ANALES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS
DE ZARAGOZA

AÑO II DICIEMBRE DE 1908 NÚM. 8

Apuntes para la teoría geométrica de las líneas cíclicas de 4.º orden y primera especie

(CONTINUACIÓN)

Estos cuatro apartados se presentan simultáneamente

en una misma cíclica, cuando se verifica uno de ellos para un par de superficies cónicas. En efecto, el tetraedro autopolar $V_1V_2V_3V_4$, tendrá uno de sus vértices interior á la superficie esférica, de modo que, si suponemos que dicho punto es el V_4, el cono $V_4\varphi_4$ contendrá en sus dos hojas á la cíclica, siendo todo él útil, pues todas sus generatrices cortan á la esfera. La cíclica contendrá dos ramas reales y distintas, dándosele por este motivo el nombre de *bicursal*.

en un mismo haz de planos cuando se verifica uno de ellos para un par de cónicas. En efecto, el tetraedro autopolar $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$, tendrá una de estas caras exterior á la superficie esférica, de modo que, suponiendo que sea la σ_4, la cónica φ'_4 determinará con la esfera dos haces de planos tangentes comunes: uno tal que cada uno de sus rayos dejará á un mismo lado á la esfera y la cónica dejándoles á distinto los rayos del otro, y componiéndose el haz tangencial de dos partes ó haces parciales tales que, cada uno podrá considerarse engendrado de un modo continuo por un plano que ruede apoyándose sobre la esfera y la cónica; por este motivo le llamaremos *bicursal*: en este caso toda la cónica dada es útil.

12. Cada cara del tetraedro cortará á la cíclica en cuatro puntos todos reales ó todos imaginarios conjugados dos a dos; si son reales los correspondientes á una de ellas con-

Por cada vértice del tetraedro pasarán cuatro rayos del haz todos reales ó todos imaginarios, siendo en este caso conjugados dos á dos; si son reales los correspondientes á un tendrá esta cara tres pares de generatrices reales relativas á los conos cuyos vértices estén en la misma; si dichos puntos son imaginarios, las generatrices de uno de los conos contenidas en dicho plano serán reales, y las de los otros dos imaginarias, siendo en todos los casos el triángulo definido por los vértices, autopolar respecto del haz de cónicas producido en el haz de cuádricas por aquella cara.

Dos de las tres caras concurrentes en V_4, cortarán el cono $V_4\,\varphi_4$ según generatrices reales y, por consiguiente, á la cíclica, en puntos reales, cortando la otra cara al cono y á la cíclica según elementos imaginarios. Supongamos que esta cara sea la $\sigma_3 \equiv V_4 V_2 V_1$; según lo anteriormente dicho, cortará á la superficie $V_1\,\varphi_1$ según generatrices reales, y á la $V_2\,\varphi_2$ según imaginarias, ó viceversa; si suponemos lo primero la superficie $V_1\,\varphi_1$ tendrá parte parásita y este mismo plano σ_3 separará las dos hojas de los conos $V_2\varphi_2$ y $V_4\varphi_4$ así como también las dos ramas de la cíclica; luego cada rama de esta también estará en cada una de las hojas de $V_2\varphi_2$ con la diferencia de estar cada dos puntos de la curva separados por V_4 y no estarlo por el vértice V_2.

vértice, pasarán por él tres pares de tangentes reales relativas á las cónicas contenidas en las caras del tetraedro que determinen dicho vértice; si los planos son imaginarios, las tangentes á una de las cónicas serán reales é imaginarias las de los otros dos pares, siendo en todos los casos el ángulo triedro determinado por los tres planos, autopolar respecto de la serie de conos determinada por la serie de cuádricas y cuyo vértice sea el citado punto.

Por dos de los tres vértices situados en la cara exterior, pasarán cuatro planos reales del haz cíclico siendo imaginarios los que pasen por el tercer vértice que será el interior á la cónica φ_4' puesto que el triángulo $V_1 V_2 V_3$, es autopolar respecto de la misma. Si suponemos que este vértice es el $V_3 \equiv \sigma_1 \sigma_2 \sigma_4$, pasarán por él dos tangentes reales y dos imaginarias relativas á las cónicas φ'_1 y φ'_2, y si admitimos además que las de la cónica φ'_1 son las reales, las de la φ'_2 serán imaginarias; en esta hipótesis la cónica φ'_1 tendrá parte parásita. El punto V_3 separará los dos haces parciales de planos de que se compone el total; pues si consideramos una tangente á la cónica φ'_4, observaremos que desde uno de los planos tangentes á la esfera trazados por dicha recta, no puede pasarse al otro sin pasar por dicho punto V_3.

La arista $V_2 V_3$ será interior á $V_2 \varphi_2$ por ser la polar del plano $\sigma_3 \equiv V_2 V_1 V_4$ respecto del cono $V_2 \varphi_2$; luego la cara $\sigma_4 \equiv V_2 V_3 V_1$, que es la exterior á la esfera, cortará á $V_2 \varphi_2$ según dos generatrices reales y á las otras dos $V_3 \varphi_3$ y $V_1 \varphi_1$ según dos pares de imaginarias. Como consecuencia de esto deducimos que la superficie cónica $V_2 \varphi_2$ contendrá parte útil y parte parásita, puesto que en ella existirán generatrices sin puntos reales de la cíclica.

13.—Veamos á que apartado pertenece el grupo de los dos conos $V_2 \varphi_2$ y $V_4 \varphi_4$; para ello tracemos desde la recta $V_2 V_4$ los planos tangentes al cono $V_4 \varphi_4$ que serán tangentes á la cíclica en puntos reales, puesto que el cono $V_4 \varphi_4$ sabemos que no tiene parte parásita; tracemos análogamente, desde la misma recta, los planos

Este punto también será interior á la cónica φ'_2, puesto que las tangentes trazadas desde él á la misma hemos dicho que son imaginarias; pero existe una diferencia entre los dos planos tangentes á Σ trazados por una tangente á φ'_4 y el par trazado por otra tangente á φ'_2 y es, que aquellos están separados por el plano σ_4 mientras que estos no lo están por el σ_2.

El lado $V_1 V_4$ opuesto al vértice V_3 en el triángulo $V_3 V_1 V_4$ y contenido en la cara σ_2 será exterior á la cónica φ'_2; luego por el vértice $V_4 \equiv \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1$ que será interior á la esfera por ser opuesto á la cara σ_4 exterior á la misma, pasarán dos tangentes reales á φ'_2; por el contrario, ese mismo punto V_4 tendrá que ser interior á φ'_1 y φ'_3, puesto que por él no pasan planos tangentes reales á Σ; de modo que las tangentes á estas curvas trazadas por aquel punto serán imaginarias. Dedúcese de lo anterior, que la cónica φ'_2 tiene parte útil y parte parásita, puesto que existen tangentes á la misma que cortan á la esfera.

Veamos á que apartado pertenecen las cónicas φ'_2 y φ'_4; observemos para ello que la arista $\sigma_2 \sigma_4 \equiv V_1 V_3$ cortará la φ'_4 en dos puntos pertenecientes á dos planos reales del haz cíclico puesto que φ'_4 no tiene parte parásita; la misma arista cortará á la cónica φ'_2 en otros dos puntos que no podrán confundirse con los anteriores ni tangentes á $V_2 \varphi_2$ que tocarán á la cíclica en puntos imaginarios, puesto que dichos planos no pueden confundirse con los anteriores ni ser secantes á la cíclica, porque en tal caso lo serían al cono $V_2 \varphi_2$ doblemente proyectante de la misma; resulta, por consiguiente, que dichos planos no podrán cortar á la cíclica ni ser tangentes á la misma en puntos reales; luego dejarán á esta en el interior del diedro que determinen: de modo que los dos conos $V_2 \varphi_2$ y $V_4 \varphi_4$ estarán en el caso *b)*, es decir, el diedro relativo al cono $V_4 \varphi_4$ contenido todo él en el interior del relativo al cono $V_2 \varphi_2$.

Como el plano σ_4 es exterior á los conos $V_1 \varphi_1$ y $V_3 \varphi_3$, las aristas $V_1 V_4$ y $V_3 V_4$ serán interiores á ellos y como esta última recta también es interior al cono $V_4 \varphi_4$ por ser la polar de σ_3 respecto de este cono, deducimos que, los $V_3 \varphi_3$ y $V_4 \varphi_4$ pertenecerán al apartado *d)*, no teniendo ninguno de ellos parte parásita; los $V_1 \varphi_1$ y $V_4 \varphi_4$ estarán en el caso *c)*.

Análogamente, como la arista $V_2 V_3$ es interior al $V_2 \varphi_2$ y exterior al $V_3 \varphi_3$, también estos estarán en el caso *c)*.

Por ser la cara $\sigma_4 \equiv V_1 V_2 V_3$, exterior á la esfera y determimar en los conos $V_1 \varphi_1$ y $V_3 \varphi_3$ generatrices imaginarias, es decir por separar las dos hojas de estos conos, deducimos que pertenecer al segmento exterior determinado por la φ'_4 en dicha recta, puesto que en tal caso la φ'_4 tendría parte parásita, correspondiente al segmento interior de la φ'_2; luego los dos puntos en que dicha cónica φ'_2 corte á la recta $\sigma_2 \sigma_4$ serán interiores á la φ'_4 y sus puntos interiores también serán interiores á ésta; luego dichas cónicas estarán en el caso *b)*.

Como el vértice V_4 lo suponemos interior á la esfera y á las cónicas φ'_1 y φ'_3, las aristas $\sigma_1 \sigma_4 \equiv V_2 V_3$ y $\sigma_3 \sigma_4 \equiv V_1 V_2$ serán exteriores á dichas cónicas, y como $\sigma_3 \sigma_4 \equiv V_1 V_2$ también es exterior á φ'_4, puesto que V_3 es interior, resulta que las cónicas φ'_3 y φ'_4 pertenecerán al apartado *d)*, no teniendo ninguna de ellas parte parásita; las φ'_1 y φ'_4 estarán en el caso *c)*.

Análogamente, como la arista $\sigma_2 \sigma_3 \equiv V_1 V_4$ es exterior á la cónica φ'_2 y secante á la φ'_3, también estas estarán en el caso *c)*.

Por ser el punto $V_4 \equiv \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ interior á la esfera así como á las cónicas φ'_1 y φ'_3, no podrá separar los dos haces de planos tangentes que componen el total; pues si trazamos los sólo una hoja de ellos contendrá la cíclica, puesto que esta está á un solo lado del plano σ_4, y como el $V_3\,\varphi_3$ tiene todas sus generatrices útiles y el $V_1\,\varphi_1$ tiene parte parásita resulta que estos están en el caso *b*)

Para ver la posición ocupada por los conos $V_1\,\varphi_1$ y $V_2\,\varphi_2$ observemos: 1.° que la arista $V_1\,V_2$ es exterior á ambos y que el haz de arista $V_1\,V_2 \equiv \sigma_3\,\sigma_4$ formado por los planos tangentes al $V_2\,\varphi_2$ y los $\sigma_3 \equiv V_1\,V_2\,V_4$ y $\sigma_4 \equiv V_1 V_2 V_3$ como conjugados es armónico, siendo el σ_3 el que separa las dos ramas de la cíclica; 2.° que el haz de la misma arista formado por los planos tangentes al $V_1\,\varphi_1$ y los σ_3 y σ_4 como conjugados, también es armónico, y 3.° que el diedro de los dos planos tangentes al $V_1\,\varphi_1$ que contiene en su interior á la cíclica ha de contener también los dos planos tangentes al cono $V_2\,\varphi_2$, puesto que si estos planos estuviesen fuera, la cíclica no estaría contenida en el cono $V_1\,\varphi_1$ por estarlo en cada una de las dos hojas de $V_2\,\varphi_2$ que quedarían en el ángulo exterior al $V_1\,\varphi_1$; luego dichos conos estarán en el caso *a*).

dos planos tangentes á la esfera por una tangente á φ'_1 ó φ'_3 exterior á Σ, podrá irse de uno de ellos al otro por un giro, sin pasar por ninguno de los puntos interiores á la esfera, luego los dos haces parciales no estarán separados por el punto V_4; además por ser la recta $\sigma_1\,\sigma_3 \equiv V_2 V_4$ secante de la cónica φ'_3 que es toda útil, y de la φ'_1 que tiene parte parásita, el segmento interior á φ'_1 tendrá que estar dentro de la φ'_3; deduciéndose de aquí que se hallan en el caso *b*).

Para ver la posición ocupada por las cónicas φ'_1 y φ'_2 observemos: 1.° que la arista $\sigma_1\,\sigma_2 \equiv V_3 V_4$ es secante á ambas cónicas, puesto que V_3 es interior á φ'_2 y V_4 lo es á φ'_1 y que la serie formada por los dos puntos comunes á la φ_2 y V_4 y V_3 es armónica, así como la determinada por estos dos puntos y los comunes á φ'_1; 2.° que por ser V_3 interior á φ'_2 y exterior á φ'_1 y V_4 exterior á φ'_2 é interior φ'_1, deducimos que el segmento exterior á una cónica contendrá todo el interior á la otra puesto que si solo contuviese una parte, los puntos de intersección de la primera con la recta $V_3 V_4$ estarían separados por los dos puntos de la otra cónica, en cuyo caso los dos puntos V_3 y V_4 no separarían armónicamente aquellos dos pares; además, como el punto V_4 es interior á la esfera y á la cónica φ'_1 y exterior á la φ'_2, se desprende

Resumiendo lo anterior, vemos que la cíclica puede considerarse engendrada por seis pares de conos que agrupados los de cada par de aristas opuestas serán los siguientes:

$V_1 V_2 — \begin{matrix} V_2\varphi_2 \\ V_1\varphi_1 \end{matrix}$	la arista $V_1 V_2$ es exterior á los dos conos que están en el caso.... *a)*
$V_3 V_4 — \begin{matrix} V_3\varphi_3 \\ V_4\varphi_4 \end{matrix}$	la arista $V_3 V_4$ es interior á los dos conos que están en el caso.... *d)*
$V_1 V_3 — \begin{matrix} V_1\varphi_1 \\ V_3\varphi_3 \end{matrix}$	$V_1 V_3$ es exterior á los conos que están en el caso. *b)*
$V_2 V_4 — \begin{matrix} V_2\varphi_2 \\ V_4\varphi_4 \end{matrix}$	$V_3 V_4$ es exterior á los conos que están en el caso *b)*
$V_1 V_4 — \begin{matrix} V_2\varphi_1 \\ V_4\varphi_4 \end{matrix}$	$V_1 V_4$ es interior á $V_1\varphi_1$ y exterior á $V_4\varphi_4$ estando estos en el caso .... *c)*
$V_2 V_3 — \begin{matrix} V_2\varphi_2 \\ V_3\varphi_3 \end{matrix}$	$V_2 V_3$ es interior á $V_2\varphi_2$ y exterior á $V_3\varphi_3$ que estarán en el caso .... *c)*

14.—Los casos particulares que esta clase de cíclicas pueden presentar son debidos al número de cilindros doblemente proyectantes, ó lo que viene á ser lo mismo, al número de vértices del tetraedro que se

que, todo el segmento interior á la φ'_1 estará en el segmento exterior á la φ'_2 y también, por una razón análoga, todo el segmento interior á la φ'_2 estará en el exterior de la φ'_1; luego las cónicas φ'_1 y φ'_2 estarán en el caso *a)*.

Resumiendo, se vé que el citado haz de planos puede considerarse engendrado por seis pares de cónicas que agrupadas las relativas á cada par de aristas opuestas serán las siguientes:

$\sigma_1\sigma_2 — \begin{matrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{matrix}$	la arista $\sigma_1\sigma_2$ es secante á las dos cónicas que están en el caso............ *a)*
$\sigma_3\sigma_4 — \begin{matrix} \varphi'_3 \\ \varphi'_4 \end{matrix}$	la arista $\sigma_3\sigma_4$ es exterior á las dos cónicas que están en el caso.......... *d)*
$\sigma_1\sigma_3 — \begin{matrix} \varphi'_3 \\ \varphi'_3 \end{matrix}$	$\sigma_1\sigma_3$ es secante á las dos cónicas que están en el caso.... *b)*
$\sigma_2\sigma_4 — \begin{matrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_4 \end{matrix}$	$\sigma_2\sigma_4$ es secante á las dos cónicas que están en el caso.... *b)*
$\sigma_1\sigma_4 — \begin{matrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_4 \end{matrix}$	$\sigma_1\sigma_4$ es exterior á φ'_1 y secante de φ'_4; comprendidas en..... *c)*
$\sigma_2\sigma_3 — \begin{matrix} \varphi'_2 \\ \varphi'_3 \end{matrix}$	$\sigma_2\sigma_3$ es exterior á φ_2 y secante á φ'_3; comprendidas en .... *c)*

Las variedades que esta especie de haces de planos de cuarta clase pueden presentar son debidas al número de caras del tetraedro que pasan por el centro de la esfera; tendremos por consiguiente tres sustituyen por direcciones; tendremos, por consiguiente, tres variedades, según que estos sean 1, 2 ó 3.

En todos los casos, subsistirá el vértice interior que hemos designado por V_4 y el cono correspondiente que seguirá conteniendo en sus dos hojas la curva. Cuando un vética se sustituye por una dirección, la involución cuyo centro es dicho punto y cuyo plano central es la cara opuesta, se transforma en simetría respecto de esta cara y aquélla dirección; si son dos los vértices que se sustituyen por direcciones, la involución respecto de la arista que determinan y la opuesta, se transforma en simetría respecto de esta última arista y aquella orientación, y si son tres los vértices sustituidos, la involución respecto del cuarto vértice (que será el centro de la esfera) y la cara opuesta al mismo, se transforma en simetría respecto de aquel centro.

Dentro de la primera variedad pueden ocurrir dos casos, según que el vértice sustituído sea el V_2 ó uno de los V_1 ó V_3, es decir, según que el cilindro sea hiperbólico ó elíptico y, aun dentro de este último, según que el cilindro penetre ó nó en la esfera. Cuando hay dos cilindros existirán tantos casos como combinaciones puedan formarse con $V_1 V_2$ y V_3 es decir tres.

Por último, si los trés vértices

variedades (además del caso general) según que una, dos ó tres caras pasen por el centro de Σ.

En todos los casos, subsistirá por consiguiente, la cara exterior que hemos designado por σ_4 y la cónica correspondiente φ'_4 que en la tercera variedad quedará reducida á un cono director, y el plano de esta cónica separará los dos haces de planos de que se compone el total. Cuando un plano pasa por el centro, la involución de que es plano central quedará reducida á una simetría; si dos caras pasan por el centro, cada una de ellas vendrá á ser plano de simetría del haz y su recta de intersección un eje de simetría, y si las tres caras pasasen por dicho centro, existirían tres planos de simetría del haz de cuarta clase, tres ejes de simetría y un centro de ídem, que será el centro de la esfera.

Dentro de la primera variedad de estos haces, pueden ocurrir dos casos según que el plano que pase por el centro sea el σ_2 ó uno de los σ_1 ó σ_3, es decir, según que se trate de las cónicas φ'_2, φ'_1 ó φ'_3. Cuando los planos de dos cónicas, pasen por el centro, existirán tantas combinaciones como pueden formarse con σ_1, σ_2 y σ_3.

Por último si los tres planos

ces son los sustituídos por direcciones, las cíclicas reciben el nombre especial de *cónicas esféricas*, pues, en este caso, el vértice V_4 es el centro de la esfera, por ser polo del plano del infinito.

15.—*Cíclicas reales unicursales.*—El segundo género del grupo 20 corresponde al caso en que los planos conjugados comunes á dos cuádricas del haz son imaginarios.

Sean $V_1\varphi_1$ y $V_2\varphi_2$ las dos superficies cónicas que nos definen la cíclica; A_1 y A'_1, A_2 y A'_2 los planos tangentes al cono $V_1\varphi_1$ y al $V_2\varphi_2$, respectivamente, trazados por la recta $V_1 V_2 \equiv \sigma_3\sigma_4$, estando separados los dos primeros por los otros dos; la parte de superficie cónica $V_1\varphi_1$ comprendida en el diedro $A_1 A_2$ no contendrá puntos reales de la cíclica, de modo que será parte parásita; una cosa análoga sucederá á la $V_2\varphi_2$ comprendida en el diedro $A'_1 A'_2$; en cambio serán útiles las partes de cada una de aquéllas superficies contenidas en el $A_2 A'_2$.

El plano A_2 tangente al cono $V_2\varphi_2$; tocará á este según una generatriz y cortará al $V_1\varphi_1$ según dos, que con aquella determinarán dos puntos de la cíclica, con el plano osculador

σ_1, σ_2 y σ_3 pasasen por el centro obtendríamos los haces de planos correlativos de las *cónicas esféricas.*

Haz cíclico de planos de cuarta clase unicursal.-El segundo género del grupo 20 corresponde al caso en que los dos puntos conjugados comunes á dos cuádricas de la serie son imaginarios.

Sean φ'_1 y φ'_2 las dos cónicas que nos definen el citado haz; A_1 y A'_1, A_2 y A'_2 los puntos de intersección de las cónicas φ'_1 y φ'_2 con la recta $\sigma_1\sigma_2 \equiv V_3 V_4$ de intersección de sus planos, estando separados los dos primeros por los otros dos y siendo el segmento exterior común á las dos cónicas el $A'_1 A_2$; la parte de radiación de planos tangentes á φ'_1 que contenga puntos del segmento $A_1 A_2$ no contendrá planos reales del haz, siendo parte parásita de dicha radiación; una cosa análoga sucederá á la de la radiación de planos tangentes á φ'_2 que corte al segmento $A'_2 A'_1$; en cambio serán útiles las partes de cada una de aquéllas radiaciones que corten el segmento $A'_1 A_2$ exterior á las dos cónicas.

Por el punto A_2 de la φ'_2 pasarán dos tangentes á la φ'_1 que serán generatrices de la desarrollable envolvente del haz cíclico de planos, siendo su punto de contacto con esta de retroceso (*L A* núm. 166); siendo aquellas generatrices las tangentes en ellos.

Estos dos puntos de contacto del plano A_2 bitangente á la cíclica pertenecerán al plano σ_1 polar de V_1; las demás generatrices de $V_1\varphi_1$ cortarán la cíclica en pares de puntos armónicamente separados por V_1 y σ_1 resultando, como consecuencia, que dicha curva estará formada por dos arcos armónicamente separados por el vértice V_1 y el plano σ_1, uniéndose estos arcos en aquellos dos puntos de la cíclica contenidos en el plano σ_1, y pudiéndo describirse la parte real de un modo continuo por un punto; esta curva que presenta todos sus puntos ordinarios, recibe el nombre de *unicursal* por el motivo anteriormente citado; otro tanto de lo dicho para el cono V_1 φ_1 sucede con el $V_2\varphi_2$.

Por ser dos caras del tetraedro autopolar imaginarias conjugadas, tendrá éste reales las otras dos caras, que nos determinarán dos vértices reales en la arista real en que se corten las dos caras imaginarias. Existirán por tanto, solo dos superficies cónicas reales doblemente proyectantes, siendo las otras dos imaginarias con vértice imaginario. Hay, en este caso, mordedura de un cono en otro y de ambos en la esfera.

Las variedades que pueden

cónica punto límite de la misma y de retroceso de la arista de retroceso de aquélla desarrollable. (*L A* núm. 178).

Los dos rayos del haz que pasen por el punto A_2 doble de la desarrollable, contendrán la tangente á φ'_2 en este punto, y, por consiguiente, pasarán por el polo V_1 del plano σ_1 respecto de Σ, puesto que V_1 es polo de $\sigma_1\sigma_2$ respecto de la cónica φ'_2; por las demás tangentes de φ'_1 pasarán dos planos armónicamente separados por el plano σ_1 y el punto V_1 resultando, como consecuencia, que dicho haz se compondrá de dos haces tales que, de un modo continuo podremos pasar del uno al otro por aquellos dos planos que pasan por V'_1; por cuyo motivo le daremos el nombre de *unicursal*; siendo ordinarios todos sus planos.

Como dos vértices del tetraedro son imaginarios conjugados, tendrá éste reales los otros dos vértices, que nos determinarán una arista real, siendo además reales las caras que pasan por la recta real definida por aquellos puntos imaginarios; existirán, por tanto, solo dos cónicas dobles reales de la desarrollable envolvente del citado haz de planos; las otras dos cónicas serán imaginarias, así como sus planos.

Las variedades corresponpresentarse, serán debidas al número de cilindros de segundo orden que sustituyan á los conos.

1.6— *Cíclicas nodales.*—Corresponden éstas al grupo 21, según ya hemos visto (8), existiendo tres superficies cónicas de segundo orden doblemente proyectantes de las mismas, dos de las cuales, las $V_2 \varphi_2$ y $V_3 \varphi_3$, son tangentes á un mismo plano σ_1 á lo largo de dos generatrices que por ser tangentes conjugadas respecto de Σ (6), serán perpendiculares. También vimos que este plano σ_1 cortaba á la superficie cónica $V_1 \varphi_1$ según dos generatrices que eran tangentes de la cuártica armónicamente separadas por aquellas dos de contacto, siendo el vértice V_1 punto doble de la línea, por lo cual se da á ésta el nombre de *cuártica nodal alabeada.*

17.—Se distinguen en este grupo tres géneros de cuárticas. En el primero que corresponde al caso en que uno de los diedros $\sigma_1 A_2$, $\sigma_1 A_3$ de arista $V_2 V_3$, en que están inscritos los conos $V_2 \varphi_2$ ó $V_3 \varphi_3$ esté contenido en el interior del otro, cortará el plano σ_1 al cono $V_1 \varphi_1$ según dos generatrices reales tangentes cada una de ellas á cada uno de los dos arcos reales de la curva que deben paden al número de cónicas dobles cuyos planos pasen por el centro de la esfera.

Haz cíclico de planos nodal de cuarta clase.—Corresponden al grupo 21, existiendo solo tres cónicas dobles de su desarrollable envolvente, dos de las cuales las φ'_2 y φ'_3 tienen un punto común V_1 con un plano tangente común σ_1 que es el determinado por las dos tangentes á cada una de aquellas en V_1, cuyas tangentes serán perpendiculares por ser conjugadas respecto de Σ. También vimos que por V_1 pasaban dos tangentes á la cónica φ'_1 contenida en el plano σ_1 tangente común á las dos primeras, armónicamente separadas por las tangentes á φ'_2 y φ'_3; el plano σ_1 es rayo doble del haz que consideramos, por contener dos generatrices de la desarrollable envolvente, pudiéndose designar con el nombre de *haz cíclico de planos nodal de cuarta clase.*

Existen en este grupo tres géneros de haces de planos correspondientes á otras tantas desarrollables de cuarta clase. En el primer género que corresponde al caso en que el segmento exterior á una de las dos cónicas φ'_1 ó φ'_2 determinado en la recta de intersección de sus planos, esté todo él contenido dentro del segmento exterior á la otra, podrá engendrarse el haz tangencial de planos de un sar por el punto V_1, el cual aparecerá como doble; por cuyo motivo las de este género que se componen de una sola rama reciben el nombre de *cuárticas crunodales alabeadas*. (*L A* n.° 281).

El segundo género se obtiene cuando los diedros $\sigma_1 A_2$ y $\sigma_1 A_3$ en que están inscritos los conos $V_2\varphi_2$ y $V_3\varphi_3$ tienen una parte común exterior al plano tangente σ_1 que separa las dos hojas del cono, $V_1\varphi_1$ cortándole según dos generatrices imaginarias que sustituirán á las tangentes de la cíclica en el punto aislado V_1; y las porciones de las dos superficies cónicas $V_2\varphi_2$ y $V_3\varphi_3$ inmediatas al punto V_1 que quedan á distinto lado del plano σ_1 determinarán cada una de ellas en la otra una cadena [1] de puntos que contendrá el punto real V_1. A las cuárticas de este género las llamó Salmón *acnodales*.

modo continuo por un plano movil que se apoye en las dos cónicas φ'_2 y φ'_3, apareciendo dos veces como rayo del haz, el plano σ_1; y siendo sus generatrices de contacto las tangentes reales á φ'_1 trazadas desde V_1 (6) que será punto exterior de esta cónica; por esta causa, y por ser correlativo de las cuárticas crunodales, lo distinguiremos de los otros con el nombre de *haz de planos crunodal de cuarta clase*.

En el segundo género de haces de este grupo que se obtiene cuando los segmentos $V_1 A_2$ y $V_1 A_3$ de puntos exteriores á las dos cónicas φ'_2 y φ'_3 determinados en la recta de intersección de sus planos tienen una parte común $A_2 A_3$, los planos tangentes á las dos cónicas trazados desde puntos de la recta $\sigma_2\sigma_3$ inmediatos al V_1 por uno y otro lado del mismo, serán imaginarios, y solo será real el σ_1 determinado por las tangentes á φ'_2 y φ'_3 en V_1, de modo que este plano tangente será aislado y sus generatrices de contacto con la desarrollable envolvente imaginarias; luego el punto V_1 estará en el interior de la cónica φ'_1. Todos los planos reales de este haz cortarán al segmento $A_2 A_3$ de los puntos exteriores comunes; á este haz de planos le llamaremos por analogía con las

(1) Generalizando el concepto de cadena expuesto en la Geometría de Posición de don Eduardo Torroja (458) designaremos también con este nombre á la parte imaginaria de una curva contenida en rayos reales de un haz de rectas ó de planos.

El tercer género corresponde al caso en que los ángulos $\sigma_1 A_2$ y $\sigma_1 A_3$ no tengan parte alguna común, siendo la curva imaginaria y estando contenida en dos conos reales $V_2\varphi_2$ y $V_3\varphi_3$ y en otro $V_1\varphi_1$ imaginario cuyo vértice real V_1 pertenece á la esfera Σ.

En todos los géneros la cíclíca está en involución consigo misma de tres modos distintos; uno respecto del vértice V_2 y el plano σ_2, otra involución análoga respecto del vértice V_3 y plano σ_3 y la tercera respecto de las rectas $V_2 V_3$ y $\sigma_2 \sigma_3$.

Los vértices V_2 y V_3 podrán sustituirse por direcciones dando origen á variedades de estas cíclicas nodales.

18.— *Cíclicas cuspidales.*— Son las comprendidas en el grupo 22 (8) que se hallarán según dijimos (6) en dos superficies cónicas $V_1\varphi_1$ y $V_2\varphi_2$ tangentes entre sí y á la esfera Σ en el punto V_1 vértice de una de ellas; las generatrices de contacto del plano σ_1 tangente común serán perpendiculares por ser conjugadas respecto de la esfera Σ Si consideramos una generatriz de la superficie $V_2\varphi_2$ moviéndose sobre la misma cortará en dos puntos á la $V_1\varphi_1$ que vendrán á confundirse á la vez en el vértice V_1; luego dicha generatriz vendrá á ser una tangente de

curvas correlativas, *haz cíclico de planos acnodal.*

El tercer género se obtiene cuando el segmento exterior á una cónica es interior á la otra, siendo la desarrollable imaginaria; de modo que solo existe un solo plano real del haz, el σ_1, siendo todos los demás imaginarios.

En todos los casos está el haz de involución consigo mismo, de tres maneras distintas; una respecto del plano σ_2 y su polo V_2, otra respecto de σ_3 y V_3 y la tercera respecto de las rectas $V_2 V_3$ y $\sigma_2\sigma_3$.

Los planos de las cónicas V_2 y V_3 podráu pasar por el centro de la esfera dando origen á variedades de estos haces de planos.

Haces cíclicos de planos de cuarta clase con un rayo de retroceso.—Están determinados por los planos tangentes comunes á dos cónicas φ'_1 y φ'_2 tales que una de ellas la φ'_1 por ejemplo corte á la otra φ'_2 siendo el plano de la primera tangente á esta; la tangente á φ'_2 en el punto V_1 común á las dos cónicas es la recta de intersección de los planos σ_1 y σ_2 de ambas, siendo exterior á ellas todo el segmento de la expresada tangente exterior á la φ'_1; el haz de planos reales estará formado por todos los tangentes comunes que corten al expresado segmento, de segunda especie de la cíclica en el punto V_1, como por otra parte, la generatriz de contacto de la $V_1 \varphi_1$ con el plano tangente σ_1 es tangente á la cíclica en el vértice, según se desprende de la definición ordinaria, (*L. A.* núms. 1 y 2), el vértice V_1 tendrá que ser de retroceso de la curva. Por presentar este punto de retroceso suele darse á las cuárticas de este grupo, el nombre de *cuspidales.*

modo que este haz podrá ser engendrado de un modo continuo por un plano tangente movil. Por otra parte si en este movimiento consideramos el punto de intersección con una recta perpendicular al plano σ_1 en un punto de la tangente á φ'_2 é interior á φ'_1, se observa que al describir un rayo del haz; la parte de éste próxima al punto V_1 pasando por él, el movimiento del punto de intersección de este plano con aquella recta, se verifica en un sentido constante, hasta llegar á confundirse el citado rayo con σ_1, retrocediendo después; luego el plano σ_1 es de retroceso, (*L. A.* núm. 42) puesto que la expresada perpendicular no corta á ninguna generatriz de la desarrollable envolvente en la parte considerada; los haces de este grupo son correlativos de las cíclicas cuspidales presentando *un plano de retroceso.*

Estas cíclicas están en involución consigo mismas respecto del vértice V_2 y de su plano polar σ_2 respecto de Σ.

Estos haces de planos están en involución consigo mismos respecto del plano σ_2 y de su polo V_2 respecto de Σ.

El cono V_2 podrá ser sustituído por un cilindro; entonces el plano diametral de la esfera perpendicular á las generatrices, será de simetría, y las secciones producidas por este plano en la esfera, y en el cilindro serán osculatrices; pues el círculo y cónica obtenidos que deben ser tangentes no podrán tener más que otro punto común sin ser tangentes en él.

Se obtendrán dos variedades de estos haces según que el plano σ_2 contenga ó no el centro de Σ siendo este plano de simetría del haz, y el cilindro circuscrito á Σ á lo largo de la circunferencia σ_2 es osculador del $V_{2\infty} \varphi_2$, pues estos cilindros que deben ser tangentes á lo largo de una generatriz solo podrán tener otra generatriz común sin ser tangentes á lo largo de la misma.

19.—El haz cíclico de planos circunscrito á la esfera Σ á lo largo de una cíclica (Σ) es de la misma naturaleza que la curva.

Para demostrar esta propiedad, observaremos que á todo punto A de (Σ) corresponde en el haz el plano α tangente en él; á una cuerda AB su polar $\alpha\beta$; al haz radiado de segundo orden doblemente proyectante de (Σ) desde V, un haz plano de rectas de segundo orden contenido en el plano σ polar de V; al haz de planos bitangentes $V\varphi$, la serie φ' de puntos dobles de la desarrollable; luego existen los mismos puntos con el mismo plano polar respecto de la curva (Σ) y del haz cíclico de planos circunscrito, y cuando el vértice V no sea punto de Σ, la línea doble φ' será polar de φ respecto del círculo σ (*L. A.* núm. 239). Dedúcese de aquí que, cuando existe un cono con su vértice interior á la esfera, la desarrollable envolvente del haz cíclico de planos tendrá una línea doble en un plano exterior á Σ, siendo la línea y el haz *bicursales*.

Si ninguno de los conos doblemente proyectantes tiene su vértice interior á la esfera ni sobre la misma, los planos de las cónicas dobles serán secantes de Σ; luego el haz y la línea serán *unicursales*.

Cuando uno de los conos doblemente proyectante tenga su vértice sobre la superficie esférica, existirá también una cónica doble de la desarrollable sobre el plano tangente á Σ en aquel punto, puesto que según hemos visto esta línea doble φ' es lugar de los polos de los planos del haz de bitangentes á (Σ), estando estas cónicas φ' situadas en los conos $S\varphi'$ conjugados de los haces de planos tangentes á $V\varphi$ en el sistema polar absoluto. Si el cono $V\varphi$ tiene dos generatrices reales en el plano σ, pasarán por el punto V dos rayos reales del haz de rectas tangentes á φ' siendo la línea *crunodal* y el haz de planos de la misma especie. Cuando las expresadas generatrices sean imaginarias, sus polares también lo seran, correspondiéndose las *acnodales* con los haces reales que tienen *un rayo aislado*. Si el cono $V\varphi$ es imaginario, imaginarios serán los polos de sus planos tangentes; luego la *nodal imaginaria* se corresponde con el haz imaginario de un solo plano real.

Por útimo, si el cono $V\varphi$ es tangente á σ, la cónica φ' tiene por tangente en V la perpendicular á aquella generatriz de contacto, siendo las cíclicas *cuspidales* y el *haz de planos con un rayo de retroceso*.

III

20.—Proponémonos en primer lugar reducir la construcción de una cíclica definida

Trataremos en primer lugar de reducir la construcción de una desarrollable circunscrita por una esfera Σ y otra cuádrica Σ', á la intersección de dos superficies cónicas de segundo orden, observando para ello que los vértices de estas superficies que proyectan doblemente á la cíclica (Σ) serán los puntos que tengan el mismo plano polar respecto de las cuádricas del haz cuya base es (Σ) (*L. A.* número 232).

á una esfera Σ y otra cuádrica Σ', á la determinada por dos cónicas dobles de la expresada desarrollable cíclica, observando para ello que los planos nos de estas cónicas dobles son los que tienen el mismo polo respecto de cada una de las cuádricas de la serie.

21.—La esfera Σ y la cuádrica Σ' son directrices de dos sistemas polares en el espacio, de tal modo que á una figura Σ_1, corresponden otras Σ_2 y Σ'_2 polares de Σ_1 y homográficas, por consiguiente, entre sí. Es evidente que los puntos que tengan el mismo plano polar respecto de las cuádricas Σ y Σ', serán dobles en las figuras homográficas Σ_2 y Σ'_2 y también serán dobles los planos que tengan el mismo polo.

Para determinar estos puntos y planos dobles, observaremos que

al punto A_1 de la primera corresponderá uno A_2 de la segunda, y á éste, como de la primera otro A_3 de la segunda, y que si imaginamos definida la relación de homografía entre las dos figuras por las radiaciones A_1 y A_2 de la primera de aquellas, con sus homólogas respectivas A_2 y A_3 de la segunda, se cortarán en todo punto doble V_1 no situado en la recta A_1A_2, las rectas V_1A_1 y V_1A_2 de la primera figura y sus homólogas V_1A_2 y V_1A_3 de la segunda; pero como en general, las rectas A_1A_2 y A_2A_3 serán distintas, los puntos de intersección de las rectas de la radiación A_1 con sus homólogas de A_2 formarán una cúbica; los de intersección de las rectas de A_2 con sus homólogas de A_3 constituirán otra cúbica que cortará á la prime-

al plano α_1 de la primera corresponderá uno α_2 de la segunda y á este, como de la primera, otro α_3 de la segunda, y que si imaginamos definida la relación de homografía entre las dos figuras por las figuras planas α_1 y α_2 de la primera con sus homólogas respectivas α_2 y α_3 de la segunda, estarán situadas en todo plano doble σ_1, que no contiene la recta $\alpha_1\alpha_2$, las $\alpha_1\sigma_1$ y $\alpha_2\sigma_1$ de la primera y sus homólogas $\alpha_2\sigma_1$ y $\alpha_3\sigma_1$ de la segunda; pero como en general, las rectas $\alpha_1\alpha_2$ y $\alpha_3\alpha_1$ serán distintas, los planos determinados por las rectas de la figura plana α_1 con sus homólogos de la α_2 constituirán un haz de planos de tercera clase; los planos determinados por las rectas de la figura plana α_2 con sus homólogas de α_3 constituirán otro rá en puntos que tendrán el mismo plano polar respecto de todas las cuádricas del haz, siendo por este motivo vértice de los conos de segundo orden doblemente proyectantes de la cíclica.

Podríamos ya determinar simultáneamente todos estos conos por medio de cinco elementos convenientemente elegidos; por ejemplo, cinco puntos tales que entre ellos no haya dos en línea recta con un vértice del tetraedro, los cuales podrían hallarse cortando la cíclica por un plano que no pasase por ningún vértice y añadiendo á los cuatro puntos así obtenidos otro cualquiera en general. Si en particular tomásemos uno de los dos planos paralelos á los cíclicos trazados por el centro de Σ, como este plano cortará al haz de cuádricas según un haz de circunferencias que tendrán comunes los puntos cíclicos y los del eje radical común, podríamos determinar fácilmente sobre el mismo las circunferencias directrices de los conos que pertenecerán al haz y pasarán por las proyecciones de un punto real de la curva no contenido en el plano.

haz que tendrá común con el primero varios planos con el mismo polo respecto de la serie siendo por este motivo los planos de las cónicas dobles de la desarrollable envolvente del haz cíclico.

Podrán determinarse simultáneamente todas las cónicas dobles por medio de cinco elementos convenientemente elegidos; por ejemplo, cinco planos tales que entre ellos no haya dos que se corten según una recta contenida en una cara, los cuales podrían hallarse eligiendo cuatro rayos que pasasen por un punto no contenido en ninguna cara y además otro cualquiera en general. Si en particular tomásemos el punto del infinito de una de las dos rectas focales reales del cono circunscrito á Σ' desde S en que se cortan dos rayos isótropos del haz, como este punto debe ser vértice de una serie de superficies cilíndricas que tengan por planos tangentes comunes dos reales y aquellos dos isótropos tendrán una recta focal común, siendo suficientes estos elementos con un nuevo plano tangente á cada cilindro para la determinación de estos. No obstante de ser este el procedimiento correlativo, creemos más sencillo elegir como punto del infinito el de una de las asintotas de la hipérbola focal de Σ' cuando esta tenga centro, pues en este caso serán de revolución las superficies cilíndricas circunscritas.

(Continuará.)

SIXTO CÁMARA
Primer Teniente de Infantería.

Las Tablas gráficas de Luyando

CONTRIBUCIÓN Á LA HISTORIA DE LA NOMOGRAFÍA

POR GIUSEPPE PESCI.
De la R. Academia Naval de Livorno

§ 7.—El segundo abaco, que ocupa la parte superior de la tabla primera, da los valores de ε_2 que se deducen numéricamente de la fórmula [6] ya expuesta.

Para construirlo se ha formado sobre el eje de las x una escala uniforme para p poniendo, (excepción hecha siempre de un coeficiente constante),

$$x = p - 54'; \qquad [13]$$

esta escala abarca de 54′ á 62′ y tiene la misma densidad y el mismo coeficiente constante de la escala ε_1 del primer abaco. Sobre la paralela al eje de las y, trazada por el punto de cota $p = 62'$, (de la escala precedente), se ha trazado otra escala idéntica á la anterior, poniendo

$$y = \varepsilon_2 \,.\, 2 \text{ sen } 60^{\circ}.$$

Por tanto para trazar la línea de cota h'_a se procede del modo siguiente: De la [6] resulta inmediatamente que el segmento de la primera escala comprendido entre el origen y el punto $p - 54'$, y el segmento de la segunda escala comprendido entre el eje de la x y el punto $\varepsilon_2 \,.\, 2$ sen 60° pueden considerarse como los catetos de un triángulo rectángulo en el cual el ángulo β opuesto al segundo estará definido por

$$tg.\, \beta = \text{sen } h'_a;$$

las líneas h'_a son pues un sistema de rectas concurrentes en el origen. Y para trazar todas estas rectas, no es necesario calcular el ángulo β; es suficiente (y así lo hace el autor), atribuir á h'_a los valores que se desea considerar y calcular mediante la [6] los correspondientes valores de ε_2, para conocer los puntos de intersección de las rectas h'_a con la escala (ε_2).

Los valores atribuídos á h'_a varían de 5° en 5° entre 0° y 80°; y de

1° entre 80° y 90°; además, la escala ε_2 está limitada entre 0′ y 5′; (habría bastado entre 0′ y 8′ : 2 sen 60° = 4′37″).

Trazando ahora por todo los puntos de división de las dos escalas (p) y (ε_2) todas las rectas necesarias, se ha obtenido el abaco que corresponde á la [6] mediante el cual, dadas p y h'_a se calcula inmediatamente ε_2 con un error menor que 2″5 (como para ε_1).

Es notabilísimo este abaco, por presentar un anamorfismo analítico completo; no empírico como en el abaco primero, ni incompleto como en el cuarto. Pertenece al tipo de los *abacos radiados*, (N. § 27), de los cuales el primer ejemplo se encuentra en el de «vida probable» construído por Lalanne, (l. c. § 65).

§ 8.—Consideremos finalmente el abaco correspondiente á la [7], único que nos resta por examinar.

Siendo en este abaco ε_3 función de tres variables, no podía ser un sencillo abaco cartesiano, y por ello se ha recurrido al ingenioso artificio siguiente:

Se comienza por construir un abaco para la ecuación

$$\varepsilon'_3 = f_2(h_a)\,p + f_3(h_a); \qquad [15]$$

para esto, sobre el eje de as x se establece una escala, análoga á la que determina la fórmula [13], pero tomando un coeficiente constante diverso, pues en esta siendo el intervalo de 0,9 cm. solamente, queda dividida de 15″ en 15″. Sobre el eje de las y se ha establecido otra escala y uniforme para los valores de ε'_3 poniendo

$$y = \varepsilon'_3$$

y extendiéndola de 0′ á 35′, elegido el coeficiente constante, de modo que ocupe unos 25 cm. y dividida como la escala (p) de 15″ en 15″. Por los puntos de división de ambas escalas se han trazado los dos sistemas acostumbrados de rectas.

Hecho esto, atribuído un determinado valor, *p.e.* 5° á h_a se han calculado los valores de ε'_3 (como ahora diremos), para $p = 54'$ y $p = 61'$; se han marcado los puntos correspondientes, y se han unido mediante un segmento rectilíneo; se tiene así obtenida la línea de cota $h_a = 5°$, y haciendo variar después h_a de grado en grado hasta 80° y de cinco en cinco grados entre 80° y 90°, se ha obtenido el abaco que corresponde á la [15], mediante el cual conocidos que sean p y h_a se calcula. ε'_3

Respecto al cálculo de ε'_3 debemos advertir que el autor no dice explícitamente que este elemento sea función lineal de p como resulta de la forma que hemos dado á su valor; dice solamente que no puede obtenerse el valor (dados p y h_a) mediante el uso de una de las tablas de Mendoza. Y atendiendo el autor, á la poquísima curvatura de la curva h_a

ha sustituído estos arcos por dos segmentos rectilíneos que ha trazado calculando los valores de ε'_3 (consignados en una tabla de la pág. 6), correspondientes á los dos valores indicados de p y á todos los indicados valores de h_a.

§ 9.—Obtenido así el abaco que define ε'_3, para obtener el de ε_3 determinado por la ecuación

$$\varepsilon_3 = \varepsilon' \cos d_a \qquad [17]$$

se ha adoptado ún procedimiento análogo al seguido para el abaco de la [6], y este nuevo abaco referido al mismo sistema de ejes cartesianos aparece sobre la misma lámina del abaco de la [15], con los mismos ejes cartesianos.

Por un punto O' del eje de las x colocado á corta distancia del punto $p = 62'$ (en nuestro caso 1 cm.) se ha trazado una recta $O'Y'$ paralela al eje de las y y sobre esta recta se ha colocado la escala (ε'_3), prolongándose todas las rectas paralelas al eje de las x que pasan por los puntos de división. Después, sobre la recta que pasa por el punto $\varepsilon'_3 = 35'$ á partir del punto P' de intersección con la $O'Y'$ se ha establecido una escala uniforme para ε_3; se extiende esta escala de $0'$ á $33'$ y en ella el espacio correspondiente á $1'$ ocupa cerca de 1,7 cm., estando fraccionada de $5''$ en $5''$.

Ahora, para trazar la línea de cota d_a obsérvese que por la [17], el segmento comprendido entre $0'$ y el punto de cota ε'_3, y el comprendido entre P' y el punto de cota ε'_3 pueden ser considerados, como catetos de un triángulo rectángulo del cual el ángulo y opuesto a segundo cateto estará definido por

$$\operatorname{tg} \gamma = \cos d_a ;$$

las líneas de cota d_a son pues, rectas concurrentes en P', y para trazarlas, bastará poner $\varepsilon' = 35'$ en la [17] y calcular los valores de ε_3 correspondientes á todos los valores de d_a que se desee considerar y que en nuestro caso, son los mismos considerados en el curato abaco (§ 6). Debe por tanto trazarse el sistema de rectas por los puntos de la escala (ε_3) y prolongar todas las que pasan por los puntos de la escala (ε'_3) hasta encontrar á la recta $d_a = 20^o$ [la cual encuentra á la escala (ε_3) en las proximidades de su punto extremo $33'$, puesto que $35' \cos 20^o = 32'\ 53''$,]; se obtiene así un abaco completo de la [9] mediante el cual conociendo p, h_a y d_a se obtiene ε_3 del modo siguiente: se halla primero el valor de ε'_3 que corresponde á los valores de p y d_a ; se sigue después la recta que pasa por ε'_3 hasta encontrar á la recta de cota d_a ; á este punto de intersección corresponde el valor buscado para ε_3 (valor que en nuestro caso, se tiene evidentemente con un error menor de 2″,5, como para ε_1 y ε_2). Resta observar, que por economía de espacio una parte del segundo abaco (desde $\varepsilon_3 = 18'$), ha sido trasportada á la porción de la lámina que dejaba libre la primera parte.

Este abaco, consta de dos abacos *conexos*, (*á échelles accolées*, N. § 117). No es necesario, que la escala común contenga la graduación puesto que puede prescindirse del valor de ε'_3 siempre que se conozca el punto correspondiente; (por esto se dice fundadamente en el prólogo que «la numeración puede ser provisional»): y por esto también LALLEMAND llama al principio en que tales abacos están fundados, «eliminación gráfica».

De este tipo de abacos, frecuentísimo en la práctica, (1) no presenta LALANNE ejemplo alguno, y por ello consideramos el abaco tercero de LUYANDO como el más notable de todos.

§ 10.—En conclusión: Los abacos constituyen un punto importantísimo en la historia de la Nomografía, puesto que son notables, no sólo por la época á que se refiere su construcción, sino porque palpita en ellos el fundamento de toda esta moderna parte de la ciencia.

De haber sido secundado el ejemplo de LUYANDO, ciertamente que habrían podido introducirse ya, simplificaciones notables en los cálculos, referentes sobre todo á la *Navegación astronómica*, (los cuales, á ser posible deben consignarse gráficamente en cartas reducidas), y á todas las inmediatas aplicaciones de las Matemáticas.

Sólo en los últimos años, especialmente después de la invención de nuevos métodos se ha tratado de aplicar la Nomografía á la resolución de los problemas principales de la *Navegación astronómica*, como lo confirma la enumeración siguiente de los abacos construídos hasta ahora, y que juzgamos de utilidad (2).

1.º El *cuadrante de reducción*, que juzgamos como el primer abaco construído, (bastante anterior al de PONCHET), descrito al jinal de 1692 por el *piloto mayor de la Armada del mar Océano*, D. ANTONIO GASTAÑETA en un libro vouminoso cuyo título es: *Norte de la navegación*, hallado por el cuadrante de reducción (3). Ignoramos por qué los cultivadores de la Nomografía no lo han tenido en cuenta. Consta de dos abacos cartesia-

---

(1) Citemos como ejemplos:

DE REGIS.—*Tavole grafiche fatte sulle formule di Darcy e Bazin*... (Atti della Societé degli Ingegneri ed Industrali, di Torino.—1869-1870.

VOGLER.—*Anleitung zum Entwerfen graphiscer Tafeln.* (Berlín, Ed. Ernest et Korn, 1877, página 100.

PASTORE.—*Abachi per determinare la carica dei fornelli da mina.* (Rivista d'Artigliería é Genio, 1884).

MOREL.—*Considérations nouvelles sur les fonctions balistique.* (Cosmos. París, 1900).

D'OCAGNE.—*Application générale de la Nomographie, au calcul des profils de remblai et déblai.* (Annales des Ponts et Chaussés. 1896).

(2) Como hemos indicado en una nota al § 4.

(3) V. CESÁREO FERNÁNDEZ DURO.—*Los ojos en el Cielo.* (Madrid. Aribau, 1879).

nos superpuestos, que resuelven el sistema, (1)

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad tg\,\beta = b : c \qquad [18]$$

cuando se toman por incógnitas dos cualesquiera de las cuatro cantidades a, b, c, β.

2.º Las tablas de LUYANDO, objeto de nuestro trabajo (2).

3.º El *Abaco de la desviación de la brujula*, de LALLEMAND, (N. § 132). 1885: Contiene *seis* variables independientes, y constituye un ejemplo notabilísimo de las aplicaciones de los abacos exagonales ideados por el mismo autor.

4.º El *Abaco de las horas de orto y ocaso del Sol*, de COLLIGNON. (Nouvelles Annales de Mathématiques. 2.e serie. T. XVIII). Es un abaco radiado, (N. § 27), cuya lectura está ingeniosamente simplificada.

5.º El *Abaco de la distancia esférica*, (N. § 123). 1891. Es una de las primeras aplicaciones hechas por D,OCAGNE en su genial principio de los puntos alineados (3).

6.º El *Abaco para la determinación del punto en el mar*, construído por FABÉ y ROLLET DE L'ISLÉ (Annales hydrographiques, 1892): Este

---

(1) La construcción y uso, han sido notablemente simplificados por FAYE, en la pág. 23 de su *Cours d' Astronomie Nautique*.—París. Gauthier Villars, 1880.

(2) El profesor d'OCAGNE, ha tenido la cortesía de comunicarnos, la siguiente indicación bibliográfica referente á varios abacos publicados á fin del siglo XVII, anteriores á los de Luyando:

MARYETT'S.—*Longitude Tables for correcting the effect of paralax aud refraction on the distance observed between the moon and the Sun or á fixed star*. (Dicem 1794).

MAINGON.—*Carte trigonométrıque servant à réduire la distance apparente de la Lune au Soleil ou à une etoile en distance vraic et à résoudre d'autres questions de pilotage*. (Neptune français, an. VI de la République. 1798.

Y agrega, que en una nota presentada á la *Académie des Sciences*, en 1798, por LÉVÉQUE y BORDA (citados en una observación al § 4), se dice «que MARYETTES reduce á una simple operación gráfica los pocos cálculos que requiere el uso de las grandes tablas de reducción de SHEPERD, y que en 1791 el mismo autor publicó una nueva colección de tablas para hallar gráficamente la hora en el mar, y para resolver otros problemas diversos de *Navegación astronómica*.

No hemos podido adquirir ninguna de estas gráficas, por lo cual nos es imposible juzgar de la analogia que puedan tener con las Tablas gráficas de LUYANDO.

Esta noticia nos sugiere las siguientes reflexiones: De las ciencias que podrían denominarse *Matemáticas aplicadas*, las que con anterioridad á la aparición de la *Nomografia* hicieron uso del cálculo gráfico, fueron la *Navegación astronómica*, la *Balistica* y la *Ingenieria:* La primera, principalmente por el problema de la distancia lunar, comenzando con la labor citada de MARYETTES; la segunda con el problema del tiro, comenzando en 1816 con los trabajos de D'OBENHEIM; la tercera con los problemas de los desmontes y terraplenes comienza en 1845 con DAVANI (véanse á este propósito las dos monografías de TERRIER, l. c. ya en el § 1, y el D'OCAGNE, § 2).

Para ninguno de estos problemas existen numerosas tablas, (para el último no llegan á una veintena). Cada uno de los autores que emprendían estos procedimientos gráficos imaginaban soluciones especiales, (deseando perfeccionar lo ya hecho), no existiendo hasta hace pocos años un libro que sistematizase los diversos procedimientos adoptados.

(3) En una nota presentada á la Académie des Sciences (Comptes rendus, 1904) por el Profesor D'OCAGNE hace ver que estos abacos suyos, pueden ser considerados como los abacos generales de la Trigonometría esférica, es decir, que mediante su empleo, puede resolverse un triángulo esférico en todos los casos. La misma nota se publicó en el mismo año, en el *Bulletin de la Societé Mathematique*, con mayor desarrollo, y con una solución simplificada qne nosotros presentamos.

abaco resuelve el sistema

$$\cos a = \cos b \cos c \qquad tg\,\beta = tg\,b : \operatorname{sen} c \qquad [19]$$

cuando se toman por incógnitas dos de las cuatro cantidades a, b, c, β, y sirve por tanto para resolver completamente un triángulo rectángulo esférico (salvo el caso en que se dan dos ángulos), como el *cuadrante de reducción* sirve para resolver completamente un triángulo rectángulo plano. La analogía entre estos dos abacos es completa, aun cuando no se comprenda fácilmente la razón (1). Según los autores «este abaco sirve para resolver sin cálculos, muy rápdamente y con suficiente aproximación todos los problemas frecuentes de la *Navegación*, y sustituye por ello á todas las tablas náuticas, excepto las *efemérides*. Sin embargo no creemos que su uso sea de excelentes resultados, por sus dimensiones (1 mt. por 0,50), y por la dificultad de su lectura, tratándose de cuatro sistemas superpuestos de líneas.

7.º El *Abaco de la ecuación de la marea diurna* y *semidiurna* de D'OCAGNE (Comptes rendus de l'Academiedes Sciences, 1896), del cual dados los dos parámetros variables de lugar y época se deduce la altura como función de la hora, y viceversa.

8.º El *Nomograma de las curvas de altura*, del prof. MOLFINO (Rivista Marittima, 1899). El principal de ellos, sirve para el cálculo de los elementos que permiten trazar una curva de altura sobre una carta reducida. Consta de dos abacos cartesianos superpuestos, que resuelven dos ecuaciones del tipo [19], y tiene gran analogía con los de FABÉ Y ROLLET DE L,ISLE; mas para la práctica ambos presentan los mismos inconvenientes.

9.º El *Abaco para la distancia de un punto al horizontee*, construído por nosotros, (véase, Sul calcolo delle distanze in mare, Rivista Maríttima. 1897). Hacemos observar que este abaco da directamente la distancia corregida de la refracción, sin necesidad de calcular previamente un valor aproximado de la misma distancia, como se enseña ordinariamente en Navegación (p. e., Faye. l. c., pág. 361).

10.º El *Abaco para el cálculo de la latitud mediante una altura circunmeridiana*, construído también por nosotros, (Rivista Maríttima, 1898) Se trata del cálculo notable y frecuente de un elemento de corrección; en estos casos, (como ya hemos dicho en una nota al § 4), el uso de los abacos es importantísimo. Sobre una lámina de $0,^m45$ por $0,^m35$ se tiene el elemento desconocido con un error menor de 30″, mientras como es sabido, la fórmula adoptada, lleva anejo un error que puede alcanzar como valor 1′.

11.º El *Abaco para la distancia de un punto á otro dentro del horizon-*

(1) A propósito de esta analogía, debemos hacer referencia de un antiguo é interesantísimo tascículo que tiene por título: *Harmonia Trigonométrica: or a short treatise of Trygonometry*, publicada en Londres en 1764, tip. *R. Cave*, mas no contiene el nombre de su autor.

te, tamibén construído por nosotros, mismos, (Cenni di Nomografía. II edición. Livorno, Guisti, 1900). Este abaco define la distancia en cuestión, corregida de la esfericidad terrestre y de la refracción, (esta última se considera constante é igual al valor medio frecuentemente adoptado, mas sería fácil construír un segundo abaco considerándola variable), y da también la distancia de un punto colocado entre el observador y una costa, la cual oculte un horizonte de distancia conocida (1) .

12.º El *Nomograma de los azimutes del Sol*, del prof. MOLFINO, (Annali Idrográfici, 1901). El principal de estos abacos, si ha de dar la aproximación frecuentemente requerida en la resolución de los triángulos esféricos, exige dimensiones considerables; mas en el caso particular que su autor considera, son suficientes las dimensiones de $0,^{m}45$ por $0,^{m}40$.

13.º El *Nomograma para la determinación del azimut*, y *para predecir la ocultación*, del subteniente de navío Sig. PERRET (véase, Note sur quelques applications de la Nomographie, Annales hydrographiques, 1904). El primero estaba ya hecho tres años antes; es el citado del profesor MOLFINO, aunque podemos afirmar que el autor desconocía esta circunstancia. Para el caso de ser el azimut próximo á 0º ó 180º, la aproximación es escasa, más para esta excepción PERRET acude á un artificio ingenioso, que se ha hecho corriente.

14.º El *Nomograma para el cálculo de las alturas correspondientes*, del mismo Sig. PERRET (véase, Note sur la construction d'un nomogramma, París, lib. Chapelot, 1905); al cual nos hemos referido en una nota hablando del abaco 11.º y cuyo dibujo no se halla en la publicación citada (2) .

---

(1) Como hemos expuesto, (véase *sul calcolo delle rette d'altezza*. Rivista Marittima, 1903) con procedimientos análogos habríamos podido construir otros muchos abasos, útiles en la *Navegación astronómica*, por ejemplo: «Cálculo de las alturas correspondientes»; fórmula que da la latitud, mediante la observación de la estrella polar»; «Corrección de ángulo horario, para un error de la latitud»;... Podríamos haber construído también para la *Navegación astronómica*, un atlas, cual deseaba D'OCAGNE (véase, Ensayo sobre la Nomografía, 1891), como el que construimos ya para la Balística con la colaboración del comandante RONCA, (Abbachi per il tiro, é Abbachi generali della Balistica. Livorno, Giusti, 1901).

Pronto abandonamos la idea, porque comprendimos que al menos entre nosotros el uso de los abacos para la Navegación, no estaba generalízado, á causa de la «tradición de la gente de mar» como con otro motivo dice justamente el prof. GELCICH, (La Scienza náutica nel secolo XIX. Rivista Marittima. 1901).

(2) El profesor D'OCAGNE al comunicarnos las noticias que hemos expuesto en otra nota, hablando del abaco 2.º, nos dice también que PERRET, está publicando los siguientes abacos:

—Point estimé, parallaxe en hauter des planetes.

—Correction des hauteurs d'astres.

—Parallaxe en hauter de la Lune.

—Levers et couchers vrais; circonstances favorables au calcul d'heure.

—Azimut par l'heure; recherche d'un astre observé; navigation par arc de grand cercle.

—Droite de hauteur, par une observation circum-meridienne.

—Equation des hauteurs corrispondentes du Soleil.

Comprende todo ello la labor á que hacíamos referencia en una nota, al hablar del abaco 11º, y que suspendimos por las razones allí indicadas. Auguramos para la estimable labor del distinguido oficial el mejor éxito.

15.º El *Abaco para hallar los límites entre los cuales puede hacerse uso de las rectas de altura de* M. S. HILARIE, por el profesor MOLFINO, (véase, Circa le rette d, altezza, Rivista Maríttima 1906).

16.º A todos estos abacos podrían agregarse los dos *Abacos generales de la Trigonometría plana.* El primero fué construído por el profesor D'OCAGNE, *Bulletin astronomique*, 1894); el segundo por nosotros, (*Periódico di Matemática*, 1900); y de ambos dimos una construcción elemental que no requiere conocimientos de Geometría analítica, (*Suplemento al Periódico di Matemática* 1900). No creemos, sin embargo, que estos abacos puedan ser prácticamente útiles; pero haremos ver en otra nota cómo pueden remediarse, al menos en parte, los inconvenientes principales que los citados abacos presentan.

Por la traducción,

GABRIEL GALÁN

24 Mayo 1906.

Proyecto de unificación de los métodos de análisis de vinos

Ponencia del Dr. D. Antonio de Gregorio Rocasolano en el Congreso de Zaragoza de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias

ENSAYOS PRELIMINARES

Examen microscópico.—Después de dejar reposar el vino durante 24 horas, en la vasija que lo contiene, se sacará una muestra introduciendo en la masa líquida una pipeta de vidrio previamente calentada á 120° y cerrada de tal modo, que pueda abrirse cuando el extremo de la pipeta introducido en el líquido, toque las capas más profundas. Depositada la muestra en un frasco esterilizado y cerrado con tapón de algodón se procede al reconocimiento.

Si se trata de un líquido claro, se observa al microscopio una gota (20 en cc.); si fuera turbio, se tomará una gota más pequeña (40 ó 60 por cc.) diluída con otra ú otras dos de agua esterilizada.

De la observación microscópica directa puede deducirse la fase de elaboración en que se encuentra, las condiciones de conservación que más le convienen, las infecciones microbianas, si las hubiere, etc.

Se completa este reconocimiento cuando se trata de vinos que estén largo tiempo en reposo, observando una muestra tomada con las precauciones indicadas, de la superficie del líquido (infecciones producidas por microorganismos aerobios).

Cata.—Un práctico, puede deducir por la simple prueba ó cata de un vino, datos suficientes para juzgar de su calidad bajo el punto de vista comercial y entre ciertos límites, de su composición referida á alguno de sus componentes.

Es este un reconocimiento, para el que no pueden dictarse reglas, ni es solo la práctica quien hace maestros; es necesario una gran sensibilidad en los sentidos del gusto y del olfato; la práctica desenvuelve esta aptitud y la constancia produce los más seguros resultados.

ANALISIS QUIMICO

Determinación del alcohol.—En una probeta aforada hasta 200 cc., se mide este volumen de vino, procurando que la temperatura sea lo más próxima posible á 15°. Se vierte el vino en un matraz que forma parte de un aparato destilatorio y con tres lavados de agua destilada, se recupera el que haya quedado adherido á las paredes de la probeta: estos lavados que en conjunto deben tener un volumen de 100 cc. aproximadamente, se incorporan al vino colocado en el matraz y se procede á la destilación después de haber neutralizado con potasa ó sosa.

Del líquido que destila, que debe recogerse en la misma probeta en que se midió el vino, se recogen aproximadamente 200 cc. que después se completan exactamente con agua destilada; se agita por inversión, se toma la temperatura y con un alcohometro bien comprobado se lee el grado alcohólico, que debe someterse á la corrección que le corresponde según la temperatura del líquido, haciendo uso de las tablas que dan el grado real de alcohol á 15°, en función del grado marcado por el alcohometro y la temperatura (Gay Lusac).

Acidez total.—Debe referirse al ácido tartárico.

Para determinarla, se miden en una pipeta de dos trazos cinco centímetros cúbicos de vino, á la temperatura más próxima posible á 15°: puesto el vino, en una copa, se añaden 30 cc. de agua destilada y dos gotas de disolución alcohólica de fenoftaleina al 1 % procediendo á la neutralización por medio del agua de cal recien filtrada cuya temperatura t se conozca: del número n de centímetros cúbicos gastados en la neutralización, se deduce en función de la temperatura t, la acidez del vino referida al ácido tartárico, por la fórmula:

$$0{,}00409.\ n - 0{,}000032.\ n.\ t = A_T$$

en la que el valor A_T encontrado, representa la acidez total de 5 cc. del vino problema, referido al ácido tartárico: multiplicada por 20, tendremos la acidez por %.

El conocer el momento de la neutralización cuando se trata de mostos ó de vinos rosados ó blancos, no ofrece dificultad alguna, porque la variación de color del líquido, cuando vira al rojo por la fenolftaleina en el momento de la neutralización y persiste en rojo con dos gotas de agua de cal añadida en exceso, es bien marcado, destaca perfectamente; si se opera con vinos tintos de mucho color, esta reacción final aparece enmascarada y debe observarse, que el color del líquido, rojo en el primer momento, se cambia por un color verdoso-violeta sucio y la aparición más abundante á medida que se aproxima la neutralización de unos copos de este mismo color; cuando se tiene gran costumbre de operar, estos caracteres son suficientes para reconocer el final de la operación, obrando así la materia colorante de los vinos rojos, como reactivo indicador. Más fácilmente se aprecia la neutralización en este caso, disponiendo en un plato de porcelana unas pequeñas gotas de fenolftaleina y cuando el color del vino comienza á variar del modo indicado, se toca con la varilla conque se agita el líquido una de estas gotas que se teñirá en rojo cuando la operación termine.

Del gasto de agua de cal acusado por la bureta, habrá que restar 0,1 cc. en el caso de vinos blancos ó rosados y 0,2 cc. en el de vinos tintos que es la cantidad de agua de cal que necesitan 30 cc. de agua, para producir en la fenolftaleina la reacción indicadora.

Extracto al vacío.—Se toman 5 cc. de vino, y puestos en una cápsula de porcelana de fondo plano, se colocan debajo de una campana puesta en comunicación con un aparato de vacío: dentro de esta campana debe colocarse un vaso de vidrio de poca altura y ancha base, con ácido sulfúrico de 66° B^e. Se extrae el aire y se deja el aparato en esta disposición durante cuatro días. Al cabo de este tiempo, se pesa la cápsula con el extracto y restando la tara de la cápsula, deduciremos el peso del extracto.

Extracto á 100°.—En una cápsula de porcelana, tarada, se ponen 5 cc. de vino y se coloca en una estufa de agua. Cuando el agua hierve, se sostiene de este modo durante tres horas, se retira el fuego, se deja enfriar y se pesa.

Si no se dispone de una balanza muy precisa, se operará con 10 cc. de vino.

Acidez volátil.—Determinando la acidez total de un extracto seco con relación al volumen de vino con que se obtuvo y restando este número que es la acidez fija, de la acidez total yá determinada, la diferencia será la acidez volátil con relación al ácido tartárico. Si se opera con vinos picados esta acidez debe expresarse en ácido acético.

Glucosa.—Se toman 100 cc. de vino y puestos en un matraz aforado á 150 cc. se añade negro animal y la cantidad necesaria de agua hasta completar este volumen: realizada la decoloración se filfra, y del líquido filtrado se toman 50 cc. que se diluyen con agua destilada, si fuera necesario, de modo que resulte un líquido que reduzca próximamente la mitad de su volumen de líquido de Feheling.

Puesto en una bureta el líquido problema, se coloca en una pinza de mano, un matraz Elenmeyer con 10 cc. de licor de Feheling, que se diluye un poco, se hace hervir y si el reactivo queda perfectamente transparente después de la ebullición, se va añadiendo del líquido problema, y calentando hasta que la reducción se verifique. Se llega al final de la reducción, cuando el precipitado rojo de óxido cuproso, se deposita fácilmente separando el matraz del fuego y el color azul del líquido observado por refracción desaparece siendo sustituído por un ligero matiz amarillento, cuando la reacción ha terminado. Si el color amarillo se acentúa, indica que se ha pasado el momento de la reducción total y la operación está mal terminada.

Por el volumen de líquido problema gastado y el valor del licor de Feheling se calcula el azúcar reductor referido á glucosa, y como tomamos 50 cc. de los 150 cc. en que convertimos al descolorar los 100 cc. de vino de que se parte, multiplicando el número obtenido por 3, tendremos la cantidad por 100 de glucosa contenida en el vino.

Sulfato potásico.—Esta determinación, solo tiene interés, cuando se trata de vinos enyesados ó se sospecha que lo hayan sido.

La cantidad de sulfatos contenida en los vinos normales, varía según el terreno de que procede la vid, entre 0,18 y 0,46 por 1.000: si el vino ha sufrido varios trasiegos, llega hasta 0,70 por 1.000 efecto de la oxidación del anhídrido sulfuroso con que se desinfectan las vasijas vinarias: no debe considerarse como enyesado un vino sino cuando contiene más de 1 por 1.000 de sulfato potásico.

El fundamento del método de determinación, es la eliminación de los sulfatos insolubilizándoles en forma de sulfato de bario por medio de una disolución valorada de cloruro de bario y la filtración del líquido, hasta que este no se enturbie por nuevas adiciones de sal soluble de bario.

El líquido valorado, se hace disolviendo en agua destilada 14,02 gramos de cloruro de bario puro cristalizado y seco, añadiendo 50 cc. de ácido clorhídrico, y completando con agua un litro.

Para practicar la determinación, se ponen 10 cc. de vino en un tubo de ensayos se calienta hasta ebullición y se añade 1 cc. del líquido valorado que producirá un enturbiamiento debido al sulfato de bario que en estas condiciones se forma, se deja reposar y se filtra: al líquido filtrado se añaden unas gotas de disolución de cloruro de bario y si se produce nuevo enturbiamiento, es prueba de que en el vino problema existe más de 1 por 1.000 de sulfato potásico, ó sea que el vino fué enyesado.

Con otros 10 cc. de vino, se repite la operación pero añadiendo 2 cc. de la disolución valorada de cloruro de bario, y si después de la filtración precipita con el mismo reactivo, demuestra que el vino tiene más de 2 por 1.000 de sulfato potásico.

Se repite en caso afirmativo con nuevos 10 cc. de vino, añadiendo 3, 4 ó 5 cc. de la disolución valorada, para reconocer si tiene más de 3, 4 ó 5 gramos de sulfato potásico por litro.

La enseñanza de la Geología en España

De las tres principales ramas en que se divide el estudio de la Historia Natural, la Geología es la que en peores condiciones se enseña en las Universidades de provincias. Su enseñanza hay que darla en la asignatura de Mineralogía y Botánica, de lo cual resulta que, de no prescindir del estudio de importantes grupos de plantas, queda muy poco tiempo para la exposición de la Geología propiamente dicha, que debe ser además ampliación de la que se explica en los Institutos. Haciendo enorme contraste con la heterogeneidad y excesiva extensión de dicha asignatura, está la otra de Historia Natural del preparatorio, que teniendo el mismo número de clases comprende solamente el estudio de la Zoología general, resultando así, que mientras en Mineralogía falta tiempo para la explicación de la Geología, en Zoología hay que repetir muchos de los conocimientos de Biología expuestos en Botánica.

Dedúcese por tanto que la actual división de la Historia Natural del preparatorio en las dos asignaturas de Mineralogía y Botánica y Zoología general, es anticuada é inconveniente, debiéndose modificar, á mi entender, comprendiendo una de ellas la enseñanza de la Mineralogía y Geología y la otra la Biología animal y vegetal. De este modo podría explicarse bien la Geología, dando así á la Mineralogía el verdadero fundamento histórico natural que debe tener; pues si en el estudio de los minerales se prescinde de sus caracteres de yacimiento se desnaturaliza dicho estudio llevándole al campo de la química mineral.

Además, esta reforma no creo que perjudicase á la enseñanza de la Botánica y Zoología general; muy al contrario, haciendo su estudio en la misma asignatura podría dársele un carácter más científico y práctico, empezando el curso por unas lecciones de Biología general y siguiendo después con el examen detenido de los principales tipos de organización animal y vegetal.

Si por la reforma propuesta se consiguiera el tiempo necesario para poder dar debidamente en las Facultades de Ciencias la enseñanza de la Geología, las ramas de esta que habrían de ser objeto de un estudio más completo serían la Geognosia y la Geología histórica, ya que tanto la Geología fisiográfica como la dinámica pueden exponerse con toda la extensión necesaria en los Institutos.

Ahora bien, si se quiere como es indispensable que á dicha enseñanza se le dé el carácter práctico, sin el cual es completamente estéril, precisa que cada profesor, numerario ó auxiliar, no tenga más alumnos de los que puedan hacer bajo su dirección las observaciones ó experiencias sobre las cuales verse la explicación. Hora es ya de que terminen esas clases numerosas en que hay que dar la enseñanza de ciencias de observación en igual ó parecida forma á como se enseña el Derecho ó la Historia literaria.

Para conseguir esto, creo yo, que el claustro de la Facultad, al reunirse para organizar el curso, debería fijar el número de alumnos que hubiesen de recibir la enseñanza teniendo en cuenta el personal científico auxiliar de que pudiera disponerse, y de tal modo, que cada profesor no tuviese bajo su inmediata dirección más de veinte escolares. Sí el número de solicitudes de matrícula fuera mayor del fijado, se podían eliminar los sobrantes por medio de un examen de ingreso. El catedrático numerario establecería el programa y plan de curso que habría de seguirse y los profesores auxiliares que hubiesen le desarrollarían, como el catedrático, al frente de su respectiva sección.

De este modo los alumnos, rodeando la mesa del profesor, podrían observar los ejemplares, preparaciones, láminas ó experiencias que constituyeran el objeto y fundamento de la explicación; así esta sería verdaderamente fructuosa y quedaría para las clases prácticas lo que realmente debiera constituir el asunto de las mismas, que es el manejo por los alumnos de los instrumentos, reactivos y libros de laboratorio para que manipulando ellos, resuelvan los problemas que se les propongan.

Si la reforma expuesta se creyese que, por lo intensiva que resultaría la enseñanza, es más propia de las asignaturas especiales que de las de caracter general como son las del preparatorio, podría también sustituirse por la siguiente. En vez de la actual distribución de cuatro clases semanales, tres teóricas y una práctica, establecer una sola clase semanal teórica á la que habrían de concurrir todos los alumnos y en que la conferencia que en ella se diera versase sobre las observaciones ó experiencias que previamente hubiesen hecho los alumnos en las clases prácticas convenientemente distribuídos en secciones. Estas clases prácticas con pocos alumnos deberían ser lo más numerosas posibles durante la semana y en la clase teórica general se haría el resúmen ó síntesis de todo lo que se hubiese visto en las clases prácticas con las inducciones, hipótesis y teorías fundadas en dichas observaciones.

La implantación de cualquiera de las dos reformas expuestas conduciría á un grandísimo adelanto en la enseñanza de la Geología, cual es el de conseguir que el profesor tuviese que preocuparse más de preparar una serie gradual y metódica de observaciones y experiencias, que de redactar las cuartillas de su explicación oral, pues sabido es que cuando esta no tiene por base las observaciones que hagan los alumnos resulta completamente inútil si no perjudicial.

Respecto á la enseñanza de Geología litológica creo que se incurre en un grave error científico y pedagógico al prescindir ó relegar por lo menos á segundo término en la clasificación de las rocas los caracteres deducidos de las condiciones de su yacimiento. Esto ha sido una aberración resultante de la importancia que ha adquirido el estudio microscópico de las rocas eruptivas. Han sido tales los nuevos horizontes que respecto al origen y formación de las mismas, ha abierto su examen micrográfico que los caracteres de la composición mineralógica y estructura que proporciona dicho examen, se han considerado como principal y hasta único criterio de distinción de grupos. Y el resultado de ello es la formación de una infinidad de especies de rocas distribuídas en numerosas secciones, muchas de ellas, enteramente artificiales. Se ha reaccionado sin embargo contra dicha tendencia en los últimos veinte años, pues no otra cosa significan los tres grupos en que clasifica H. Rosenbusch las rocas eruptivas: rocas profundas, en filones y solidificadas en el exterior, como también los trabajos de ciertos petrógrafos de la escuela americana (Cross, Iddings, Pirssons y Washington) encaminados á clasificar las rocas, teniendo en cuenta en primer término su composición química y solo secundariamente su composición mineralógica y estructura.

Comprendo que varíen los grupos secundarios según el criterio que se siga al establecerlos, más entiendo que deberían conservarse siempre las grandes divisiones fundadas en las condiciones en que se encuentran las rocas en la corteza terrestre, pues estos son grupos verdaderamente naturales y que por tanto no deben desmembrarse. Y los caracteres secundarios que se empleen para distinguir los sub-grupos no debieran ser los mismos en las rocas hipogénicas que en las extratificadas, ya que en estas puede utilizarse perfectamente el carácter de su origen así como en aquellas es preciso tener en cuenta los caracteres de su estructura y composición mineralógica.

En la enseñanza de la Geología histórica ó extratigráfica hay que distinguir el estudio de la parte general ó fundamentos de la cronología geológica del de la parte descriptiva. Aquella hay que explicarla necesariamente en la cátedra y en el gabinete, exponiendo á grandes rasgos los caracteres principales de las eras y períodos geológicos siguiendo el orden cronológico de su formación, más la parte descriptiva no debería de ninguna manera estudiarse, como generalmente se hace en España, describiendo en clase las diversas formaciones y obligando al alumno á hacer esfuerzos de memoria é imaginación que le desvían del verdadero camino que debe seguir para ser un geólogo, cual es el estudiar los terrenos en el campo, no en las descripciones que de ellos se hacen en los libros; éstos, en la parte descriptiva, deberían servir tan solo para consultar, no para estudiar.

El profesor á mi entender debiera preparar la explicación de las lecciones de extratigrafía descriptiva, escogiendo un cierto número de localidades típicas para el estudio detenido de los terrenos y este estudio detallado deberían hacerlo los alumnos, siguiendo el orden inverso al que generalmente se sigue, es decir, empezando por las formaciones modernas y terminando por las antiguas.

Así se evitaría el grave inconveniente de empezar el trabajo por lo más desconocido y difícil de comprender cual es la formación de los terrenos pizarroso-cristalinos y las fuerzas orogénicas que han obrado sobre ellos y los primarios para llegar á colocar sus estratos en la disposición en que actualmente se encuentran. Además también la flora y fauna de la época primaria es la más distinta de lá actual, resultando de todo ello que los alumnos se desorientan y llegan á creer que la Geología histórica es una serie de hipótesis y conjeturas muy dificilmente coordinables.

Todo lo contrario sucede si en la observación de los terrenos se sigue el orden cronológico inverso. Empezando por las formaciones aluviales y cuaternarias no hay dificultad ninguna para explicar su origen y disposición y los fósiles que en ellas se encuentran son así mismo perfectamente comprensibles por su completa analogía con las especies actuales. Continúase después con los terrenos terciarios que en muchas localidades, Zaragoza por ejemplo, aparecen inmediatamente debajo, bordeando al cuaternario. La disposición de sus extractos es también generalmente horizontal y la naturaleza marina ó lacustre de los mismos, fácilmente reconocible. Las especies fósiles son ya algo distintas de las que viven actualmente, pero la relación entre unas y otras se establece con suma facilidad. Y así sucesivamente debe irse arcediendo en el estudio de lo bien conocido y fácil de comprender, cual son los terrenos modernos á lo menos conocido y difícil de interpretar como son las formaciones más antiguas. De este modo se aplica mejor á la geología extratigráfica el criterio general de Lyell sobre la acción de las causas actuales en los fenómenos geológicos y que como es sabido tanto ha influído en la constitución de la moderna geología.

Resumiendo en breves frases todo lo expuesto diré para terminar que si se quiere que la enseñanza de la Geología de las asignaturas de Historia Natural del preparatorio sea verdadera ampliación de la que se explica en los Institutos es preciso implantar las reformas siguientes:

1.ª Unir la enseñanza de la Botánica á la de la Zoología general en la misma asignatura, constituyendo la otra con la Mineralogía y Geología.

2.ª Reducir todo lo posible las clases numerosas ya dividiéndolas en tantas secciones como permita el personal científico auxiliar de que se disponga ó haciendo que se dé una sola clase semanal con todos los alumnos y cuatro ó más de carácter práctico con pocos alumnos según sea el número de estos.

3.ª Que el profesor prepare la explicación de las lecciones de Geología extratigráfica reconociendo los principales terrenos que forman el suelo de la región en donde ha de dar la enseñanza, con el fin de poder así organizar una serie de excursiones á localidades típicas cuya observación sirviese de base á los alumnos para sus estudios.

PEDRO FERRANDO MAS.

LIQUENES DE ARAGON

POR EL R. P. LONGINOS NAVÁS, S. J.

(CONTINUACIÓN)

3. FAMILIA PARMELIÁCEOS

Talo membranáceo, en su conjunto orbicular, lobado ó laciniado, dorsiventral, ó sea con corteza superior é inferior, ambas constituídas por hifas perpendiculares á la superficie; envés de color algo distinto del haz, sin venas, con ricinas esparcidas por igual, ó sin ellas. *Apotecios* parmelinos, ó sea en forma de discos levantados sobre el talo, con reborde talino, dispersos por la superficie. *Paráfisis* articuladas. *Esporas* hialinas y simples. Con *espermogonios* dispersos ó marginales (fig. 13).

Crecen en las rocas y en las cortezas, á las que están adheridos; se desprenden con facilidad estando mojados.

7. GÉNERO **PARMELIA** ACH.

Talo más ó menos orbicular, adherido al soporte en toda su extensión, lobado ó laciniado, de color muy vario; envés con ricinas esparcidas por igual.

SECCIÓN I. **XANTHOPARMELIA** WAINIO

Talo amarillo ó pajizo en el haz; envés con ricinas hasta cerca del borde.

19. **Parmelia caperata** L.—Talo grande (á veces de algunos decímetros), de un amarillo pálido, orbicular, mate, arrugado, con lóbulos sinuoso-liciniados, redondeados ó festonados en el margen. Envés negro, más pálido y lampiño en la periferia. Apotecios bayo-rojizos, con margen festonado. $K \pm A \,.\, CaCl =$.

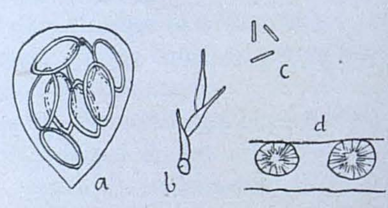


Fig. 13

Parmelia perlata L. — *a*. Asca — *b*. Esterigma. — *c*. Espermacios. — *d*. Corte del talo con dos espermogonios

Abundantísimo en todas partes. Troncos de los bosques.

20. **Parmelia sinuosa** Sm.—Talo amarillento, liso, orbicular, lobado, con lacinias estrechas, pinatífidas, dilatadas y con frecuencia soredíferas en el ápice, en la base con seno ancho, circular. Envés negro, con ricinas negras, pálido en la periferia. Apoterios pardos, con margen delgado y entero.

No la he visto de Aragon.

21. **Parmelia conspersa** Ehrh. *(centrifuga* Huds.).—Talo orbicular, amarillo, brillante, salpicado de puntos negros; contorno laciniado-dividido, festonado en el margen; envés pardo, con ricinas del mismo color. $K \frac{+A}{+A}$ y después rojo, Ca Cl =. Apotecios bayos ó parduscos, con margen entero é inflexo.

Frecuentísima en las piedras silíceas.

Var. **latior** Schær. Lóbulos del contorno anchos, planos, no hendidos, sino redondeados, festonados.

Veruela.

Var. **stenophylla** Ach. Lóbulos muy estrechos, empizarrados en el centro y en la periferia.

Frecuente. Calatayud (Vicioso), Cariñena (Navascués), Moncayo, Veruela, Zaragoza, etc.

F.ª **hypoclista** Nyl. Envés pálido.

Cariñena (Navascués).

F.ª **isidiata** Leight. Talo con abundante isidio, excepto en la periferia.

Frecuente. A esta forma tal vez deban referirse las *lusitana, verrucigera* é *isidiotyla* de Nylander.

22. **Parmelia Mougeoti** Schær.—Talo pequeño de 1—2 ctm. y amarillo, verdoso, en su conjunto orbicular, laciniado, con lacinias estrechas, planas, adherentes, salpicado de soredios amarillos; envés negruzco; apotecios (raros) rojizos. M + K = A.

Piedras silíceas. No la tengo de Aragón, pero paréceme haberla visto en varios sitios.

23. **Parmelia ambigua** Wulf. *(diffusa* Web.)—Talo pequeño, amarillo de azufre, orbicular, estrellado, con lacinias estrechas, planas, aplicadas, multífidas, con abundantes soredios amarillos; envés pardo negruzco, con pocas ricinas. Apotecios rojizos. Esporas algo encorvadas.

En los troncos, sobre todo en los pinos. Sallent, etc.

Sección II. MELÆNOPARMELIA Hue

Talo con el haz verde obscuro, pardo verdoso, pardo-negruzco ó negro; envés con ricinas dispersas.

24. **Parmelia acetabulum** Neck.—Talo ancho, hasta de un decímetro ó más, orbicular, con lóbulos anchos, doblados, de co-

lor verde azulado, á trechos cubierto á veces de una eflorescencia blanquizca. Apotecios grandes (5-10 y más milímetros), elevados, casi urceolados, de reborde tenue y arrugado, disco pardo. M + K = A, después R.

Troncos. Veruela, Sallent, etc.

25. **Parmelia olivacea** L.—Talo grande, hasta de un decímetro y más, de un verde olíváceo, mate ó apenas brillante, menudamente rugoso, con lóbulos divididos, en la periferia festonados; envés algo más pálido; apotecios bayos ó rojizos, planos, con margen entero.

En los troncos frecuente. Veruela, Moncayo, Sallent, etc.

26. **Parmelia exasperata** Dnrs.—Color como la anterior. Más pequeña, hasta 5 centímetros ó más, orbicular, profundamente lobada, en el borde los lóbulos festonados; todo el haz y el margen talino del apotecio erizado de pequeñas papilas del mismo color; apotecios 2-4 mm.

En los troncos lisos de varios árboles. Calatayud (Vicioso), Veruela, Moncayo, etc.

27. **Parmelia prolixa** Ach.—Talo grande, de un decímetro ó más, oliváceo-obscuro, orbicular, brillante, laciniado empizarrado; lacinias estrechas y multífidas, planas, en el extremo festonado-hendidas, bien adherentes al soporte; envés negruzco; apotecios pardos, con margen entero.

Es bastante variable en sus formas, que no es necesario distinguir.

En las piedras, sobre todo silíceas. Común en los campos. Calatayud (Vicioso), Moncayo, Veruela, Zaragoza, etc.

28. **Parmelia fahlunensis** L.—Talo delgado, liso, de un color pardo-negruzco, laciniado, con lacinias estrechas, divididas en digitaciones empizarradas, atenuadas en el ápice, planas ó algo canaliculadas; envés algo más pálido; apotecios pardos, apenas festonados.

En las rocas de las alturas. Moncayo.

29. **Parmelia stygia** L.—Talo grueso, apergaminado mediano, de unos 5 centímetros, pardo-negruzco, brillante, orbicular, laciniado estrellado, con lacinias convexas, empizarradas, muy divididas, casi truncadas en la periferia, con espermogonios pequeños hemisféricos; negro por debajo; apotecios pardos, con margen festonado.

En las rocas silíceas de grandes alturas. Moncayo, Benasque, etcétera.

Sección III. **Leucoparmelia** [1] Mihi

Talo de fondo blanquizco, tirando á blanco, garzo y aun á pardo *(omphalodes)*.

30. **Parmelia omphalodes** L.—Talo grande, hasta de 15 ó 20 centímetros, cartilaginoso, delgado, brillante, laciniado, con lacinias estrechas, divididas, empizarradas, en el extremo truncadas, de un gris obscuro pardusco ó ahumado, comúnmente estéril.

Común en las rocas silíceas de las alturas. Moncayo, Pirineos, etcétera.

Var. **panniformis** Ach. Talo ceniciento ó pardusco; lóbulos y sus divisiones estrechos y cortos, formando una placa algo gruesa. Moncayo.

31. **Parmelia saxatilis** L. *(retiruga* DC).—Talo membranáceo, ceniciento ó blanquecino, frecuentemente con abundante isidio, arrugado y agrietado, formando malla irregular; laciniado con lacinias planas, aplicadas, lobadas, ensanchadas y festonadas en el extremo; envés negro; apotecios pardo-rojizos, con margen entero ó festonado. Insensible á la potasa. $M+K=O$. Con frecuencia enrojecido por los agentes atmosféricos.

En las piedras muy frecuente. Moncayo, Pirineos.

32. **Parmelia sulcata** Tayl.—En su aspecto y color parecida á la *saxatilis*. Haz lisa, sin isidio, muy distintamente reticulada, con soredios alargados marginados; envés pardo obscuro. $M+K=A$.

En troncos preferentemente. Aranda de Moncayo (Lázaro), Veruela, Moncayo, etc.

33. **Parmelia Borreri** Turn. *(dubia* Schær).—Talo ancho, orbicular, lobado, reticulado por encima, salpicado de abundantes soredios centrales y marginales; apotecios pardo-rojizos.

Aunque no la tengo de Aragón, no dudo que se halle en esta comarca.

34. **Parmelia cetrata** Ach.—Talo ancho, cartilagíneo, blanquizco garzo; haz sin soredios ni isidio, algo agrietada; lóbulos anchos, festonados y ascendentes en la periferia; envés fibriloso hasta el borde mismo, ó con las ricinas submarginales transformadas en papilas negras. Con la potasa la corteza y la médula amarillean y esta última pasa rápidamente al rojo de sangre; apotecios maduros perforados en el centro.

Se cita de España (Amo). Creo que en Aragón existe, pues está en otras regiones de la península.

---

(1) λευκός blanco. Incluyo en esta sección varias secciones ó subsecciones de Wainio, Hue y otros; como también para mayor comodidad, he dado diferente extensión á las dos secciones precedentes.

F.ª **soredifera** Wain. Con soredios.

F.ª **ciliosa** Viaud.-Gr.-Mar. Con pestañas negras marginales.

35. **Parmelia perforata** Jacq.—Reacción y apotecios como la *cetrata*. Talo enteramente liso, de un blanco algo garzo, lobado, sin soredios, con pestañas marginales negras de 1-3 mm.; envés negro en el centro, pardo en la periferia y en la misma anchamente desnudo de ricinas.

Debe de existir en Aragón.

36. **Parmelia perlata** L.—Talo grande hasta de 30 centímetros de diámetro, blanco garzo, liso, orbicular en su conjunto; lóbulos anchos, de bordes enteros ó casi enteros, plegados, ascendentes, sin fibrillas ó pestañas, con soredios marginales; envés negruzco y más pálido hacia los bordes. Con la potasa amarillean la corteza y la médula, y ésta se enrojece añadiendo enseguida cloruro cálcico.

En rocas y árboles. Falta hallarla en Aragón.

37. **Parmelia tiliacea** Ehrh.—Talo mediano (hasta un decímetro ó más), blanco, mate, profundamente lobado, con lóbulos festonados y casi hendidos, aplicados; bordes sin pestañas; envés negruzco; apotecios grandes (4-6 mm.), de disco bayo, margen flexuoso ó festonado, lampiño.

Común en las cortezas. Frecuentemente se ha confundido con la *perlata*.

F.ª **munda** Schær. Menor. Haz lisa, sin granulaciones; lóbulos bastante divididos; apotecios abundantes.

Calatayud (Vicioso), Veruela etc.

F.ª **scortea** Ach. Mayor. Ordinariamente estéril; haz cubierta, sobre todo hacia el centro, de granulaciones isidioides, negruzcas.

Veruela, Moncayo, etc.

38. **Parmelia carporrhizans** Tayl.—Talo parecido al de la *tiliacea*, de un blanco garzo algo azulado, con lóbulos alargados, lobado-hendidos, con lobulillos; cartilagíneo, sin pestañas marginales; apotecios bayos (2-6 mm.), con margen casi entero, grueso, con una corona de pestañas negras en la base exterior.

Cortícola. Benasque (Lázaro), Veruela.

39. **Parmelia trichotera** Hue.—Talo ancho, blanquizco, terroso y aun negruzco, orbicular, lobado, liso, sin isidio; bordes de los lóbulos crispados, ascendentes, sorediosos, pestañosos, con pestañas de 0'5-1 mm., negras; envés negro, pardo en los bordes, brillante, con ricinas negras, ordinariamente desnudo en una banda periférica, á veces papiloso en la misma K $\pm$ Con la potasa amarillea la corteza y la médula y ésta se enrojece al fin.

Moncayo, Veruela, etc.

40. **Parmelia pilosella** Hue.—Talo grande, blanquizco, cubierto de un isidio en el que se ve alguno que otro pelo negro; laciniado; lacinias de 10-15 mm. de ancho, lobadas profundamente; periferia con pestañas negras de 1-2 mm., simples ó ramosas; envés negro en el centro con ricinas negras, pardo en la periferia, con faja desnuda; apotecios anchos de 6-12 mm., pardos, con margen algo festonado, casi pedunculados. Con la potasa amarillea la corteza y la médula.

Es muy fácil que se halle en Aragón, aunque de esta región de España no la he visto.

41. **Parmelia revoluta** Flk.—Talo blanquizco, orbicular, laciniado, con lacinias estrechas, lobado-hendidas, empizarradas; haz sin isidio, lóbulos ascendentes en el extremo; envés negro, pálido en el margen, apotecios de margen festonado. M + K = O.

Debe de hallarse al menos en los Pirineos.

42. **Parmelia lævigata** L.—Talo blanquecino ó garzo, poco adherente, liso, con algunos soredios, orbicular, laciniado; lacinias sinuado-hendidas, divergentes desde el centro, algo empizarradas; envés negro hasta el borde mismo; apotecios rojizos, con margen entero ó apenas festonado.

En las rocas y troncos no es rara. Moncayo, Veruela.

Cuadro de las especies del género PARMELIA

1. Talo amarillo ó pajizo en el haz (Sección I, *Xanthoparmelia*) 2

—Talo obscuro, de un verde pardusco y aun negruzco (Sección II, *Melænoparmelia*) 6

—Talo más ó menos grisáceo ó blanco, pudiendo llegar á pardo obscuro y á blanco (Sección III *Leucoparmelia*) 11

2. Talo grande, de más de un decímetro, orbicular, lobado, mate, arrugado, laxamente adherido al soporte; envés bayo en los bordes. Cortícola . . . . *caperata* L.

—Talo más pequeño, lobado-laciniado ó laciniado 3

3. Talo mayor de 5 centímetros 4

—Talo menor de 5 centímetros, laciniado, estrellado, no salpicado de puntos negros, sino de soredios amarillos 5

4. Talo mayor, brillante, salpicado, sobre todo hacia el centro, de puntos negros, más ó menos orbicular; contorno lobado ó laciniado; envés comúnmente negruzco, ricinoso en toda su extensión, fuertemente adherido al soporte. Saxícola. *conspersa* Ehrh.

—Talo menor, liso, orbicular, con lacinias pinnatífidas y frecuentemente sorediferas en el ápice, en la axila con seno ancho redondeado; envés negro, más pálido en la periferia. *sinuosa* Sm.

5. Cortícola. Talo amarillo de azufre, con lacinias estrechas,

multífidas, planas, aplicadas, muy sorediosas . . *ambigua* Wlf.

—Saxícola. Talo mínimo, de 1—2 ctm., amarillo verdoso, con lacinias lineares planas. . . . . *Mougeoti* Schær.

6. Talo más bien verdoso, ya azulado, ya pardusco 7

—Talo más bien negro, con un tinte de pardo, ó verdoso. Saxícola. 10

7. Talo verde azulado, con apotecios grandes, elevados, urceolados, de margen tenue y arrugado . . . *acetabulum* Neck.

—Talo verde oliváceo puro ó pardusco 8

8. Talo oliváceo obscuro, brillante, laciniado; envés negruzco. Saxícola. . . . . *prolixa* Ach.

—Talo oliváceo puro, mate. Cortícola. 9

—9. Talo apenas brillante en los bordes, menudamente rugoso, con lóbulos divididos en la periferia, festonados . *olivacea* L.

—Haz plana, toda ella y el margen de los apotecios erizada de pequeñas papilas . . . . *exasperata* Dnrs.

10. Talo delgado, liso, laciniado, con lacinias estrechas, lineares, planas ó algo acanaladas . . . . *fahlunensis* L.

—Talo grueso, apergaminado, brillante, orbicular, laciniado, con lacinias convexas y con cefalodios . . . . . . *stygia* L.

11. Cara superior más ó menos reticulada, con líneas salientes ó profundas á manera de grietas. 12

— Cara superior lisa, no reticulada 16

12. Talo con placas sorediformes blancas centrales y marginales. . . . . *Borreri* Turn.

—Sin soredios, ó con soredios marginales. 13

13. Talo con isidio y granulaciones abundantes M + K = O. *saxatilis* L.

—Sin isidio ni granulaciones en el talo. 15

14. Haz muy distintamente reticulada, con líneas á manera de surcos ó grietas lineales. M + K = A . . . . . . *sulcata* Tayl.

—Haz poco distintamente reticulada. M. + K = A, luego R sanguíneo. Envés fibriloso hasta el borde mismo, ó bien con las ricinas submarginales transformadas en papilas. Apotecios maduros perforados en el centro. . . . . *cetrata* Ach.

15. Apotecios maduros perforados en el centro. Reacción como en la *cetrata*. Envés con faja marginal desnuda. *perforata* Jacq.

—Apotecios no perforados; distinta reacción 16

16 Talo lobado, con lóbulos redondeados, en su totalidad poco ó nada más largos que anchos, de borde entero ó festonado, ó poco profundamente dividido 17

—Talo laciniado, con lóbulos en su totalidad más de dos veces más largos que anchos. M + K = O 21

17. Talo grande, hasta 30 centímetros de diámetro, con lóbulos anchos, bordes enteros ó casi enteros, plegados, ascendentes, sin fibrillas ó pestañas, con soredios marginales; envés negruzco y más pálido hacia los bordes . . . . *perlata* L.

—Talo menor, lóbulos festonados. 18

18. Lóbulos fibrilosos en sus bordes. 19

—Lóbulos sin pestañas ó fibrillas marginales. 20

19. Haz lisa, sin isidio, bordes de los lóbulos crispados, ascendentes, serediosos . . . . *trichotera* Hue.

—Haz con isidio, del cual nacen pelos negros; bordes de los lóbulos con pestañas simples ó ramosas. . . . . *pilosella* Hue.

20. Talo blanquizco; apotecios sentados, con el disco pardo y el margen exterior lampiño . . . . *tiliacea* Ehrh.

—Talo garzo; apotecios levantados, casi pedunculados, rodeados de fibrillas en la base exterior del margen.
carporrhizans Tayl.

21. Lóbulos ascendentes; envés pálido en los bordes.
revoluta Flk.

—Lóbulos aplicados; envés negro hasta el borde mismo; talo liso, blanquecino . . . . *lævigata* L.

8. Género **MENEGAZZIA** Mass.

Haz como en el género *Parmelia;* envés desprovisto de ricinas.

43. **Menegazzia physodes** Ach.—Cortícola. Talo garzo, tenue, membranáceo, laciniado, empizarrado, poco adherente al soporte, ascendente en los extremos (fig. 16). Estéril.

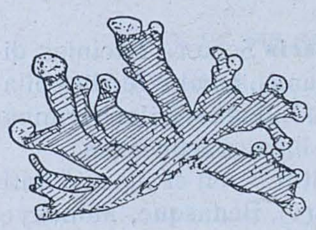


Fig. 16
Menegazzia physodes Ach. var. *labrosa* Ach.

Común en los bosques. Ofrece algunas variedades.

Var. **labrosa** Ach. Lóbulos terminados en dilatación á manera de placa harinosa.

Moncayo, Sallent, etc.

Var. **platyphylla** Ach. Lóbulos aplanados y ensanchados en los extremos.

Moncayo.

Var. **vittata** Ach. Lóbulos ceñidos de línea parda en el borde.

Veruela.

44. **Menegazzia encausta** Sm.—Saxícola. Talo blanco, ceniciento, obscurecido ó negruzco á trechos, grueso, cartilagíneo, adherente en toda su extensión; laciniado; lacinias multífidas, empizarradas, convexas.

En los montes Pirineos, Benasque, etc.

4. Familia CETRARIÁCEOS

Talo foliáceo ó fruticuloso, aquél muy dividido en lacinias de mediana anchura (fig. 17), verticales ó ascendentes ó aplicados, éste en forma de arbolillo bien ramificado. *Apotecios* lecanorinos, fijos oblicuamente en el extremo de las lacinias. *Ascas* con ocho esporas pequeñas, sencillas, incoloras, hialinas. *Paráfisis* gruesas y articuladas. *Espermogonios* incluídos en una espinilla ó papila negra. Esterigmas casi simples ó de muy pocos artejos.

Vegetan en el suelo, en las rocas, en las cortezas.

9. Género CETRARIA Ach.

Talo de consistencia apergaminada, levantado, foliáceo, comprimido, frecuentemente acanalado, de igual color por todas partes, pardusco ó apenas más pálido en su cara posterior; ó bien fistuloso y ramificado. Apotecios colocados en los extremos de las lacinias ó ramas.

45. **Cetraria islandica** L. (fig. 17).—Talo comprimido, levantado, laciniado, con lacinias más ó menos acanaladas, con bordes espinulosos, el pie sanguíneo; de color castaño más ó menos pálido y á veces negruzco, con el envés salpicado de puntitos ó soredios blanquizcos.

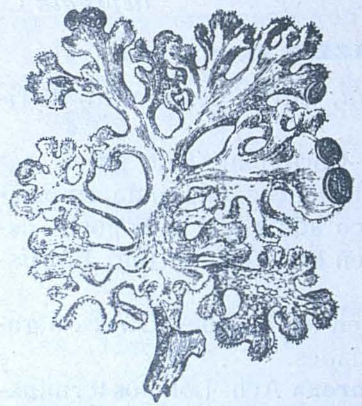


Fig. 17

Cetraria islandica L.

F.ª **vulgaris** Schær. Lacinias dilatadas, planas, lóbulos fértiles dilatados (fig. 17), los estériles terminados en dos lóbulos truncados.

En las alturas, en el suelo. Panticosa (Lázaro), Benasque, Moncayo, etcétera.

Var. **crispa** Ach. *(tubulosa* Fr). Lacinias estrechas, acanaladas, con bordes casi conniventes, con sumidades obscuras, muy divididas, algo recurvas, crispadas.

Moncayo, cerca de la cumbre.

46. **Cetraria nivalis** L.—Talo amarillo ó pálido, foliáceo, con lacinias levantadas, lagunosas, planas, acanaladas, muy divididas; apotecios pálidos, con margen festonado.

Debe de existir en nuestro Pirineo.

47. **Cetraria cucullata** Bell.—Talo amarillento ó pajizo, alto de 2 á 6 cent., con lacinias acanaladas, inermes, con el extremo ahuecado en forma de capuchón.

Sin duda está en los Pirineos de Aragón; lo he visto de los de Cataluña (Llenas).

48. **Cetraria tristis** Web.—Talo negro ó píceo, dividido ó dicótomo, con lacinias muy estrechas, acintado, aplicado, en su conjunto circular, fijo por el centro, formando rosetas de dos á cuatro centímetros; apotecios en los extremos, planos, con el margen inerme ó dentado.

Adherido á rocas silíceas de altos montes. Moncayo, Sallent, Benasque, Noguera (Vicente).

49. **Cetraria tenuissima** L. *(aculeata* Ehrh).—Talo levantado, fruticuloso, fistuloso, con rasgones grandes en las axilas, más ó menos ramificado, de un mlm. de grueso, 3—6 cent. de longitud, castaño tirando á negro ó bayo, con muchas espinillas en las ramas; apotecios rojizos, con margen dentado.

Frecuente en los campos ó matorrales. Veruela, Zaragoza, Beceite, etc.

Se han hecho muchas variedades poco distintas; las más marcadas son las siguientes:

Var. **spadicea** Ach. Talo más comprimido, lagunoso, de color bayo, con márgenes denticulados.

Veruela.

Var. **muricata** Ach. Talo más redondeado, rígido, negruzco, ramosísimo, con los ramos entrelazados y llenos de espinillas.

Veruela.

Clave de las especies del género CETRARIA

1. Talo fruticuloso, en forma de arbolillo, más ó menos cilíndrico ó comprimido, levantado, castaño ó bayo . *tenuissima* L.

—Talo foliáceo, acintado ó laciniado, aplicado al soporte ó ascendente 2

2. Talo negro ó negruzco, fuertemente adherido al soporte por el centro; lacinias muy estrechas y acintadas, aplicadas ó ascendentes, formando roseta . . . . *tristis* Web.

—Talo manifiestamente foliáceo, adherido más flojamente al soporte por la base; lacinias planas ó acanaladas 3

3. Talo castaño, tirando á bajo ó negro, con la base frecuentemente sanguínea, márgenes con espinillas. . . . . *islandica* L.

—Talo amarillo ó pajizo, lacinias acanaladas con márgenes inermes 4

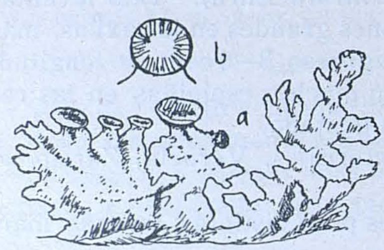
4. Talo amarillo, con lacinias semicilíndricas, foveoladas, planas en sus extremos. . . . . *nivalis* L.

—Talo pajizo ó blanquizco, con lacinias acanaladas y extremo ahuecado en forma de capuchón. . . . . *cucullata* Bell.

10. GÉNERO **PLATYSMA** HOFFM.

Talo foliáceo, de consistencia membranosa, apenas apergaminado, con las caras superior é inferior de color algo diverso ó mucho; ascendente, laciniado. Apotecios de ordinario situados en el extremo de las lacinias, sentados. Paráfisis articuladas. Esporas hialinas, sencillas. Espermacios pequeños, rectos. Espermogonios (fig. 18, *b)* papilosos, tuberculiformes, por lo común marginales.

50. **Platysma glucum** L. (fig. 18).—Talo garzo en la cara superior, negro total ó parcialmente en la inferior, ascendente, laxamente fijo al soporte, con lacinias dilatadas. Apotecios marginales, pardo-rojizos, con margen estrecho, pronto desvanecido. Esporas elípticas.



(Fig. 18)
Platysma glaucum L. *a*. Talo. *b*. Espermogonio.

Crece en las rocas silíceas de las alturas.

Forma **vulgaris** Schær. Toda la cara inferior, ó en su mayor parte, negra, extremos más pálidos, tirando á violado.

Moncayo, Benasque (Lázaro).

Var. **fallax** Ach. La cara inferior en gran parte blanquizca, hacia el centro á veces negra.

Con la forma típica. Moncayo, Sierra de Albarracín (Pau) etc.

51. **Platysma juniperinum** L.—Talo amarillo de limón, más pálido por debajo; médula de un amarillo intenso; lacinias ascendentes, lobadas, crispadas, cóncavas.

Sallent, al pie de los pinos.

52. **Platysma pinastri** Scop.—Talo membranoso laciniado, aplicado, de un amarillo pálido, por debajo amarillo y rugoso; lacinias de 2—6 mm. de anchura, mates, con márgenes llenos de soredios de un amarillo de limón, del cual color es la médula. Para algunos es variedad de la especie precedente.

Lo he visto del Pirineo catalán; falta hallarlo también en el aragonés.

53. **Platysma sæpincola** Scop.—Talo castaño ú oliváceo, más pálido por debajo, pequeño, decumbente ó ascendente, laciniado lobado; lacinias con el margen onduloso ó festonado. Apotecios submarginales pardos, con margen delgado festonado.

No lo he visto aún de Aragón, donde probablemente se encuentra en los Pirineos.

5. FAMILIA **USNEACEOS**

Talo fruticuloso ó filamentoso, adherido al soporte por su base y colgante del mismo, de ramás más ó menos redondeadas, con eje cartilaginoso. *Apotecios* lecanorinos, peltados, laterales ó terminales. Ascas con ocho esporas pequeñas, simples, incoloras. Paráfisis enteras. *Espermogonios* inmergidos ó superficiales. *Esterigmas* sencillos ó de pocos artejos.

11. GÉNERO **USNEA** DILL.

Talo filamentoso, cilíndrico, ramoso, del mismo color en ambas partes; corteza con frecuencia frágil é interrumpida; eje cartilaginoso, compuesto de filamentos apretados. Apotecios del mismo color que el talo ó poco diferentes, grandes, discoides, con margen fibriloso, insertos en un ramo geniculado, ó sea en el codo de una rama; ascas de ocho esporas pequeñas, elipsoides.

54. **Usnea florida** L. *(barbata* L).—Talo garzo, blanquizco ó amarillento, pardusco hacia la base, levantado, K = (es decir, insensible á la potasa dentro y fuera), de 4-12 centímetros de longitud; ramos primarios de 1—2 mm. de grueso; superficie lisa ó con menudísimas verrugas; con ramitos fibrilosos, fibrillas de 3-6 mm. de longitud. Apotecios grandes de 3-10 milímetros, con margen pestañoso, disco garzo tirando á cárneo y harinoso (fig. 19).

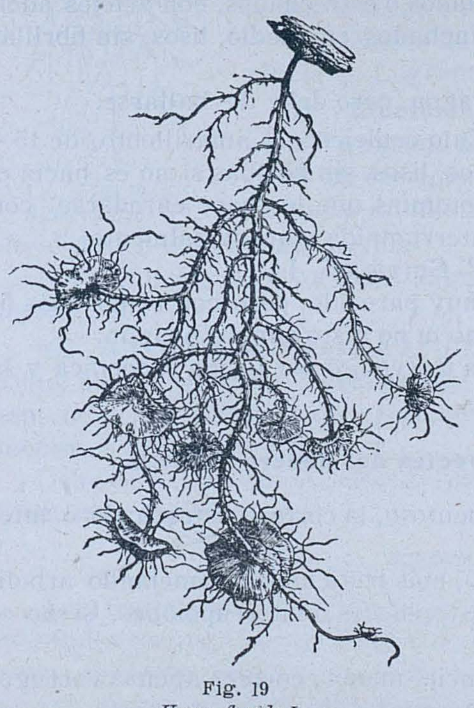


Fig. 19
Usnea florida L.

El tipo, con verruguillas escasas ó nulas, debe de ser raro en Aragón, creciendo en los troncos de las selvas. Moncayo?

Var. **soredifera** Arn. Talo de 3—7 cent., ejes primarios de 1 mm. ó más delgados. Ramos, y á veces las fibrillas también, con frecuentes soredios pequeños pulverulentos, á manera de eflorescencias.

Sierra de Guara, en los troncos de las encinas.

Var. **comosa** Ach. Como el tipo. Fibrillas abundantes, como también lo son las verruguillas; soredios hacia el extremo.

Beceite?

Var. **hirta** L. Talo de 3—8 centímetros, muy ramoso desde la base, formando césped; blando, muy fibriloso; ramos primarios delgados, de medio milímetro, todos ramosísimos, enredados entre sí, con fibrillas cortas y hacia el extremo, con soredios blanquizcos ó verdosos.

Sierra alta de Albarracín (Pau).

55. **Usnea ceratina** Ach.—Talo grande, de 4—20 cent.; con ramos primarios de 1—2 mm. de grueso, abiertos, ó sea apartados unos de otros desde la base; superficie áspera con multitud de verruguitas y fibrilosos; las papilas frecuentemente se convierten en soredios á modo de llagas. Estéril por lo común.

Moncayo, en los troncos y ramos de las hayas (P. Garriga S. J.).

56. **Usnea articulata** L.—Talo ceniciento ó amarillento, colgante, alargado, de 15—40 cent.; ramos primarios gruesos de 1—3'5 mm., á trechos articulados ó estrechados, con artejos adelgazados en los extremos é hinchados en medio, lisos, sin fibrillas más que en los extremos.

No la he visto aún de Aragón, pero debe de hallarse.

57. **Usnea plicata** L.—Talo ceniciento ó amarillento, de 15—30 cent., con ramos cilíndricos, lisos, sin fibrillas si no es hacia el extremo, con numerosas dicotomías que los hace enredarse, con la corteza frecuentemente interrumpida transversalmente.

Moncayo, en las hayas (P. Garriga S. J.).

La var. **dasypoga** Ach. muy parecida, pero con ramos más fibrilosos y algo verrugosos, no la he visto aún de Aragón.

Algunos autores toman la *dasypoga* por forma especifica y la *plicata* por variedad.

Clave de las especies del género USNEA

1. Talo largo, muy filamentoso; la corteza estrechada ó interrumpida á trechos 3

—Talo menos filamentoso, más fruticuloso, semejando arbolillo invertido, uniforme, sin estrecheces ó interrupciones, si no es accidentalmente 2

2. Fructífero con frecuencia, menor; corteza apenas verrugosa; ramos primarios poco divergentes, de 1 mm. ó menos *florida* L.

—Estéril, mayor; corteza distinta y densamente verrugosa; ramos primarios muy divergentes, de 1 mm. ó más. *ceratina* Ach.

3. Ramos primarios cilíndricos, lisos, con la corteza interrum-

pida á trechos con frecuencia, con muchas dicotomías. *plicata* L.
—Ramos larguísimos, gruesos de 1—3'5 mm., estrechados é hinchados alternativamente. . . . . *articulata* L.

12. Género **ALECTORIA** Ach.

Talo filamentoso, rígido, más ó menos cilíndrico, con médula floja, superficie igual en todo. Apotecios lecanorinos, con margen angosto. Esporas grandes, sencillas, hialinas ó parduscas.

58. **Alectoria jubata** L. (fig. 20).—Talo pardo, negruzco, filamentoso capilar, cilíndrico, comprimido en las divisiones.

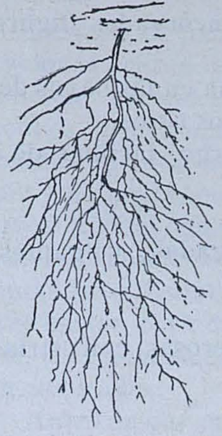


Fig. 20
Alectoria jubata L.

Var. **prolixa** Ach. Talo larguísimo, de 1—4 decm., muy ramoso, pardo ó negruzco, con soredios blancos ó cenicientos.

Moncayo, en Peñas Meleras y otros sitios.

Var. **implexa** Ach. Talo alargado ramosísimo, enredado, pardo-pálido, flexible, con soredios blancos ó cenicientos.

Por tenerla de Ortigosa (Vicente) en la provincia de Logroño, la incluyo aquí.

59. **Alectoria lanata** L.—Talo negro, en césped aplicado al soporte, ó poco levantado, como un centímetro, negro; ramos principales de medio milímetro de grueso, los terminales divididos en dos ramitas cortas.

Rocas silíceas de las alturas. Moncayo, Sallent (Pau, ipse), Benasque, etc.

60. **Alectoria sarmentosa** L.—Talo verdoso, amarillento, flexible, muy largo hasta 5 decímetros; ramos principales de 0'5—1'5 mm. de grueso, cilíndricos, aplanados en las ramificaciones, filamentosos y enredados entre si.

Debe de hallarse en Aragón el tipo y la var. **crinalis** Ach., con filamentos capilares.

6. Familia **RAMALINÁCEOS**

Talo fruticuloso, en lacinias comprimidas generalmente, implantadas por su base en el soporte; á veces fistuloso, rígido ó flexible. *Apotecios* lecanorinos, esparcidos ó marginales, con margen grueso. Ascas con 8 esporas sencillas ó biloculares, hialinas.

13. Género **RAMALINA** Ach.

Talo de igual color por ambas caras, grisáceo, garzo ó amarillento, fruticuloso, en lacinias divididas, más ó menos puntiagudas en su ápice. Apotecios esparcidos en el haz, ó marginales, ó terminales aparentemente, del mismo color que el talo ó poco diferente, con reborde grueso. Esporas elípticas, biloculares (fig. 21).

61. **Ramalina fraxinea** L. (fig. 21).—Talo de 3—5 cent. de largo, con lacinias de 6—10 mm. de ancho, con nervios y surcos longitudinales, ramosas, mates ó apenas brillantes; apotecios esparcidos y laterales á lo largo de las lacinias, con disco algo cárneo; esporas encorvadas (figura 21 *b*).

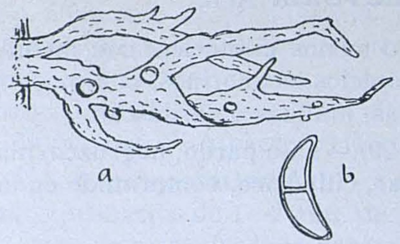


Fig. 21
Ramalina fraxinea L.
a. talo.-*b* espora.

Frecuentísima en las hayas del Moncayo y otros sitios.

Var. **ampliata** Ach. Talo de 12 cent. de largo, lacinias de 3 cent. de anchura, apenas ramificadas.

Moncayo.

Var. **tæniæformis** Ach. Lacinias muy alargadas, colgantes, apenas ramificadas, más lisas que el tipo.

Moncayo.

Var. **striatella** Nyl. Lacinias estrechas, numerosas, con estrías menudas blancas.

Moncayo.

Var. **tuberculata** Ach. Lacinias con numerosas granulaciones rugosas cefalódicas, desiguales, convexas.

Moncayo.

Var. **luxurians** Del. Lacinias principales provistas en los bordes de numerosas divisiones lineales, cortas, separadas.

Moncayo.

62. **Ramalina calicaris** L.—Talo garzo, pálido ó pajizo, con lacinias de 3—5 cent. de longitud y 2—3 mm. de anchura, divididas ó ramificadas, con frecuencia canaliculadas y siempre con estrías ó costillas longitudinales. Apotecios de 2—3 mm., colocados en un codo de la lacinia cerca de su extremo, de suerte que la junta sobresale (á veces falta) en ángulo, semejando una espuela; disco rosado, harinoso; esporas biloculares, rectas.

Más frecuente tal vez que la anterior, en las cortezas. Veruela, Moncayo, Sierra de Guara, Benasque, etc.

(Continuará).

La estrella variable "SS Cygni,,

Por P. M. Ryves

Después de haber hecho, durante el año 1908, algunas investigaciones acerca de esta interesante estrella variable, creo oportuno dar á conocer los resultados sin demora. El objeto de esta nota es, principalmente, publicar las magnitudes fotométricas obtenidas en cada una de las observaciones verificadas durante el año y no me propongo deducir conclusiones de estas porque una investigación completa de los fenómenos de variación sólo puede hacerse cuando se reúnen los trabajos de diferentes observadores situados en distintos puntos; sin embargo las observaciones nuestras bastan para demostrar que las variaciones durante el pasado año (1908), han sido muy anormales y diferentes de las observadas en otros años.

Antes de dar más detalles convendrá citar algunos antecedentes y hacer mención de otra estrella variable estudiada desde hace medio siglo considerada prototipo.

En el año 1855, el astrónomo Hind, descubrió, desde su observatorio, en Londres, una estrella de novena magnitud en *los gemelos*. Aunque venía practicando observaciones, durante algunos años, en aquella región del cielo nunca había visto tal estrella y anunció que había descubierto un nuevo planeta ó estrella variable. Su brillo empezó á disminuir llegando en poco tiempo á la magnitud 12; lo cual demostraba que no era planeta sino variable.

En la primavera del siguiente año, fué observada nuevamente como estrella de 9.ª ó 10.ª magnitud, y los pocos observadores que entonces se dedicaban á estos estudios, reconociendo la importancia del descubrimiento y el carácter singular de la variación luminosa de esta estrella, la vigilaban con insistencia, ejemplo que fué seguido por otros hasta que se pudo conocer el carácter de sus variaciones. En la generalidad de las estrellas variables (excepto las del tipo *Algol*), la variación es contínua, más ó menos uniforme, y los fenómenos se repiten conforme á un período fijo. Muy diferente es la variación de *U Geminorum* -pues esta es la designación dada á la estrella á que nos referimos.—Permanece largos períodos sin variar, siendo su brillo tan débil que sólo es visible en los anteojos de mucha potencia, pero de vez en cuando, y á intervalos desiguales, aumenta con rapidez asombrosa, llegando en dos ó tres días á su máximo cerca de la cuarta magnitud. Disminuye su luz después, aunque con menos rapidez, hasta llegar otra vez á su brillo normal: este fenómeno tiene lugar en un tiempo de 12 á 20 días.

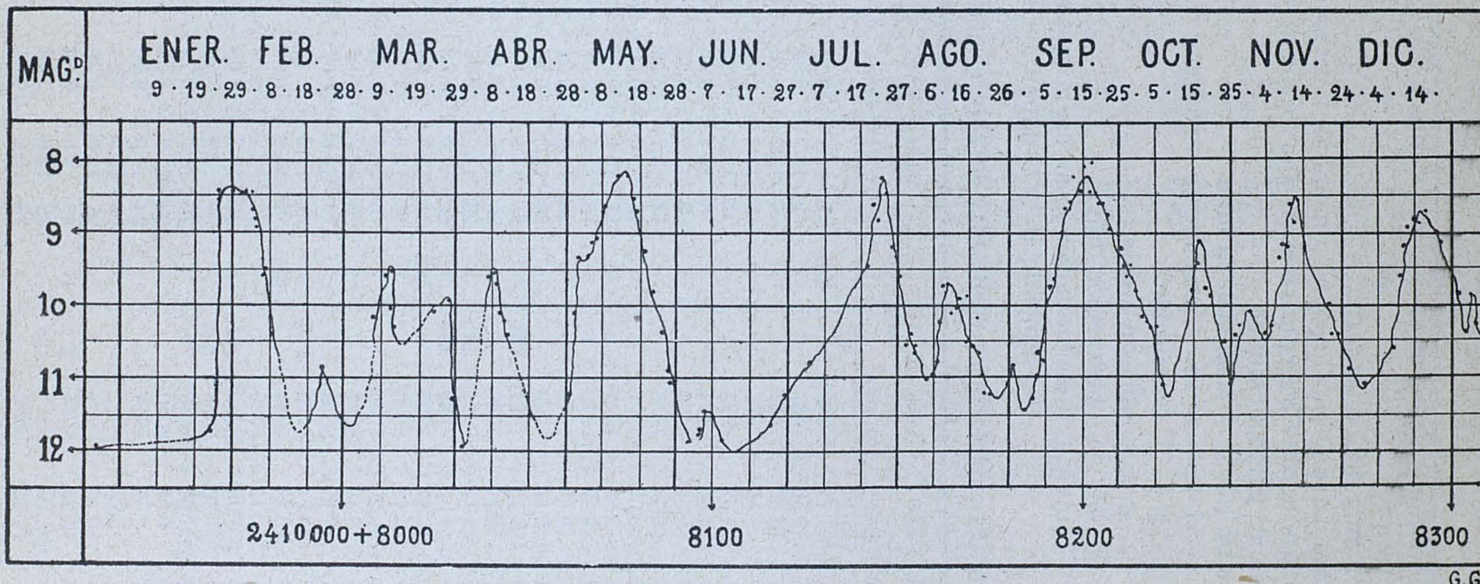
Por razon de estas idiosincrasias fué preciso crear una clase especial en la cual *U. Geminorum* gozaba de la distinción de ser el único ejemplar conocido, hasta que en 1896 fué descubierta por procedimientos fotográficos otra que manifestaba características semejantes.

Esta se halla en la constelación *Cisne* (es conocida por la designación *SS Cygni*) y por razón de su mayor brillantez y situación apartada de la eclíptica—circunstancias que facilitan la observación—se ha podido realizar una larga serie de observaciones y trazar la historia de sus variaciones durante 10 años. El carácter predominante de las variaciones así deducidas es un estado normal de poco brillo interrumpido de cuando en cuando con repentinas alteraciones de actividad luminosa de mayor ó menor duración. Como en el caso de *U. Geminorum* se ha reconocido dos clases de máximos — largo y corto — y estos generalmente alternan aunque en este caso no es siempre así.

Pero ni 10 años de estudio asiduo, ni miles de observaciones hechas en diferentes partes del mundo, bastaban para fijar el caracter de la variación de una estrella tan capricosa como *SS Cygni*. Las investigaciones hechas por nosotros indican de modo definitivo que durante el pasado año (1908) la variación ha sido tan irregular que ya no puede considerarse propiamente como del tipo de *U. Geminorum* aunque muestra alguna similitud. En vez de permanecer gran parte del tiempo en su mínimo brillo (cerca de la magnitud 12) ha sido generalmente más brillante; y desde Junio hasta fin del año no ha bajado una sola vez á su brillo «normal». Deducimos seis máximos que pueden ser considerados primarios y además hay varios máximos secundarios y otras oscilaciones más pequeñas como indica la gráfica que acompaña esta nota mejor que la descripción verbal.

He aquí un enigma, un problema que se resolverá sin duda, en lo futuro. Pero no se resolverá solo; hay que seguir trabajando y faltan trabajadores. Yo creo que en estos tipos de estrellas variables vemos algo de las diferentes fases de la evolución estelar, y que las llamadas estrellas nuevas representan casos de la más grande actividad, siguiendo después variables como *U. Geminorum* y *SS Cygni* y á continuación las de largo período y otras de menos amplitud.

SS. CiGNi.—1908.



Curva provisional que indica la variación de SS. Cygni durante el año 1908. Está basada en 170 observaciones hechas en 156 noches por P. M. Ryves en su estación astronómica de Zaragoza.

NOTA.—Algunas de las más pequeñas sinuosidades pueden ser debidas á las inevitables dificultades de observación.

Las observaciones se verificaron con un anteojo de 72 milímetros de abertura.

La 1.ª columna indica las fechas.

2.ª Hora astronómica en tiempo medio de Greenwich.

3.ª Magnitud de *SS Cygni* referida á la escala de Harvard.

4.ª Día del período Juliano.

5.ª Notas: l. l..... claridad de la luna.

l. l..... íd. muy fuerte ó molesta.

c. ..... crepúsculo.

n. ..... nubes ó niebla.

dif. .... observación difícil.

invis... invisible teniendo un brillo más débil que el indicado en la columna 3.

Tabla de las observaciones verificadas durante el año 1908

FECHA	HORA — T. M. G.	MAG. — Harvard	DIA — 2.410.000+	Notas	FECHA	HORA — T. M. G.	MAG — Harvard	DIA — 2.410.000+	Notas
Enero 24	6.9	11.77	7965		Mayo 1	13.4	10.13	8063	
» 26	6.9	8.50	7967		» 2	12.7	9.39	8064	
» »	18.0	8.60	7967		» 5	13.2	9.39	8067	
» 30	6.5	8.50	7971		» 6	13.7	9 19	8068	
Febrero 1	6.9	8.52	7973		» 7	13.5	9.15	8069	
» 2	7.0	8.50	7974		» 8	13 4	8.90	8070	
» 3	7.2	8.50	7975		» 9	15.2	8 70	8071	
» 4	16.7	8.74	7976		» 13	13.7	8.30	8075	l. l.
» 5	6.8	8.66	7977	l	» 15	15.0	8.30	8077	l. l.
» »	18.1	8.98	7977	c	» 17	15.6	8.60	8079	l. c.
» 6	7.9	9.20	7978	l	» 18	11.5	8.77	8080	l
» 7	7.7	9.62	7979		» 20	11.6	9.31	8082	
» »	17.3	9.56	7979		» 22	15.3	9.86	8084	l
» 9	7.9	(10.43)	7981	l dif.	» 23	13.5	10.07	8085	
» »	17.4	10.20	7981		» 25	13.6	10.43	8087	
» 19	7.6	<10.9	7991	invis	» 26	14.3	10.90	8088	
» 21	7.5	<11.3	7993	invis	» 27	14.0	11.05	8089	
» 23	17.1	10.91	7995	l	Junio 1	12.8	(11.92)	8094	dif.
» 28	16.9	11.55	8000		» 4	13.8	11.77	8097	
Marzo 8	15 1	10.20	8009		» 5	12.5	11.48	8098	
» 10	16 5	9.44	8011		» 10	14.8	11.87	8103	
» 11	16 2	9.62	8012		» 23	10.8	(11.67)	8116	dif.
» 12	14.7	10.08	8013	l. l.	» 27	11.2	11.25	8120	
» 13	16.7	10.34	8014		Julio 4	14.2	10.80	8027	
» 24	16 8	10.13	8025		» 19	12.8	9.51	8142	l l.
» 28	14 2	(9.98)	8029	dif.	» 20	12.7	8.68	8143	
» 29	14.6	(11.32)	8030	dif.	» 21	13.2	8.76	8144	
Abril 1	15 6	11.96	8033		» 22	14.7	8 76	8145	
» 8	15.2	9.65	8040		» 23	11.9	8 30	8746	
» 9	15.2	9.60	8041		» 24	11.5	8 50	8147	
» 10	15.1	9.75	8042		» 26	15.5	9.24	8149	
» 11	15.5	10.16	8043		» 27	12.6	9.39	8150	
» 12	16.0	10 25	8044	l. l.	» 28	9.9	9.63	8151	
» 13	14.0	(10.43)	8045	l. l. d.	» 29	15.0	9.98	8152	
» 30	12 0	11.26	8062		» 30	15.1	10.54	8153	

FECHA		HORA — T. M. G.	MAG. — Harvard	DIA — 2.410.000+	Notas
Julio	31	10.5	10 43	8154	
Agosto	1	10.6	(10.59)	8155	dif.
»	»	15.7	10.67	8155	
»	4	15.0	11.05	8158	
»	6	15.2	11.00	8160	
»	7	15.1	10 80	8161	
»	8	15.6	10.28	8162	
»	9	15.6	9.78	8163	
»	10	15.7	9.73	8164	
»	11	16.1	10 13	8165	l. c.
»	12	13.1	10.08	8166	l. l.
»	»	15.4	10.10	8166	l. l.
»	13	15 3	9.95	8169	
»	15	9.3	9.90	8169	
»	»	15.8	10 53	8169	l l.
»	16	9.9	10.40	8170	
»	17	10.8	10.59	8171	
»	18	10.8	10 20	8172	
»	19	10.6	10.67	8173	
»	»	15.8	11.00	8173	l.
»	20	9.5	11.21	8174	
»	21	15 6	11.23	8175	
»	26	13.2	11.12	8180	
»	28	13.6	10.84	8182	
»	31	14.0	11.45	8185	
Sepbre.	2	13.6	11.31	8187	
»	3	15 3	11 00	8183	
»	4	8.6	10.67	8189	l.
»	5	14.9	10.80	8190	
»	6	14.8	10.28	8191	
»	7	15.6	9.80	8192	
»	8	14.5	9.70	8193	
»	10	15.4	9.09	8195	l. l.
»	11	16.3	8.77	8196	l. l.
»	12	10 3	8.75	8197	l. l.
»	»	16.0	8.65	8197	l. l.
»	13	9.6	8.30	8198	l.
»	14	13.5	8.56	8199	l.
»	15	16.2	8 50	8200	l. l.
»	16	9 5	8.17	8201	
»	18	8 6	8.10	8203	
»	»	15 0	8.50	8203	l.
»	19	14.2	8.50	8204	l.
»	20	14.6	8.65	8205	l.
»	21	11.4	8.65	8206	
»	22	15.5	8.80	8207	
»	23	15.2	9.00	8208	
»	25	13.9	9.10	8210	
»	26	13.4	9.25	8211	
»	27	7.6	9.63	8212	

FECHA		HORA — T. M. G.	MAG. — Harvard	DIA — 2.410.000+	Notas
Sepbre.	27	15.1	9.50	8212	
»	28	13.8	9.50	8213	
»	29	14.5	9.66	8214	
»	30	13.7	9 84	8215	
Ocbre.	1	13.9	9 98	8216	
»	2	13.4	10.20	8217	
»	3	14.6	10.25	8218	
»	4	14.7	10.32	8219	
»	5	14.0	10.33	8220	
»	7	14.1	11.05	8222	l l.
»	17	8 4	9.19	8232	
»	»	13.0	9.47	8232	
»	19	13.5	9 80	8234	
»	20	11.8	9.88	8235	
»	24	10.3	10.55	8239	
»	26	7.5	11.12	8241	
»	27	9.4	10.43	8242	
»	28	13.4	10.32	8243	
»	29	13 0	10.43	8244	
»	31	11.8	10.13	8246	
Nbre.	4	8.1	(10 43)	8250	n dif.
»	6	13.2	(10.33)	8252	l l df.
»	8	9.2	9.39	8254	l. l.
»	9	10.0	9.24	8255	l. l.
»	10	10.3	9.23	8256	l. l.
»	11	8.8	8.68	8257	
»	12	13.4	8.92	8258	
»	13	7.7	8.60	8259	
»	19	8.5	10.05	8265	
»	»	13.6	10.03	8265	
»	21	9.5	10.00	8267	
»	23	8 9	10.43	8269	
»	24	9 5	10.43	8270	
»	27	7.8	10.92	8273	
Dbre.	1	6.6	11.12	8277	l.
»	9	10.7	(10.63)	8285	l l df.
»	11	9.0	9.65	8287	l.
»	12	8.1	9.23	8288	
»	13	8.0	8.98	8289	
»	15	7.2	8.90	8291	
»	16	9.0	8 90	8292	
»	18	7.7	8.75	8294	
»	21	7.2	9.06	8297	
»	22	10.5	9.19	8298	
»	27	6.1	9.88	8303	
»	»	7.5	9.86	8303	
»	29	11.2	10.43	8305	l.
»	30	6.4	9.90	8306	l.
»	31	10.3	10.30	8307	l. l.

ESTACIÓN ME

Observaciones verificadas dura

DIAS	OCTUBRE: TEMPERATURA: MÁXIMA: Sol: Vacío	Aire	Sombra	MÍNIMA: Cubierto	Reflector	HUMEDAD RELATIVA: A las 9h	A las 15h	DIRECCIÓN DEL VIENTO: A las 9h	A las 15h	NOVI: TEMPERATURA: MÁXIMA: Sol: Vacío	Aire	Sombra	MÍNIMA: Cubierto	Reflector
1	55.7	30 2	24.8	15.0	11.5	90	62	E	SSE	33 8	15.8	15.3	9.8	8.3
2	57.2	30.5	26.3	14.2	10.7	82	50	ESE	SE	27 9	19.0	18.2	12.5	11.0
3	56.5	29.5	26.6	13.0	10 7	87	51	ESE	SSE	54.2	21.2	19.9	12.5	10.4
4	56.4	28.2	25.7	11 7	8.2	76	50	E	SE	51.0	22.0	20.8	12.5	10.4
5	57.5	30 0	26.8	11.2	7 5	62	44	E	SE	54.5	24.0	20.0	12 5	11.0
6	62.0	38 2	30.0	11.5	9.5	72	68	N	E	53.6	30 3	21.5	11.3	9.5
7	55.7	28 0	26.2	12 7	10.5	76	50	ESE	E	33.0	16.5	15.6	10.5	7.5
8	55.6	28.8	25.5	12 2	10.1	78	55	SE	ESE	32.0	14 0	13.2	9.3	6.7
9	55.2	26 6	25.5	15 2	12.8	85	58	E	E	53.5	19.5	18.5	8.5	5.5
10	51.0	22.1	20.3	14.0	12 2	98	73	ONO	NO	52.5	19.0	17 2	10.0	7 2
11	55.5	31.4	23.2	11.0	9 5	79	64	N	ESE	51.0	21.0	19 0	9.0	6 0
12	53.0	24.5	22.5	11 0	9.0	88	64	E	SE	50.2	23.5	20 0	9.0	6.7
13	57.3	28 7	23.5	13 0	10.0	84	57	ESE	ESE	52.0	24 1	19 2	5.2	2 6
14	53.5	21 9	21 0	16.0	13.4	91	95	SE	NE	32.5	17.0	13.5	4.5	3 9
15	51.0	23.0	21.0	14.0	12.5	94	82	E	ESE	46.5	18 5	16.5	7.0	5.3
16	59.0	32 5	23.5	11.0	10.5	100	67	NO	ENE	13.5	11 0	10.5	6 5	5 6
17	54.8	25 0	22.3	11 5	9 5	86	58	E	E	15.5	13.0	13.0	6.0	4.0
18	49.5	24.4	21 4	11 5	10.0	90	74	ESE	ESE	49.0	18 0	15 0	8.5	6.2
19	54.0	23 9	21.0	14.3	13.0	94	69	ONO	NO	47.0	15.0	14.5	5.5	2.3
20	55.0	25 0	21 0	11 0	9 4	76	53	NO	NO	44.5	18 2	12.5	-0.5	-1.5
21	53.5	22.1	20.0	10.3	9.5	80	63	NO	NO	46.0	18.5	16 8	1.0	0.0
22	53.5	22 0	19 0	10.0	9.0	89	78	ONO	ONO	52.5	19.0	17.5	3.5	2.5
23	35.5	18.0	16.5	11.0	10.0	96	78	O	SSO	48.5	19 4	16.3	-2.0	-3.9
24	47.5	16.3	15 5	6 4	5.0	72	64	NO	NO	45.8	18.2	15.4	1.3	0 5
25	49.5	12.5	12 0	6.5	5.0	72	72	O	NO	49.0	15 4	14 2	-2.4	-4.6
26	50 0	23.3	11.1	2.0	0.0	81	68	ENE	SE	16.0	11.0	10 4	3.5	1.3
27	44.0	16.8	15.6	4.5	2.2	82	72	E	SE	43.6	15 4	13.2	3.5	1.5
28	49.6	20.6	19.5	6.0	4.0	98	87	ESE	ESE	39.0	12.4	10.9	3 2	2.2
29	55.8	21.0	20.6	8.7	2.5	98	72	E	E	32.2	13.4	11.6	5.5	2.3
30	58 6	22.0	20.5	12.0	10.4	88	78	ESE	ESE	21.0	14 6	12 7	6.0	4.2
31	46 8	21.0	18.6	13.5	10 0	98	83	ESE	SE					

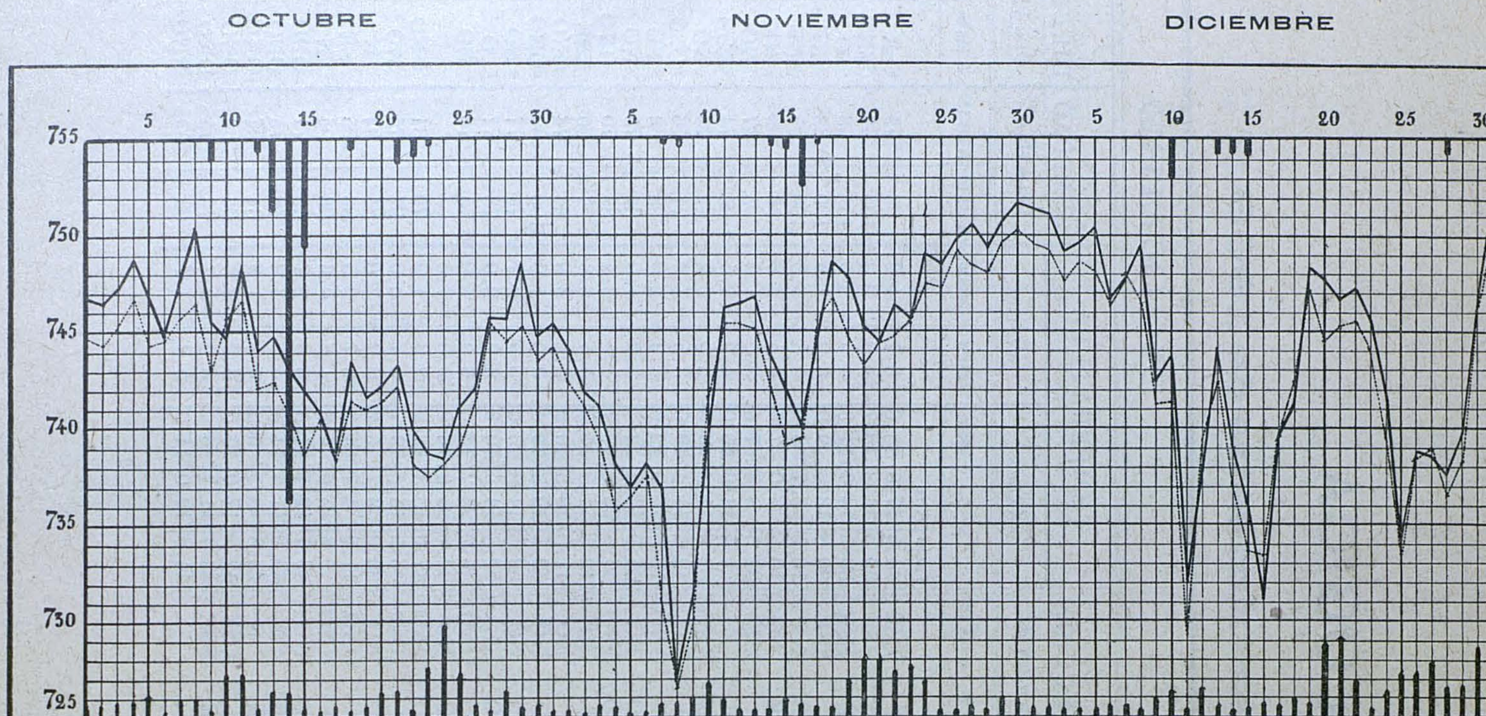
TEOROLÓGICA

te el tercer trimestre de 1908

MBRE				DICIEMBE									
HUMEDAD RELATIVA		DIRECCIÓN DEL VIENTO		TEMPERATURA					HUMEDAD RELATIVA		DIRECCIÓN DEL VIENTO	
				MÁXIMA			MÍNIMA					
A las 9h	A las 15h	A las 9h	A las 15h	Sol		Sombra	Cubierto	Reflector	A las 9h	A las 15h	A las 9h	A las 15h
				Vacío	Aire							
99	90	SE	ESE	44.5	17.0	15.6	6.7	4.2	93	79	E	SE
94	79	E	S	30.5	14.8	12.7	4.6	2.3	100	86	ENE	S
96	73	SSE	ESE	30.5	14 6	11.3	4.5	2.5	100	93	O	ONO
90	70	E	ESE	30.8	13.0	9.9	3.0	1 5	100	88	NE	ENE
90	72	OSO	NE	10.5	8.7	8.5	5.3	3.8	100	95	NE	E
84	73	ESE	NO	10.5	8 0	7.6	4.5	2.8	95	90	NE	NO
100	91	E	SE	32.5	9.8	7 6	3.0	1.0	95	87	NO	NO
71	86	ESE	E	40.5	11.0	10 0	4.0	2.5	95	74	ESE	SE
86	72	ESE	NNO	32.0	11.2	9.8	5.0	3.2	92	76	NO	ONO
76	67	NO	NO	12.5	11 2	10 6	3.5	1.2	77	76	OSO	OSO
73	64	O	ONO	18.5	13 0	12 0	4.3	2.5	98	86	SO	ONO
82	56	NNO	NO	45.0	14.2	12 3	3.0	1.0	69	75	NO	ONO
92	71	ONO	ONO	47.5	23 2	16.7	4.5	2.4	88	70	ONO	ESE
97	87	SE	NE	13.5	11.8	11 5	5.5	3.3	97	95	ESE	E
87	76	O	NO	11.0	10.3	10.0	5.2	3.0	83	74	ONO	OSO
100	100	ONO	NO	42.5	12 5	10.4	3.0	1.0	100	80	ONO	ONO
98	98	ONO	NO	52.5	14 5	13.0	5.0	2 7	75	77	NO	ONO
92	60	NNO	NO	52.3	14.0	10.6	3.2	2.0	78	77	O	NNO
77	61	ONO	ONO	46.0	23.7	13 0	6.0	4.0	75	76	NO	ONO
85	63	ONO	NO	42.8	25.0	16.0	9.0	7.0				
81	70	ONO	ONO	47.6	16.4	13.9	2.3	1.2	79	61	ONO	NO
74	64	NO	ONO	46.5	16 0	13.7	0.7	0.0	97	75	NO	O
76	62	ONO	NO	30.0	3 7	5.2	0 2	-2.0	84	94	N	E
68	60	NO	ONO	11.9	4 7	4.5	6.7	2.5	96	95	SE	ESE
89	68	SO	NNO	9.6	5.0	4.6	1.2	0.6	96	94	N	O
95	81	OSO	NO	46.7	12 7	11.0	6 3	2.7	45	71	ONO	ONO
97	70	ESE	SE	48.9	11.5	11.5	4.5	3.2	78	75	ONO	ONO
97	86	ESE	SE	25.8	9.7	6.3	4.1	1.9	64	97	ONO	O
100	88	E	ESE	42 9	17 0	15.0	8.0	4 3	66	68	ONO	ONO
100	89	ENE	ESE	43.7	11.7	10.4	6.2	3.7	76	75	ONO	NNO
				44.8	12.0	11.0	5.2	1.7	65	59	NNO	ONO

GRÁFICAS DE LAS OBSERVACIONES DEL CUARTO TRIMESTRE

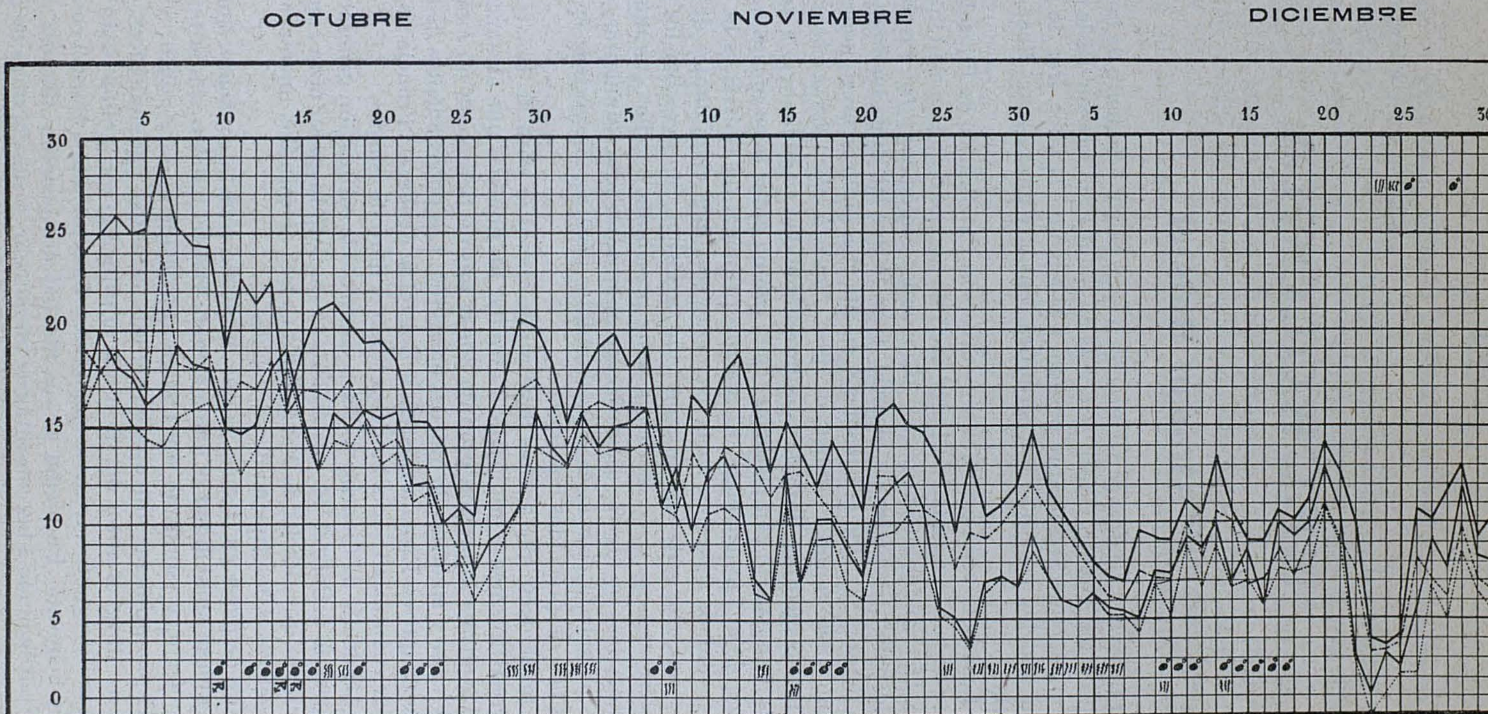
BARÓMETRO, PLUVIÓMETRO, ANEMÓMETRO



NOTA.—Las líneas llenas y de puntos representan respectivamente las presiones á 0°, corregidas de capilaridad, á las 9h y á las 15h.

Los trazos gruesos inferiores representan el recorrido diario del viento, 1mm = 100km, y los superiores el agua de lluvia, 1mm = 2mm de lluvia.

TERMÓMETRO



NOTA.—Las líneas continuas representan respectivamente las temperaturas del termómetro seco á las 9^h y á las 15^h.
Las de puntos y trazos y puntos las temperaturas del termómetro húmedo á las mismas horas.

NECROLOGÍA

Alfonso Boistel

Por la revista *Le Monde des Plantes*. vengo en conocimiento de lamuerte de lprofesor Alfonso Boiste, ocurrida en Saint Philibert-sur-Risle (Eure Francia), el 24 de Septiembre pasado, á la edad de 71 años. Por la gratitud que le debo, espero se me permitirá consagre unas breves líneas á su memoria.

Dedicóse á la vez á estudios muy diversos. Catedrático de Filosofía del Derecho en la Universidad de París, escribió un texto que ha sido muy estimado. Realizó investigaciones y excursiones geológicas y fue Presidente de la Sociedad Geológica de Francia. Pero lo que sin duda ha enaltecido más su nombre, ha sido la botánica y en ella el estudio de los líquenes. Sería elaño 1896 cuando publicó su libro *Nouvelle flore des Lichens*. con 1.178 figuras inéditas, libro de asombrosa facilidad en su manejo y que introduce al inexperto con pie firme, en el campo antes poco menos que laberíntico de la Liquenología. El mérrito principal de Boistel es la claridad y facilidad. Acierta á coger los caracteres más culminantes de cada forma y ponerlos ante los ojos con toda precisión. Sin desechar los estudios microscópicos y de reactivos, sabe prescindir de ellos (aunque los consignos) para no aterrar al bisoño con aparatosos procedimientos, antes hacerle amable la ciencia de estas humildes plantas, convertirle en simpáticos loss despreciados líquenes.

De mí se decir que apenas llegó á mis manos la obra de Boistel, me sentí irresistiblemente impulsado á estudiar los líquenes que alcanzar pudiese. La misma impresión produjo por el mismo tiempo en mi amigo el señor Vicioso y en otros, de quienes he sabido. Los pocos adeptos de la Liquenología que en España existen, á Boistel se deben; en Francia no hay que decir cuántas aficiones ha despertado el libro de Boistel.

La Academia de Ciencias ds París confirmó la estimación general dando un premio á Boistel El mismo autor completó luego su obra con otro volumen, en que desciende á más pormenores de estudios microscópicos y de reactivos y descripción de variedades.

No he de pasar en silsncio lo que la misma revista consigna, que por su obsequiosa amabilidad se había atraído Boistel muchas simpatías. Así era, en efecto, y yo mismo soy testigo agradecido en este punto. Al tropezar en las primeras dificultades de mis estudios liquenológicos, muy pronto me dirigí al autor del libro que al principio me guiaba casi l solo. Le hice mis preguntas, le envié ejemplares. Siempre allé á Boistel complaciente y benévolo. En medio de sus muchas ocupaciones allanóse á responder por menudo á las consultas de un novicio. A sus palabras de aliento debo en gran parte el haber proseguido en estudios tan minuciosos y aun ingratos para muchos

Llegaba su benevolencia hasta comunicarme noticias íntimas que podían interesarme. Quiero poner aquí algunos párrafos de sus cartas que conservo como precioso recuerdo del maestro y del amigo.

Decíame á 8 de Abril de 1899: «Notre maitre á tous, le Dr. Nylnader, est mort la semaine derniére. Il était protestant, et il n, y avait rien á tenter pour le faire entrer dans nos sentiments. Je lui ai consacré une courte notice dans le *journal des Debats* ce matin, en attendant une étude plusdétaillée que mérite un savant de sa valeur». Ambos trabajos me los envió el autor.

A 6 de Marzo de 1900, después de un largo trabajo de revisión de gran número de mis líquenes más difíciles, decíame: «Il y a beaucoup de choses intéressantes dans vos différents en vois; notamment la collection si compléte de *Gyrophora* du Moncayo, et l, *Evernia villosa.* qui est une plante essentiellement méridionale. Il faudrait seulement la trouver en fructifications.«

He de advertir que siendo este liquen de Zaragoza, en vano lo busqué con frutos en multiplicadas ocasiones por las colinas vecinas, donde se encuentra, hasta que al fin este mismo invierno hallé fructíferos algunos ejemplares en Torrero. Disponíame á enviar algunos de regalo al Sr. Boistel, cundo supe su fallecimiento.

En la misma carta añadía: «J, espére... que vous continuerez vos recherches de lichens; les succés de vos trouvailles et l, exactitude de la plupart de vos déterminations ne peuvent que vous encourager puissamment. Recevez toutes mes félicitations.«

Por desgracia, ocupaciones perentorias que se han sucedido unas en pos de otras, me han impedido satisfacer á veces los deseos de Boistel y los míos propios. Quiera Dios que ahora ya más libre de ellos pueda dedicarme con ardor y sin interrupción á mis estudios predilectos.

L. N.

BIBLIOGRAFÍA

Tratado elemental de Zoología, por Pedro Ferrando y Celso Arévalo Doctores en Ciencias Naturales, Catedrático y auxiliar respectivamente, de la asignatura, en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza. Parte primera. Zoología general, Protozoarios y Fitozoarios. Zaragoza, 1908.

Quisiera en estos momentos que no fuesen mis amigos sino desconocidos, los autores de esta obra, para que mis elogios no pudiesen ser interpretados como lisonja ó tributo de amistad. No es solamente un resumen de las explicaciones del profesor dispuestas para preparar el ineludible paso del examen; es un cuerpo de doctrina compendioso y completo, que ilustrará al alumno en cualquiera época de su vida, así como á las personas que deseen tener un compendio de Zoología, puesto á la altura de los últimos adelantos de la ciencia. Porque con él vemos las nociones generales más depuradas, las clasificaciones más perfectamente elaboradas.

La obra comprenderá necesariamente dos volúmenes. Este primero se divide en tres partes: la Zoología general, y de la particular los dos grandes grupos de animales, *Protozoarios* y *Fitozoarios*, dejando para el segundo tomo el estudio de los animales más perfectos ó *Artiozoarios*. Unas nociones preliminares preceden á la primera parte y otras breves de Taxonomía encabezan la segunda.

La exposición es metódica y progresiva; así es que en el cuadro general de los animales puesto en la página 10, se apuntan solamente los grupos principales, indicándose alguna especcie ó especies de las más vulgarmente conocidas en cada uno de ellos, con lo que se forma una idea clara del orden y escala zoológica, y en el de la página 153, con más riguroso tecnicismo y sin ejemplos se exhibe la clave sinóptica de los nueve tipos de animales que actualmente se admiten.

Ilustran este volumen 114 grabados. Verdaderamente ilustran, porque son escogidos de los que más pueden instruir al lector y aclarar el texto, sobresaliendo algunos esquemáticos, debidos al Sr. Arévalo.

L. N. S. J.

Annuaire du Bureau des Longitudes, pour 1909.—La librería Gauthier Villars acaba de publicar, como todos los años, el Anuario antedicho, que en la forma acostumbrada contiene, además de los datos astronómicos, tablas relativas á la Física, á la Química y al Arte del Ingeniero. Este año merecen cita especial las noticias de M. G. Bigourdan, *Les Etoiles variables*, y la de M. Ch. Lallemand: *Mouvements et déformations de la croûte terrestre.*

Lecciones elementales de Fisiología é Higiene, del prof. D. Carlos E. Porter. Santiago de Chile

El conocido profesor chileno Sr. Porter, fundador y director de la Revista Chilena de Historia Natural, y autor de obras muy recomendables referentes á la misma ciencia, es bien conocido por cuantos se dedican á esos estudios que le han valido multitud de distinciones en su país y en el extranjero.

Las lecciones antedichas del distinguido profesor, constituyen uno de los libros más adecuados y recomendables para el estudio de la Fisiología y la Higiene en la enseñanza secundaria, por lo cual no es de extrañar que en el Perú y otras naciones americanas hayan sido declaradas de texto oficialmente.

Con claridad ,concisión y método dignos del mayor elogio, ha sabido reunir el autor en pocas páginas, todas las nociones de Anatomía Fisiología é Higiene, expuestas con verdadero conocimiento de la ciencia actual, aunque sin entrar en elucubraciones impropias de alumnos de la enseñanza secundaria. De ese modo resulta utilísimo el libro del profesor americano, al facilitar el trabajo del alumno ni dejar de iniciarles en todos los conocimientos naturales cuya adquisición se propone.

En números posteriores daremos cuenta de otras producciones del distinguido naturalista, entusiasta como pocos, laborioso é infatigable, digno de las distinciones y aplausos que se le tributan, y á la que desde estas columnas nos adherimos muy gustosos.

Complemento del cálculo infinitesimal.—Procedimientos geométricos y aparatos de integración, por Celestino García Antunez, Capitán de Ingenieros y profesor de la Academia del Cuerpo. Un tomo con 190 páginas y 72 figuras intercaladas.

Como introducción, expone el autor la utilidad de los métodos gráficos en el cálculo integral y el objeto de la obra, que es el de agrupar en un solo cuerpo de doctrino las teorías diversas y descripciones distintas que en diferentes trabajos se encuentran diseminadas, dando á las primeras unidad de fundamento conforme requiere el fin didáctico á que se dedica el libro.

Empieza el texto exponiendo el procedimiento geométrico de derivación de una función $y=f(x)$ representada por una línea y estableciendo el concepto de la línea derivada; seguidamente se demuestran propiedades importantes referentes á forma y posición relativa de las líneas primitiva y derivada y á circunstancias especiales de sus puntos singulares. A continuación se explica la significación geométrica y la dedución de la derivada cuando se emplean coordenadas polares.

En la 2.ª parte de la obra se ocupa el autor de la *integración geométrica,* exponiendo la cuestión metódicamente para deducir de una manera clara y racional el método de Zmurko y constituir base suficiente para el estudio de algunas propiedades de gran interés en la resolución de ciertos problemas geométricos y mecánicos que más adelante el autor resuelve con gran elegancia. Es de completa originalidad en esta parte, entre otras ideas, el procedimiento para integrar ecuaciones diferenciales basado en iguales consideraciones que el aplicado por Zmurko á las funciones explícitas.

La 3.ª parte de la obra, dedicada á la *integración con aparatos*, contiene en sus primeras páginas una teoría breve y sencilla común á todos los integradores del género Amsler y basándose en ella se estudian á continuación los planímetros Pritz y polar de Amsler y el integrador Deprez. Finaliza el libro con el estudio del intégrafo Abaknowicz-Coradi.

En nuestra opinión, la obra de que damos cuenta, por la originalidad de gran parte de su contenido, por la forma didáctica y la claridad de su exposición y por la aplicación práctica que puede darse á los procedimientos de cálculo á que se refiere es de gran mérito, interés y oportunidad; pero á fuer de sinceros hemos de lamentarnos muy mucho de que no dedique unas páginas, sino tan solo una simple cita, á un aparato integrador que sobre su extraordinario mérito tiene para nosotros el interés de haber sido inventado por un hombre de ciencia español; nos referimos al *Integrómetro cartesiano* de nuestro querido maestro el catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central señor Ruiz Castizo. Sin duda no cree el autor del libro reseñado, que este aparato sea de los que el Ingeniero encontrará con más frecuencia en el desempeño de su profesión, pero aunque así fuera, las circunstancias reunidas en él justificarían, á juicio nuestro, el ligero aumento de extensión que adquiriría la obra al incluirlo.

Aparte de esta consideración que nos sugiere nuestro particular criterio, no podemos menos de felicitar al Sr. García Antúnez por el trabajo á que nos hemos referido y por los beneficios que su publicación ha de reportar al distinguido Cuerpo á que pertenece.

A. Ruiz Tapiador.

CUESTIONES PROPUESTAS

18.(*) Demostrar que en todo triángulo plano ABC se verifica

$$\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}B-\frac{b-a}{c}\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} 1''}+\left(\frac{b-a}{c}\right)^2\frac{\operatorname{sen} 2B}{\operatorname{sen} 2''}-\left(\frac{b-a}{c}\right)^3\frac{\operatorname{sen} 3B}{\operatorname{sen} 3''}+\ldots\ldots$$

H. Fuhrmann.

19.(**) Si se prolongan los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC, en longitudes CA_1, AB_1 y BC_1 iguales á su mitad, se toman sobre las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 los puntos M, N y P tales que

$$\frac{AM}{AA_1}=\frac{BN}{BB_1}=\frac{CP}{CC_1}=\frac{1}{n},$$

y por ellas se trazan paralelas á los lados BC, CA y AB, ó á los CA, CB y AB ó á los AB, AC y BC, estas rectas pasan por un mismo punto Q ó Q' ó Q''. Caso particular: $n=3$.

L. de Alba.

20. (***) En todo triángulo, la distancia del punto medio de un lado al punto de contacto de este lado con el cálculo inscrito es igual á la semidiferencia de los otros lados. ¿Qué sucede si en vez del círculo inscrito se consideran los círculos exinscritos? Aplicaciones gráficas.

L. S. de la Campa.

21.(****) Hablar el límite de $y=x^{\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)-\operatorname{sen}(x-1)}}$, para $x=1$.

E. Hernández.

22. (*****) Un triángulo PQR inscrito en un círculo dado, tiene dos vértices Q y R fijos; el lugar de los piés P_1 y P_2 de las bisectrices QP_1 y QP_2 del ángulo PQR y del suplementario adyacente es una estrofoide tangente al círculo en R y con el nodo en Q. Construir la asintota, las tangentes en el nodo y las tangentes en P_1 y P_2, y hallar el lugar del punto común á estas dos últimas.

V. Retali.

(*) Cuestión 126 de la *R. T. M.*
(**) » 127 » » » » »
(***) » 128 » » » » »
(****) » 129 » » » » »
(*****) » 130 » » » » » y 271 del *P. M. S.*

CUESTIONES RESUELTAS

8. **Siendo** $S_p^{n-1} = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots\ldots + (n-1)^p$, **demostrar** que

$$S_p^{n-1} = \frac{2n(n-1)}{(p+1)!}\begin{vmatrix} n^{p-1} & -\frac{1}{2} & C_p^{p-2} & C_p^{p-3} & C_p^{p-4} & \ldots\ldots & C_p^2 & C_p^1 \\ n^{p-2} & -\frac{1}{2} & C_p^{p-1} & C_{p-1}^{p-3} & C_{p-2}^{p-4} & \ldots\ldots & C_{p-1}^2 & C_{p-1}^1 \\ n^{p-3} & -\frac{1}{2} & 0 & C_{p-1}^{p-2} & C_{p-2}^{p-4} & \ldots\ldots & C_{p-2}^2 & C_{p-2}^1 \\ n^{p-4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & C_{p-2}^{p-3} & \ldots\ldots & C_{p-3}^2 & C_{p-3}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n^2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & C_4^3 & C_3^1 \\ n & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & C_3^2 \end{vmatrix}$$

C. A. LAISANT.

Se verifica idénticamente:

$$n^p = (1 + n - 1)^p = \sum_{k=p}^{0} C_p^k (n-1)^k$$

y también

$$n^p (n-1) = \sum_{p}^{0} C_p^k (n-1)^{k+1}, \qquad (n, n-1, \ldots\ldots 3, 2). \qquad \text{(I)}$$

Sumando estas expresiones, resulta:

$$n^{p+1} - n^p + S_{p+1}^{n-1} = \sum_{p}^{0} C_p^k S_{k+1}^{n-1}$$

ó sea:

$$\sum_{k=p-2}^{1} C_p^k S_{k+1} + C_{p+1}^p S_p = n^{p+1} - n^p - S_1$$

$$= n(n-1)\left(n^{p-1} - \frac{1}{2}\right), \ (p, p-1, \ldots\ldots 3, 2).$$

Despejando S_p en este sistema lineal y teniendo en cuenta que el determinante de los coeficientes es

$$C^1_{p+1}\, C^{p-1}_p \ldots\ldots C^2_3 = \frac{1}{2}(p+1)!,$$

queda demostrada la cuestión.

Según se ve, pueden obtenerse infinidad de expresiones análogas. Así por ejemplo, sumando las expresiones (I) se tiene:

$\sum_{k=1}^{p-1} C^k_p S_k = n^p - n$ y dando á p los valores p, $p-1$, ... 3, 2, y despejando S_p, resulta:

$$S_p = \frac{n}{(p+1)!}\begin{vmatrix} n^p & -1 & C^{p-1}_{k+1} & C^{p-2}_{p+1} & \ldots\ldots & C^1_{p+1} \\ n^{p-1} & -1 & C^{p-1}_p & C^{p-2}_p & \ldots\ldots & C^1_p \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & & 0 & 0 & \ldots\ldots & C^1_2 \end{vmatrix}$$

J. Rey.

9. Se da un círculo de centro O y un punto P en su plano. Por el punto P se trazan dos cuerdas rectangulares variables AB, CD. El lugar del centro de las cónicas que pasan por los puntos A, B, C, D, O, es otra cónica Γ. Cuando el punto P se mueve sobre un diámetro fijo del círculo O, la envolvente de la cónica Γ es una séxtica.

E. N. BARISIEN.

Tomando por ejes el diámetro que pasa por P y el perpendicular, la ecuación de la línea formada por un par de rectas perpendiculares que pasen por P, es, designando por a el segmento OP,

$$P = (x-a)^2 + my(x-a) - y^2 = 0$$

y la de la circunferencia

$$Q = x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

La ecuación de la cónica $ABCDO$ será de la forma

$$P + \lambda Q = 0$$

con la condición $\lambda = \frac{a^2}{r^2}$ que se obtiene al poner $x = y = 0$.

Las coordenadas del centro han de satisfacer á las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} P'_x + \lambda Q'_x = 0 \\ P'_y + \lambda Q'_y = 0 \end{aligned}\right\} \text{ ó sea } \left\{\begin{aligned} &2(x-a) + my + 2\lambda x = 0, \\ &m(x-a) - 2y + 2\lambda y = 0, \end{aligned}\right.$$

de las que, eliminando m, se obtiene

$$(r^2 + a^2)\,x^2 + (r^2 - a^2)\,y^2 - (2r^2 + a^2)\,a x + a^2 r^2 = 0, \qquad (1)$$

ecuación de una cónica, uno de cuyos ejes es OP, que tiene un vértice en P, y para semiejes

$$\frac{a^3}{2(r^2 + a^2)}, \qquad \frac{a^3}{2\sqrt{r^4 - a^4}}.$$

La envolvente de la cónica (1) cuando el punto P se mueve sobre un diámetro, se obtendrá eliminando a entre la ecuación (1) y su derivada con relación á a,

$$3xa^2 - 2(x^2 - y^2 + r^2)\,a + 2r^2 x = 0. \qquad (2)$$

Aplicando el método de Bezout, se obtiene una ecuación que se desdobla en dos, representando la una el eje y, y la otra una línea de 8.º orden, cuya ecuación, es

$$4(x^2 - y^2 + r^2)\left\{[(x^2 - y^2 + r^2)^2 - 9r^2x^2](x^2 + y^2) - r^2x^2(x^2 - y^2 + r^2)\right\}$$
$$+ r^2x^2[27(x^2 + y^2)^2 + 32\,r^2x^2] = 0.$$

Un rápido examen de ella, nos dice que:

1.º Por ser todos sus términos de grado par en x é y, los ejes coordenados son ejes de simetría de la curva, y el origen centro.

2.º Haciendo $x = 0$, resulta

$$4(r^2 - y^2)^2\,y^3 = 0,$$

luego el eje y corta á la línea en dos puntos en el origen, y en otros seis que forman dos grupos de tres, teniendo cada grupo las ordenadas $+r$ y $-r$.

3.º Poniendo $y = 0$, resulta

$$x^6(4x^2 - r^2) = 0,$$

luego el eje x corta á la línea en seis puntos en el origen y en otros dos reales correspondientes á las abscisas $\frac{r}{2}$ y $-\frac{r}{2}$.

4.º Poniendo $y = \pm r$, la ecuación se descompone en el producto de x^2 por un factor de sexto grado, lo que indica que la recta $y = \pm r$ tienen dos puntos comunes con la línea en el punto $(0, \pm r)$, lo que parece indicar, teniendo en cuenta las observaciones 1.ª y 2.ª, que la curva tiene un punto de retroceso en el $(0, r)$ y otro en el $(0, -r)$.

6.º La línea corta á la recta del infinito en dos puntos circulares, que corresponden á $y = \pm ix$, y otros dos grupos de tres correspondientes á las $y = \pm x$, bisectrices de los ejes.

7.° De las anteriores consideraciones se deduce que la línea no puede descomponerse en una cónica y una séxtica, ni en dos rectas y una séxtica.

El enunciado de esta cuestión dice que la curva de que se trata es una séxtica lo cual proviene, sin duda, de haber considerado la cuestión inversa, esto es, que en vez de ser móvil el pnnto P y fijo el círculo, es por el contrario aquél el fijo y este es el que se mueve. En tal caso, considerando el mismo eje x, y el origen P, se obtiene para ecuación de la cónica lugar de centros

$$a^3 x = a^2 (x^2 - y^2) + r^2 (x^2 + y^2);$$

y la eliminación de a entre esta y su derivada con relación á a,

$$3a^2 x = 2a (x^2 - y^2)$$

conduce á las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 0,$$

y:

$$4(y^2 - x^2)^3 - 27 r^2 (x^2 + y^2) x^2 = 0$$

que corresponden la primera á las rectas isótropas trazadas por el origen, y la segunda á una séxtica que tiene como ejes y centro de simetría los de coordenadas.

Si se representa por $f(x, y)$ el primer miembro de la última ecuación, se comprueba fácilmente que sus derivadas parciales de primero, segundo y tercer orden, son núlas para $x = y = 0$ y que las de cuarto orden tienen por valores

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 = -648\, r^2, \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 = -108\, r^2,$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_0 = 0,$$

de cuya consideración se deduce que el origen es punto *cuádruplo*, siendo tangente doble en él el eje y, é imaginarias las otras dos, correspondiendo á coeficientes angulares $\pm \sqrt{-6}$.

Fácilmente se comprueba también que la parte real de la curva está en el ángulo completo formado por los bisectrices de los ejes, las cuales son asíntotas de la línea.

Sixto Cámara.

Otras soluciones de D. J. Ríus y Casas y D. J. Rey Pastor.

10. Hallar el lugar de las proyecciones de un punto dado sobre las generatrices de un hiperboloide alabeado. Casos particulares.

H. BROCARD.

El haz formado por las generatrices de un sistema del hiperboloide y el de los planos perpendiculares á ellas trazados por el punto dado, son proyectivos, y, por consiguiente, el lugar geométrico de los puntos de intersección de sus rayos homólogos es una cuártica de segunda especie (cuárticas que no son bases de haces de cuádricas); y otro tanto puede decirse para el haz de las generatrices del otro sistema.

Si en lugar de un hiperboloide se tratase de un paraboloide, el haz de planos de segundo orden, se reduce á dos de primero y el lugar correspondiente á cada sistema de generatrices es una cúbica alabeada.

A. U.

Nota. En prensa ya este número, se ha recibido una muy interesante nota de D. Julio Rey Pastor, tratando esta cuestión de un modo general, que se publicará en el próximo número.

11. Se consideran las cantidades

$$\cos\frac{a}{n},\ \cos\frac{2\pi + a}{n},\ \cos\frac{4\pi + a}{n},\ \ldots\ldots,\ \cos\frac{2(n-1)\pi + a}{n}$$

y se multiplica la m^a potencia de cada una por la r^a de todas las demás. Designando por s el mayor entero oontenido en $\frac{m+r}{n}$, la suma de todos estos productos es

$$\Sigma p = p_0 + p_1 \cos a + p_2 \cos 2a + \ldots\ldots + p_s \cos sa,$$

en donde $p_0, p_1, p_2, \ldots\ldots p_s$ son independientes de a.

J. OLIVERO.

Esto equivale á demostrar que Σp es de la forma

$$q_0 + q_1 \cos a + q_2 \cos^2 a + \ldots\ldots + q_s \cos^s a \qquad \text{(I)}$$

siendo también $q_0, \ldots\ldots q_s$ independientes de a; pues es sabido, que de esta expresión se pasa fácilmente á aquella.

Para probar esto, formemos la ecuación cuyas raíces sean las n cantidades dadas, que llamaremos $x_0, x_1, \ldots\ldots x_{n-1}$; y bastará ver la naturaleza de la función simétrica doble á que se refiere el enunciado.

Basta observar para ello, que los productos por n de las mismas, son congruentes mód. 2π y tienen por tanto las mismas líneas trigonométricas. Eligiendo, pues, la forma más sencilla de poner en función algébrica del coseno, será

$$\cos a = x^n - \binom{n}{2} x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4} x^{n-4}(1-x^2)^2 - \ldots\ldots$$

la ecuación buscada.

Designemos por a_0, a_1, ... a_n los coeficientes que resulten al hacer el desarrollo, notando que son independientes de a excepto a_n que es de la forma $c - \alpha = c - \cos a$ siendo $c = \pm 1$ ó $c = 0$, según que n sea par é impar. La ecuación, es pues,

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0.$$

Llamando s_m á la suma de las $m^{\text{ésimas}}$ potencias de las raíces, será

$$\Sigma p = s_m\, s_r - s_{m+r}.$$

Para ver el grado en α de s_m, s_r. s_{m+r}, demos valores sucesivos á k en la relación

$$- a_0\, s_k = a_1\, s_{k-1} + \ldots\ldots + a_{k-1}\, s_1 + a_k\, k,$$

que liga k funciones simétricas simples consecutivas, conviniendo en que para $k > n$, $a_k = 0$.

Y se observa que: para $k = 1, 2, \ldots\ldots n - 1$, los primeros miembros y por tanto $s_1\, s_2 \ldots\ldots s_{k-1}$ son independientes de α; para $k = n, n + 1, \ldots\ldots, 2n - 1$, son s_n, $s_{n+1} \ldots\ldots s_{2n-1}$ de la forma $u_0\, \alpha + u_1$; para $k = 2n$, $2n + 1, \ldots\ldots 3n - 1$, son s_{2n}, $s_{2n+1}, \ldots\ldots s_{3n-1}$ de la forma $v_0 \alpha^2 + v_1 \alpha + v_2; \ldots\ldots$; para $k = hn$, $hn + 1, \ldots\ldots; (h + 1)\, n - 1$, de la forma $t_0 \alpha^h + t_1 \alpha^{h-1} + \ldots\ldots + t^h$.

Por consiguiente, designando por u, v, s los cocientes enteros de m, r, $m + r$ por n, serán s_m, s_r, s_{m+r}, respectivamente de grados u, v, s; y como evidentemente $s \overset{=}{>} u + v$, Σp será de grado s, es decir, de la forma (I); y la proposición queda demostrada.

Julio Rey Pastor.

Establecimiento tipográfico de Emilio Casañal, Coso 100, Zaragoza

SUMARIO DEL AÑO II.—(1908)

Índice alfabético, por autores