias de Ciencias y de Medicina, Decano de la Facultad de Medicina de Madrid y Director del Instituto para epilépticos, fundación del Marqués de Vallejo.

El discurso inaugural de las sesiones de la Sección estará á cargo del Presidente de la misma.

Está anunciada la presentación de los trabajos siguientes:

D. Federico Olóriz, Catedrático de anatomía descriptiva de la Universidad de Madrid.—Notas sobre Dactiloscopia.

D. José Gómez Ocaña, Catedrático de Fisiología de la Universidad de Madrid.—Datos para el estudio del peristaltismo intestinal. (Investigaciones experimentales sobre el intestino aislado).

D. Luis Ortega Morejón, Doctor en Medicina y Cirujía.—Patogenia epitelial del tubérculo.

D. Francisco Rodríguez Sandoval, Doctor en Medicina y Cirujía.—Inutilidad del tratamiento quirúrgico del carbunco.

D. Juan Barcia Caballero, Catedrático de la Universidad de Santiago. Importancia del trabajo en la terapéutica de la locura.

D. Antonio Morales, Catedrático de operaciones de la Facultad de Medirina de Barcelona.—1.º Tratamiento mecanoterápico en los accidentes del trabajo.—2.º Ingerto de piel de rana en las quemaduras.—3.º Procedimiento endoplástico en los quistes.

D. Eugenio Gutierrez, Director del Instituto Rubio.—Dependencia de la secreción láctea después de la gestación.

D. Nicolás Achúcarro, Doctor en Medicina.—Anatomía patológica de las enfermedades mentales.

D. Juan Madinaveitia, Médico de la Beneficencia provincial de Madrid.—La fisiología patológica de la digestión.

D. Miguel Gayarre, Médico Director del Manicomio de Ciempozuelos. Sobre la distribución periférica de las raíces posteriores de la médula.

Han anunciado la presentación de notas ó memorias sobre cuestiones no determinadas todavía, los Sres. D. Patricio Borobio, D. Juan E. Iranzo, D. Félix Cerrada, D. Sebastián Recasens y Girol, D. Carlos M.ª Cortezo y D. Hipólito Rodríguez Pinilla.

### CONFERENCIAS PUBLICAS

Durante las tareas del Congreso organizará la Sección dos conferencias generales: una que estará á cargo del Ilmo. Sr. D. José R. Carracido, y versará sobre una cuestión de Química biológica, y otra, que se ha encomendado al Excmo. Sr. D. Rafael Rodríguez Méndez, tendrá por asunto «Receptividad para las infecciones.»

## SEPTIMA SECCION

## APLICACIONES

### Presidente

Excmo. Sr. D. Eduardo Saavedra, de las Reales Academias Española, de Ciencias y de la Historia.

El discurso de apertura de las sesiones de la Sección estará á cargo de Vicepresidente Excmo. Sr. D. Francisco de P. Arrillaga.

A propuesta de D. Enrique Hauser, la Sección acoje, para ser tratadas en el Congreso, las cuestiones siguientes:

«Ultimos progresos en la aplicación del cemento armado á las construcciones civiles y militares.—Progresos recientes en la tracción eléctrica por corriente continua ó alterna.—Perfeccionamientos recientes en los métodos de transformación industrial de corriente alterna en continua.—Ultimos progresos y adelantos probables en el problema de la Aviación.—Ultimas conquistas de la Química industrial.—Perfeccionamientos recientes en la Metalurgia y estado actual de este ramo de beneficio en España, con referencia de los progresos últimamente alcanzados.—Estudio resumen de los últimos casos de aplicación de la Geología á la industria minero-carbonera.—Ultimos progresos de la aplicación á la Metalurgia de la Metalomicrografía.—Aplicación de la Físico-química á la producción industrial de gases.«

El Sr. D. Lorenzo de la Tejera propone, para ser presentados á la deliberación de los congresistas, los asuntos siguientes:

«Elementos y procedimientos de construcción de más conveniente empleo desde el punto de vista higiénico.—Higiene de poblaciones.—Higiene de fábricas, talleres, escuelas, cuarteles, asilos, hospitales, etc.—Higiene de las minas.—Higiene de las casas de vecindad.—Higiene de cuadras, establos y demás locales en que hayan de albergarse animales domésticos.»

Está anunciada por sus autores, la presentación de los trabajos siguientes:

D. Enrique Hauser, Ingeniero de Minas y Electrotécnico.—Recientes progresos en la aplicación de la Físico-Química á la producción industrial de los gases.

D. Leonardo Torres de Quevedo, Ingeniero de caminos.—Ensayos sobre resistencia del aire.

D. Enrique Losada, Coronel de artillería.—Estudio sobre armas de fuego automáticas.

D. Juan Florez, Ingeniero Industrial.—Ensayo de construcción de un aparato destinado á determinar gráficamente las condiciones de funcionamiento de un regulador.

D. Lorenzo de la Tejera, Comandante de Ingenieros.—Arquitectura é ingeniería penitenciarias.

D. José Cebada, Ingeniero de Caminos.—Enclavamientos del sistema hidrodinámico de Bianchi.

D. Domingo Mendizábal, Ingeniero de Caminos.—Estudio sobre el acero.

D. Manuel M.ª de Arrillaga, Ingeniero de Caminos.—Explotación de ferrocarriles.

D. Bienvenido Oliver, Ingeniero Industrial.—Estudio sobre la creosota.

D. Pedro de Artiñana, Ingeniero Industrial.—La fabricación de sales potásicas en España.

El mismo.—Paradojas termodinámicas del vapor de agua en las máquinas de émbolo.

D. Francisco de P. Rojas y Rubio, Comandante de Ingenieros.—Idea de un nuevo aparato para medir la velocidad de los buques.

D, Felipe Caramanzana, Director de «La Revista Agrícola».—Contribución al estudio de la arboriboltura: Necesidad de las operaciones de poda en las variedades del *Pérsico*, por su influencia en el modo de vegetar la fructificación y duración de la vida de estos árboles frutales.

D. Juan Castro Valero, Catedrático de la Escuela de Veterinaria.—Nota crítica sobre la eficacia de los diversos métodos zootécnicos.

D. Juan M. España, Ingeniero Director de los talleres de Bonvillain y Ronceray, de París.—Empleo y ventajas de las máquinas modernas en las fundiciones.

D. Eduardo Mier, Teniente coronel de Ingenieros.—Aparato para medir la frecuencia de las olas.

D. Mariano Rubio y Bellvé, Teniente coronel de Ingenieros.—Rozamiento de los cuerpos sólidos.

D. Ricardo Codorníu, Ingeniero de montes.—Observaciones acerca del crecimiento de las especies forestales que se emplean para la repoblación en la sierra de España.

D. Luis Sánchez Cuervo, Ingeniero de Caminos.—Algunos problemas que suscita la tracción eléctrica.

D. Antonio Prieto, Ingeniero de Caminos.—Cambios de vía.

CONFERENCIAS PUBLICAS

El general de Ingenieros, Excmo. Sr. D. José Marvá, dará una conferencia acerca del «Aspecto técnico social de la ingeniería«.

**Nota.**—Los señores que tengan el propósito de dirigir notas, memorias ó comunicaciones al Congreso, deberán dar cuenta de ello á la Secretaría de la Asociación (Ateneo Científico y Literario, Prado, 21, Madrid), indicando el asunto que piensan desarrollar, para incluirlo en los programas ó circulares que se publiquen y anunciarlo al Presidente de la Sección á que corresponda el trabajo.

# Primer Congreso de Naturalistas Españoles

Organizado por la *Sociedad Aragonesa de Ciencias Naturales*, y con numerosas adhesiones, tendrá lugar dicho Congreso en Zaragoza del 7 al 10 de Octubre próximo. Preliminarmente se ha dividido en seis secciones, para cada una de las cuales hay presentados entre otros los trabajos enunciados á continuación:

I. **Sección general.**—La enseñanza de la Historia natural en España, por *D. Pedro Ferrando.*

Federación de asociaciones. *R. P. Joaquin de Baruela S. J.*

Investigaciones de D. José Nicolás de Azara acerca del paradero de los originales usados por Nardo Antonio Hecho, para el compendio de la obra que el insigne Proto-Médico Dr. Hernández compuso de orden de Felipe II sobre la Historia Natural de Nueva España, publicado en Roma en 1651. *D. Ramón de Santa María.*

Biografía de D. Eduardo Zapater. *D. Ricardo J. Górriz.*

Sobre el naturalista P. Naves. *R. P. Jesús Barreiro O. A.*

Carta abierta. Fomento de la enseñanza de la Historia Natural. *D. Jorge Delgado.*

II. **Antropología.**—Carácter antropológico del vasco actual. *D. Fermín Irigaray.*

Usos y costumbres de los antiguos pobladores de las Islas Canarias. *D. Ramón de Santa María.*

III. **Zoología.**—Neurópteros nuevos. *R. P. Longinos Navas S. J.*

Apidos de España. *D. José M.ª Dusmet*

IV. **Botánica.**—Plantas del Pirineo Aragonés (Sallent). *D. Carlos Pau.*

Leyes á que obedecen las regiones y zonas botánicas. *Ibid.*

Notes de Geographie botanique aux environs de Figueras. *F. Sennen.*

Necesidad de una rigurosa precisión en las descripciones fitográficas. *D. Juan Cadevall.*

El género «Romulea» junto á la desembocadura del Miño. *R. P. Baltasar Merina S. J.*

Algunos musgos de la provincia de Burgos. *H. Elías.*

Flórula del Balneario de Fuente-Podrida y sus alrededores en la cuenca del río Cabriel, término de Requena. *Sr. Conde de Villafranqueza.*

V. **Mineralogía y Geología.**— Productos volcánicos. *Rdo. D. José Gelabert, Pbo.*

Formación de los filones concrecionales simétricos. *R. P. J. Jesús Carballo.*

La Espeleología en España. *Ibid.*

Geología del Río de Oro (Sahara español). *R. D. Norberto Font, Pbo.*

Consideraciones geográfico-botánicas relativas al punto de unión de las islas Baleares con el continente ibérico en la época terciarias. *Don Carlos Pau.*

VI. **Aplicaciones.**—Minería del Sur de la provincia de Logroño. *Don Melchor Vicente.*

Protección de los bosques. *D. Antonio Torrents.*

Sericicultura. *D. Hermenegildo Gorría y Royán.*

El billete de Congresista con derecho al 50 por 100 de rebaja en los ferrocarriles, á la asistencia á las sesiones con voz y voto, y á las actas y memorias del Congreso, vale **10 pesetas**. Además se expiden billetes de *asociado* para los individuos de la familia de los congresistas, con derecho á reducción en los viajes y á la asistencia á las sesiones, por **5 pesetas**.

Se ha constituído una Junta de Hospedajes y Festejos bajo la presidencia del Dr. D. Juan E. Iranzo, Catedrático de la Facultad de Medicina; y para cuantas referencias se deseen pueden dirigirse al Sr. Secretario D. Ramón Gómez Pou (Espoz y Mina, 6 y 8).

# CRÓNICA

**Enhorabuena.**—Nuestro querido compañero el Sr. D. Ruperto Lobo y Gómez, ha sido nombrado, después de brillante oposición, catedrático de Química general de la Universidad de Santiago de Galicia.

Alumno de esta Facultad el Sr. Lobo, y Auxiliar después en la misma, su triunfo lo consideramos como propio, y al darle nuestra más cumplida enhorabuena, le deseamos muchas prosperidades en su cátedra de la Universidad Compostelana, donde va á sustituir á otro brillante alumno de esta Facultad.

Al mismo tiempo lamentamos veruos privados de su concurso inmediato, aunque confiamos no habrá de negarnos su ayuda en nuestros trabajos, y que seguirá honrándonos con la publicación de los resultados de su labor en el Laboratorio y en la cátedra.

**Advertencia á los subscriptores.**—Como por causas de origen, han aparecido los números de los ANALES con retraso que somos los primeros en lamentar, aprovecharemos la coyuntura que ello nos ofrece para publicar el número de Septiembre (primeros de Octubre) en los primeros días del mes de Noviembre, con objeto de dar cuenta de los Congresos científicos que en los meses de Septiembre y Octubre tendrán lugar en Zaragoza.

Nos creemos en el deber de advertirlo así á los lectores, para que disculpen, al menos por esta vez, el contraste entre las fechas nominal y efectiva de la publicación de los números.

**Cuestiones propuestas y resueltas.**—La Redacción verá con verdadera satisfacción el envío de cuestiones matemáticas, físicas, químicas ó astronómicas, á proponer en los ANALES, dedicando las últimas páginas de cada número á su propuesta, y á la publicación de las soluciones remitidas por nuestros lectores, sean ó no subscriptores de la revista.

Recomendamos encarecidamente á los profesores de las Universidades, Academias y demás centros docentes, animen á sus alumnos á la resolución de los problemas propuestos, cuya solución con la firma y antefirma que deseen pueden remitirnos por correo como *original de imprenta* á esta Redacción, *Paseo de Pamplona*, 1.

**Sociedad Matemática Italiana.**—Con el título de *Matesis, Sociedad Italiana de Matemática*, se ha constituído en Italia una nueva Asociación que cuenta ya con más de 200 socios, y cuyo primer acto será la celebración de un Congreso en Firenze á mediados de Octubre próximo.

Los temas á tratar son tres: 1. *Constitución de la Sociedad.*—2. *Discusión de las propuestas de la Comisión Real para la reforma de las escuelas medias, en lo que respecta á la enseñanza de la Matemática en las nuevas Escuelas medias.*—3. *Preparación del profesorado.*

Deseamos muchas prosperidades á la nueva Sociedad, cuyo caracter parece ha de ser eminentemente didáctico, y la proponemos como ejemplo á nuestros lilustrados compañeros, por si creen llegada la hora de que los profesores españoles de Matemática se unan de modo parecido para bien de todos y de la enseñanza.

# BIBLIOGRAFÍA

**Tratado de Mecánica Racional** por D. *José Ruiz Castizo.* Tomo I, vol, 4.º mayor, de XVI, 589 páginas y 205 figuras. Fascículo 2.º *Cinemática.*—Librería de Victoriano Suarez. Madrid 1908.

Examinada ya en el número 2 de estos ANALES la primera parte de la obra, en que nuestro antiguo compañero en este centro docente y muy ilustrado catedrático de la Universidad Central, estudia la *Teoría general de los sistemas de vectores*, base necesaria de exposición en todo tratado moderno de Mecánica, vamos á ocuparnos en estas páginas de la segunda parte del tomo primero, dedicada toda ella á la *Cinemática pura.*

Como indica su mismo autor, para atender al doble carácter racional y elemental de la obra, limita el estudio á los *elementos fundamentales* de la Cinemática pura, que comprenden esencialmente los movimientos del punto y de los sistemas invariables, con exclusión de la teoría de los mecanismos, rama de aplicación, más propia de un curso especial de máquinas. La Cinemática de los sistemas flexibles la juzga superior al objeto de la obra, y solo propia de tratados superiores con dependencia natural de los fenómenos dinámicos, y la de los medios continuos queda relegada para la *Hidromecánica*, como lugar más apropiado.

Después ds un primer capítulo destinado á *Generalidades y conceptos fundamentales*, de caracter analítico, mecánico y geométrico, expone en el siguiente la *Teoría de la velocidad* lineal y angular, con los movimientos lineales y angulares correspondientes, los problemas de composición de velocidades, el movimiento helicoidal con los movimientos infinitesimales de un sólido libre, y la velocidad en el movimiento relativo.

La *Teoría de la aceleración* lineal y angular, con los problemas particulares y generales de descomposición y composición, es objeto del capítulo X de la obra y tercero del fascículo, que con el anterior subordinan el estudio de las leyes fundamentales del movimiento, expuestas en los seis capítulos siguientes.

Las *Fórmulas analíticas del movimiento*, relativas á la velocidad y á la aceleración, sin la acostumbrada distinción entre los movimientos del pun to y los de los sistemas; las *Aplicaciones al movimiento del punto*, con sus múltiples casos particulares relativos á la caida de los graves, rectilínea ó parabólica, al movimiento armónico y al de atracción; y las *Aplicaciones al movimiento continuo de los sistemas invariables*, que comenzando por las leyes geométricas de la sucesión de movimientos infinitesimales, estudia el movimiento epicicloidal plano y rodadura cilíndrica, el epicicloidal esférico y rodadura cónica, para terminar con la rodadura de dos superficies alabeadas, forman los tres primeros de esos capítulos (XI á XIII).

Los otros tres tratan consecutivamente, de las *Aplicaciones al movimiento relativo*, ya del punto ya de dos sistemas invariables animados de movimientos independientes; de las *Aplicaciones geométricas*, con las propiedades y construcciones correspondientes á los elementos de primero y segundo orden y á los movimientos de sistemas articulados; y de los *Movimientos finitos de los sistemas invariables* en relación con su determinación analítico-geométrica y con su composición.

El examen muy al por menor de la abundante doctrina expuesta tan concisa y elegantemente en toda la obra, nos conduciría á la enumeración de casi todos los párrafos de la misma, llevándonos muy lejos de nuestros propósitos al dar cuenta del trabajo de nuestro distinguido compañero. Baste decir únicamente que, aparte de la moderno de la doctrina en todas sus partes, como labor de un profesor que está muy al día en el conocimiento de su asignatura, existe unidad y condensación en la exposición, sin perjuicio de la claridad y vigor didácticos, que ganan mucho con la generalización é íntimo enlace de todos los problemas estudiados.

Además, las acertadas representaciones gráficas y los numerosos ejemplos, ejercicios y problemas, que ya desarrollados en el texto, ya propuestos simplemente en todos los capítulos, ilustran y completan la exposición, hacen del libro uno de los mejores que puedan ponerse en manos de los que deseen penetrar en el conocimiento de la Mecánica racional ó de la Geometría cinemática, cuyas teorías expuestas siempre mediante el agrupamiento lógico de las propiedades, teoremas y problemas semejantes, permiten tratar cada problema particular, como simple consecuencia que de modo fácil y natural se deriva del problema general que lo comprende, evitando de tal suerte las definiciones y razonamientos particulares y distintos, que complican extraordinariamente el desarrollo y exposición de las teorías.

Por eso reiteramos nuestra felicitación al Sr. Ruiz-Castizo, que ha publicado á nuestro juicio el mejor tratado español de Mecánica racional, muy digno de figurar entre los más brillantes de la moderna literatura extranjera, y en el que, con labor muy propia y personal, brillan la envidiable cultura matemática de su autor, con los frutos de su experiencia en el ejercicio de la enseñanza, á la que reporta muy señalado servicio con su excelente labor.— G. S.

# CUESTIONES PROPUESTAS (*).

12. En un cuadrilátero inscriptible y circunscriptible sean: $O$ el centro del círculo circunscripto, $I$ el centro del círculo inscripto $L$ el punto de intersección de las diagonales, $\alpha$ y $\beta$ dos ángulos internos consecutivos. Demostrar que

$$IL = IO \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

*G. Pesci.*

13. Determinar tres números $x$, $y$, $z$ tales que

$$(y+z)^2 - x^2 = q_1^2; \quad (z+x)^2 - y^2 = q_2^2; \quad (x+y)^2 - z^2 = q_3^2;$$

siendo $q_1$, $q_2$, $q_3$ números enteros.

*C. Alasia.*

14. La suma de las potencias impares semejantes de $2n+1$ números que formen un sistema completo de números incongruentes (mod $2n+1$), es divisible por $2n+1$.

*E. Hernández.*

15. Siendo $c$ la cuerda y $f$ la flecha de un arco $\alpha$, demostrar que se tiene, aproximadamente $\alpha = \sqrt{c^2 + \frac{16}{3} f^2}$, y determinar la aproximación que se obtiene con esta fórmula.

*L. S. de la Campa.*

16. La suma de los cuadrados de las rectas que unen entre sí los centros de los triángulos equiláteros construídos exteriormente, ó interiormente, sobre los lados de un triángulo cualquiera $ABC$ es igual á

$$\frac{5}{3}(p^2 - r\delta) - 2S\sqrt{3} \quad \text{ó} \quad p^2 - r\delta - 2S\sqrt{3},$$

siendo $p$, $r$, $S$ y $\delta = 4R + r$, las notaciones usuales.

*L. de Alba.*

17. Se considera una cónica y un punto $M$ de su plano. Una secante variable que pasa por $M$, encuentra á la cónica en $A$ y $B$. Hallar el lugar de los centros de semejanza de los círculos descritos sobre $MA$ y $MB$ como diámetros.

*E. N. Barisién.*

(*) A ruego de algunos suscriptores reproducimos las cuestiones propuestas en la *R. T. M.*, cuyas soluciones no fueron publicadas.

## CUESTIONES RESUELTAS

**6. Dado un cono de radio $R$ y altura $a$, hallar la longitud del hilo que enrollado en torno del cono, forma $n$ espiras equidistantes.**

**E. BARBETTE.**

Si, como parece natural, las distancias entre las espiras se han de medir sobre las generatrices, el problema, enunciado como está, es indeterminado.

No imponiendo otra condición sino la equidistancia de las espiras, se podrá tomar una arbitraria completamente, deduciendo de esta las demás, tomando un segmento cualquiera como *paso*.

Analizaremos la cuestión, introduciendo condiciones suficientes para hacerlo determinado, aún á riesgo de no interpretar el pensamiento del autor, pues siempre se obtendrá algún resultado útil.

Establezcamos un sistema de coordenadas esféricas, tomando como elementos de referencia: un plano meridiano del cono, el eje, y el vértice. De las tres coordenas que definen cada punto, designaremos por $\alpha$ el ángulo diedro, por $\theta$ el ángulo rectilíneo, y por $r$ el radio vector.

La curva quedará definida cuando esté dada la función uniforme y continúa $r = f(\alpha)$, pues esta relación, unida á la $\theta = \theta_0$ llamando así á la mitad del ángulo en el vértice del cono, serán las ecuaciones de la curva.

Esta función, no está sujeta según el enunciado á otra condición, aparte la continuidad, que la de verificar idéntimamente la relación

$$f(\alpha + 2\pi) = f(\alpha) + C.$$

Si suponemos fijados los puntos origen y extremo del arco de curva considerado; y además, puesto que ha de formar un número exacto de espiras, que están en una misma generatriz (la de origen) á distancias conocidas $r_0$, $r_1$ del vértice, es preciso unir á la anterior las condiciones

$$f(0) = r_0 \qquad C = \frac{r_1 - r_0}{n} = p,$$

llamando así al *paso*.

O de otro modo, si ponemos

$$r = \varphi(\alpha) + \frac{P\alpha}{2\pi} + r_0,$$

$$\varphi(\alpha) = 0 \qquad \varphi(\alpha + 2\pi) = \varphi(\alpha). \tag{1}$$

Claro está que existen infinidad de funciones periódicas que cumplen estas condiciones. Las circulares é hiperbólicas sen $\alpha$, tg $\alpha$, $Sh\alpha$, $Th\alpha$; combinaciones hechas con ellos y constantes cualesquiera, etc., etc.

En general, cualquier función periódica $y = F(x)$, después de transformada convenientemente la variable, verifica las relaciones (1). En efecto; si para un valor particular $x = x_1$, $y_1 = F(x_1)$, y ponemos $x = \alpha \frac{p}{2\pi} + x_1$ la función $p$

$$\varphi(\alpha) = F\left(\alpha \frac{p}{2\pi} + x_1\right) - y_1$$

es de la naturaleza deseada, según se ve fácilmente.

Nos limitamos á resolver el caso más sencillo; el en que la función $\varphi(\alpha)$ sea idénticamente nula. No ofrece dificultad el plantear la integral que da la longitud pedida, en el caso general; pero la integración no se podrá casi nunca llevar á cabo, excepto en el caso indicado.

Sea por consiguiente

$$r = \frac{p}{2\pi}\alpha + r_0,$$

y escribiendo $\theta$ simplemente en vez de $\theta_0$, sin olvidar que es constante, obtenemos:

$$ds^2 = r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\alpha^2 + dr^2 = \left[\frac{p^2}{4\pi^2} + r_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + \frac{pr_0}{\pi}\alpha + \frac{p^2}{4\pi^2}\alpha^2 \operatorname{sen}^2\theta\right] d\alpha^2;$$

llamando $S$ á la longitud pedida, y poniendo

$$A = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{4r_0^2\pi^2}{p^2},$$

será

$$S = \frac{p \operatorname{sen}\theta}{2\pi} \int_0^{2n\pi} \left(A + \frac{4\pi r_0}{p}\alpha + \alpha^2\right)^{\frac{1}{2}} d\alpha.$$

Obteniendo esta integral por los procedimientos ordinarios, por ejemplo, haciendo el cambio de variable dado por la relación

$$A + \frac{4\pi r_0}{p}\alpha + \alpha^2 = \left(\alpha + \frac{2\pi r_0}{p} + z\right)^2,$$

se obtiene:

$$S = \frac{\operatorname{sen}\theta}{16\pi}\left[\left(A - \frac{4\pi^2 r_0^2}{p^2}\right)z^{-2} - z^2 - 4\left(A - \frac{4\pi^2 r_0^2}{p^2}\right)lz\right]_{z_0}^{z_n}$$

siendo

$$z_0 = A^{\frac{1}{2}} - \frac{2\pi r_0}{p},\ z_1 = \left(A + \frac{8n\pi^2 r_0}{p} + 4n^2\pi^2\right) - 2n\pi - \frac{2\pi r_0}{p}.$$

Si aún suponemos que el origen del hilo es el vértice, $r_0 = 0$. La expresión anterior, restableciendo el valor de $A$ y poniendo

$$(1 + 4n^2\pi^2 \operatorname{sen}^2\theta)^{\frac{1}{2}} - 2n\pi \operatorname{sen}\theta = B,$$

valor que salvo el factor sen $\theta$, es el que adquiere ahora $z_n$, se transforma en

$$S = \frac{16\pi \operatorname{sen}\theta}{p}[B^{-2} - B^2 - 4lB].$$

No dependiendo $B$ más que de la variable $n$, demuestra esta expresión que la longitud del hilo que forma un número dado de espiras, es proporcional al paso. Consecuencia por otra parte evidente, si se tiene en cuenta que las dos curvas son en este caso homotéticas, y la razón de homotecia, es precisamente la de los pasos.

Haciendo variar $\alpha$, pueden verse algunas circunstancias de la curva. Esta se extiende indefinidamente en las dos hojas del cono completo; pasa por el vértice de éste al tomar $\alpha$ el valor $-\frac{2\pi r_0}{p}$, y la tangente en este punto, es la generatriz correspondisnte del cono.

Es una *hélice cónica*, y puede obtenerse como intersección del cono y del helicoide recto de ecuación

$$z - \frac{p\cos\theta}{2\pi}\alpha + r_0,$$

refiriéndose las $z$ al plano paralelo á la base, trazado por el vértice. La proyección sobre él es una espiral de Arquímedes.

*Julio Rey Pastor.*

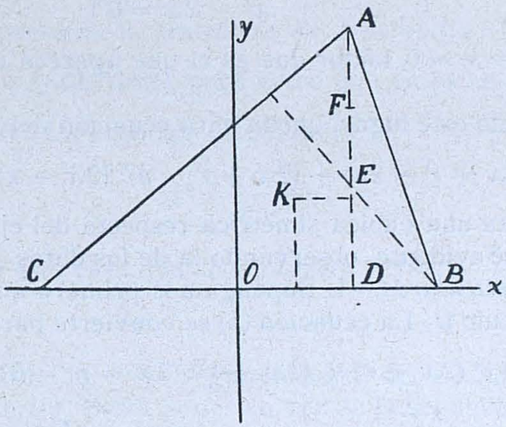
**7. Sean $B$ y $C$ dos vértices fijos de un triángulo $ABC$, $M$ el centro del círculo de los nueve puntos, y $\Omega$ el círculo trazado sobre $BC$ como diámetro. Si $A$ describe un círculo tangente á $\Omega$ en $B$, el lugar de $M$ es una conchoide de Sluss: en particular si el círculo descrito por $A$ tiene su centro en $C$, el lugar de $M$ es una trisectriz de Maclaurin; si es igual y tan-**

**gente exteriormente á $\Omega$, el lugar de $M$ es una cisoide recta. Si $A$ describe una parábola tangente en su vértice $B$ al círculo $\Omega$, el lugar de $M$ es una parábola divergente racional; determinar el parámetro de la primera parábola de modo que el lugar de $M$ sea un folio parabólico recto, ó una parábola semicúbica (*).**

**V. RETALI.**

Tomemos los ejes indicados en la figura, y sean $x', y'$ las coordenadas del punto variable $A$.

El círculo de los nueve puntos, pasa según es sabido, por $O$ medio de $DB$; por $D$, pie de la altura, y por $F$ medio de $AE$.




Por consiguiente, teniendo en cuenta que de los triángulos semejantes $DEB$, $DCA$ se obtiene $DE = \frac{r^2 - x'^2}{y'}$, — y que por tanto $DF = \frac{y'^2 - x'^2 + r^2}{4y'}$, las coordenadas del centro del círculo de Euler serán:

$$x = \frac{x'}{2}, \quad y = \frac{y'^2 - x'^2 + r^2}{4y'}. \tag{1}$$

Si designamos por $a$ la abscisa del centro del círculo que describe $A$, bastará para obtener la ecuación del lugar pedido, eliminar $x'$, $y'$ entre las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} y'^2 - 4y'y - x'^2 + r^2 &= 0 \\ y'^2 + (x' - a)^2 - (r - a)^2 &= 0 \\ x' - 2x &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Restando las dos primeras, substituyendo $x' = 2x$, despejan-

(*) Cuestión 18 propuesta en *La Matematiche pure é applicata*, p. 66, 1901.

do $y'$ para substituir en cualquiera de las primeras, resulta:

$$4y^2(2x+r-2a)(2x-r)+(2x+r-a)^2(2x-r)^2=0. \quad (3)$$

El lugar $2x - r = 0$ que aparece incluído en esta ecuación es extraño, y era fácil prever su aparición; pues, aunque en general la multiplicación por $4y'$ hecha para pasar de (1) á (2) no debiera introducir soluciones extrañas en la resultante, en este caso sucece lo contrario por admitir el sistema

$$(x'-a)^2 \quad \left.\begin{aligned} x'^2 - r^2 &= 0 \\ (r-a)^2 &= 0 \\ x' - 2x &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

solución $2x - r = 0$, factor que es el que aparece como extraño en (3).

Desechando este lugar, queda para ecuación del pedido

$$4y^2(2x+r-2a)+(2x+r-a)^2(2x-r)=0. \quad (5)$$

que representa una cúbica simétrica respecto del eje $x$; simetría por otra parte evidente, observando la de los datos.

*Casos particulares.*—I. Supongamos primero que $A$ describe el mismo círculo $\Omega$. La ecuación (5) se convierte para $a = 0$, en

$$4y^2(2x+r)+(2x+r)^2(2x-r)=0 \quad (6)$$

que representa, además del círculo $x^2 + y^2 = \frac{r^2}{4}$, el lugar extraño $2x + r = 0$ cuya aparición debía esperarse pues haciendo $a = 0$ en (4), existe la nueva solución $x = -\frac{r}{2}$.

No ofrece otro interés sinó éste la consideración del presente caso; pues siendo el triángulo $ABC$ rectángulo y, por tanto, el centro del círculo de Euler el punto medio de la mediana $AO$, de antemano se conocía el lugar descrito.

Volviendo al caso general, se ve que la curva corta al eje $x$ en los puntos $x = \frac{r}{2}$, $x = \frac{a-r}{2}$, de los cuales éste es doble. Tomándolo para origen sin cambiar el eje $x$, la ecuación se transforma en

$$(x^2+y^2)\left(x-\frac{a}{2}\right)=x^2(r-a) \quad (7)$$

que representa una *concoide de Slusse* (*); la que corresponde á

(*) V. p. ej: «Curvas especiales notables».—F Gomes Texeira.—Memoria premiada por la R. A. de Ciencias.—1905. págs. 13 y 15.

los valores $\alpha = \frac{a}{2}$; $\pm k^2 = \frac{a}{2}(r - a)$ de los dos parámetros que entran en su ecuación general. Será una *primera* ó *segunda* concoide según que éste último valor sea positivo ó negativo.

II. $a = -r$. La ecuación (7) se convierte en la

$$(x^2 + y)\left(x + \frac{r}{2}\right) = 2x^2 r$$

que puesta bajo la forma

$$x(x^2 + y^2) = -\frac{r}{2}(y^2 - 3x^2), \tag{8}$$

se ve que representa la *trisectriz de Maclaudin* (*) correspon- al valor $\alpha = -\frac{r}{2}$ del único parámetro que entra en su ecuación.

III. $a = 2r$. La ecuación es entonces

$$y^2 = \frac{x^3}{r - x}; \tag{9}$$

el lugar es en este caso una *cisoide recta* (**) $\left(\alpha = \frac{r}{2}\right)$.

---

La demostración de la segunda parte del enunciado, es casi igual á la anterior. Basta poner en vez de la segunda (2)

$$y'^2 = 2p(x' - r),$$

y hecha la eliminación, resulta

$$(2x - r)^2 (2p - r - 2x)^2 = 32py^2 (2x - r).$$

Lo mismo que antes, el lugar $2x - r = 0$, es extraño, pues si en el sistema (9) se substituye la segunda ecuación por la $x' - r = 0$, admitiendo la solución $2x = r$.

El lugar pedido, tiene en este caso por ecuación

$$(2x - r)(2x - 2p + r)^2 = 32py^2$$

que por ser de la forma $y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ representa una *parábola divergente racional* (***).

Tomando como nuevo origen el punto doble $x = p - \frac{r}{2}$, la ecuación se transforma en la

$$(x + p - r)x^2 = 4py^2 \tag{10}$$

(*) Pág. 37.
(**) Pág. 1.
(***) Pág. 82.

y para que represente un *folio parabólico recto* (*), curva cuya ecuación es de la forma

$$x^3 = \alpha (x^2 - y^2),$$

habrá de ser $p = -\frac{r}{3}$.

Para que represente una *parábola semicúbica* (**), curva de ecuación

$$\alpha y^2 = x^3,$$

la condición será $p = r$; en este supuesto sería

$$x^3 = 4py^2.$$

---

Es fácil generalizar esta cuestión, suponiendo que el punto $A$ describe una curva de orden $n$. En este caso, substituyendo la segunda ecuación (2) por la de esta curva $f(x', y') = 0$, resultará después de hecha la eliminacion, un lugar de orden $2n$. Mas por la misma causa antedicha, siempre que el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x'^2 - r^2 = 0 \\ f(x' - 0) = 0 \\ x' - 2x = 0 \end{array}\right\}$$

sea compatible, es decir, siempre que la curva $f(x', y') = 0$ pase por alguno de los puntos $B$, $C$, habrá que descartar los lugares extraños $2x \pm r = 0$ que aparezcan en la ecuación obtenida.

En la cuestión antes resuelta, como el círculo descrito por $A$ pasa por $B$, ha tenido lugar esta reducción de grado, quedando de tercero.

Como ejemplos sencillos de reducción aún mayor, pueden verse los dos siguientes:

Cuando $A$ describe un círculo que pasa por $B$ y $C$, el lugar de $K$ es el círculo de radio mitad, cuyo centro es $O$.

Si $A$ describe la hipérbola equilátera de vértices $B$ y $C$ el lugar de $K$ es el eje $BC$.

Esto último demuestra que $E$ y A son simétricos respecto del mismo; y por tanto, el lugar de todos los ortocentros $E$ de los triángulos de base $BC$ cuyos terceros vértices son puntos de la hipérbola, es ella misma.

*Julio Rey Pastor.*

---

(*) Pág. 80.
(**) Pág. 413.

Establecimiento tipográfico de Emilio Casañal, Coso, 100.—Zaragoza.