ANALES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS
DE ZARAGOZA

AÑO III MARZO-JUNIO DE 1909 NÚM. 9

Apuntes para la teoría geométrica de las líneas cíclicas de 4.º orden
y primera especie

(CONTINUACIÓN)

Se simplifica notablemente la obtención de los vértices de las superficies cónicas, cuando se da la curva por la intersección de la esfera Σ con una de estas; pues para ello será suficiente hallar los puntos y rectas que tengan la misma polar y el mismo polo en los dos sistemas planos polares definidos por las secciones σ y φ producidas en la esfera y en el cono por el plano σ polar de $V\varphi$ respecto de Σ, puntos que podrán ser en número de 3, 2 ó 1.

22.—Consideremos ahora la cíclica como intersección de una esfera con una superficie cónica de segundo orden.

El plano polar del vértice respecto de la esfera corta á esta según el círculo de contacto de Σ con el cono circunscrito á ella desde el mismo vértice; este círculo recibe el nombre de *director*.

Se simplifica notablemente la obtención de los planos de las cónicas, cuando se da el haz circunscrito á la esfera Σ y una de estas cónicas dobles; pues para ello será suficiente hallar los planos y las rectas que tengan la misma polar y el mismo plano polar en las dos radiaciones polares cuyo vértice es el polo del plano de aquella cónica y sus directrices la superficie cónica circunscrita á la esfera y la proyectante de la cónica dada; esos planos podrán ser en número de 3, 2 ó 1.

Consideremos el haz de cuarta clase definido por la esfera y una cónica doble de la desarrollable envolvente.

El polo del plano de la cónica doble respecto de la esfera es vértice de un haz de planos radiado circunscrito á Σ que podría designarse con el nombre de *haz de planos de revolución*, al cual daremos el nombre de *director* siendo el

23.—En el primer género del grupo 20 existirán cuatro círculos directores, de los que uno ha de ser forzosamente imaginario, por ser sus planos caras de un tetraedro autopolar; en el segundo género otros cuatro, dos reales y dos imaginarios, situados éstos en planos imaginarios; dos en el grupo 21 y uno en el 22, siendo en todos los casos cada uno de estos círculos ortogonal á los demás, puesto que las tangentes á cada uno de ellos en uno de sus puntos comunes son conjugadas respecto de Σ, por estar una en una cara del tetraedro y pasar la otra por el vértice opuesto.

24.—Todo plano tangente á un cono $V\varphi$, corta á la esfera según un círculo σ'_1 doblemente tangente á la cíclica y ortogonal al círculo director σ. Lo segundo se hace evidente si nos fijamos en que el plano secante corta al cono circunscrito á la esfera, según las dos tangentes al expresado círculo, las cuales, por ser generatrices del cono circunscrito á $V\sigma$, deben ser tangentes conjugadas de las de la curva de contacto, que es el círculo director σ; y por tratarse de la esfera, esas tangentes conjugadas son perpendiculares. Para lo primero observamos que los puntos de la cíclica están en la generatriz de contacto del plano secante con el cono circunscrito á Σ á lo largo del círculo σ.

En el primer género del grupo 20 existirán cuatro haces de revolución directores, de los que uno ha de ser forzosamente imaginario, por ser su vértice interior á Σ; en el segundo género otros cuatro, dos reales y dos imaginarios con vértice imaginario; dos en el grupo 21 y uno en el grupo 22, teniendo cada dos haces directores dos planos tangentes comunes, y siendo perpendiculares las generatrices de contacto contenidas en uno de estos planos, puesto que son tangentes conjugadas respecto de Σ, ya que una pasa por un vértice y la otra está contenida en la cara opuesta.

Todo punto F de una cónica doble φ' es vértice de un haz de planos de revolución, circunscrito á la esfera, que contiene dos planos del haz cíclico con las mismas generatrices de contacto en ambos haces y otros dos planos del haz director correspondiente $V\sigma$, siendo ortogonales las generatrices de contacto en cada uno de estos dos planos Esto último se ve fácilmente si nos fijamos en los conos de revolución envolventes de ambos haces; pues por ser el vértice del primero un punto de la cónica φ' y el del segundo el polo V del plano de esta cónica, y los puntos de contacto de los planos tangentes á Σ trazados por la recta $F'V$ los de intersección no dado $V\varphi$. La tangente á la cíclica en uno de estos puntos es intersección del plano tangente al cono $V\varphi$ con el tangente á la esfera, y la tangente al círculo σ es intersección del plano σ con el tangente á la esfera; luego la cíclica y el círculo son tangentes en ese punto y también en el otro por la misma razón.

25.—El círculo σ' define un haz de esferas bitangentes á (Σ) pertenecientes al complejo de las ortogonales á la $V\sigma$, pues el punto V, centro de ésta, está contenido en el plano del círculo σ' que á su vez es ortogonal á la esfera $V\sigma$.

Sobre la perpendicular s' al plano σ' trazada desde S, centro de Σ, determina el haz de esferas una involución cuyos puntos dobles, reales ó imaginarios según que el círculo σ sea imaginario ó real, son vértices de radiaciones polares rectangulares de directrices bitangentes á (Σ). Estos vértices que serán los puntos en que la recta s' corta á la esfera $V\sigma$ y que analíticamente serían considerados como centros de esferas de radio nulo del complejo de los círculos de contacto σ' y σ, estarán estos puntos en el plano σ, siendo las generatrices del $F'\sigma'$ y del $V\sigma$ que se cortan en el mismo punto, tangentes á Σ y conjugadas respecto de ella; luego son ortogonales.

La primera parte del teorema se hace evidente si nos fijamos en que los planos tangentes á la esfera y á la cónica doble en el punto elegido sobre la misma, son también tangentes al haz radiado de planos de revolución, y que las generatrices de contacto, en ambos casos, son las rectas que unen el punto F' con el de contacto de dichos planos con Σ.

Toda cuádrica de revolución inscrita en el cono $F'\sigma'$ y que tenga por foco S es doblemente tangente á la desarrollable cíclica perteneciendo á la serie de cuádricas inscritas en el cono $F'\sigma'$ y en el asintótico de la esfera Σ.

Los planos polares de los centros respecto de Σ se cortan en la polar s' de la línea de estos centros que es la orientación de los planos perpendiculares al eje $F'\sigma'$ y arista de un haz de planos en involución en que son rayos conjugados cada par de ellos tangentes á una misma cuádrica de la serie; este haz tendrá ó no rayos dobles según que el punto F' sea ó no interior á Σ. Esos planos dobles vienen á ser dos cuádricas de la citada serie doblemente plejo, los distinguiremos con el nombre de *puntos asociados* al plano σ'.

Entre las esferas del haz considerado hay una ortogonal á Σ cuyo centro es el pun- F' vértice del cono $F'\sigma'$; pero como este punto F' es polo del plano σ' que pasa por V, estará en el plano σ polar de este punto perteneciendo además á la cónica φ' polar de φ respecto de σ.

26.—Si imaginamos que el plano σ' se mueve describiendo el haz tangencial del cono $V\varphi$, el círculo σ' engendrará una familia de círculos cuya envolvente es la cíclica; la recta s', lugar de los centros de las esferas del haz, engendrará la superficie cónica $S\varphi'$ conjugada del haz tangencial á $V\varphi$ en el sistema polar absoluto; el punto F' describirá la cónica doble φ' de la desarrollable cíclica tangente á Σ á lo largo de (Σ); el punto F'' en que s' corta á Σ engendrará una cónica esférica φ'' y la esfera $F'\sigma'$ una superficie cíclida ortogonal á la esfera Σ á lo largo de la cíclica que será línea de curvatura de aquélla.

Los puntos dobles de la involución contenida en s', engendrarán una cíclica, que será la de intersección del cono $S\varphi'$ con la esfera $V\sigma$. (1)

tangentes á la desarrollable cíclica de tal modo que, tanto en el caso de que esos planos sean reales como cuando sean imaginarios, los planos comunes á la radiación de planos que definen y al haz cíclico son imaginarios, puesto que lo son todos los planos de la citada radiación.

Si imaginamos que el punto F' se mueve engendrando la cónica doble φ', el haz radiado de revolución $F'\sigma'$ engendrará una familia de haces que tendrán por haz envolvente el cíclico; la recta s' engendrará un haz plano de rectas en el infinito que proyectado desde V nos dará el haz radiado $V\varphi$, puesto que cada plano tangente á este cono es perpendicular á la recta $F'S$, es decir, que el haz radiado de planos $V\varphi$ es conjugado del haz radiado de rectas $S\varphi'$ en el sistema polar absoluto. El plano de σ' engendrará el haz de los planos bitangentes á la cíclica de contacto de la citada desarrollable cíclica con la esfera. Los dos planos tangentes á Σ desde la recta s' engendrarán una desarrollable cíclica correlativa de una cónica esférica.

En general, si sobre la superficie cónica $S\varphi'$ se traza una línea que corte á todas sus generatrices, podrá considerarse la cíclica

(1) En todo lo que sigue solo nos ocuparemos de las líneas por tratarse ya de propiedades métricas.

propuesta como intersección de Σ con una superficie envolvente de esferas, cuyos centros estén en aquella línea; existiendo entre estas superficies, infinitas *cíclidas* que corresponderán una á cada sección plana del citado cono. En efecto; toda superficie envolvente de las esferas de un complejo que tengan sus centros sobre una cónica cualquiera ψ' es una ciclída, que coincidirá con la de Dupin, cuando la cónica ψ' sea bitangente á la esfera $V\sigma$ ortogonal á todas las del complejo; puesto que las esferas consideradas constituyen parte de una red de este complejo, cuyo eje radical es la perpendicular al plano ψ' desde el centro radical V del mismo, y la sección plana de la superficie envolvente, es la envolvente de los círculos de una red cuyos centros están en una cónica; siendo, por lo tanto, dicha envolvente una cíclica, como veremos más adelante; según esto, la superficie envolvente de esferas será de cuarto orden; luego es una cíclida. En particular, cuando la cónica ψ' sea bitangente á la esfera $V\sigma$, la *cíclida* será la de Dupin por tener dos sistemas de secciones circulares; uno de ellos es el de las características contenidas en los planos del haz que tiene por arista el eje radical de la red de esferas; el otro lo constituyen las secciones producidas en la superficie por los planos que pasan por la cuerda de los contactos, pues un plano cualquiera ψ'' de este haz, determinará en las esferas del sistema, círculos de una red que tendrán sus centros en la proyección ψ'' de ψ' sobre el plano considerado, y el centro radical de esta red es el punto de intersección del plano ψ'' con el eje radical de la red de esferas á que pertenece el sistema, pasando además el círculo τ'' ortogonal común á todos ellos, por los puntos de contacto de ψ' con el círculo τ' bitangente á la misma. Los círculos τ'' y τ' están contenidos en una esfera que tiene por radio el de τ'' y por centro el radical de la nueva red de círculos; la tangente al círculo máximo τ'' en uno de aquellos puntos es la proyección de la tangente en el mismo á τ' sobre el plano de ψ''; pero esta tangente también lo es en el mismo punto á la proyección ψ'' de la cónica ψ'; luego ψ'' es bitangente á τ'' y, por tanto, la cíclica que determinan los círculos de esta red que tienen sus centros en ψ' se compone de dos círculos. Como caso especial de esta *cíclida* aparece el *toro* cuando la cónica ψ' bitangente á τ', sea un círculo concéntrico con él. Entonces el eje radical de la red de esferas pasa por el centro de este círculo, lugar de los centros de las involutas, y la cuerda de los contactos es la orientación de planos perpendiculares á dicho eje.

Entre las *ciclidas* que contienen la cíclica propuesta existen infinitas de Dupin, correspondientes una á cada plano bitangente á la cíclica ($V\sigma$), contenida en la esfera $V\sigma$ y en el cono $S\varphi'$, puesto que este plano bitangente corta á este cono según una cónica bitangente á la esfera $V\sigma$.

Para que entre las *cíclidas* de Dupin figure algún *toro* es necesario que algún plano paralelo á los cíclicos del cono $S\varphi'$ sea bitangente á la cíclica ($V\sigma$), para lo cual será preciso que existan planos asintóticos de esta línea, los cuales podrán ser reales ó imaginarios, exigiéndose para esto que ($V\sigma$) esté contenida en un cilindro hiperbólico ó eliptico; en el primer caso, la circunferencia lugar de los centros de las esferas involutas del *toro*, será la sección real producida en el cono $S\varphi'$ por estos planos asintóticos reales, y la curva (Σ) estará contenida en dos *toros* que podrán ser reales; en el segundo caso, la expresada circunferencia así como el *toro*, serán imaginarios por serlo aquellos planos asintóticos.

28. Cuando no existe ningún cilindro elíptico ó hiperbólico doblemente proyectante de la cíclica propuesta y los conos que la proyectan doblemente, tienen dos planos cíclicos distintos, las asíntotas serán rectas imaginarias de segunda especie. Para determinarlas utilizaremos los planos tangentes en el punto del infinito considerado á dos de las superficies que contengan la cuártica. Si para las expresadas cuádricas elegimos dos conos, observaremos que, por ser cíclicos los puntos del infinito de la curva, estarán sobre las generatrices isótropas de aquellos conos, y que para determinar la tangente en uno de ellos, será suficiente obtener la intersección de los planos tangentes á los dos conos citados á lo largo de aquellas generatrices isótropas. Sean para fijar ideas $S\varphi'$ y $S_1\varphi_1'$ los conos elegidos; μ, ν, μ_1 y ν_1 los planos cíclicos de cada uno de aquellos conos: I, J, I', J' los puntos cíclicos de la curva; las generatrices isótropas serán;

$$\text{en el plano } \mu \left\{ \begin{array}{l} SI \equiv aba'b' \\ SJ \equiv ab'a'b \end{array} \right\} aa' \,.\, bb' \ldots\ldots$$

$$\text{en el plano } \nu \left\{ \begin{array}{l} SI' \equiv pqp'q' \\ SJ' \equiv pq'p'q \end{array} \right\} pp' \,.\, qq' \ldots\ldots$$

$$\text{en el plano } \mu_1 \left\{ \begin{array}{l} S_1I \equiv a_1b_1a_1'b_1' \\ S_1J \equiv a_1b_1'a_1'b_1 \end{array} \right\} a_1a_1' \,.\, b_1b_1' \ldots\ldots$$

$$\text{en el plano } \nu_1 \left\{ \begin{array}{l} S_1I' \equiv p_1q_1p_1'q_1' \\ S_1J' \equiv p_1q'_1p_1'q_1 \end{array} \right\} p_1p_1' \,.\, q_1q_1' \ldots\ldots$$

siendo $aa' \,.\, bb' \ldots\ldots$, $pp' \,.\, qq' \ldots\ldots$ etc., las involuciones de rectas conjugadas rectangulares situadas en los planos μ, ν, μ_1 y ν_1. Sean además m, n, m_1 y n_1 las polares de estos planos cíclicos respecto de los dos conos $S\varphi'$ y $S_1\varphi_1'$ respectivamente. Los planos tangentes al cono $S\varphi'$ á lo largo de las generatrices isótropas serán

$$\left.\begin{array}{l} mI \equiv m\,(ab\,a'b') \\ mJ \equiv m\,(ab'\,a'b) \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} nI' \equiv n\,(pqp'q') \\ nJ' \equiv n\,(pq'p'q) \end{array}$$

y los tangentes al cono $S_1\varphi_1'$

$$\begin{array}{l} m_1I \equiv m_1\,(a_1b_1a_1'b_1') \\ m_1J \equiv m_1\,(a_1b_1'a_1'b_1) \end{array} \qquad \begin{array}{l} n_1I' \equiv n_1\,(p_1q_1p_1'q_1') \\ n_1J' \equiv n_1\,(p_1q_1'p_1'q_1) \end{array}$$

Las rectas de intersección de los planos (mI y m_1I) y (mJ y m_1J) serán los ejes de la involución no homológica definida por los dos haces de planos en involución de aristas m y m_1, que previamente se habrán relacionado proyectivamente.

Otro tanto podremos decir de las relativas á los puntos I' y J'; la cíclica tiene en este caso cuatro ramas imaginarias hiperbólicas con rectas imaginarias de segunda especie por asíntotas; luego (Σ) no está contenida en ningún *toro*.

29.—Podrán verse de otro modo los casos en que la cíclica está contenida en algún *toro*, si nos fijamos en que los ejes de estos *toros* son las rectas focales del cono $V\varphi$ y que estas rectas han de pasar por el centro de la sección circular del cono $S\varphi'$, para lo cual es necesario que uno de los planos principales del cono $V\varphi$ contenga el centro S de Σ. Si el plano principal que contiene S es el de las rectas focales reales, tendremos dos *toros* que podrán ser reales; si es uno de los otros dos, los dos *toros* serán imaginarios, y si son dos los planos principales que contienen aquel centro, habrá cuatro *toros*, dos de los cuales podrán ser reales.

IV

30.—Sabemos ya que la cíclica es envolvente de una familia de círculos σ' cuyos polos ó centros esféricos F'' están en una cónica esférica φ'' y que dichos círculos σ' son ortogonales al director σ, deduciéndose de esto que la curva estará perfectamente determinada cuando se dé la citada cónica esférica φ'' (que recibe el nombre de *deferente*) y el círculo *director* σ.

Si consideramos como puntos exteriores á un círculo de la superficie esférica, los exteriores al cono de revolución que le proyecta desde el centro S de aquella, podremos decir que, cuando la *deferente* φ'' tenga todos sus puntos exteriores al círculo director σ, todos los puntos de φ'' serán útiles, puesto que los círculos ortogonales al *director* serán todos reales, constituyendo en otro caso la parte parásita de la cónica esférica φ'', el conjunto de los puntos de la misma interiores al círculo σ.

31.—Para determinar los puntos de la cíclica contenidos en cada uno de los círculos σ', basta observar que el eje radical de dos cualesquiera de estos es la recta de intersección de sus planos, la cual pasa por el vértice V y determina con el centro de la esfera un plano que la corta según el círculo máximo, eje radical de aquellos círculos σ'; dicho eje pasará por el centro del círculo director σ y será perpendicular al arco de círculo máximo secante á φ'' en los centros esféricos de los círculos σ'. Si por un movimiento contínuo el segundo círculo tiende á confundirse con el primero, el eje tenderá á ser en el límite el arco de círculo máximo trazado desde el centro de σ perpendicularmente al tangente á la deferente φ'' en el centro del círculo fijo σ'; pero como el expresado eje radical pasa constantemente por los dos puntos comunes á los dos círculos σ' y estos puntos en el límite, son los de contacto de la cuártica con el círculo fijo σ', deducimos que estos puntos estarán en el citado eje límite.

Cuando el círculo máximo tangente á la deferente, es tangente al σ, como ocurre en el punto N' (fig. 1.ª) (1), los dos puntos Q y Q' de la cíclica se confunden en uno N'; pero como el círculo máximo O_1N' que corta ortogonalmente al σ es tangente á la cíclica por serlo al círculo de centro N_1 ortogonal al σ en N' y existen en general cuatro círculos máximos tangentes comunes á φ'' y σ (pues hay en general cuatro planos tangentes comunes á los dos conos $S\varphi'$ y $S\sigma$) habrá cuatro puntos del círculo director σ en los cuales es cortado ortogonalmente por la curva.

El círculo bitangente á la cíclica en los puntos N y N', que también es ortogonal á σ, tiene su centro en el punto B; pero como este punto B es intersección de dos arcos tangentes comunes á φ_1'' y σ no puede pertenecer á φ_1'', y, por tanto, el citado círculo de centro B y radio BN corresponderá á otra familia de círculos bitangentes á (Σ).

---

(1) Esta figura se ha obtenido como una proyección cónica en que el punto principal es S, centro de la esfera Σ; círculo de distancia, uno máximo de la misma, y punto de vista el polo de dicho círculo.

El cono $S\varphi'$ lo hemos definido por su vértice S y su directriz límite λ que, con objeto de simplificar, hemos elegido circunferencia.

Los puntos Q_1 de la cónica φ''_1 se han obtenido cortando el cono $S\varphi'$ por planos verticales cuyas trazas son rayos del haz de primer orden que tiene por vértice el punto principal S. Hecho el abatimiento de uno de estos planos, se ha obtenido el punto (Q_1) el cual unido con (V) nos ha dado en Q_1 la proyección cónica y estereográfica de uno de los puntos de φ''_1; de este modo se han obtenido los demás puntos de la deferente φ''_1.

32.—Para pasar de un modo de generación á otro recordemos que todos los conos doblemente proyectantes de una cíclica tienen paralelos sus planos cíclicos, y, como consecuencia, que todo plano paralelo á uno cíclico corta á la curva en dos puntos reales ó imaginarios, además de los dos cíclicos contenidos en ese plano. Teniendo esto presente deducimos que los conos conjugados de aquellos en el sistema polar absoluto, tendrán paralelas sus rectas focales; luego si los trasladamos de modo que sus vértices se confundan con el centro S de la esfera Σ, todos ellos serán homofocales y sus intersecciones con Σ serán *deferentes* homofocales. Estos conos homofocales son los proyectantes desde el centro de la esfera de las cónicas dobles de la desarrollable cíclica circunscrita á lo largo de la (Σ).

Imaginemos definida la cíclica sobre la esfera Σ por la deferen-

---

Para círculo director hemos elegido uno situado en un plano paralelo á uno de los cíclicos del cono con objeto de facilitar la construcción.

La determinación de los círculos máximos tangentes comunes á φ''_1 y σ_1, se ha hecho, utilizando los puntos en que cortan al círculo de distancia las trazas de los planos tangentes comunes á $S\sigma_1$ y $S\varphi'$ y además los M, N, M' y N' de contacto con σ_1, en los cuales cortan á este círculo las perpendiculares á dichas trazas; habiéndose obtenido directamente estos puntos M, N, M' y N' al tratar de construir las tangentes comunes á los círculos límites de los conos $S\varphi'$ y $S\sigma_1$.

Los círculos máximos principales de φ''_1 son: uno, el $O_1 O_2$ que aparece como eje de simetría de la figura; el otro se ha obtenido hallando primero el plano principal correspondiente del cono $S\varphi'$, para lo cual se ha determinado el eje de este cono por la consideración de ser eje la bisectriz del ángulo de las dos generatrices contenidas en un plano principal.

Los focos se han hallado como intersección de las rectas focales con la esfera. Para la determinación de estas rectas se ha hecho uso de la involución de diámetros que, cada par de planos conjugados rectangulares origina en un plano principal, y de cuya involución son rayos dobles aquellas rectas focales; en la figura hemos operado con los elementos límites eligiendo para definir la involución citada los dos planos principales y uno tangente al cono con el perpendicular al mismo trazado por la generatriz de contacto, considerando después la sección producida por estos elementos en el plano del círculo λ límite de $S\varphi'$ y reduciendo el problema á determinar los puntos dobles de la involución $RR'. TT'_\infty \dots$ ..

La determinación del triángulo $O_2\, O_3\, O_4$ autopolar común á φ''_1 y σ_1 se ha hecho por medio de los círculos máximos definidos por los pares de puntos M, N, M' y N' y también por la consideración de ser arcos de círculo máximo diagonales del cuadrilátero esferico definido por los cuatro arcos tangentes comunes á φ''_1 y σ_1.

Para la construcción de la cíclica (Σ) hemos determinado el círculo lugar de los centros Q'_1 de los círculos ortogonales al σ_1 el cual es proyección del círculo φ' contenido en el plano σ_1.

te φ_1'' y el círculo director σ_1; supongamos (fig. 1.ª) que se trata de una bicursal; en este caso existirá un cuadrilátero esférico circunscrito á φ_1'' y σ_1 siendo los vértices de este cuadrilátero los puntos A, A', B, B', C y C' que, como ya sabemos, son centros de círculos bitangentes á la curva respectivamente en M y N M' y N', N y N', M y M', M' y N y M y N' ortogonales á σ_1 y pertenecientes á nuevos modos de generación. Si se tiene en cuenta que por B pasan dos arcos tangentes á φ_1'', é isogonales respecto de los dos arcos que pasan por los focos de esta deferente, resultará que el arco tangente á una deferente homofocal de la φ_1'', trazada por B, será bisector del ángulo de aquellos dos arcos tangentes, puesto que también lo será del ángulo cuyos lados contienen los focos F y F'. Análogamente podríamos construir el arco tangente en B' y de este modo conoceremos de la nueva deferente φ_2'' dos puntos B y B' con sus tangentes; pero como además tenemos el centro, que es el mismo de la φ_1'', hay elementos suficientes para construirla una vez que se haya determinado si es ó no secante á φ_1'': en la figura adjunta φ''_2 contiene en su interior á φ_1''.

Para construir el círculo director σ_2 correspondiente á la deferente φ_2'', observaremos que como M y M' son puntos de la cíclica y están en el círculo σ_2' de centro B', la recta MM' pasará por el vértice V_2 del cono correspondiente á φ_2'', y el círculo máximo MM' por el centro esférico de σ_2; como, por la misma razón, el círculo máximo NN' pasa también por dicho centro, queda este bien definido. También podría hallarse como intersección de la recta V_2S con Σ.

Sea O_2 este punto y O_3 y O_4 los centros de los otros dos círculos directores σ_3 y σ_4. El triángulo $O_2O_3O_4$ es autopolar respecto del círculo director σ_1 y de la deferente φ_1'', puesto que dicho triángulo es el formado por los arcos diagonales del cuadrilátero circunscrito áσ_1 y φ_1'', y el triángulo determinado por las diagonales de un cuadrilátero circunscrito á una cónica coincide con el de los puntos diagonales del cuadrivértice de los puntos de contacto. El triángulo anterior tendrá dos vértices exteriores al círculo σ_1, los O_2 y O_3 por ej. y uno interior, el O_4, y como los círculos directores han de ser ortogonales dos á dos, los círculos σ_2 y σ_3 serán reales y el σ_4 imaginario, y los cuatro puntos reales en que el círculo σ_1 corta á los σ_2 y σ_3, son los de intersección de σ_1 con los lados de aquel triángulo.

33.—En las unicursales solo existirán dos conos reales, dos cónicas deferentes, y dos círculos directores. Existirán solo dos arcos de círculo máximo tangentes comunes á σ_1 y φ_1'', cortándose estas en dos puntos reales.

34.—En las crunodales y acnodales existen dos deferentes que se cortan ortogonalmente en el punto de contacto del plano tangente común á la esfera y á dos de los conos; la tercera deferente relativa al cono que tiene por vértice el punto doble ó aislado V_1 no pasará por él, puesto que dicha cónica esférica es la proyección sobre Σ de la cónica φ_1' lugar de los polos de los planos tangentes al cono $V_1\varphi_1$ y estos planos son todos secantes á Σ.

En esta clase de curvas el punto V_1 es exterior ó interior á dicha cónica φ_1', puesto que ésta, según digimos, es línea doble de la desarrollable circunscrita á lo largo de la cíclica; y las generatrices de contacto del plano doblemente tangente, son reales ó imaginarias, según que el haz tangencial de planos sea crunodal ó acnodal, siendo esas generatrices tangentes á la cónica doble contenida en dicho plano.

El círculo director relativo á la deferente φ_1'' queda reducido al punto doble ó aislado. Estas cíclicas del grupo 21 tienen, pues, una generación especial correspondiente á la deferente φ_1'' y el punto doble ó aislado como círculo director. Los círculos σ_1' bitangentes, son aquellos cuyos centros están en φ_1'' y pasan por V_1, siendo los puntos de la curva contenidos en los mismos, el V_1 y su simétrico, respecto del arco tangente á la deferente en el centro elegido; podremos, pues, definir la curva como lugar de los puntos de la esfera Σ simétricos del V_1 respecto de los arcos tangentes á φ_1''.

En las crunodales, por ser el punto V_1 exterior á φ_1'', pasan por él dos arcos reales de círculo máximo tangentes á esta cónica esférica y, además, dos arcos reales de la cíclica; en las acnodales, por ser V_1 interior, aquellos arcos tangentes son imaginarios así como los de la cíclica.

El triángulo polar común á las cónicas esféricas deferentes y á los círculos directores, tiene un vértice en V_1 siendo suficiente para su construcción hallar la polar de V_1 respecto de φ_1''; ésta con los arcos de círculo máximo tangentes á las otras dos deferentes en el punto doble constituirán los tres lados.

35.—En las cuspidales, existe una deferente φ_2'' que pasa por el punto de retroceso de la cíclica y es tangente en él á su círculo director σ_2 y á la curva (Σ); la segunda deferente φ_1'' pasa también por el punto V_1 cortando ortogonalmente á los tres elementos anteriormente considerados φ_2'', σ_2 y (Σ), pues la tangente á una de ellas la φ_2'' por ej., coincide con la generatriz de contacto de la superficie cónica relativa á la otra, y esas generatrices son perpendiculares por ser tangentes conjugadas respecto de la esfera Σ. Uno de los círculos directores, el σ_1, queda reducido al punto V_1, pero en este caso, está sobre su deferente.

36.—Cuando un cono se transforma en cilindro, el círculo director correspondiente y la deferente, se confunden en un círculo máximo perpendicular á las generatrices, no pudiéndose emplear la construcción antedicha, pues todos los círculos cuyos centros están en la deferente, son ortogonales á la misma. Se recurre entonces á la cónica, que como ya sabemos, es lugar de los centros de las esferas ortogonales á Σ.

V

Cartesianas

37.—Hasta ahora hemos supuesto que los cuatro puntos cíclicos de las cuárticas que estudiamos eran distintos é imaginarios conjugados dos á dos. Cuando los cuatro puntos se reducen á dos por confundirse dos de ellos con los otros dos, se obtiene la clase de cíclicas que vamos á considerar, á las que se da también el nombre de *cuárticas bicirculares*.

Desde luego, como consecuencia de la definición, se ve que los dos planos cíclicos de los conos de segundo orden que las proyectan y cuádricas que las contienen, se reducen á uno solo; luego estos conos, así como las cuádricas, serán de revolución y todos sus ejes serán paralelos, puesto que aquellos planos cíclicos también lo son, deduciéndose de aquí que ninguna cartesiana podrá estar contenida en más de un cilindro de revolución propiamente tal, puesto que si estuviese en dos, estos necesariamente tendrían sus ejes paralelos y no podrían cortarse sino según generatrices. También deducimos que todas las cartesianas tienen, por lo menos, un plano de simetría (1), puesto que las dos superficies que la definen admiten como tal el plano definido por el centro S de Σ y el eje de revolución de la cuádrica; existirá, por tanto, un cilindro de segundo orden doblemente proyectante, cuyas generatrices por ser conjugadas de aquel plano de simetría respecto de Σ, serán perpendiculares al mismo. El citado cilindro no puede ser de revolución, puesto que su eje según lo ya dicho, tendría que ser paralelo á los de revolución de las otras cuádricas y los planos de sus secciones circulares paralelos á los demás; pero como por otra parte, dicho cilindro debe considerarse como cuádrica de revolución con las condiciones ya establecidas no podrá ser otro que un cilindro parabólico, límite de un elipsoide de revolución, achatado, en que la elipse meridiana tiende á ser una parábola.

(1) Prescindimos del caso en que el eje de revolución de la cuádrica pase por el centro de Σ, por dar para la cíclica dos circunferencias.

Teniendo esto en cuenta, vemos que por ser tangente el plano del infinito al citado cilindro, es bitangente á las cartesianas; lo cual por otra parte, se deduce también de la definición de estas curvas cuando no se componen de circunferencias. Recíprocamente, toda cíclica que está contenida en un cilindro parabólico, es una cartesiana, y todas las cuádricas del haz que define, son de revolución, puesto que dicha cuártica es bitangente al plano del infinito y tiene, por tanto, solo dos puntos cíclicos que deben considerarse como dobles.

Los ejes de revolución de todas las cuádricas, están en el plano de simetría de la curva, porque si hubiese uno que no estubiera, el plano paralelo al de simetría que pasase por él, sería también de simetría de la curva, y esto es imposible.

Los centros de las mismas formarán una línea de segundo orden, que pasará por el centro de la esfera y por los vértices de los conos de segundo orden, puesto que el plano del infinito contiene un punto que tiene el mismo plano polar respecto de todas ellas.

38.—La representación de estas curvas sobre la esfera se simplifica; pues las deferentes se reducen á círculos menores concéntricos y uno máximo, por lo menos, ortogonal á aquellos y de simetría de la curva.

Los radios esféricos de los círculos deferentes son arcos complementarios de los que miden el semiángulo en el vértice de cada cono.

De los círculos directores, solo son reales los correspondientes á conos de vértice exterior á la esfera. Los centros esféricos de estos círculos, son extremos del diámetro que pasa por cada vértice.

En las cartesianas bicursales que, como ya sabemos, hay cuatro deferentes y tres círculos directores reales, los radios esféricos de estos últimos, son los arcos comprendidos entre el centro y el punto de intersección con la esfera del lado del triángulo autopolar contenido en el plano de simetría y opuesto al vértice que se considere.

En las unicursales, hay un cilindro y un cono doblemente proyectantes á los que corresponden como deferentes, el círculo máximo de simetría y otro círculo menor cuyo centro está en aquél; el radio esférico del director relativo á este último, se determina fácilmente por la tangente al máximo desde el vértice del cono.

En las cartesianas crunodales, un círculo director queda reducido al punto doble, siendo la deferente respectiva un círculo menor concéntrico con otro círculo deferente que pasa por aquel punto doble. De las acnodales, puede decirse otro tanto, con la única variante, de que el círculo aislado, que también es director, queda en el interior de su deferente.

En las cuspidales el punto de retroceso es director pasando por él su círculo deferente; el otro es el de simetría.

Estas curvas, excepto las cuspidales, se presentan en los eclipses de sol como líneas del contacto de la obscuridad lunar.

CAPÍTULO II

Propiedades focales de las cíclicas

39.—Designaremos con el nombre de foco de una curva alabeada á todo vértice de una radiación polar rectangular de directriz bitangente á la curva.

Al tratar de la generación de las cíclicas, vimos que cada plano tangente á un cono de segundo orden doblemente proyectante de la curva, determinaba dos puntos asociados al mismo, vértices de radiaciones polares rectangulares de directrices bitangentes á la cuártica y que con arreglo á la definición anterior, serán focos de ésta. También vimos que, según que el círculo σ' fuese real ó imaginario, aquellos puntos eran imaginarios ó reales, y que la línea engendrada por los citados puntos dobles era una cíclica, puesto que resultaba ser intersección del cono $S\varphi'$ con la esfera $V\sigma$; dedúcese de esto, que la expresada curva ($V\sigma$) es lugar de focos de la primera por lo que, según costumbre, la llamaremos *focal* de ésta.

40.—La cíclica (Σ) es de la misma naturaleza que sus focales. Para probar esto, basta que demostremos que existe el mismo número de puntos que tienen el mismo plano polar respecto de la primera cíclica y de su focal, entendiendo por plano polar de un punto respecto de una de estas líneas, el polar de aquel punto respecto de las cuádricas que la contienen.

Sean $V\varphi$ y Σ el cono y la esfera que definen la cíclica (Σ), no perteneciendo el vértice V á Σ; σ y φ las secciones producidas en la esfera y en el cono por el plano polar del vértice V respecto de Σ.

Según que el número de puntos que tengan la misma polar respecto de φ y σ sean tres reales, uno real y dos imaginarios, dos reales siendo uno de ellos de contacto, ó uno solo de contacto, así será la curva *imaginaria* ó *bicursal*, *unicursal*, *nodal* ó *cuspidal* respectivamente. Las imaginarias difieren de las bicursales en que la cónica φ es en ellas imaginaria, ó si es real tiene todos sus puntos exteriores al círculo σ; las crunodales, se distinguen de las otras dos en que los puntos de la cónica φ inmediatos al punto de contacto con σ quedan para las primeras en el interior del círculo σ y en el exterior para las otras dos; y estas se distinguen entre sí en que para las acnodales los puntos comunes á φ y σ son reales.

Si consideramos ahora el cono $S\varphi'$ y la esfera $V\sigma$ ortogonal á Σ, definirán una cíclica focal de la (Σ). Ahora bien, el plano de σ es polar del centro S respecto de la esfera $V\sigma$, puesto que σ es línea de contacto del cono circunscrito desde S á esta esfera, y como la directriz del cono $S\varphi'$ es la φ' polar de la φ respecto de σ, resulta, que los puntos que tienen la misma polar respecto de σ y φ' son los mismos que respecto de φ y σ; luego la focal considerada es de la misma naturaleza que la primera.

41.—De lo dicho en los números anteriores se deduce que el centro de una esfera y los vértices de los conos doblemente proyectantes de una cíclica contenida en la misma, constituyen un conjunto de centros de esferas ortogonales dos á dos y tales que, en cada una de ellas, hay una cíclica cuyas focales están contenidas en las demás, y sus conos doblemente proyectantes tienen por vértices los centros de éstas.

42.—Los conos que desde el centro de una esfera $V\sigma$ del sistema, proyectan doblemente las cíclicas focales de la $(V\sigma)$, son homofocales; existiendo en todos los casos un cono real de distinto sistema que los restantes. Que son homofocales, se hace evidente, si observamos que los conos de segundo orden proyectantes de $(V\sigma)$ tienen paralelos sus planos cíclicos y que los conos de vértice V son conjugados de aquellos en el sistema polar absoluto; luego las rectas focales de estos, que serán perpendiculares á los planos cíclicos de aquellos, serán las mismas para cada cono de vértice V. También podrá verse esta propiedad si nos fijamos en que los cuatro planos isótropos tangentes á uno de los conos V considerados, serán tangentes á la cíclica contenida en él y á todas sus cíclicas focales; luego lo serán á los conos que las proyectan desde aquel punto V, constituyendo estos, por tanto, una serie de conos homofocales.

Para demostrar la segunda parte, es decir, que en todos los casos existe un cono real de distinto sistema que los demás, consideremos el triedro (x, y, z) de ejes de una cualquiera de las cuádricas del sistema. Supongamos que los planos cíclicos de $(V\sigma)$ se cortan según una paralela al eje z; las rectas focales reales de cada uno de los conos reales doblemente proyectantes de $(V\sigma)$ estarán contenidas en planos paralelos al zx ó al zy; las de los conos imaginarios estarán en el plano xy (1); luego los planos cíclicos reales de las focales de $(V\sigma)$ asociadas á aquellos conos reales, que serán los perpendiculares á aquellas rectas, se

(1) Esto se ve observando que el cono imaginario puede considerarse como asintótico de un elipsoide, siendo las asíntotas de la hipérbola focal de éste, rectas focales de aquél, y, por tanto, el plano de estas, perpendicular á los planos cíclicos de aquél.

cortarán según paralelas á uno de los ejes x ó y, mientras que los planos cíclicos reales de las focales asociadas á los conos imaginarios, se cortarán según paralelas al eje z. Resulta, por tanto, que los planos cíclicos reales de las focales reales de una cíclica real no pueden cortarse según rectas paralelas á las de intersección de sus planos cíclicos; luego los planos cíclicos de las focales reales del sistema se cortan según rectas paralelas á distintos ejes para cada una, mientras que los planos cíclicos de las imaginarias determinan rectas paralelas á un solo eje; deduciendo de todo esto que en el sistema de conos homofocales de las condiciones anteriormente indicadas, el proyectante de una cíclica real será de distinto sistema que los demás.

43.—Los planos cíclicos de un conjunto de conos homofocales doblemente proyectantes de un sistema de cíclicas focales, son distintos, puesto que de no ser así, aquellos conos no serían distintos y, por tanto, los conos doblemente proyectantes de una cíclica serían todos iguales, lo cual es imposible; dedúcese de esto que las focales tienen distintos sus puntos cíclicos.

44.—Dos cualesquiera de los $V_1(V_2\sigma_2)$ y $V_2(V_1\sigma_1)$ son conjugados en el sistema polar absoluto. Para verlo fijémonos en que los planos cíclicos de $V_1(V_2\sigma_2)$ son paralelos á los del cono $S\varphi'_2$, y los de éste son perpendiculares á las rectas focales de $V_2\varphi_2$ y $V_2(V_1\sigma_1)$ que son homofocales. Análogamente los planos cíclicos de $V_2(V_1\sigma_1)$ son perpendiculares á las rectas focales de $V_1(V_2\sigma_2)$, resultando que estos dos conos tienen recíprocamente los planos cíclicos del uno perpendiculares á las rectas focales del otro; luego son conjugados en el sistema polar absoluto.

45.—Toda cíclica (Σ) corta ortogonalmente á las esferas $V\sigma$ de sus focales $(V\sigma)$. Para verlo basta observar que está en involución consigo misma respecto de los puntos V y planos σ, y que los puntos de intersección con cada esfera $V\sigma$, están en el círculo σ y plano central; siendo por tanto, puntos dobles de aquella involución; el rayo doble que los proyecta es tangente á la curva, y como es radio de $V\sigma$ la corta ortogonalmente.

46.—El número máximo de las esferas ortogonales dos á dos, citadas en el número 41, es cinco, siendo en este caso el centro de cada una ortocentro del tetraedro determinado por las cuatro restantes. Estos cinco puntos podrán ser todos reales, como ocurre con las imaginarias y bicursales, en cuyo caso una de las esferas es imaginaria; dos de los cinco puntos serán imaginarios cuando las curvas sean unicursales, siendo dos de las esferas imaginarias con centro imaginario; en las nodales dos de los cinco puntos reales están confundidos, quedando reducidas dos de las cinco esferas, á un cono isótropo que tiene por vértice este punto y, por último, en las cuspidales son tres los puntos que se confunden en uno, y tres también las esferas reducidas á un cono isótropo que tiene por vértice aquel punto.

47.—En el primer caso de los citados en el número 40, es decir, cuando la cíclica dada es imaginaria, el número de sus cíclicas focales es cuatro, (dos reales bicursales y otras dos imaginarias) puesto que (Σ) está contenida en dos conos reales de segundo orden y otros dos imaginarios, también de segundo orden. Si consideramos los conos reales, observamos que la esfera Σ es interior á uno ó exterior á los dos; cuando es exterior, podrán trazarse cuatro planos reales tangentes comunes á la esfera Σ y á cada cono real, de tal modo que el haz tangencial de planos de cada uno queda descompuesto en cuatro partes; en dos de ellas, que están separadas por las otras dos, los planos cortan á la esfera, y los puntos asociados á ellos forman dos cadenas cerradas de puntos de la focal; los planos tangentes en las otras dos partes dan dos arcos reales cerrados y distintos de la misma, que parecen unirse á las cadenas anteriores por medio de los cuatro puntos de contacto con Σ de los planos tangentes comunes al cono y á la esfera. Se ve, pues, en el caso que consideramos, que las dos focales son bicursales. Si uno de los conos contiene en su interior á Σ, todos sus planos tangentes darán pares de puntos reales de la focal correspondiente, la cual aparece formada por dos arcos reales y distintos, siendo, por tanto, bicursal.

Al considerar los conos imaginarios, vemos que los planos tangentes á los mismos deben ser imaginarios, y que las esferas del haz correspondiente á uno de éstos, como plano radical, tendrán todas ellas sus centros imaginarios sobre la recta imaginaria perpendicular á aquél plano trazada por el punto S, centro de la única esfera real del haz con centro real; luego imaginarios serán los vértices de los conos isótropos pertenecientes á los expresados haces y, bitangentes por lo tanto á la curva dada. Los puntos de intersección con Σ de cada una de las focales son ocho; cuatro de ellos cíclicos y los otros cuatro contenidos en el círculo directoı correspondiente. No considerando los puntos cíclicos, el número de focos de la curva contenidos en Σ es diez y seis, de los que ocho son reales y otros ocho imaginarios.

48.—Si la cíclica dada es bicursal, tiene una sola focal real, que también será bicursal, y otras tres imaginarias; puesto que de los cuatro conos doblemente proyectantes de la curva, solo uno tiene cuatro planos reales tangentes comunes con la esfera Σ, (el $V_1\varphi_1$ que contiene en una sola hoja la cuártica sin ser todo él útil). Se ve, fácilmente, que todos los planos tangentes á los demás conos cortan á la esfera Σ, dando, por tanto, cíclicas focales de la propuesta, imaginarias. Prescindiendo de los puntos cíclicos, el número de focos de la curva sobre la esfera que la contiene es diez y seis de los que solo cuatro son reales; siendo estos, los cuatro puntos reales en que la corta su focal real, que como ya hemos indicado, son los de contacto de los planos reales tangentes comunes á $V\varphi$ y Σ.

49.—En este primer género del grupo 20 vemos que el sistema de cíclicas focales está constituído por cinco, de las que dos son reales y las otras tres imaginarias.

De lo dicho en el número 42 deducimos que el centro de cada esfera es vértice de cuatro conos homofocales, cuyas rectas focales deben ser perpendiculares á los planos cíclicos de los conos de segundo orden que proyecten la cíclica contenida en la esfera elegida. Si suponemos que las dos cíclicas reales son la (Σ) y la $(V_1\sigma_1)$, los conos de vértice S, así como los de vértice V_1, serán todos reales, como conjugados de otros también reales Por otra parte, como toda cíclica imaginaria admite dos conos reales doblemente proyectantes y otros dos imaginarios, las tres cíclicas focales imaginarias nos darán seis conos reales y otros seis imaginarios; no pudiendo ser los vértices de estos, otros que los V_2, V_3 y V_4.

Los veinte conos de segundo orden del sistema resultan agrupados del modo siguiente:

proyectantes de la cíclica real $(V_1\sigma_1)$	$V_2(V_1\sigma_1)$ real, $V_3(V_1\sigma_1)$ real, $V_4(V_1\sigma_1)$ real y $S\varphi_1'$ real
proyectantes de la cíclica imginaria $(V_2\sigma_2)$	$V_1(V_2\sigma_2)$ real, $V_3(V_2\sigma_2)$ imag.º, $V_4(V_2\sigma_2)$ imag.º, $S\varphi_2'$ real
proyectantes de la cíclica imaginaria $(V_3\sigma_3)$	$V_1(V_3\sigma_3)$ real, $V_2(V_3\sigma_3)$ imag.º, $(V_4(V_3\sigma_3)$ imag.º, $S\varphi_3'$ real
proyectantes de la cíclica imaginaria $(V_4\sigma_4)$	$V_1(V_4\sigma_4)$ real, $V_2(V_4\sigma_4)$ imag.º, $V_3(V_4\sigma_4)$ imag.º, $S\varphi_4'$ real
proyectantes de la cíclica real (Σ)	$V_1\varphi_1$ real, $V_2\varphi_2$ real, $V_3\varphi_3$ real, $V_4\varphi_4$ real

Si consideramos los conos homofocales que tienen por vértice el centro de una esfera que contenga cíclica imaginaria, existirán entre ellos dos conos reales de distinto sistema uno de otro por ser doblemente proyectantes de las cíclicas focales reales, y otros dos imaginarios del tercer sistema proyectantes de las focales imaginarias; si la esfera elegida contuviese cíclica real, los conos homofocales serían todos reales; pero por proyectar tres de ellos cíclicas imaginarias, serán de un mismo sistema, mientras que el proyectante de la cíclica real lo será del otro.

50.—Consideremos ahora el caso de las unicursales en que dos de los cinco centros son imaginarios; tendremos en él dos esferas imaginarias con centro imaginario. Los dos conos reales de segundo orden proyectantes de la unicursal, tienen comunes con Σ dos planos tangentes reales, que dividen al haz tangencial de cada uno en dos partes; los de una de ellas cortan á Σ según círculos reales y dan focos imaginarios, engendrando una cadena de puntos que parece cortar ortogonalmente á Σ en los puntos de contacto de los dos planos tangentes comunes ya citados. Los planos tangentes de la otra parte del haz no cortan á Σ engendrando, por tanto, un arco real cerrado. Estas cíclicas focales de la propuesta, son, por tanto, unicursales y reales, siendo de notar que estas dos focales son reales.

Las focales correspondientes á los conos imaginarios de vértice imaginario son imaginarias, puesto que los planos tangentes á estos conos son imaginarios y cortan á Σ según círculos imaginarios, bases de haces de esferas imaginarias de centros imaginarios situados sobre una recta imaginaria de primera especie cuyo punto real es S; los conos isótropos de este haz tendrán su vértice imaginario, engendrando, por tanto, una focal imaginaria.

El número de focos reales que una cualquiera de las focales reales tiene sobre la esfera correspondiente, también es en este caso cuatro; pero con la diferencia del caso anterior, de que en éste están dos en cada uno de los dos círculos directores reales.

En este segundo género del grupo 20, el sistema se compone de cinco cíclicas focales, de las que tres son reales, y dos imaginarias distintas al parecer de las consideradas en el primer género, puesto que están en involución consigo mismas, sin que estas involuciones sean reales proyectivas, y además contenidas en esferas imaginarias con centro imaginario.

El centro de cada esfera real (42) es vértice de dos conos reales de distinto sistema.

51.—En el caso en que solo existen cuatro esferas ortogonales, por haberse reducido dos de ellas á una sola convertida en cono isótropo, sabemos que existe un cono $V_1 \varphi_1$ doblemente proyectante de la cíclica nodal, cuyo vértice V_1 es un punto de la esfera Σ. En las cíclicas nodales reales todos los planos tangentes á este cono cortan á Σ según círculos reales; luego la cíclica focal $(V_1 \sigma_1)$ correspondiente, será imaginaria, estando situada sobre el expresado cono isótropo. Si designamos por s la perpendicular trazada desde S á un plano σ_1' tangente á $V_1 \varphi_1$, por M y M' los puntos en que esta recta corta á Σ, y por N y N'_∞ los de intersección con el plano σ_1' y el del infinito, los puntos de la focal contenidos en dicha recta estarán representados por $MNM'N'$ y $MN'M'N$, constituyendo el conjunto de ellos una cadena contenida en el cono real de vértice S conjugado del $V_1\varphi_1$ en el sistema polar absoluto. Esta cíclica constituye una especie distinta de las consideradas en el grupo 21, pues no tiene ningún punto real. Desde los vértices V_2 y V_3 también se proyectará según conos de segundo orden.

Supongamos ahora que la (Σ) es crunodal, y que el cono $V_2\varphi_2$ sea el que penetre en la esfera. Los planos tangentes á este cono $V_2\varphi_2$, darán puntos $MNM'N'$ y $MN'M'N$ imaginarios para la focal $(V_2\sigma_2)$, que será imaginaria con el punto V_1 real, por ser éste de contacto del plano tangente en él á Σ. Esta cíclica se proyecta doblemente desde V_1, V_3 y S, según conos de segundo orden, imaginario el primero (según luego comprobaremos) con su vértice V_1 sobre la esfera $V_2\sigma_2$, y reales los otros dos; luego será una nodal imaginaria.

El cono de vértice V_3 tiene dos planos reales tangentes comunes con Σ que separarán su haz tangencial en dos partes; los de una cortan todos á Σ según círculos reales σ_3', excepto uno de ellos, el tangente en V_1, dándonos pares de puntos imaginarios cuyo conjunto constituye dos cadenas cerradas y distintas que aparecen unidas por el punto real V_1, de contacto, del citado plano tangente. También pertenecen á ellas los dos puntos de contacto de los planos tangentes citados. La otra parte del haz está constituída por planos no secantes, originando pares de puntos reales que forman un arco real cerrado. Esta cíclica se proyecta doblemente desde S, V_1 y V_2, y por estar V_1 sobre la esfera $V_3\sigma_3$, se ve que es una acnodal. Si partiésemos de una acnodal ó imaginaria llegaríamos á las mismas conclusiones, lo que fácilmente se ve considerándola definida sobre la esfera correspondiente.

52.—Por tanto, resumiendo, vemos que el sistema de cíclicas focales del grupo 21 se compone de una crunodal, otra acnodal, una imaginaria nodal y otra toda ella imaginaria, que, por tener dos puntos distintos sobre cada cono real que la proyecta, parece asemejarse á las imaginarias del grupo 20. Las reales tienen tres focos reales sobre el círculo director correspondiente, puesto que tres son los planos tangentes comunes á Σ y el cono correspondiente; uno de los focos es el punto V_1.

Por estar contenida cada una de las cíclicas de este sistema en tres superficies cónicas, excepto la imaginaria $(V_1\sigma_1)$ que además lo está en un cono isótropo, deducimos que las dos imaginarias estarán cada una en un cono imaginario, apareciendo estos dos conos imaginarios como conjugados en el sistema polar absoluto.

Los conos de segundo orden que figuran en este sistema son los siguientes:

proyectantes de la crunodal (Σ)	$V_1\varphi_1$ real,	$V_2\varphi_2$ real,	$V_3\varphi_3$ real
proyectantes de la imaginaria ($V_1\sigma_1$)	$S\,(V_1\sigma_1)$ real,	$V_2\,(V_1\sigma_1)$ imaginario,	$V_3\,(V_1\sigma_1)$ real
proyectantes de la imaginaria nodal ($V_2\sigma_2$)	$S\,(V_2\sigma_2)$ real,	$V_1\,(V_2\sigma_2)$ imaginario,	$V_3\,(V_2\sigma_2)$ real
proyectantes de la acnodal ($V_3\sigma_3$)	$S\,(V_3\sigma_3)$ real,	$V_1\,(V_3\sigma_3)$ real,	$V_2\,(V_3\sigma_3)$ real

Los conos que tengan por vértice el centro de una esfera que contenga cíclica imaginaria, son dos reales, correspondientes á cíclicas reales, y uno imaginario relativo á una cíclica imaginaria; luego los tres conos serán de distinto sistema, y si el vértice es centro de esfera real que contenga cíclica focal real, aquellos conos serán todos reales, pero dos de ellos proyectarán cíclicas imaginarias, mientras que el tercero corresponderá á una cíclica real.

53.—Consideremos, por último, el caso de tres esferas reducidas á un solo cono isótropo (45) y supongamos que la cíclica (Σ) sea cuspidal. Todos los planos tangentes al cono $V_1\varphi_1$ que tiene su vértice V_1 en Σ, excepto el que lo es además á Σ, cortan á ésta según círculos σ'_1 reales, y originan, por consiguiente, puntos imaginarios de la focal; ésta será, por tanto, imaginaria con un punto real, y podrá ser considerada como intersección del cono isótropo de vértice V_1 con un cono real que pase por aquel punto V_1.

El cono $V_2\varphi_2$ tiene dos planos reales tangentes comunes con Σ, que dividen á su haz tangencial en dos partes; los de una de ellas cortan según círculos reales y darán pares de puntos imaginarios de una cadena cerrada por dos puntos reales; los de la otra dan círculos imaginarios que definirán pares de focos reales, constituyendo éstos un arco cerrado al que pertenecen los puntos reales de la parte imaginaria. Esta cíclica también es cuspidal; para verlo basta observar que se proyecta según dos conos reales de vértices S y V_1; que está situada en una esfera $V_2\sigma_2$ que contiene uno de los vértices, el V_1, y que el plano tangente á la misma en este punto es tangente al cono $V_1\,(V_2\sigma_2)$ que la proyecta doblemente; porque si así no fuese, este cono real que tiene su vértice en $V_2\sigma_2$ produciría en esta una crunodal ó acnodal y, en el primer caso, el vértice del cono sería punto doble de la cíclica, y en el segundo sería punto aislado; pero como no sucede nada de esto, tendrá que ser el cono tangente á la esfera, siendo, por tanto, la cíclica cuspidal.

54.—Las focales del grupo 22 son, por tanto, dos cuspidales y una imaginaria con un punto real. Los conos doblemente proyectantes de esta última son reales y tangentes en el punto real de la curva, puesto que ambos son tangentes en el punto V_1 al plano SV_1V_2; para ver esto, observemos que el cono $S\varphi_1'$ conjugado del $V_1\varphi_1$ en el sistema polar absoluto es doblemente proyectante de aquella cíclica imaginaria $(V_1\sigma_1)$, siendo su directriz φ_1' el lugar de los polos respecto de Σ de los planos tangentes á $V_1\varphi_1$, cuya directriz φ_1' es tangente á la recta V_1V_2, por ser esta perpendicular á la generatriz de contacto del cono $V_1\varphi_1$ con el plano σ_1; luego el cono $S\varphi_1'$ es tangente al plano SV_1V_2 siendo su generatriz de contacto la SV_1; si, por otra parte, consideramos la cíclica cuspidal contenida en la esfera $V_2\sigma_2$, también se ve que el cono $V_2\,(V_1\sigma_1)$ es tangente al plano V_2V_1S siendo V_2V_1 la generatriz de contacto.

Cada una de las cuspidales tiene sobre el único círculo director un foco real y además el punto de retroceso que debe considerarse como tal.

También vemos que en este sistema no existe ningún cono de segundo orden imaginario, si se exceptúa el cono isótropo de vértice V_1, sino un conjunto de seis conos reales, formando tres grupos de á dos, homofocales y de distinto sistema.

55.—Sabemos (22) que á cada sección plana del cono $S\varphi'$ corresponde una ciclida ortogonal á $V\sigma$ que contiene la cíclica (Σ). Recíprocamente, á cada sección plana del cono $V\varphi$ corresponde una ciclida ortogonal á Σ que contiene la cíclica $(V\sigma)$ asociada al cono $V\varphi$; luego, á la sección producida por un plano cualquiera en el conjunto de los conos de segundo orden doblemente proyectantes de las cíclicas focales de un sistema, corresponderá un conjunto de ciclidas en número igual al de los conos, y tales que, cada una contenga la cíclica focal asociada al cono considerado. Según que se considere el primer género del grupo 20, el segundo género del mismo, el grupo 21 ó el grupo 22, así corresponderán 20, 6, 12 ó 6 ciclidas á cada sección plana del sistema, que podrán agruparse de 4 en 4, de 2 en 2, de 4 en 4 ó de 2 en 2, en 5, 3, 4 ó 3 grupos respectivamente, correspondiendo uno á cada cíclica y siendo cada una de aquellas ortogonal á cada una de las 4, 2, 3 ó 2 esferas restantes. En particular, si el plano secante es bitangente á una cíclica (Σ) del sistema, pasará por el centro V de una de las esferas ortogonales, y las secciones planas producidas por el mismo, serán 3, 1, 2 ó 1 cónicas bitangentes á (Σ); otras 3, 1, 2 ó 1 secciones se reducirán á pares de generatrices de los conos homofocales de vértice V; otra sección será la generatriz de contacto del plano considerado con el cono $V\varphi$, á la cual habrá que considerar como doble; las secciones restantes serán cónicas en las que no vemos nada de particular. La cíclica (Σ) estará, pues, contenida en 4, 2, 3 ó 2 ciclidas ordinarias quedando reducidas á la esfera $V\sigma$ las 4, 2, 3 ó 2 ciclidas que deben contener á la $(V\sigma)$ y encontrándose situada cada una de las cíclidas restantes en 3, 1, 2 ó 1, cíclídas ordinarias y una de Dupín.

Cuando los centros de las esferas son todos puntos propios no existe ningún toro.

II

56.—Consideremos ahora el caso en que la cíclica propuesta (Σ) esté contenida en un solo cilindro $V_\infty\varphi$, lo que ocurrirá cuando el centro S de Σ no esté en uno de los planos principales de aquel, y supongamos, además, que este cilindro, cuyas generatrices tienen la direccion V_∞, no es parabólico. puesto que en este caso se trataría de una cartesiana, y estas curvas las consideraremos por separado.

La esfera $V_\infty\sigma$ estará compuesta en este caso del plano σ, de simetría de las cíclicas esféricas del sistema, y del plano del infinito. Las focales de (Σ) asociadas á los conos doblemente proyectantes de la misma, ya las hemos considerado; nos ocuparemos ahora de la focal asociada al cilindro. Desde luego se observa que esta focal será plana.

Hemos de considerar esta curva como lugar de puntos dobles de las involuciones $MM'.NN'_\infty$.... de que ya se habló anteriormente, en que M y M' son puntos de intersección con Σ de la perpendicular desde S á un plano tangente al cilindro $V_\infty\varphi$ y N y N'_∞ el pie de esa perpendicular sobre el expresado plano y el punto del infinito de la misma. Pero si consideramos la sección recta del citado cilindro por el plano diametral de simetría σ, la sección del haz tangencial de planos de aquel será el haz tangencial de rectas de la cónica φ_1, y aquellos puntos M, M', N y N'_∞ serán los de intersección de la perpendicular citada, con el círculo σ, máximo de Σ, con las tangentes de φ y los del infinito de las perpendiculares que se consideren.

La determinación de esos puntos dobles se hace con sencillez por tratarse de haces de círculos, pues basta utilizar la siguiente propiedad: «En dos haces de círculos ortogonales, los de un haz pasan por los puntos dobles de la involución que el otro haz determina en la línea de sus centros, eje radical de los primeros; además, uno cualquiera de estos es ortogonal á todos los del otro haz».

Sea φ_1 la sección recta del cilindro $V_\infty\varphi$ y σ el círculo director correspondiente de la cíclica; toda tangente l á φ_1 en uno de sus puntos L define dos puntos de la focal, que serán los de intersección del círculo de centro L, ortogonal á σ, con la recta s perpendicular á l. Vemos que esta manera de engendrar la focal es la explicada al representar sobre la esfera las cíclicas esféricas, pues aquí, según ya hemos dicho, la esfera $V_\infty\sigma$ que contiene la cíclica focal está reducida al plano σ y al del infinito; la deferente es aquí la sección recta del cilindro $V_\infty\varphi$; el círculo director es el σ; cada par de puntos de la cíclica están sobre las perpendiculares trazadas desde S á las tangentes de φ, cuyas rectas eran entonces círculos máximos; los círculos de centro L ortogonales á σ son bitangentes á la cíclica; pero como todos ellos son ortogonales á uno fijo, constituirán parte de una red de círculos, pudiendo definirse la focal plana como envolvente de círculos de una red cuyos centros están en una cónica φ, siendo σ el ortogonal á todos los de la red.

57.—A las tangentes isótropas de la deferente φ que pasan por los focos de esta, corresponderán, entre las perpendiculares desde S, las rectas isótropas que pasan por este punto, resultando que, si la deferente tiene dos focos distintos, á las cuatro tangentes isótropas que pasan por ellos, corresponderán doblemente las que pasan por S, y como los puntos de contacto de aquellas tangentes isótropas con φ son todos distintos, también lo serán los círculos bitangentes que los tienen por centro; luego existirán dos tangentes isótropas distintas en cada punto cíclico de la curva, siendo estos, por tanto, dobles, y las tangentes isótropas de la cíclica plana en ellos, las mismas de la deferente φ; dedúcese de aquí que los focos de la deferente son focos singures de la cíclica plana. Si la deferente es parábola, solo existirán dos círculos tangentes, uno en cada punto cíclico; de modo que estos puntos serán simples. Cuando la deferente sea un círculo, cada tangente isótropa es doble, y, por tanto, aquellos puntos cíclicos serán de retroceso, lo que también podrá verse observando que, por ser los puntos de contacto de las tangentes isótropas comunes al círculo deferente y al director, los círculos bitangentes que tienen por centro aquellos puntos serán de radio nulo, y por poderse considerar como osculadores de la curva en ellos, deducimos que estos puntos de la curva serán de retroceso.

58.—Entre los conos del sistema de cíclicas focales hay 4, 2, 3 ó 2 sustituídos por cilindros, habiéndose reducido otros 4, 2, 3 ó 2 conos á porciones de haces de rectas de primer orden cuyos vértices son los centros de las esferas ortogonales del sistema.

Consideremos una de las cíclicas esféricas focales que, como las demás focales esféricas del sistema, estará contenida en un cilindro; sea esta la (Σ) por ejemplo: los planos asintóticos del cilindro que la proyecta doblemente, que serán imaginarios ó reales según que sea elíptico ó hiperbólico, serán bitangentes á (Σ) y, por tanto, las cíclidas de Dupín consideradas en el número 54, serán otros tantos toros, reales ó imaginarios, que contendrán las focales esféricas de (Σ), pero no á esta; más como hay dos planos asintóticos del cilindro, corresponderá á ellos un conjunto de 2.3, 2.1, 2.2, ó 2.1 toros, dos para cada focal esférica de (Σ), y si tenemos en cuenta que existen 4, 2, 3 ó 2 cilindros homofocales cuyas generatrices, según ya digimos, tienen la dirección V_∞ y que á cada uno corresponden 2.3, 2.1, 2.2, ó 2.1 toros, se tendrán en resumen 2.3.4, 2.1.2, 2.2.3, ó 2.1.2 toros, de los que 2.3, 2.1, 2.2, ó 2.1 serán imaginarios ó podrán ser reales, según que los restantes puedan ser reales ó sean imaginarios; formándose de ellos 4, 2, 3 ó 2 grupos, de 3.2, 1.2, 2.2 ó 1.2 tales que, los de cada uno cortan á una esfera según la cíclica esférica contenida en ella.

59.—Distinguiremos dos casos según que la cíclica plana del sistema sea real ó imaginaria:

1.° Cuando es real, todos los cilindros homofocales $V_\infty\varphi$ son reales y tales que, si el doblemente proyectante de la cíclica esférica real es elíptico, los de las imaginarias serán hiperbólicos, y recíprocamente; en el primer caso de estos, 2.3, 2.1, 2.2, ó 2.1 toros serán imaginarios y 2.3.3, 2.1.1, 2.2.2, ó 2.1.1, podrán ser reales, perteneciendo á estos los 6 toros en que se encuentra la cíclica real esférica considerada. Cuando ésta está en un cilindro hiperbólico, los cilindros reales, correspondientes á las demás serán elípticos y 2.3, 2.1, 2.2, ó 2.1 toros podrán ser reales siendo los restantes seguramente imaginarios, á los que corresponderán los 6 imaginarios en que se encuentra la cíclica real esférica considerada.

2.° Cuando la focal plana es imaginaria, dos de los cilindros son reales y los otros dos imaginarios, correspondiendo aquéllos á las cíclicas esféricas reales, y estos, cuando existan, á las imaginarias. Una de las reales estará en el cilindro elíptico real y la otra en el hiperbólico, existiendo 2.3, 2.1, 2.2, ó 2.1 toros que podrán ser reales siendo los restantes imaginarios, de los que 2.3, 2.1, 2.2, ó 2.1 corresponden á la cíclica esférica real contenida en el hiperbólico.

En todos estos casos, ninguno de los planos principales de los cilindros contiene un centro de las esferas ortogonales del sistema.

60.—El plano de simetría σ determina en los cilindros homofocales, 4, 2, 3 ó 2 cónicas homofocales, que serán las deferentes de la cíclica plana, á las que corresponderán como círculos directores los 4, 2, 3 ó 2 círculos máximos determinados por aquel plano σ en las esferas del sistema.

A la red de círculos definida por uno de los directores corresponden, no sólo los bitangentes á la cíclica que tienen sus centros en la deferente respectiva, sino también los círculos directores restantes. La cíclica puede considerarse engendrada de 4, 2, 3 ó 2 modos distintos correspondientes uno á cada una de las redes definidas por cada círculo director, y como toda recta que pase por el centro radical de una red, contiene cuatro puntos de la curva cuando la deferente es elipse ó hipérbola, parece desprenderse de aquí, que la ciclica es de cuarto orden cuando sus deferentes tienen centro.

Por ser la curva considerada envolvente de círculos de una red cuyos centros describen una línea, aquella será transformada de sí misma por radios vectores recíprocos respecto del centro radical de la red y de la potencia r^2; siendo r el radio del círculo doble de la transformación, que además es el director de la cíclica y ortogonal á todos los de la red, puesto que toda circunferencia que pase por un par de puntos correspondientes, se corresponde á sí misma y corta ortogonalmente al expresado círculo doble. La curva considerada será, por tanto, analagmática; siendo transformada de sí misma por radios vectores recíprocos de 4, 2, 2 ó 1 modos distintos, pues en los dos últimos casos deben excluirse los correspondientes á los círculos directores de radio nulo.

En el primer género del grupo 20, los cuatro centros radicales de las redes constituyen un cuadrivértice tal que cada centro es ortocentro del triángulo determinado por los otros tres; en el segundo género dos de aquellos centros son imaginarios, estando contenidos en el eje radical común á los círculos directores reales; en las nodales los tres círculos son dos reales, y uno de radio nulo, y, por último, los dos círculos directores de las cuspidales son uno real y otro de radio nulo.

61.—Los focos que la cíclica tiene en su plano estarán en los círculos directores de la misma, siendo los puntos de intersección de las focales esféricas con el plano σ y existiendo solo cuatro reales sobre un mismo círculo director cuando la cíclica plana pertenece al grupo 20; pues aunque para las imaginarias dos de sus focales son reales, una de éstas corta al plano σ en puntos imaginarios. En las unicursales hay dos focos reales y otros dos imaginarios sobre cada uno de los círculos directores reales, siendo los demás focos imaginarios. En las nodales hay dos focos reales sobre un círculo director además del círculo de radio nulo que debe considerarse como tal. En las cuspidales la cíclica plana es siempre real teniendo un foco real sobre el círculo director real además del punto de retroceso, que también debe considerarse como foco.

62. —Consideremos una cíclica plana definida por una cónica φ_1

deferente y su círculo director respectivo σ_1. El número y posición de los puntos que tengan la misma polar respecto de φ_1 y σ_1 nos darán á conocer la naturaleza de la curva. Las deferentes han de ser homofocales con φ_1 y pasar por los puntos de intersección de las tangentes comunes á φ_1 y σ_1; pero estos puntos, cuando σ_1 y φ_1 no tienen un contacto de tercer orden ó un doble contacto, son puntos dobles de las series en involución definidas por los pares de vértices de haces de rectas conjugadas comunes (los rayos de

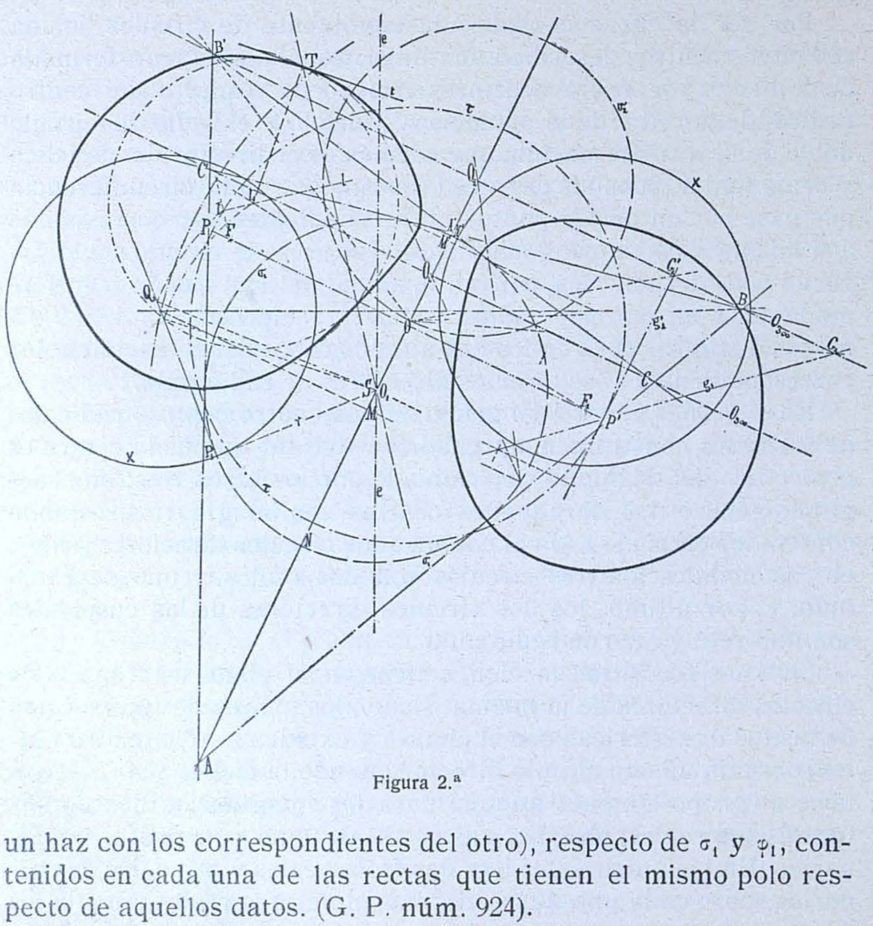


Figura 2.ª

un haz con los correspondientes del otro), respecto de σ_1 y φ_1, contenidos en cada una de las rectas que tienen el mismo polo respecto de aquellos datos. (G. P. núm. 924).

Estas involuciones se definen, fácilmente, determinando dos pares de rectas conjugadas respecto de σ_1 y φ_1, las cuales cortarán á las rectas que tengan el mismo polo en dos pares de puntos conjugados de las involuciones que se buscan.

En la figura 2.ª la deferente es una elipse que tiene por ejes PP' y MM', por focos F y F_1 y por centro O; hemos determinado tangentes á la deferente, utilizando la propiedad de ser el círculo principal τ podaría de los focos respecto de la cónica, con lo que dado un punto I del círculo principal, la perpendicular á la recta que determina con un foco, es una tangente á la deferente.

Para la determinación de los puntos de la curva hemos aprovechado la circunstancia de ser simétricos respecto de la tangente respectiva, y estar contenidos en un círculo cualquiera de la red definida por σ_1 y cuyo centro esté en aquella tangente, eligiendo, en particular, el círculo que tiene su centro en el punto considerado sobre el círculo principal de φ. El radio de este círculo, que es igual á P_1Q_1, es cateto de un triángulo rectángulo P_1Q_1S que tiene para hipotenusa $SQ_1 = SI$, y para el otro cateto el radio r del círculo σ_1.

La determinación de la tangente t en un punto T de la linea, se ha obtenido por medio del círculo bitangente en él. El centro de este círculo es el punto de contacto L de la tangente l á φ_1; cuyo punto de contacto L se ha determinado construyendo un arco de círculo director de la elipse φ_1 con centro en F_1; desde F se ha trazado la perpendicular FIK á l y la recta F_1LK nos ha dado el punto L; con un radio igual al segmento de tangentes á σ_1 se ha trazado el círculo bitangente.

Las demás deferentes son hipérbolas que pasan por los puntos A y A', B y B' y C y C' vértices opuestos del cuadrilátero circunscrito á φ_1 y σ_1. En el caso elegido una de estas hipérbolas, la relativa á los puntos A y A' está reducida al eje de simetría de la curva, teniendo el triángulo autopolar $O_2O_3O_4$ un vértice en el infinito.

El cilindro elíptico de sección recta φ_1 produce en la esfera Σ una bicursal; los otros dos no cortan á las esferas correspondientes.

63.—Supongamos ahora que la cíclica esférica (Σ) está contenida en dos cilindros $V_{1\infty}\varphi_1$ y $V_{2\infty}\varphi_2$, cuyas generatrices tienen respectivamente las direcciones $V_{1\infty}$ y $V_{2\infty}$. Ocurrirá esto, cuando un eje del cono que define (Σ) contenga el centro S de la esfera, ó, si lo que se da es un cilindro, cuando el expresado centro esté en un plano principal de aquél.

Los planos principales de los dos cilindros que pasan por el centro S de Σ, son perpendiculares, siendo también planos principales de los conos que contengan á (Σ) y de simetría ortogonal de las cíclicas esféricas del sistema; su intersección, que es eje de los citados conos, será eje de simetría ortogonal de todas las cíclicas focales.

Dos cíclicas del sistema serán en este caso planas, y, á cada una de ellas aplicaremos lo dicho en el artículo anterior con algunas particularidades que añadiremos.

El eje de simetría viene á sustituir á un círculo director y á una deferente de las cíclicas planas; puesto que si partimos de una de ellas, para obtener la otra en el sistema de sus focales será preciso sustituir el centro de una de las esferas ortogonales del sistema por una dirección, con lo que la esfera supuesta se habrá transformado en otro plano de simetría de las cíclicas esféricas restantes, y los conos que las proyectaban doblemente desde su centro, se habrán transformado en cilindros, quedando reducido el cilindro relativo á la cíclica plana primeramente considerada, al plano de la misma. Los cilindros homofocales correspondientes á cada dirección $V_{1\infty}$ y $V_{2\infty}$ serán 3, 1, 2 ó 1, según los casos.

Los centros de los círculos directores están todos en el eje de simetría. En las *cuspidales* el centro del único círculo director es además un punto de la deferente. En las *nodales* también existe un círculo director de radio nulo, cuyo centro, es punto interior á su deferente respectiva en las *acnodales* y exterior en las *crunodales*.

Cuando una de las cíclicas planas es real, los focos de la otra están en el eje de simetría, siendo imaginarios cuando esta otra es imaginaria.

64.—Consideraremos tres casos: 1.º Que las dos cíclicas planas sean reales, distinguiéndose en este caso el segundo género del grupo 20 de todos los demás, en que una de las focales esféricas es real, (lo cual no puede ocurrir más que en las unicursales) mientras que, en los otros casos todas las esféricas tendrán que ser imaginarias.

2.º Que una de las cíclicas planas sea real y otra imaginaria, en cuyo caso otra de las esféricas será forzosamente real.

3.º Que las dos planas sean imaginarias, quedando excluídas de este caso, además de las unicursales, las nodales.

Las cuspidales no pueden estar comprendidas en estos dos últimos casos.

1.º En el segundo género del grupo 20, el conjunto de cilindros homofocales desde una dirección es dos, de los que uno está sustituído por el plano principal del otro cilindro, que contiene al eje de simetría, de modo que, las deferentes serán una cónica y el expresado eje, que según ya hemos indicado, también sustituye á un círculo director: Si la cónica es elipse, los planos asintóticos del cilindro elíptico, que serán bitangentes á la cíclica esférica real, determinan en el otro cilindro doblemente proyectante de ésta, dos secciones circulares correspondientes á los dos toros imaginarios en que se encontrará la otra cíclica plana. Si la expresada deferente fuese hipérbola, podrían ser aquéllos dos toros reales; resulta, por tanto, que cada una de las planas está contenida por lo menos en dos toros.

Cuando las cíclicas esféricas sean todas imaginarias, cada una de las planas tendrá 3, 2 ó 1 deferentes reales además del eje de simetría, y como estas deferentes corresponden á otros tantos cilindros doblemente proyectantes de cíclicas esféricas todas imaginarias, serán todos ellos del mismo sistema; luego si una es elipse ó hipérbola, también las otras lo serán. Dedúcese de aquí, que si una de las esféricas está contenida en dos cilindros reales elípticos, los 2.3, 2.2 ó 2.1 cilindros, también serán elípticos; luego cada una de las esféricas estará contenida en 2.2, 2.1 ó 2.0 toros imaginarios, y cada una de las planas en 2.3, 2.2 ó 2.1 toros también imaginarios; si fuese uno elíptico y otro hiperbólico, ó los dos hiperbólicos, podrían ser algunos de ellos ó todos reales.

2.º Si una sola de las cíclicas planas es real, también lo será una de las esféricas. Las tres cónicas deferentes de la primera serán reales y las de la segunda serán una real y otras dos imaginarias, puesto que el eje de simetría sustituye á una de las reales. Podremos, en este caso, repetir lo dicho anteriormente, con la diferencia de que ahora la focal plana real no podrá estar contenida en más de dos toros reales, pudiéndolo estar las imaginarias en 2.3 ó 2.2 reales.

En el tercer caso, en que solo está comprendido el primer género del grupo 20, las deferentes de cada una de las dos planas son dos cónicas reales; el eje, y otra imaginaria; pero por ser las reales, una elipse y otra hipérbola, las esféricas estarán en 2.2.2 toros, de los que dos podrán ser reales, y las imaginarias planas en 2.2 toros de los que dos parecen ser reales por existir un cilindro hiperbólico.

65.—Existe una clase especial de cíclicas planas con un eje de simetría, que conviene considerar, y son las que tienen por deferente una cónica bitangente á su círculo director respectivo; estas cuárticas se reducen á dos círculos distintos que tienen por eje radical la cuerda de los contactos de la deferente con su círculo director. Para verlo, basta considerar que la cíclica que se obtenga, tendrá aquellos puntos de contacto por puntos dobles y, por tanto, todo círculo que pase por aquellos dos puntos y otro cualquiera de la curva, tendrá que confundirse con parte de esta, porque sinó cortaría á la cíclica en nueve puntos que serán cinco propios y los cíclicos como dobles.

Como caso particular, si consideramos para círculo director el osculador en un vértice de la deferente, se obtienen dos círculos tangentes, y si la deferente es otro concéntrico se obtienen dos concéntricos.

---

66. Entre esta especie de cíclicas planas con un eje de simetría, se encuentran las secciones producidas en el toro por planos no paralelos al eje ni que pasen por el centro (fig. 2.ª). Consideremos un plano en estas condiciones; el punto S de intersección con el eje del toro será el centro de un círculo director, puesto que los ejes de los toros existentes en el sistema pasan por los centros de las esferas; la proyección ortogonal φ_1 de la circunferencia φ, lugar de los centros de las esferas involutas, será una deferente; la proyección del eje será eje de simetría de la cíclica y también de la deferente hallada, y el plano proyectante del mismo será el de la otra focal plana.

El plano φ de la circunferencia lugar de los centros de las involutas y su simétrico φ' respecto del plano secante, deben ser planos asintóticos de un cilindro hiperbólico que tiene por sección recta sobre el plano de la otra focal plana, una hipérbola deferente de la misma, de la que son asíntotas las trazas correspondientes de aquellos planos asintóticos.

Una de las esferas ortogonales del sistema es la Σ ortogonal al toro, cuyo centro es el punto S, y una de las focales esféricas es la intersección con esta esfera del cilindro proyectante de φ. Para determinar las demás esferas ortogonales del sistema, observemos, que dos de ellas estan sustituídas por el plano secante y el proyectante del eje, y que los centros de las demás han de estar contenidos en el expresado eje de simetría, siendo los puntos de éste que tienen la misma polar respecto del círculo φ_1 y su deferente σ_1.

En las del grupo 20, existirán además de la esfera Σ otras dos cuyos centros serán los puntos dobles de la involución que en el eje determinan φ_1 y σ_1, cuyos puntos dobles, en las imaginarias y bicursales, serán reales; para lo cual, es preciso que los dos puntos en que φ_1 corta al eje de simetría no estén separados por los dos en que le corta σ_1; si estos puntos están separados por aquéllos, los dobles serán imaginarios y la cíclica plana será unicursal.

Si uno de los puntos de φ_1 contenidos en el eje se confunde con otro de σ_1, este punto será centro de una esfera de radio nulo y la sección plana será una nodal; lo que también ocurrirá cuando la esfera Σ sea de radio nulo y el centro no esté sobre φ_1, pues cuando sea un punto de esta cónica, la sección será una cuspidal.

Resulta, por tanto, que solo en las imaginarias ó bicursales hay que determinar otras esferas además de la Σ, de las que una, que tiene por centro el punto doble de la involución interior á φ_1 y σ_1, es imaginaria, y la otra real, dándonos ésta el otro círculo director real. La determinación de la deferente respectiva se hace como ya se indicó.

67.—Para clasificar las secciones que se obtienen por planos de las condiciones exigidas, designaremos por R el radio de la circunferencia φ, r el radio de las esferas involutas y d la distancia del centro del toro al punto S.

Consideremos los dos conos de revolución ciscunscritos al toro desde el punto S como vértice; (en el caso en que $R = r$, uno de estos conos queda reducido al eje).

Cuando el plano secante corte á cada uno de los conos según generatrices imaginarias, determinará una cíclica imaginaria ó bicursal, según que $d \gtrless r$, puesto que, en ambos casos, los dos puntos en que el eje corta á φ_1 no están separados por los dos en que corta á σ_1.

Cuando el plano sea tangente á uno de los conos y corte al otro según generatrices imaginarias, dará lugar á una nodal imaginaria ó crunodal, según que $d \gtrless r$, puesto que φ_1 tiene un punto común con σ_1, siendo en él tangentes estas dos curvas, estando además toda la cónica φ_1 en el interior ó exterior de σ_1, según que $d \gtrless r$.

Si el plano secante da generatrices reales en uno de los conos y en el otro imaginarias, producirá en todos los casos unicursales, puesto que los extremos del eje de φ_1 contenido en el eje de la cíclica, están separados por los extremos del diámetro de σ_1 contenidos en el mismo eje.

Los planos tangentes á uno de los conos y secantes del otro darán crunodales siempre que $R > r$, transformándose en acnodales cuando $R < r$; pues φ_1 y σ_1 son tangentes en un punto del eje y los puntos de φ_1 inmediatos al de contacto son exteriores á σ_1, mientras que cuando $R < r$ la cónica φ_1 es toda ella exterior, pero las tangentes inmediatas al punto de contacto cortan al círculo σ_1. En el caso particular en que $R = r$ la cíclica obtenida está compuesta de dos círculos tangentes. Por último, cuando el plano secante lo es á los dos conos (lo cual solo puede ocurrir cuando $R \gtrless r$), se obtiene una bicursal; pues los dos puntos de la cónica φ_1 no están separados por los del círculo σ_1; en el caso particular de pasar el plano secante por el eje del toro, se reduce la cíclica á dos características.

Como casos particulares consideraremos primero que $d = r$, reduciéndose entonces uno de los conos á un haz de rectas de primer orden de vértice S, no existiendo ya planos exteriores á los dos conos y no obteniéndose, por tanto, cíclicas imaginarias; los planos tangentes á un cono y exteriores al otro, se reducen al plano del haz tangente al toro á lo largo de una circunferencia, que aparecerá como doble; los demás planos serán secantes á uno y, exteriores, tangentes ó secantes al otro, produciéndose cíclicas de la misma especie que en los casos ya considerados anteriormente.

Por último cuando los dos conos se confunden en uno, lo que sólo puede ocurrir cuando $R < r$ y el punto S sea uno de los dos comunes á todas las esferas involutas, los planos que dan generatrices imaginarias en el cono, dan origen á cíclicas acnodales, los que cortan según reales, á crunodales, y por último los planos tangentes originan cuspidales con un eje de simetría; pues en todos estos casos la esfera Σ es de radio nulo, y en el primero la cónica φ_1 contiene en su interior el centro de dicha esfera; en el segundo lo deja al exterior y cuando los planos son tangentes, el expresado centro es un punto de φ_1.

68.—Supongamos, finalmente, que la cíclica (Σ) esté contenida en tres cilindros de segundo orden; esto solo puede ocurrir cuando (Σ) pertenezca al grupo 20 ó sea una imaginaria del grupo de las nodales contenida en una esfera de radio nulo, sin que el centro sea punto de la curva.

Para que existan tres cilindros es necesario que, si la esférica (Σ) está definida por un cono, lo que solo puede ocurrir en el primer género del grupo 20, el vértice de éste sea centro de Σ, y sí lo está por un cilindro que su eje pase por aquel punto. En todos los casos estará contenida la cíclica esférica (Σ) en tres cilindros de segundo orden, de direcciones ortogonales cada dos de ellos, constituyendo sus planos principales un triedro trirrectángulo, cuyas caras, aristas y centro son planos, ejes, y centro de simetría de (Σ).

En el primer género del grupo 20 estos planos, ejes y centros de simetría lo son también del cono de segundo orden.

El conjunto de esferas ortogonales está reducido á los tres planos de simetría y dos esferas, una real y otra imaginaria, concéntricas cuyos radios tienen el mismo múdulo, en el primer género del grupo 20, ó una sola esfera, de radio nulo, cuando el sistema es el de las nodales, siendo, en todos los casos, el centro de las esferas el vértice del triedro *trirrectángulo* determinado por aquellos tres planos de simetría. (1).

(1) En toda esta parte prescindiremos del segundo género del grupo 20, y, por tanto, de las unicursales con dos ejes de simetría porque en él las dos esferas son imaginarias, cuyos centros también imaginarios, parecen ser puntos dobles de una involución que tiene por punto central el centro de simetría de la curva.

69.—En el conjunto de cíclicas focales tenemos dos ó una esféricas y tres planas, de las que dos serán reales cuando todas las esféricas sean imaginarias, lo cual siempre ocurre en las nodales; y cuando una de las esféricas sea real (caso que solo ocurre en el primer género del grupo 20), solo existirá otra plana real.

Si partimos de una cíclica imaginaria sabemos que dos de las superficies cónicas ó cilíndricas doblemente proyectantes de la misma, serán reales y las otras dos, ó una, imaginarias, siendo necesariamente imaginario el cono de segundo orden que la proyecta desde el punto S centro de Σ. Uno de los cilindros tendrá que ser elíptico y otro hiperbólico, lo cual se vé si se tiene en cuenta que sus ejes han de pasar por S siendo perpendiculares entre sí; luego no podrán ser ambos elípticos ni tampoco hiperbólicos, pues con aquellas condiciones producirán una curva real. De esto deducimos que cuando dos cíclicas sean reales, tendrán por deferentes cada una de ellas una elipse y una hipérbola, concéntricas y coaxiales con la curva; habiéndose reducido las otras dos cónicas deferentes de cada una, á los dos ejes de la misma.

Si una sola de las planas es real tiene por cónicas deferentes además de los ejes de simetría, dos elipses ó dos hipérbolas; en el primer caso el eje menor de las elipses sustituye á la hipérbola homofocal y el eje mayor á otra elipse, y cuando las dos cónicas son hipérbolas, el eje transverso sustituye á una elipse y el no transverso á una hipérbola.

Una cíclica plana imaginaria tendrá para deferentes dos cónicas imaginarias, cuando las otras dos focales planas sean reales, y una real (lo que solo podrá ocurrir en el primer género del grupo 20), cuando una de las esféricas sea real.

70.—Los círculos directores están reducidos á los ejes; los correspondientes á las cónicas deferentes son, en el primer género del grupo 20, dos concéntricos cuyos radios tienen el mismo módulo.

En las nodales el círculo director es de radio nulo, dando acnodales cuando la deferente es elipse y crunodales (*lemniscatas*) cuando son hipérbolas.

71.—A las cíclicas planas con dos ejes de simetría, corresponden las secciones obtenidas en el toro por planos que pasen por su centro, ó sean paralelos al eje, puesto que en el primer caso la elipse φ_1, proyección del círculo φ, es concéntrica con el círculo director σ_1, que será real, de radio nulo ó imaginario, según que $R \gtreqless r$. Cuando σ_1 sea imaginario, consideraremos en su lugar como círculo director otro círculo concéntrico con él y de radio real é igual al módulo del radio de aquél, tomando para cada par de puntos de la cíclica asociados á una tangente de φ_1, uno de los dos hallados y el simétrico del otro, respecto del centro.

Se vé que cuando $R = r$ las cíclicas planas obtenidas son acnodales y que en los otros casos son bicursales.

A las secciones producidas por planos paralelos al eje del toro no podremos aplicar para su construcción el procedimiento que hemos empleado hasta ahora, pues en este caso, el círculo φ se proyecta según uno de los ejes de simetría, por lo cual prescindimos en esta parte de su consideración.

72.—*Cartesianas focales.*—Las focales de una cartesiana, correspondiente al primer género del grupo 20, al segundo género del mismo, al grupo de las nodales ó al de las cuspidales y contenida en 3, 1, 2 ó 1 conos, son 3, 1, 2 ó 1 esféricas y una plana. Esta, correspondiente al cilindro parabólico, es una *cúbica circular* plana, real y bicursal, unicursal, nodal ó cuspidal, según los casos, cuyas deferentes son parábolas homofocales, secciones de los 4, 2, 3 o 2 cilindros parabólicos doblemente proyectantes de las cartesianas esféricas del sistema; una de las parábolas deferentes es de distinto sistema que las otras.

Los círculos directores son las secciones de las esferas ortogonales, siendo uno de ellos imaginario con centro real en el primer género del grupo 20, y existiendo en las nodales y cuspidales un círculo director de radio nulo, cuyo centro será interior á su parábola deferente en las cúbicas acnodales, exterior en las crunodales, entre las que figuran las *estrofoides*, y perteneciente á la parábola deferente en las cuspidales, conocidas en general con el nombre de *cisoides*.

73.—Que dicha focal plana es una cúbica, parece desprenderse de que toda recta del plano que pase por uno de los 4, 2, 3 ó 2 centros de los citados círculos directores, contiene solo tres puntos de la línea. Para ver esto, fijémonos en que no existe más que una sola tangente de la parábola deferente perpendicular á dicha recta; luego, sobre la misma, no podrán existir más que dos puntos de la focal. Pero si se tiene en cuenta que á la recta del infinito, considerada como tangente, corresponde dicho centro y la dirección de la tangente á la parábola en su vértice, hallamos que sobre toda recta de las condiciones citadas, solo existen tres puntos, que son; el centro del círculo y otros dos.

La cúbica considerada no tiene más que un solo punto real en el infinito, por ser todas las parábolas deferentes homofocales, y estar representado aquel punto por la dirección de las perpendiculares, al eje común.

Como el cilindro parabólico tiene una sola recta focal, la cúbica circular considerada, solo tendrá dos puntos cíclicos, correspondientes uno á cada una de las rectas isótropas perpendiculares á los planos isótropos tangentes al expresado cilindro, siendo el foco de la parábola el único foco singular de la cúbica; además, como esta pasa por los centros de las esferas, se deduce de aquí que estos centros son focos de las cartesianas del sistema.

74.—Cuando uno de los conos se transforme en cilindro de revolución, aparecerán otro plano y un eje de simetría del sistema, que también lo será de la cúbica circular y de la nueva cíclica plana. Las deferentes de esta última, serán, además del eje de simetría, 3, 1, 2 ó 1 círculos concéntricos, cuyo centro estará en aquel eje y aparecerá como un foco singular doble de la cartesiana.

75.—En las nodales y las cuspidales puede elegirse como círculo director para la construcción de la curva, el de radio nulo que, cuando tenga su centro interior á su círculo deferente respectivo, engendrarán un *caracol de Pascal* con punto aislado; si es exterior, el *caracol* tendrá un punto doble en el centro del círculo, y si el expresado centro es punto del círculo deferente, darán origen á una *cardiode*.

Las cíclicas bicursales de estas especies se conocen con el nombre de *Ovalos de Descartes*.

Por último, las cartesianas que tienen más de un eje de simetría, tienen infinitos; pues se componen de un par de círculos concéntricos que, cuando el interior es de radio nulo, sustituyen á una acnodal.

III

76.—Las relaciones métricas focales fundamentales de las cíclicas se deducen del siguiente lema. Dadas dos esferas Σ y Σ' y el plano radical P de las mismas, el cuadrado de la longitud de la tangente á la Σ' desde un punto cualquiera M de la Σ, es proporcional á la distancia de M á P, es decir, que

$$t^2 = 2\,ap$$

siendo t aquel segmento de tangente, p la distancia de M á P y a la distancia de los centros S y S' de Σ y Σ'. Para verlo, tracemos el plano diametral común que pasa por M y designemos por N y Q los dos puntos comunes á Σ, Σ' y este plano diametral; sea M_1 el pie de la perpendicular á NQ desde M y N' el segundo punto en que MN corta á Σ'. Tracemos por S una perpendicular á MN' y por S' una paralela á esta misma recta.

De los triángulos MNM_1 y $SS'S_1$ sacamos

$$\frac{p}{\text{sen}\,\alpha} = MN \quad \text{y} \quad 2a\,\text{sen}\,\alpha = MN'$$

de donde multiplicando sale

$$2pa = MN \,.\, MN' = t^2.$$

Como caso particular, puede la esfera Σ quedar reducida á su centro S', transformándose el citado plano radical en el tangente á Σ en el punto S' de la misma, cuando $SS' = a = R$. En estos casos, el cuadrado de la distancia de un punto M de la esfera Σ á un punto cualquiera S', contenido, ó no, en ella, es proporcional á la distancia MM_1 del punto M al plano tangente en S', ó al plano radical correspondiente, según el caso de que se trate.

77.—La ecuación de un cono de segundo orden referido á tres de sus planos tangentes que tengan por ecuaciones

$$P = 0 \qquad P' = 0 \qquad P'' = 0$$

es

$$\lambda\sqrt{P} + \mu\sqrt{P'} + \nu\sqrt{P''} = 0$$

en la que, para todo punto de la superficie cónica, se verificará

$$P = pk^2, \qquad P' = p'k'^2, \qquad P'' = p''k''^2$$

siendo p, p' y p'', las distancias del punto considerado á los tres planos; sustituyendo, tendremos

$$\lambda k\sqrt{p} + \mu k'\sqrt{p'} + \nu k''\sqrt{p''} = 0.$$

Por otra parte, los planos P, P' y P'' determinan respectivamente en tres esferas Σ, Σ' y Σ'' tres círculos σ, σ' y σ'' bases cada uno de ellos de un haz de esferas; pero como por todo punto del espacio pasa una esfera de cada haz, se tendrá, cualquiera que sea el punto

$$t^2 = 2ap, \qquad t'^2 = 2a'p', \qquad t''^2 = 2a''p''$$

en que p, p' y p'' son distancias á P, P' y P'' y a, a' y a'' distancias de los centros de las nuevas esferas á las antiguas.

Para todo punto del cono se tendrá, pues,

$$\frac{\lambda k t}{\sqrt{2a}} + \frac{\mu k' t'}{\sqrt{2a'}} + \frac{\nu k'' t''}{\sqrt{2a''}} = 0$$

en cuya ecuación no solo son variables las t sino también las a.

Ahora bien, si existe una esfera perteneciente á los tres haces, se verificará la relación anterior para todos los puntos de su intersección con el cono; pero, en este caso, a, a', a'', serán constantes; luego para todos los puntos de la cíclica, intersección del cono y la esfera Σ se tendrá

$$\alpha t + \alpha' t' + \alpha'' t'' = 0$$

en la que t, t' y t'' son tangentes de un punto cualquiera de la curva á tres esferas bitangentes á la misma.

78.—Si en lugar de las esferas Σ, Σ' y Σ'' bitangentes tomamos tres focos F, F' y F'', á los que como ya digimos (25) suele considerarse como esferas de radio nulo, observaremos que, las anteriores tangentes, se convertirán en las distancias r, r' y r'' á estos puntos.

Sean $A(r_A, r_A', r_A'')$, $B(r_B, r_B', r_B'')$ y $C(r_C, r_C', r_C'')$ tres puntos de la cíclica propuesta; con relación á los tres focos F, F' y F'' se verificará:

$$\alpha r_A + \alpha' r'_A + \alpha'' r''_A = 0$$

$$\alpha r_B + \alpha' r'_B + \alpha'' r''_B = 0$$

$$\alpha r_C + \alpha' r'_C + \alpha'' r''_C = 0$$

de cuyo sistema deducimos

$$\begin{vmatrix} r_A & r'_A & r''_A \\ r_B & r'_B & r''_B \\ r_C & r'_C & r''_C \end{vmatrix} = 0$$

y sustituyendo filas por columnas

$$\begin{vmatrix} r_A & r_B & r_C \\ r'_A & r'_B & r'_C \\ r''_A & r''_B & r''_C \end{vmatrix} = 0$$

que nos dice que F, F' y F'' son puntos de otra cíclica de focos A, B y C, siendo las coordenadas de aquellos

$$F(r_A, r_B, r_C), \quad F'(r'_A, r'_B, r'_C), \quad F''(r''_A, r''_B, r''_C).$$

Si designamos por D el cuarto punto de intersección del plano ABC con la cíclica, se verificará

$$\begin{vmatrix} r_D & r'_D & r''_D \\ r_A & r'_A & r''_A \\ r_B & r'_B & r''_B \end{vmatrix} = 0$$

y cambiando filas por columnas se ve que D también es foco de la que pasa por F, F' y F''.

Análogamente, la cíclica que pasa por estos contiene otro cuarto punto F''' en el plano de aquellos tres; luego

$$\begin{vmatrix} r'''_A & r'''_B & r'''_C \\ r_A & r_B & r_C \\ r'_A & r'_B & r'_C \end{vmatrix} = 0$$

y cambiando filas por columnas queda demostrado que F''' es foco de la que pasa por ABC; pero, por ser D, foco de la que pasa por F, F' y F'', podíamos haber tomado para esta ecuación anterior los focos A, B y D en lugar de A, B y C y se hubiera visto que F''' es foco de la que pasa por A, B, C y D, de modo que se deduce como consecuencia lo siguiente: Dados sobre un mismo círculo cuatro puntos A, B, C y D de una cíclica cualquiera de focos F, F', F'' y F''' situados sobre un segundo círculo, existirá una segunda cíclica que pasa por F, F', F'' y F''' y que admite como focos los cuatro puntos A, B, C y D.

79.—Una cíclica tendrá por ecuación

$$\alpha r + \alpha' r' + \alpha'' r'' = 0$$

cuando con esta ecuación se dan simultáneamente los tres focos de referencia y la esfera que contiene la curva.

Si en lugar de los focos F, F' y F'' que pueden ser cualesquiera, con la única condición de ser todos ellos de una de las focales, tomamos los de intersección con la esfera Σ, podremos decir que la ecuación anterior lo es de una cíclica situada sobre la esfera.

Recíprocamente, dados tres puntos F, F' y F'' sobre Σ, el lugar de los puntos de esta superficie, tales que, la suma de los productos de las distancias r, r' y r'' á F, F' y F por las constantes α, α' y α'' sea constante, es una cíclica.

En este caso como a, a' y a'' son constantes é iguales al radio R de Σ, se tiene, cualquiera que sea R, que la ecuación

$$\alpha r + \alpha' r' + \alpha'' r'' = 0$$

en cuyos coeficientes ya no figura R (puesto que podemos hacerlo desaparecer), nos representa una cíclica que podrá ser esférica ó plana, según que consideremos una esfera ó plano.

80.—Parece que, si se trata de un plano, quedará duda acerca de este extremo, pero vamos á ver que sigue representando una cíclica; para ello seguiremos á Gómes Texeira en su *Memoria sobre curvas especiales notables.*

La ecuación anterior la pone bajo la siguiente forma

$$r \pm h r' \pm k r'' = 0$$

á la que llegaremos haciendo

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \pm h \quad \text{y} \quad \frac{\alpha''}{\alpha} = \pm k.$$

Eligiendo para eje de las x la recta FF' y F para origen de coordenadas, se halla para ecuación cartesiana de las curvas representadas por la ecuación anterior

$$[(1+h^2-k^2)(x^2+y^2-2(ah^2-\alpha k^2)x+2\beta k^2 y+h^2a^2-(\alpha^2+\beta^2)h^2]^2$$
$$= 4h^2(x^2+y^2)(x^2+y^2-2ax+a^2)$$

en que (a, o) son coordenadas de F' y (α, β) las de F''.

Para investigar los puntos en el infinito de esta línea hagamos la ecuación anterior homogénea é igualemos después z á o. Se tendrá con esto

$$[(1+h^2-k^2)(x^2+y^2)]^2 = 4h^2(x^2+y^2)^2$$

y dividiendo por x^4

$$(1+h^2-k^2)^2\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^2 = 4h^2\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^2.$$

Si en esta hacemos crecer á x indefinidamente y llamamos l el límite de $\frac{y}{x}$, se tendrá

$$[(1+h^2-k^2)(1+l^2)]^2 = 4h^2(1+l^2)(1+l^2)$$

y para que esto sea posible es necesario que $(1+l^2)^2 = 0$ ó sea que $l = \pm i$; luego los cuatro puntos en el infinito son los cíclicos y la curva es, por tanto, una cíclica.

81.—Las cartesianas sabemos que poseen una cúbica circular focal y que el centro de la esfera Σ es un foco; pues bien, si elegimos como focos de referencia este y otros dos, se verificará

$$\alpha r + \alpha' r' + \alpha'' R = 0$$

luego la ecuación focal de las cartesianas puede obtenerse refiriéndolas á dos focos distintos del centro de la misma, y su ecuación podremos escribirla en la siguiente forma,

$$\frac{\alpha}{\alpha'' R} r + \frac{\alpha'}{\alpha'' R} r' + 1 = 0$$

ó sea

$$ar + a'r' = 1.$$

Esta ecuación cuando se trata de curvas planas, puede representar según los casos, los *óvalos de Descartes*, el *caracol de Pascal*, la *cardiode* y otras unicursales sin punto doble aislado ni de retroceso.

82.—La ecuación de un cono referida á dos planos tangentes y al plano de las generatrices de contacto es de la forma

$$PP' = \lambda Q^2$$

en que $P = 0$, $P' = 0$ y $Q = 0$ son ecuaciones de los dos planos tangentes y del secante. Estos tres planos cortarán á la esfera Σ según tres círculos bases de tres haces de esferas, tales que, las de los dos primeros son doblemente tangentes á la cíclica y las del tercer haz pasan por los cuatro puntos de contacto de aquellos dos primeros haces con la cuártica.

Si t, t' y T son las longitudes de las tangentes trazadas desde un punto cualquiera de la cíclica á cada una de tres esferas, previamente elegidas una de cada haz, tendremos

$$tt' = aT^2.$$

En lugar de esferas podremos elegir vértices de conos isótropos pertenecientes á los expresados haces, en cuyo caso se ve que el producto de las distancias de un punto de la cíclica á dos focos, es igual al cuadrado de la distancia del mismo punto al vértice de un cono isótropo que pase por los cuatro puntos de contacto de los otros dos conos isótropos, con la cíclica.

La ecuación anterior es aplicable tanto á los conos doblemente proyectantes como á los cilindros. Cuando estos existan y uno de ellos sea hiperbólico, podrán elegirse como focos los asociados á los planos asintóticos; el tercer plano es el del infinito el cual contiene los cuatro puntos del infinito de la cíclica. Como han de ser conjugados, respecto de todas las esferas del haz, los puntos dobles de la involución definida por el expresado plano del infinito, y uno de ellos está en el infinito, coincidirá el otro con el centro de Σ; luego la T será constante é igual al radio de esta esfera, de modo que, las ecuaciones de las cíclicas referidas al centro de Σ y á dos focos asociados á los planos asintóticos, cuando la cíclica es esfero-cilíndrica, se reducen á

$$tt' = K$$

teniendo t y t' significados ya conocidos.

Si el cilindro fuese parabólico, podríamos elegir para plano tangente el del infinito y para el $Q = 0$ el principal del mismo cilindro; entonces el foco relativo al plano del infinito es el centro de la esfera Σ, de modo que t = *const.* é igual al radio de Σ, quedando reducida la ecuación á

$$t' = kT^2$$

83.—Consideremos la ecuación de la cíclica referida á tres esferas bitangentes, cuando estas sean ortogonales á la esfera Σ que contenga la curva; designemos estas esferas por Σ_1, Σ'_1 y Σ''_1 y sean σ, σ' y σ'' los círculos de intersección con Σ y M un punto de la línea.

Los conos circuscritos desde S y M á una cualquiera de ellas, á la Σ_1 por ejemplo, tendrán dos planos tangentes comunes, que tocarán á Σ_1 en dos puntos situados en σ y, por consiguiente, en Σ. Las tangentes á esta esfera en aquellos dos puntos, trazadas desde M, serán las cuerdas de los arcos de círculo máximo que los unen con M y que están determinados por los dos planos tangentes.

Si T, T' y T'' son estos arcos

$$t = 2R \operatorname{sen} \frac{T}{2}$$

$$t' = 2R \operatorname{sen} \frac{T'}{2}$$

$$t'' = 2R \operatorname{sen} \frac{T''}{2}$$

y sustituyendo en la ecuación

$$\alpha t + \alpha' t' + \alpha'' t'' = 0$$

tendremos, después de simplificar

$$\alpha \operatorname{sen} \frac{T}{2} + \alpha' \operatorname{sen} \frac{T'}{2} + \alpha'' \operatorname{sen} \frac{T''}{2} = 0$$

que es la ecuación de una cíclica referida á tres círculos bitangentes á la misma y pertenecientes á una misma familia.

84.—Hagamos uso de la relación para las cónicas esféricas y elijamos para tales círculos, cuatro, simétricos dos á dos con relación al centro, y desde M tracemos los cuatro arcos de círculo máximo tangentes; sean estos T, T', T'' y T''', entre los cuales se verifica $T + T' = \pi$ y $T'' + T''' = \pi$; obtendremos

$$\alpha \operatorname{sen} \frac{T}{2} + \alpha'' \operatorname{sen} \frac{T''}{2} + \alpha''' \operatorname{sen} \frac{T'''}{2} = 0$$

$$\alpha'_1 \operatorname{sen} \frac{T'}{2} + \alpha''_1 \operatorname{sen} \frac{T''}{2} + \alpha'''_1 \operatorname{sen} \frac{T'''}{2} = 0$$

pero, por ser $T' = \pi - T$ y $T''' = \pi - T''$

$$\operatorname{sen} \frac{T'}{2} = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{T}{2}\right) = \cos \frac{T}{2}$$

$$\operatorname{sen} \frac{T'''}{2} = \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ = \cos \frac{T''}{2}$$

y sustituyendo

$$\alpha \operatorname{sen} \frac{T}{2} + \alpha'' \operatorname{sen} \frac{T''}{2} + \alpha''' \cos \frac{T''}{2} = 0$$

$$\alpha_1' \cos \frac{T}{2} + \alpha_1'' \operatorname{sen} \frac{T''}{2} + \alpha_1''' \cos \frac{T''}{2} = 0$$

y multiplicando por las indeterminadas λ y μ respectivamente y sumando

$$\alpha\lambda \operatorname{sen} \frac{T}{2} + \alpha_1'\mu \cos \frac{T}{2} + (\alpha''\lambda + \alpha_1''\mu) \operatorname{sen} \frac{T''}{2} + (\alpha'''\lambda + \alpha'''_1\mu) \cos \frac{T''}{2} = 0.$$

Podrán determinarse λ y μ de tal modo que esta relación se transforme en la

$$\operatorname{sen} \frac{T + \omega}{2} = \operatorname{sen} \frac{T'' + \omega'}{2}$$

puesto que para dicha determinación se dispone de las ecuaciones

$$\alpha\lambda = \cos \frac{\omega}{2}$$

$$\alpha'_1\mu = \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}$$

$$\alpha''\lambda + \alpha''_1\mu = \cos \frac{\omega'}{2}$$

$$\alpha'''\lambda + \alpha'''_1\mu = \operatorname{sen} \frac{\omega'}{2}$$

que se reducen á dos, pues sen $\frac{\omega}{2} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\omega}{2}}$, teniéndose, en resumen, dos ecuaciones con dos incógnitas.

De la relación hallada sale

$$T \pm T'' = \text{const.}$$

deduciéndose que, una cónica esférica puede considerarse como lugar de los puntos tales que, la suma ó diferencia de los arcos de círculo máximo trazados desde sus distintos puntos, tangentes á dos círculos bitangentes á la misma, es constante.

Esta propiedad nos hace ver la íntima relación que hay entre las propiedades focales de las cónicas esféricas, y las cónicas planas, pues en estas, la suma ó diferencia de las tangentes á dos círculos doblemente tangentes es constante.

Cuando los círculos bitangentes se reducen á dos puntos, se llega á la propiedad que se toma como definición, es decir, que las cónicas planas con centro, son tales que la suma ó diferencia de distancias de sus diversos puntos á dos fijos, los focos, es constante.

Por estar contenida la cónica esférica sobre un cilindro hiperbólico, podremos escribir su ecuación en función de las de sus planos asintóticos

$$PQ = \text{const}$$
$$tt' = \text{const}$$

y como $t = 2R \operatorname{sen} \frac{T}{2}$ hallamos $\operatorname{sen} \frac{T}{2} \operatorname{sen} \frac{T'}{2} = \text{const.}$, que nos da otra relación entre los arcos de círculo máximo, trazados perpendicularmente á dos arcos fijos, desde un punto de la cónica esférica.

Sixto Cámara
Primer Teniente de Infantería.

Sobre algunas cuárticas de 2.ª especie

Y APLICACIÓN Á LA CUESTIÓN 10

En esta interesante cuestión propuesta por el Sr. Brocard, se pide hallar el lugar geométrico de las proyecciones de un punto dado sobre las generatrices de un hiperboloide. Como estos puntos pueden obtenerse como intersecciones de los dos sistemas de generatrices de la superficie con los planos perpendiculares trazados por P, que forman un haz de segundo orden proyectivo con aquellos dos haces alabeados, la cuestión es caso particular de esta otra que vamos á resolver: *hallar el lugar de los puntos de intersección de los rayos homólogos de un haz alabeado y uno de planos de segundo orden proyectivos.* El estudio geométrico de éste y su generalización es muy interesante; pues, según luego veremos, es una cuártica de segunda especie, curvas poco estudiadas aún (*), y ésto analíticamente.

1.—Sea $[a]$ el haz alabeado y $[\alpha]$ al haz de planos proyectivo con él; y veamos el número de puntos del lugar situados en un plano cualquiera π, recorriendo todos los casos que puedan presentarse.

Si π no es tangente á la superficie base del haz ni pasa por P, corta á los dos haces en una serie $[A]$ y un haz de rectas $[a']$ de segundo orden proyectivos, y los puntos buscados son los de la serie $[A]$ situados en sus rayos homólogos; para ver cuantos son estos, basta considerar las dos figuras planas correlativas que definen ambas figuras de primera categoría, y puesto que en aquellas todos los puntos de la primera situados en sus rectas homólogas forman una línea de segundo orden, los cuatro de intersección con la base de $[A]$ son los buscados.

Si π contiene un rayo a_1 y no pasa por P, corta al haz $[a]$ en una serie rectilínea $[A]$ cuya base es la generatriz b_1 del otro sistema situada en π; serie proyectiva con el haz $[a']$, y por tanto con

(*) La existencia de estas curvas fué puesta de manifiesto por Salmon y Cayley (Salmon, Geometrie analytique á trois dimensions, trad. par Chemin, II partie, pg. 104), habiendo sido estudiadas por Cremona (Annali di Tortolini IV) Bertini (Instituto Lombardo, 1872) y otros. En el Repertorio di matematiche superiore, de E. Pascal, t. II, hay más noticias bibliográficas acerca de estas curvas.

la sección $[A']$ que en él produce uno de sus rayos a'_1; las dos series $[A]$ y $[A']$ engendran un haz que tiene comunes con el $[a']$ cuatro rayos, uno de los cuales es el a'_1; los otros tres determinan en b_1 los puntos de dicha serie $[A]$ situados en sus rayos homólogos $[a']$, y estos tres juntos con el de intersección de a_1 con su rayo homólogo, son los cuatro del lugar situados en el plano π. Si uno de los tres puntos de b_1 fuese el $a_1 b_1$, éste último sería el mismo $a_1 b_1$ y el plano π, tangente á la curva en este punto. Pudiera suceder también que b_1 perteneciera al haz $[a']$ pero entonces la determinación de los cuatro puntos es inmediata.

Si π no contiene ningún rayo $[a]$ es decir, es secante de la superficie, pero pasa por P, corta al haz $[a]$ en una serie $[A]$ de segundo orden y al haz de planos en uno $[c]$ de rectas, de primer orden, que, si π no pertenece al haz $[\alpha]$, determina una involución formada por los pares de planos que se cortan en cada una de las rectas de dicho haz. Los elementos homólogos de éstos en $[A]$ forman otra involución que será perspectiva de un cierto haz de rectas $[c'] \barwedge [c]$; ambos engendran una línea de segundo orden (compuesta de dos rectas si son perspectivos) que corta á la $[A]$ en cuatro puntos: los de intersección de π con el lugar.

Aún falta por considerar el caso en que π pertenezca al haz de planos, y por último el de ser π tangente á la superficie pasando por P; pero después de lo dicho no hay dificultad en examinarlos siguiendo la marcha indicada, y se tienen así directamente los puntos de la curva situados en un plano cualquiera.

Resulta, pues, que el lugar es de cuarto orden; toda generatriz a lo corta en un punto único siempre real, ó forma parte de ella; y toda directriz b lo corta en tres puntos dos de los cuales pueden ser imaginarios conjugados, ó reales y confundidos; ó también pertenece al lugar.

2.—Conviene distinguir varios casos, pues el lugar varía esencialmente, según el número de rayos a contenidos en sus planos homólogos; rayos que de existir serán algunos de los a_1, a_2, a_3, a_4 situados en los cuatro planos comunes á los dos haces $[Pa]$ y $[\alpha]$.

1.° Si dichos cuatro rayos son homólogos de los planos que los proyectan, evidentemente los dos haces de planos proyectivos tienen todos los rayos dobles y el haz $[\alpha]$ es perspectivo del haz $[a]$.

2.° Si tres de ellos a_1, a_2, a_3, el lugar se compone de esas tres rectas y de la directriz b_4 situada en el plano Pa_4, pues por ser base de dos series secciones de los dos haces $[a]$ y $[\alpha]$ proyectivas y con tres puntos dobles (los $b_4 a_1$, $b_4 a_2$, $b_4 a_3$), tiene dobles todos los demás y forma por tanto parte de la línea.

3.° Si sólo á dos a_1, a_2 corresponden los planos Pa_1, Pa_2 que los proyectan, pertenecen al lugar; y éste no contiene ninguna otra recta; pues de contener alguna a ésta debería ser una de las a_3 ó a_4, y si alguna directriz b, ésta sería base de una serie doble sección del haz alabeado $[a]$ y del $[\alpha]$, proyectiva con ambos, y por tanto situada en uno de los planos del haz $[\alpha]$, que sería precisamente alguno de los Pa_1, Pa_2, Pa_3, Pa_4; mas, de verificarse esto, uno al menos de los rayos a_3, a_4, tendría como homólogo el plano que lo proyecta, y estaríamos en uno de los casos anteriores. Según esto, la línea se compone en este caso de las rectas a_1, a_2 y de una cónica cuya posición no parece fácil determinar *á priori*.

4.° Si sólo el rayo a_1 tiene como homólogo el plano Pa_1 que pasa por él, como el lugar no contiene más rectas de las a, y por razón análoga á las de antes tampoco puede contener ninguna recta b, constará de la a_1 y de una cúbica.

5.° Finalmente, si á ninguna de las rectas a_1, a_2, a_3, a_4 corresponde el plano que la proyecta, el lugar no contiene ninguna generatriz a ni b y por tanto no tiene parte alguna rectilínea; y como tampoco puede constar de dos cónicas pues entonces habría en cada generatriz a dos puntos del mismo, es una cuártica propiamente dicha.

Ahora bien: según hemos visto, las directrices b del haz $[a]$ la cortan en tres puntos (1), luego no puede estar contenida en ninguna otra cuádrica, y es por consiguiente de *segunda especie*.

3.—También pueden demostrarse las propiedades anteriores por medio de otras consideraciones, que demuestran además otras nuevas.

El haz de planos de primer orden que proyecta el haz alabeado $[a]$ desde una directriz cualquiera b_1, con el haz de segundo orden $[\alpha]$ que es proyectivo con él, engendra una superficie reglada de tercer orden que tiene la recta b_1 doble, y que contiene á la curva considerada. Esta, es por tanto base de un haz de superficies cúbicas cuyas rectas dobles son las directrices del haz alabeado. Veamos las condiciones para que entre éstas haya alguna de segundo orden. Para que esto suceda, es preciso que al plano $b_1 P$ del haz b_1 corresponda él mismo en el $[\alpha]$ y para esto tendrá que ser uno de los cuatro comunes á los haces $[Pa]$ y $[\alpha]$ y además tener como homólogo el rayo a_1 situado en él. En general, no habrá por consiguiente, ninguna otra cuádrica que contenga á la línea, conforme con lo dicho antes; y de presentarse este caso excepcional, la línea se compondrá de esa recta a_1 y de una línea de tercer orden (que puede descomponerse también en rectas), intersección parcial de la cuádrica base de $[a]$ y de otra que contiene a_1.

4.—Análogamente, el lugar de los puntos de intersección de dos rayos del haz director $[b]$ con un haz de planos de segundo orden proyectivo con él, de vértice P, es otra cuártica con las mismas propiedades que la primera, y que puede presentar una cualquiera de las formas citadas en (2). Vamos á estudiar las propiedades relativas de ambas, sólo en el caso de ser estos dos haces de planos uno mismo.

En este supuesto, considerando como homólogos en los dos haces alabeados $[a]$ y $[b]$ los rayos correspondientes á un mismo plano del $[\alpha]$, será $[a] \overline{\wedge} [b]$ y por tanto perspectivos de una serie de segundo orden, cuyo plano φ es el central perspectivo de los dos haces; los rayos homólogos determinan planos de un haz de segundo orden cuyo vértice es el polo de φ, proyectivo con $[\alpha]$, y ambos engendran una superficie reglada de cuarto orden que contiene evidentemente las dos cuárticas, constituyendo éstas por tanto la intersección total de dicha superficie con la cuádrica base de $[a]$ y $[b]$.

Ambas superficies son tangentes en los puntos comunes á las dos curvas y éstos pueden obtenerse como intersecciones de una de ellas con cualquiera de las superficies cúbicas que contiene á la otra; resultan, pues, 12 puntos de los cuales, 10 son exteriores á la recta doble de esta superficie y los dos restantes constituyen el punto doble de intersección con esta recta, que es por tanto, extraño.

Cuatro de los puntos de intersección están en la cónica φ pues los puntos de intersección de ella con una de las cuárticas son también de la otra; y estos cuatro puntos comunes son los de intersección de φ con la curva de segundo orden lugar de los puntos situados en sus rectas homólogas, en las dos figuras correlativas citadas en (1), que existen en el plano φ.

5.—Terminaremos este sucinto estudio de las propiedades de estas cuárticas hallando los puntos que Salmón llama *dobles aparentes* (*) ó sea los correspondientes á las generatrices dobles de las superficies cónicas que las proyectan desde P. Sea PL una recta cualquiera que pase por P; a, a' las dos generatrices del sistema $[a]$ que cortan á PL en C y C'; estas tres rectas determinan en el plano φ tres puntos A, A', L; y los dos planos homólogos de a, a' en el haz $[\alpha]$ determinan en el mismo plano dos rectas m, m' que se cortan en un punto L'. Las dos figuras planas $[L]$ y $[L']$ son homográficas. En efecto: además de la correspondencia unívoca que es evidente, á los puntos L de una recta p corresponden pares de rayos a, a' que forman una involución; los pares A, A' correspondientes, forman otra involución y lo mismo los m m' luego los puntos L' de intersección de estos pares de rectas, forman otra recta que es la homóloga de p.

(*) Página 343.

Si $L_1 L_2 L_3$ son los puntos dobles de las dos figuras homográficas, las rectas PL_1, PL_2, PL_3 son las que Salmon llama *rectas por dos puntos* ó sea las generatrices dobles del cono proyectante que cortan en dos puntos distintos á la curva; puesto que los planos Pm_1, Pm'_1 homólogos de los rayos a_1, a'_1, por ejemplo, pasan por PL_1 y por tanto C y C' son puntos de la curva.

Resulta, pues, que dicho cono de cuarto orden tiene tres generatrices dobles, luego aplicando las fórmulas de Plücker se deduce; que es de *sexta* clase, no tiene ninguna generatriz de retroceso, tiene *seis* de inflexión y *cuatro* planos tangentes dobles; de donde resultan propiedades correspondientes de la curva.

Análogamente para obtener las *intersecciones aparentes* de las dos cuárticas, es decir, los pares de puntos uno de cada una, en línea recta con P, consideremos el haz h intersección del haz de planos circunscrito, con el plano φ; á este haz $[h]$ corresponde, considerado de la primera, en las dos formas planas correlativas definidas por la serie $[A]$ y el haz $[a']$, una serie de segundo orden que tiene por consiguiente cuatro puntos Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 situados en sus rayos homólogos y es fácil ver después de lo dicho que las rectas PQ_1, PQ_2, PQ_3, PQ_4 son de las buscadas; pero además, trazando por P los dos planos tangentes á la cónica φ, las dos generatrices situadas en cualquiera de ellos tienen el mismo plano homólogo en el haz $[\alpha]$ y la intersección de éste con aquel es otra recta que cumple las mismas condiciones. Resultan, pues, seis intersecciones aparentes.

Los dos conos que proyectan desde P las dos cuárticas, tienen según lo dicho, tres generatrices dobles cada uno; y de las 16 comunes, 10 proyectan intersecciones efectivas y 6 intersecciones aparentes que son de dos naturalezas distintas.

6.—Resuelto el problema, hagamos aplicación á la cuestión 10.

El plano φ central perspectivo de los dos haces alabeados homólogos del haz $[\alpha]$, considerado antes (4), es ahora el del infinito; y los cuatro puntos comunes á las dos cuárticas situados en dicho plano, por ser dobles en la radiación polar rectangular del infinito, son los cuatro puntos circulares de la superficie. Podemos, pues, enunciar que: el lugar de las proyecciones de un punto P sobre las generatrices de un sistema de un hiperboloide, es en general una cuártica cíclica de segunda especie.

Las dos curvas correspondientes á los dos sistemas de generatrices, tienen además de dichos cuatro puntos imaginarios comunes, otros seis reales ó imaginarios que son los pies de las normales trazadas por P á la superficie.

La superficie reglada de cuarto orden (4) que contiene las dos líneas, está circunscrita al cono asintótico del hiperboloide y al cono Φ envolvente del haz $[\alpha]$; ó sea al cono polar del director del vértice P, en la radiación polar rectangular de vértice P.

De las seis intersecciones aparentes de las dos líneas, las cuatro del primer grupo (5) son las generatrices isótropas del cono Φ; y las dos restantes, las rectas perpendiculares á los dos pares de generatrices paralelas de la superficie contenidas en los dos planos asintóticos que pasan por P. El número máximo de intersecciones aparentes reales, es según esto, dos.

Para que el lugar sea de alguna de las otras formas citadas en (2), será preciso que alguna de las generatrices isótropas tenga como homólogo en $[\alpha]$ el plano que la proyecta. Si hay dos, una de cada sistema, que cumplan estas condiciones, las dos curvas serán cúbicas.

En particular, si esas dos generatrices corresponden á dos puntos circulares conjugados, para que esto suceda, P habrá de ser un punto de la intersección de los dos planos isótropos correspondientes á dichas generatrices, es decir, pertenecer á una de las rectas que tienen la dirección perpendicular á un sistema de planos cíclicos y pasan por uno de los dos puntos umbílicos correspondientes á este sistema. O de otro modo; uno de los rayos dobles de la involución que proyecta desde esa dirección la de puntos conjugados situada en el diámetro conjugado con aquel sistema de planos cíclicos.

7.—Para no hacer más extensa esta nota hemos omitido algunos casos particulares tales como el de ser P el polo del plano φ (que en el caso de la cuestión sería el centro) existiendo entonces un cono proyectante de las dos curvas, de vértice P y presentando algunas otras particularidades notables.

Por la misma razón no estudiamos un problema muy análogo y más sencillo; el caso en que el haz $[\alpha]$ sea de primer orden. El lugar es entonces una cúbica que está contenida en infinitas superficies regladas de segundo orden que tienen común con la superficie base de $[a]$ una generatriz del sistema $[b]$. Pero tanto este caso como su aplicación inmediata á la determinación de las proyecciones de P sobre las generatrices de un paraboloide, no ofrece dificultad y lo dejamos al cuidado de los lectores.

Julio Rey Pastor,
Licenciado en Ciencias exactas.

Madrid 2—2—9.

CONEXIONES ETÉREO-ELÉCTRICAS

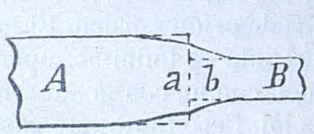
IV

Pilas termo-eléctricas

Dijimos en la nota anterior (*) que los generadores electro químicos á base de zinc, y en general á base de un metal activamente corroido por un líquido, en presencia de un conductor inerte, se podían asimilar á las bombas hidráulicas; el cuerpo corroído debía ser un expulsor de éter, en forma de filamentos de corriente, los cuales, una vez encauzados por el hilo interpolar, forman un sistema cerrado sobre sí mismo. En dichos generadores, la excitación superficial del cuerpo atacado debe ser la causaque elabora la fuerza de propulsión de la pila, ó sea la f. e. m. de la misma. A una excitación superficial hubimos de achacar también la génesis de las cargas electrostáticas.

Examinemos ahora lo que debe ocurrir en los pares termo-eléctricos.

También aquí es esencial que haya de antemano una disimetría física. Para referirnos siempre á los generadores prácticos, haremos notar lo siguiente: en el par termo-eléctrico se han hecho adherir fuertemente dos superficies que tienen igual extensión en el instante de ser soldadas, superficies que, si tuvieran libertad completa para dilatarse y contraerse cada una de por sí, dejarían de ser iguales al evolucionar térmicamente. Se trata, pues, de un sistema violentado, violencia que varía según sean las diferencias de temperatura entre aquella á la que se realizó la soldadura y las que sucesivamente vaya tomando. El esquema adjunto puede darnos idea de esa violencia. Sea A el cuerpo de mayor coeficiente de dilatación. Para una cierta temperatura del sistema, en la región de la soldadura, las dos piezas que ésta reúne tomarían las dimensiones indicadas por las líneas de puntos, si estuvieran completamente libres; ahora bien, los lazos de la soldadura impiden esta disposición natural de las zonas de contacto y obligan á contraerse á la del cuerpo A y á dilatarse á la del cuerpo B. Resulta de aquí



que los intervalos moleculares de $\frac{A}{b}$ son mayores que los de $\frac{A}{b}$.

Admitiendo ahora que al calentar la región de la soldadura y producirse la deformación anterior se ha provocado en la misma una mayor agitación de las moléculas, el éter situado entre ellas debe ser movilizado;

(*) Véanse los números 4, 5 y 7 de los ANALES, páginas 242, 18 y 175. Años 1907 y 1908.

pero los caminos á derecha é izquierda de la soldadura se ofrecen en circunstancias diferentes: á un lado, los conductos intermoleculares se ensanchan, cual ocurre de *a* á *A*, y al lado opuesto se estrechan. Esta circunstancia, por sí sola, tiende á producir la expulsión etérea en el sentido *B A*.

Pero no debemos atender exclusivamente á esa circunstancia, pues, á la par que esto, debe mirarse á cada una de las moléculas de las zonas deformadas como un agitador etéreo, cuyo poder dependerá de su particular constitución y de su grado de agitación calorífica. Resulta de aquí que, cuando se haya establecido un régimen constante, podrá mirarse á cada una de las secciones rectas de ambos costados de la soldadura como membranas temblorosas, cuyo poder de expulsión ó de absorción será distinto en ambos costados; el éter, pues, deberá trasladarse de un costado á otro de la soldadura, en el sentido para el cual la suma de las causas de movimiento sea mayor.

Iniciada la circulación, el hilo interpolar servirá, como en el caso de las pilas químicas, para encauzarla y cerrarla sobre sí misma. En suma, la suma algébrica de acciones expulsivas representará la *f. e. m.* de la pila, y ésta se portará, en definitiva, como una bomba.

Claro es que si la calefacción se convierte en enfriamiento se invertirá la corriente, por haberse invertido la acción de las zonas *a* y *b*.

Respecto de la eficacia de estos generadores á temperaturas sucesivamente crecientes, esto es al desarrollo de la *f. e. m.* de los mismos, se adivina que, en aquellas asociaciones en donde se relajen fácilmente los lazos de la soldadura se debe llegar pronto á un máximo, á partir del cual, la *f. e. m.* elaborada debe disminuir por un proceso sensiblemente simétrico del de crecimiento; mientras que, en aquellos otros en donde el punto de fusión sea muy alto, el sistema marchará con lentitud hacia su máximo, y la gráfica de la *f. e. m.* ofrecerá trayectos sensiblemente rectilíneos.

D. Espurz.

Oviedo, Junio de 1909.

Sobre la determinación del azufre en los combustibles

Entre los diversos medios preconizados para dosificar el azufre en los combustibles, se cita el de quemar la sustancia en corriente de oxígeno Los productos de la combustión se hacen pasar por tubos que contengan disolución clorhídrica de bromo, y se determina después en este líquido el ácido sulfúrico. Por este procedimiento se halla el azufre llamado volátil. En las cenizas que deje ésta combustión pueden determinarse los sulfatos, y tendremos de este modo el azufre total hallado en una sola operación, conociendo al mismo tiempo, qué parte corresponde á los productos volátiles y cuál á los fijos.

Ahora bien, si se practican las operaciones tal y como se describen en los libros, que es como someramente acabamos de apuntar, y si no se toman algunas precauciones, jamás se llega á buen resultado. La razón es muy sencilla. Dispuesto el aparato, y puesta en marcha la corriente de oxígeno; si comenzamos á calentar el tubo de combustión donde se coloca el combustible, no tarda en destilar éste. Si algún punto del tubo ha llegado á alcanzar temperatura suficiente, se queman los gases mezclados al oxígeno, pero los productos de la combustión, que ya no son comburentes, arrastran nuevas sustancias combustibles volátiles, las cuales sin arder se condensan en la parte fría y van á parar á la disolución de bromo. Cuando se llega á renovar la atmósfera gaseosa, y empieza á dominar el oxígeno, se produce otra pequeña explosión, y en aquel momento la combustión es completa, pero á continuación siguen destilando breas y gases que escapan sin arder, y que ensucian los tubos y disoluciones.

Con ocasión del análisis de unos lignitos de Mallorca, los que contenían mucho azufre, principalmente en la parte volátil, apliqué este procedimiento, para lo cual se montó el aparato y se condujo la operación de modo que se obviara ese grave inconveniente.

Un tubo de oxígeno comprimido suministra la corriente de este gas.

Un tubo de combustión cortos de unos 40 centímetros de longitud, contiene, al tercio de su extremo, una navecilla de porcelana, con el combustible pesado. El tubo de combustión lleva un buen tapón de corcho en cada extremo: el de la parte de atrás (el más alejado de los tubos de absorción) con un solo orificio, y el otro con dos. Por uno de estos comunica el tubo con los aparatos absorbentes; tubos con perlas ó sencillamente tubos de bolas con la disolución de bromo en clorhídrico. (La disolución de bromo debe ser ensayada previamene haciendo pasar por ella oxígeno y convencernos que no tiene sulfúrico el bromo, ni el oxígeno productos sulfurados).

El oxígeno se hace llegar al tubo de combustión por los dos extremos, para lo cual, la corriente gaseosa se bifurca por medio de una *T*. Se hace pasar cada una de las dos corrientes por pequeños frascos lavadores con sulfúrico concentrado, colocándose antes de estos frascos tubos con llave ó con pinza de tornillo, si son de caucho, para regularizar convenientemente la marcha del gas.

Una parte del oxígeno entra por el extremo del tubo y la otra por el otro, á través del segundo orificio de corcho que tapa la parte anterior del tubo.

Una vez en marcha la corriente de oxígeno se regulan las llaves, para que pasen próximamente el mismo número de burbujas por ambos frascos lavadores. Cuando el aparato está lleno de oxígeno, se enciende el primer mechero, el más alejado de la navecilla en el sentido de la corriente, después el segundo y así sucesivamente, aproximándonos á la sustancia.

El objeto que se persigue es, que cuando empiece la sustancia á destilar haya llegado el tubo á temperatura conveniente para que se quemen los productos combustibles. Pronto se desprenden estos lo cual se conoce en que se produce en la parte anterior del tubo una ligera explosión. Los nuevos productos volátiles que vienen detrás se encuentran con el oxígeno que entra por la cabeza del tubo, y empujados por el que viene de la cola, se mezclan con él y se queman con otra pequeña explosión, así poco á poco arden los productos volátiles y los fijos de la navecilla, totalmente. El tubo de combustión y los de absorción permanecen completamente limpios, y la operación marcha sin contratiempo.

Durante la operación se regulan las llaves de entrada del oxígeno para que, tanto la combustión del carbón fijo como la de los productos volátiles, se haga tranquilamente.

Después de terminada la combustión se precipita el sulfúrico del líquido recogido de los tubos, después de lanzar el exceso de bromo, y con las precauciones conocidas.

Si la combustión va bien conducida, todas las cenizas están en la navecilla. De estas se determina el sulfúrico, también por los medios conocidos.

Este pocedimiento lo he comparado con el de Eska y he obtenido siempre valores un poco mayores con aquel que con este.

Paulino Saviron.

Zaragoza 22 de Junio de 1909.

Memoria descriptiva del análisis químico de las Aguas de La Pazana (Logroño)

Las aguas conocidas de antiguo con el nombre de aguas de La Pazana, brotan de tres fuentes enclavadas en la Colonia Agrícola de ese mismo nombre, propiedad de D. Braulio Baroja, en los elevados y agrestes terrenos que en la provincia de Logroño suben rápidos hacia la de Soria. La Pazana se encuentra en el término municipal de Cornago, en una cañada esmeradamente cultivada, rodeada de altos picachos y profundos barrancos: su altura sobre el nivel del mar es de unos 860 metros. Por la gran elevación del terreno su horizonte es amplio y despejado, y solo se rompe su línea suave y ondulante, al Sur por la próxima y magestuosa masa del Moncayo y al Norte por la Peña de Isasa.

En todo el terreno se aprecia la variedad grande de minerales de toda especie, abundando los sulfurados, y los óxidos de hierro. No lejos se encuentran abundantes yacimientos de lignito. Fuentecillas de diversas aguas, todas ellas mineralizadas, no faltando una de agua ferruginosa, se hallan por todas partes. Existe á poca distancia de las fuentes sulfhídricas que son objeto de este trabajo, un manantial curiosísimo por llevar sus aguas una proporción bastante notable de sulfato alumínico (en el país la llaman agua de limón por su sabor ácido y astringente).

Dos abundantísimas fuentes de agua potable suministran toda la necesaria para los usos ordinarios de la vida y convierten en regadío una gran extensión de monte, lo que permite el cultivo de hortalizas á los propietarios de la Colonia.

Dos de las fuentes sulfhídricas brotan muy próximas, casi juntas, y las dos están protejidas por una pequeña y sólida edificación. El agua sube verticalmente. Un recipiente de mampostería cubierto retiene el agua mineral, la cual fluye por un tubo ó caño. Los caños de las dos fuentes son independientes.

Un fuerte olor á hidrógeno sulfurado, y el ennegrecimiento de monedas y objetos de plata denota inmediatamente uno de los componentes del agua.

La tercera fuente, también de agua sulfhídrica, se halla á unos 60 pasos de estas dos, y al aire libre. Se halla también protejida por pequeña obra pero no cubierta.

Propiedades físicas del agua.

Al salir del manantial el agua es limpia, transparente, de fuerte olor á sulfhídrico. Expuesta al aire pierde su olor paulatinamente, se vuelve opalina y por último se aclara de nuevo. Su sabor, recien recogida, es el propio de las disoluciones de sulfhídrico. Cuando ha perdido éste, apenas se nota un ligero sabor fresco salino.

A través del agua que llena el depósito que forma el manantial, se desprenden de tiempo en tiempo gruesas y abundantes burbujas gaseosas; agitando el agua, y mejor, golpeando fuertemente el suelo en las proximidades de la fuente, el desprendimiento de gases es abundantísimo.

La agitación en un frasco de agua recogida de la fuente produce también desprendimiento de gran número de pequeñísimas burbujas gaseosas.

Cuando se llena completamente una botella ó bombona de agua mineral y se encorcha fuertemente sin dejar un espacio con aire, la vasija se rompe merced á una gran presión interior.

Temperatura del agua en el manantial.—Tomada la temperatura del agua corriente á diversas horas del día, dió siempre el mismo valor de 14°, 2 C.°.

Según los informes adquiridos, la temperatura del agua varía poco en las diversas estaciones del año ó es constante. (El trabajo en el manantial se hizo á fin de Marzo).

Aforo.—La media de las medidas que se verificaron con este objeto en la fuente principal da un caudal de 360 litros por hora. La fuente pequeña y próxima á la anterior da la mitad que ella; de modo que entre las dos fuentes suministran al día unos 12.000 litros de agua mineral, que podría captarse y utilizarse en caso de necesidad.

Densidad.—La densidad del agua corregida á 15° C.° es de 1,0018.

En la pequeña acequia de desagüe de las fuentes sulfhídricas, y á unos 3 metros del punto de emergencia, se cubre el agua de una capa blanca, nacarada, suave y filamentosa, en una extensión de un par de metros. De aquí en adelante el agua sigue corriendo clara é inodora.

Análisis cualitativo.

Reacción.—El agua recien cogida en la fuente tiene reacción ácida muy débil. Después de hervida tiene reacción alcalina también débil.

El olor fuerte del agua acusa la existencia de *hidrógeno sulfurado.* Dió además con toda claridad las reacciones del sulfhídrico con el acetato de plomo, con la disolución ácida del ácido arsenioso, y con el cloruro cádmico amoniacal, etc. Se procedió á investigar si contenía sulfuros.

Tratada el agua con disolución de nitro-prusiato sódico, no produjo coloración alguna. A la larga precipitó azufre la mezcla. Hervida una porción de agua hasta que se dejó de percibir el olor del sulfhídrico se sometió á la acción de varios reactivos de los sulfuros incluso nuevamente á la del nitro-prusiato sódico. Ninguno de ellos acusó la existencia en el agua de sulfuros.

Por consiguiente el agua no contiene sulfuros, y lleva en disolución *hidrógeno sulfurado.*

Se hirvió cosa de un litro de agua mineral por bastante tiempo, añadiendo de cuando en cuando agua destilada para evitar la concentración. Por el enfriamiento y el reposo se produjo un precipitado blanco no muy abundante, el cual se separó por filtración y se lavó con agua destilada. Se ensayaron separadamente este *precipitado* y el *líquido filtrado.*

Ensayo del precipitado.—Se trató por ácido clorhídrico en el que se disolvió con efervescencia.

Una parte de la disolución se coloreó de rojo muy débil con el sulfocianuro potásico y otra de azul con el ferrocianuro potásico. Existe pues aunque en muy pequeña cantidad el *Hierro.*

Otra parte se sobresaturó de amoniaco, y con el oxalato amónico dió precipitado blanco de la *Cal.*

Filtrado el líquido para separarle del precipitado de oxalato cálcico, se le añadió fosfato sódico. Al cabo de poco tiempo se produjo precipitado cristalino que revela la existencia de *Magnesia.*

La última parte del líquido ácido clorhídrico, se evapora hasta sequedad dos veces en presencia de nítrico. Tratado por poca agua ácida con nítrico el último resíduo, y filtrada la disolución resultante se mezcló ésta con exceso de reactivo nitromolíbdico. Al cabo de 24 horas no se apreció precipitado ni coloración, por consiguiente no hay fosfórico.

Ensayo del líquido filtrado.—En una parte previamente acidulada con clorhídrico, se formó al tratarle por cloruro bárico un precipitado *abundante*, debido al *Acido sulfúrico.*

En otra, acidulada con ácido nítrico y tratada con nitrato argéntico apareció *poco* precipitado debido al *Cloro.*

A otra parte del líquido se añadió cloruro amónico, amoniaco y oxalato amónico. Se formó *abundante* precipitado debido á la *Cal.*

A una parte del líquido de separar la cal se adicionó fosfato sódico y nueva cantidad de amoniaco. Inmediatamente se formó el precipitado cristalino que acusa proporción algo notable de *Magnesia.*

La otra parte del líquido de separar la cal se evaporó hasta sequedad y se calentó el resíduo hasta eliminar totalmente las sales amónicas. El resíduo se hirvió con agua de cal y se filtró. Se precipitó de este líquido la cal por el carbonato amónico, operando en caliente. El líquido filtrado se evaporó hasta sequedad, y se calentó el resíduo hasta lanzar nuevamente las sales amónicas. Tratado con agua el resíduo se disolvió todo.

Se hirvió esta disolución y se precipitó en caliente con cloruro bárico para transformar en cloruros los sulfatos alcalinos, Precipitado el bario en exceso, con el carbonato amónico, después de haber separado el precipitado de sulfato obtenido anteriormente, se repitió todo el tratamiento para separar las trazas de magnesia, obteniéndose por último un resíduo salino.

Examinado en el espectroscropio se vió muy intensa la raya de la *sosa.* muy *débil* la de la *potasa* y muy *brillante* la de la *litina.*

El resíduo salino se trató por agua, y exceso de cloruro platínico. Se evaporó al baño de vapor casi hasta sequedad y se trató con alcohol de

80º centesimales; se formó un ligerísimo precipitado de *cloroplatinato potásico*.

Esto confirma que el *potasio* se halla en muy pequeña cantidad. Domina pues el *sodio*, y de la observación espectroscópica se deduce que el *litio* está en proporción relativamente grande.

En una parte del agua se buscó el amoniaco con resultado negativo.

Otra parte se evaporó hasta sequedad con clorhídrico. El resíduo se calentó fuertemente modificándose algo el color, que pasó á gris, volviendo nuevamente á blanquear calentándolo al rojo. Indica esto *la existencia de poca cantidad de materia orgánica*.

Este resíduo se humedeció con ácido clorhídrico concentrado, añadiendo después agua, y se calentó. Quedó un resíduo blanco y duro con los demás caracteres de la *Sílice*.

Evaporados hasta sequedad 500 centímetros cúbicos del agua, se trató el resíduo por alcohol caliente. Se filtró y evaporó el alcohol. Disuelto el resíduo en poca agua se investigó el *ácido nítrico* del cual solo se acusaron *indicios*.

***

Del resíduo de la evaporación de cinco litros de agua mineral separóse la sílice con ácido clorhídrico, evaporando en presencia de este ácido, y tratando luego el resíduo con clorhídrico y agua caliente. La sílice bien lavada se sometió al tratamiento para la investigación del *ácido titánico*, y del *bario* y *estroncio* que en forma de sulfatos pudiera contener. No se hallaron cantidades apreciables de estos cuerpos.

La disolución clorhídrica se trató por cloruro amónico, amoniaco y sulfuro amónico: transcurridas 24 horas se recogió y lavó el precipitado que se había formado. Redisuelto en clorhídrico, se precipitó el hierro al estado de sal básica acompañado de la alúmina (*A*). En el líquido quedó el manganeso, el cual se precipitó al estado de sulfuro, otra vez, con el sulfuro amónico. Sólo dió un ligerísimo precipitado al cabo de 24 horas pudiendo por consiguiente afirmarse la existencia de indicios de *manganeso*.

El hierro y la alúmina se separaron muy bien disolviendo el precipitado (*A*) en clorhídrico, tratando la disolución por tartrato sódico puro, amoniaco en exceso y sulfuro amónico. Recogido el precipitado de sulfuro de hierro, del líquido se precipitó la alúmina, evaporándolo á sequedad, quemando la materia orgánica, redisolviendo el resíduo en clorhídrico, filtrando la disolución y tratándola con amoniaco. Viéronse muy claros los copos de hidrato alumínico. Hay pues en el agua además del *hierro*, encontrado también anteriormente, *Aluminio* é indicios de *Manganeso*.

***

Hirviendo con alcohol de 90° c. y alcalinizado el resíduo de evaporar á sequedad otros cinco litros de agua, filtrando los líquidos alcohólicos, y evaporados, dejaron un resíduo en el que se investigaron el *bromo* y el *yodo*. El resultado fué negativo.

ANALISIS CUANTITATIVO

I

Determinación de la totalidad de elementos fijos.

Se evaporaron 100 c. c. de agua y se desecó el resíduo en estufa de aire á 120° C. La media de dos determinaciones ha dado el resultado siguiente:

ELEMENTOS FIJOS EN UN LITRO DE AGUA 2,1243

Calentado este resíduo salino al rojo hasta desaparición del ligero tinte gris que toma al empezar el caldeo, ha tenido una pérdida de peso de 0,3040.

Trabajos en el manantial.

Determinación de los gases.—Se ha dispuesto un matraz de unos 500 c. c. de capacidad, provisto de un buen tapón con dos orificios. Por uno de estos pasaba un tubo de vidrio dos veces acodado en ángulo recto. En la parte media vertical llevaba una goma con pinza de tornillo, por el otro orificio del tapón pasa el tubo abductor de los gases; á este se le ha dado una altura de 80 centímetros y su extremo entra en la cuba de mercurio.

Se introdujeron en el matraz unos 50 centímetros cúbicos de agua, y se hirvió dejando salir el aire y los gases, primero por el tubo de aspiración y después por el de abducción, hasta tener la seguridad completa de haber sido desalojados todos los gases. Colocada, ahora, la campana graduada sobre el tubo de abducción, se dejó entrar en el matraz, por el tubo de absorción, retirando la lámpara convenientemente, una cantidad de agua que se apreció por la diferencia de dos pesadas consecutivas, antes y después de la absorción. Se volvió á calentar nuevamente hasta que el agua entró en ebullición y se mantuvo ésta hasta que cesó el desprendimiento gaseoso.

La determinación de los gases se hizo en la forma descrita, dos veces, en días consecutivos. Las lecturas se hicieron en la cuba de agua y se corrigieron de presión, temperatura y tensión de vapor de agua.

Los reactivos absorventes empleados fueron: Acetato de plomo, ácido, con acético, potasa y ácido piroagállico.

Los dos ensayos furon muy concordantes y de ellos se han calculado los valores del cuadro siguiente:

Gases desprendidos por la ebullición de un litro de agua:

	Gramos	Centímetros cúbicos
Hidrógeno sulfurado	0,0205	13,46
Anhídrico carbónico	0,0627	31,72
Oxígeno	0,0000	«
Nitrógeno ó Azoe	0,0293	23,33
TOTALES	0,1125	68,51

Análisis de los gases que se desprenden espontáneamente del agua.

Se introdujo en el agua un frasco que se invirtió después de lleno. Se introdujo por la boca del frasco el pico de un embudo muy grande, para poder recoger con esta disposición y en poco tiempo, gases suficientes para el ensayo.

Pronto se reunieron en el frasco 180 centímetros cúbicos que se pasaron á una campana graduada, donde se midieron y aplicaron los reactivos absorbentes.

En estos gases no hay sulfhídrico ni oxígeno, sólo pequeñísima cantidad de carbónico acompaña al *nitrógeno ó azoe* de que está constituída la masa gaseosa.

Por cada *litro de Nitrógeno* se han encontrado 5 centímetros cúbicos de gas *carbónico.*

Poder reductor del agua sobre el permanganato potásico (materia orgánica en ácido oxálico).

Se trabajó con 200 c. c. de agua hervida acidulada con ácido sulfúrico. En estas condiciones el agua no contiene trazas de sulfhídrico.

Dos ensayos dieron el mismo valor que fué de 0,02118 en *ácido oxálico.*

Determinación de la cantidad de hidrógeno sulfurado

Este ensayo, así como el de los gases, se practicó en el manantial.

Se hicieron 5 determinaciones, con disolución valorada de yodo en yoduro potásico. 1 c.c. de esta disolución contenía 0,00127 gr. de yodo. Se comprobó nuevamente el valor de la disolución al retornar al laboratorio, encontrándola sin variación. Las dos primeras determinaciones dieron un gasto de 12,2 y 12,4 centímetros cúbicos sobre 200 c. c. de agua. Las tres últimas, operando más rápidamente fueron muy concordantes, gastando 12,6.

Hechos los cálculos para un litro de agua se encuentra:

SULFHÍDRICO POR LITRO: 0,0205 gramos.

Determinación del cloro.

Se procedió á precipitar el *cloro* al estado de *cloruro argéntico* en dos volúmenes diferentes de agua. (500 centímetros cúbicos y 250); La precipitación se llevó á cabo con el agua previamente hervida y acidulada con nítrico: De este modo no quedan trazas de sulfhídrico en el agua, y el precipitado es completamente blanco.

Calculados los resultados de las dos determinaciones han dado el valor medio siguiente:

CANTIDAD DE CLORO PARA UN LITRO DE AGUA: 0,01883 gramos.

Determinación de la sílice.

De este cuerpo se han hecho tres determinaciones, aprovechando su separación previa en el análisis cuantitativo de los otros elementos del agua. Así, se ha pesado la sílice; del resíduo de la evaporación de 3 litros (para la precipitación del hierro, alúmina, cal y magnesia); del resíduo de evaporar 8 litros (para buscar el fosfórico en mayor cantidad de agua), y en el de 13 litros (para separar hierro, aluminio y manganeso, y precipitar el litio).

Siempre se ha hecho por evaporación del resíduo con ácido clorhídrico por dos veces (en el resíduo para fosfórico se hicieron con nítrico los dos últimos tratamientos), humedeciendo con clorhídrico concentrado y diluyendo después en agua caliente.

La sílice después de pesada, se sometió á la acción del fluorhídrico, y no dejó ningún resíduo.

Valor medio hallado en las tres determinaciones antedichas:

SÍLICE CORRESPONDIENTE Á UN LITRO: 0,01518 gramos.

Determinación del hierro, alùmina, cal y magnesia.

De tres litros de agua se separó la sílice. El líquido ácido que resultó se trató en caliente por cloruro amónico y amoniaco. Recogido el precipitado en un filtro y lavado con agua hirviendo se redisolvió en clorhídrico y se volvió á precipitar al estado de sal básica.

Recogidos los sexquióxidos de hierro y aluminio y bien lavados, se volvieron á disolver, precipitándose el hierro con sulfuro amónico de la disolución tartárica, amoniacal. La alúmina se precipitó, después de haber destruído por el calor y el nitro la materia orgánica.

La disolución amoniacal de la que se han separado el hierro, y aluminio, se conservó de un día para otro con sulfuro amónico No precipitó cantidad apreciable, y sirvió para las determinaciones de calcio y magnesio; para lo cual se hizo un volumen conocido de la disolución y se tomó una fracción de él.

Se destruyó el sulfuro amónico hirviendo el líquido con clorhídrico. Se filtró, y precipitó la cal en disolución hirviente con cloruro amónico, amoniaco y oxalato amónico. Se recogió, y lavó este precipitado de oxalato cálcico, y después de transformado en carbonato, se pesó.

Del líquido de separar la cal, se precipitó la magnesia al estado de fosfato amónico-magnésico, pasándole después al de pirofosfato.

También se determinaron el hierro, y aluminio de los 4 litros de agua que sirvieron para una de las determinaciones de álcalis y del resíduo de evaporar 13 litros, en el que se intentó pesar el manganeso, cosa que no se consiguió por estar en cortísimas cantidades.

A continuación se expresan los resultados medios de los compuestos investigados.

Oxido férrico (Fe_2O_3)	0,00058
Alúmina (Al_2O_3)	0,00047
Cal (CaO)	0,59553
Magnesia (MgO.)	0,21150

Determinación del sulfùrico.

En el agua hervida (500 c. c.) y ácida con el ácido clorhídrico se precipitó el sulfúrico con cloruro bárico, estando el líquido hirviendo. Se recogió el precipitado, sobre un filtro, lavó, desecó, etc.

Resultado:

Anhídrido sulfurico en litro (SO_3), 1,20060 gramos.

Determinación de los álcalis.

Se pesaron y calcularon al estado de sulfato sódico. Se transformaron después al estado de cloruros y se volvieron á pesar. De este último resíduo se intentó la separación del *potasio* al estado de cloroplatinato, pero la exigua cantidad de precipitado no permitió pesarlo en condiciones satisfactorias.

Se operó sobre 4 litros de agua, y en otro ensayo sobre 13 litros para separar la litina. Primeramente separóse la sílice. El líquido se evaporó hasta sequedad, tratóse después con exceso de agua de cal y se hirvió. Filtrado el líquido, se precipitó la cal por cabonato amónico, amoniaco y un poco de oxalato. Se filtró y evaporó hasta sequedad, arrojando las sales amónicas. Repitiéronse toda esta serie de operaciones para asegurarnos de la eliminación total de la magnesia. Por último, después de arrojar por el calor todas las sales amónicas, se calentó el resíduo con un poco de ácido sulfúrico hasta sequedad. Caldeóse con un poco de carbonato amónico para descomponer los bisulfatos y se pesó.

Disueltos en agua los sulfatos alcalinos, se precipitó en caliente el sulfúrico con poco exceso de cloruro bárico. Filtrado el líquido claro, se eliminó el bario del mismo modo que lo había sido la cal en las operaciones anteriores.

Finalmente se pesaron los álcalis al estado de cloruros.

Los cloruros alcalinos de los 4 litros de agua, se trataron por muy poca agua y un gran exceso de cloruro platínico, evaporándose casi hasta sequedad, Tratado por el alcohol de 80° apenas se formó precipitado. No se recogió para pesar.

Los cloruros alcalinos de los 13 litros se trataron para litio. La separación se hizo con alcohol fuerte y evaporación (por destilación) de los líquidos alcohólicos. El litio se precipitó al estado de fosfato en líquido fuertemente alcalino.

Como los sulfatos alcalinos habían sido transformados en cloruros por precipitación con el cloruro bárico, el sulfato bárico producido se pesó, para aplicar al cálculo del sodio y del potasio el método indirecto.

Resultados obtenidos.

Peso de los sulfatos	0,0303
Acido sulfúrico (SO_3) de los sulfatos	0,0167
Sulfato sódico calculado	0,0275
Sulfato potásico ídem	0,0028
Sosa correspondiente (Na_2O)	0,0120
Potasa (K_2O)	0,0015

Determinación de la litina.

Los cloruros alcalinos procedentes de 13 litros de agua, bien secos, se trataron por una mezcla de alcohol absoluto y éter. Se evaporaron los disolventes después de filtrar, y en el resíduo se precipitó la litina, tratándolo por disolución de sosa y fosfato sódico. El precipitado de fostato se lavó, desecó y pesó.

CANTIDAD DE LITINA (Li_2O) 0,00051 gramos

Determinación del ácido carbónico fijo.

Hirviendo por bastante tiempo 4 litros de agua, y tratada por lechada de cal se filtró y lavó el precipitado. El filtro con su contenido se introdujo en aparato para determinar el carbónico. He aquí el resultado:

ANHÍDRIDO CARBÓNICO (CO_2) 0,0473 gramos.

RESULTADOS DIRECTOS DEL ANALISIS

Cloro	0,01883
Acido sulfúrico	1,20060
Idem fosfórico	indicios
Idem silícico	0,01518
Idem carbónico	0,04730
Sosa	0,01200
Potasa	0,00150
Litina	0,00051
Cal	0,59553
Magnesia	0,21150
Alúmina	0,00047

Oxido de hierro	0,00058
Manganeso	indicios
Materia orgánica	0,02118

Cálculo del análisis.

Sulfato sódico		0, 0275
Sosa total	0, 0120	
Sulfúrico equivalente	0, 0155	
	0, 0275	
Sulfato potásico		0, 0028
Potasa total	0, 0015	
Sulfúrico correspondiente	0, 0013	
	0, 0028	
Cloruro cálcico		0,02943
Cloro total	0,01883	
Calcio correspondiente	0,01060	
	0,02943	
Cal que representa este calcio	0,01484	
Carbonato litínico		0,00126
Litina total	0,00051	
Carbónico correspondiente	0,00075	
	0,00126	
Sulfato magnésico		0, 6345
Magnesia total	0, 2115	
Sulfúrico correspondiente........	0, 4230	
	0, 6345	

Sulfato cálcico			1, 2933
Sulfúrico total		1, 2006	
á deducir:			
Combinado con la sosa	0,0155		
Id. con la potasa	0,0013		
Id. con la magnesia ..	0,4230		
	0,4398	0, 4398	
Sulfúrico que resta..............		0, 7608	
Cal correspondiente		0, 5325	
		1, 2933	

Carbonato cálcico		0,08887
Carbónico total	0,04730	
á deducir el combinado con el litio	0,00075	
Carbónico que resta	0,04655	
Cal correspondiente	0,04232	
	0,08887	
Silicato de alúmina		0,00075
Alúmina total	0,00047	
Sílice correspondiente	0,00028	
	0,00075	
Sílice libre		0,01490
Sílice total	0,01518	
Combinada con la alúmina	0,00028	
	0,01490	
Acido carbónico total		0, 1100
distribuído en la forma siguiente:		
Acido carbónico de los carbonatos..	0, 0473	
Idem íd. de los bicarbonatos	0, 0473	
Idem íd. disuelto en el agua	0, 0154	
TOTAL	0, 1100	

Los cuerpos fijos á 120° C. contenidos en el agua son los siguientes:

Sulfato sódico	0,02750
Id. potásico	0,00280
Cloruro cálcico	0;02943
Sulfato cálcico	1,29330
Id. magnésico	0,63450
Carbonato litínico	0,00126
Id. cálcico	0,08887
Silicato alumínico	0,00075
Sílice libre	0,01490
Oxido férrico	0;00058
Materia orgánica en oxálico	0,02118
Indicios de manganeso, fosfórico, etcétera y pérdida	0,00923
TOTAL	2,12430

COMPOSICION HIPOTETICA DEL AGUA.

En un litro:

Hidrógeno sulfurado	13,46 c. c.	0,0205 gr.
Anhídrido carbónico	7,82 c. c.	0,0154 gr.
Nitrógeno ó Azoe	23,33 c. c.	0,0293 gr.

Sulfato sódico	0,02750
Id. potásico	0,00280
Cloruro cálcico	0,02943
Sulfato cálcico	1,29330
Id. magnésico	0,63450
Bicarbonato litínico	0,00201
Id. cálcico	0,13542
Silicato alumínico	0,00075
Sílice libre	0,01490
Oxido férrico	0,00058
Materia orgánica................	0,02118

Indicios de ácido fosfórico y de manganeso.

Clasificación de las aguas de LA PAZANA.

Las aguas que han sido objeto de este análisis se pueden clasificar de: SULFHIDRICAS, FRIAS, SULFATADAS, CALCICAS y MAGNESICAS, LITINICAS, AZOADAS.

Análisis de las vegetaciones blancas que se forman en la superficie del agua cuando ésta corre por su desagüe en contacto del aire.

Detenida por las ramitas y tallos de los vegetales que crecen en las orillas del riachuelo, se forma una masa untuosa, blanca, nacarada y filamentosa.

El análisis cualitativo mostró la existencia de azufre en gran proporción, materia orgánica, y parte mineral formada de arcilla y pequeños cristales de yeso.

Con el microscopio se aprecian algas y bacterias filamentosas, y globulillos muy pequeños de azufre.

Desecando al aire esta sustancia toma un color térreo amarillento.

El análisis cuantitativo ha dado el resultado siguiente:

Azufre	42,805	por	100
Materia orgánica	1,193	»	»
Residuo mineral	56,002	»	»

PAULINO SAVIRÓN

ESTACIÓN ME

Observaciones verificadas duran

DIAS	ENERO — TEMPERATURA — MÁXIMA — Sol — Vacío	Aire	Sombra	MÍNIMA — Cubierto	Reflector	HUMEDAD RELATIVA — A las 9h	A las 15h	DIRECCIÓN DEL VIENTO — A las 9h	A las 15h	FEB — TEMPERATURA — MÁXIMA — Sol — Vacío	Aire	Sombra	MÍNIMA — Cubierto	Reflector
1	46.5	16.10	13.2	-1.3	—4.2	67	60	ONO	ONO	45.5	12.2	10.2	2 5	1.5
2	46.4	17.8	14.8	—2.0	—2 5	84	42	NNO	ONO	44.5	14.3	12 2	5.0	2.0
3	44.8	13.8	10.7	2.5	—2.3	81	65	O	ONO	46.5	14 5	12.5	0.0	—1.7
4	42.7	11.6	9.7	—1 8	- 4 3	92	73	ESE	SE	49.5	20.4	16.3	7.0	4 7
5	10.4	2.0	2.0	—3.0	—6 4	84	97	ONO	ONO	48.0	18 2	13.5	5.0	3.5
6	20.8	7.8	6.3	—2.0	—5.0	97	92	ONO	SE	48.5	16.8	14.5	1.5	0.0
7	37..1	14.5	11.1	—1.5	—4.2	95	53	E	ONO	49.5	17.8	14 8	1.0	—1.0
8	47.1	10.3	11.0	4.5	1.2	76	82	ONO	ONO	19.7	10.8	9.6	2.0	0.0
9	42.3	11.4	9.5	0 0	—1.5	68	61	NNO	NNO	48.4	17.6	14 0	5.0	5 0
10	43.5	9.0	8 2	1.8	-0.5	61	65	NO	NO	22.0	10 9	10.0	4.0	3.0
11	48.3	14.5	12 0	3.0	1.0	72	60	ONO	NO	12.5	12.0	10.0	4.0	1.5
12	48 5	16.6	15.2	6.5	5.7	76	60	ONO	ONO	44.5	14 4	13.5	0.0	—1.5
13	44.8	16.5	14 2	1 0	0.5	77	59	ONO	ONO	15.2	7.8	6 5	0.0	—1.0
14	48.0	19.8	15.9	6.5	5.5	83	61	NO	NO	37.5	12.4	9.2	0 0	—1.5
15	48.0	19.4	17.5	4.5	3.0	66	55	SO	O	36.0	10.1	7.0	—4.5	—5.0
16	48 0	16.8	13.5	7.8	7 0	81	61	ONO	NO	38.0	13.5	11.8	-1.5	—2.5
17	44.5	15.0	12.2	3.5	3.0	74	60	ONO	ONO	44.5	14 8	12.0	1.0	—0.7
18	44.5	15 0	12.2	-3 0	—3.5	69	68	ENE	ESE	13.0	11 4	10.6	—2.0	—3.5
19	34 8	16 4	11.2	5.0	4.5	90	66	E	ONO	44.5	15.0	13.2	0.2	—0.5
20	44 5	15.8	13.0	—2 5	—4.0	86	64	ENE	NO	44.5	17.8	14.5	5.0	2.2
21	12.0	8.0	7.5	3.5	2.5	85	74	E	NE	48.0	18.6	15.5	1.0	—1.0
22	44.5	13.2	10.0	4 0	2.7	83	69	ESE	N	50.5	18.0	16 2	1.5	0.0
23	20 5	7.0	6.5	3 3	1.5	91	84	N	E	52.0	17.3	15.2	0.0	- 1.5
24	23 5	8.5	7 5	1.0	-0.2	82	56	ONO	NO	51.5	16.0	14.0	2 0	0.5
25	32.6	10 2	9.5	1.0	-1 0	74	74	NO	NNO	51.5	9.2	7.0	—1.0	—2.5
26	42.5	12 1	10.5	1 5	0.0	77	51	ONO	NNO	51.0	7.3	6.0	- 1.0	—3.0
27	27 6	5 8	4.0	-5.5	—7.0	99	82	E	ESE	49.5	10.0	8 2	—3.0	—5 0
28	42.5	14.5	9 0	—3.0	—5.5	75	51	O	ONO	48.5	25.0	10 0	—6 0	—7 0
29	44 5	10 4	8.5	—4.5	- 6 0	92	65	NNE	E					
30	44.5	9 0	6.2	—4 5	-6.5	76	77	NO	ONO					
31	43 0	11.5	10.4	2.3	-0.3	69	50	ONO	ONO					

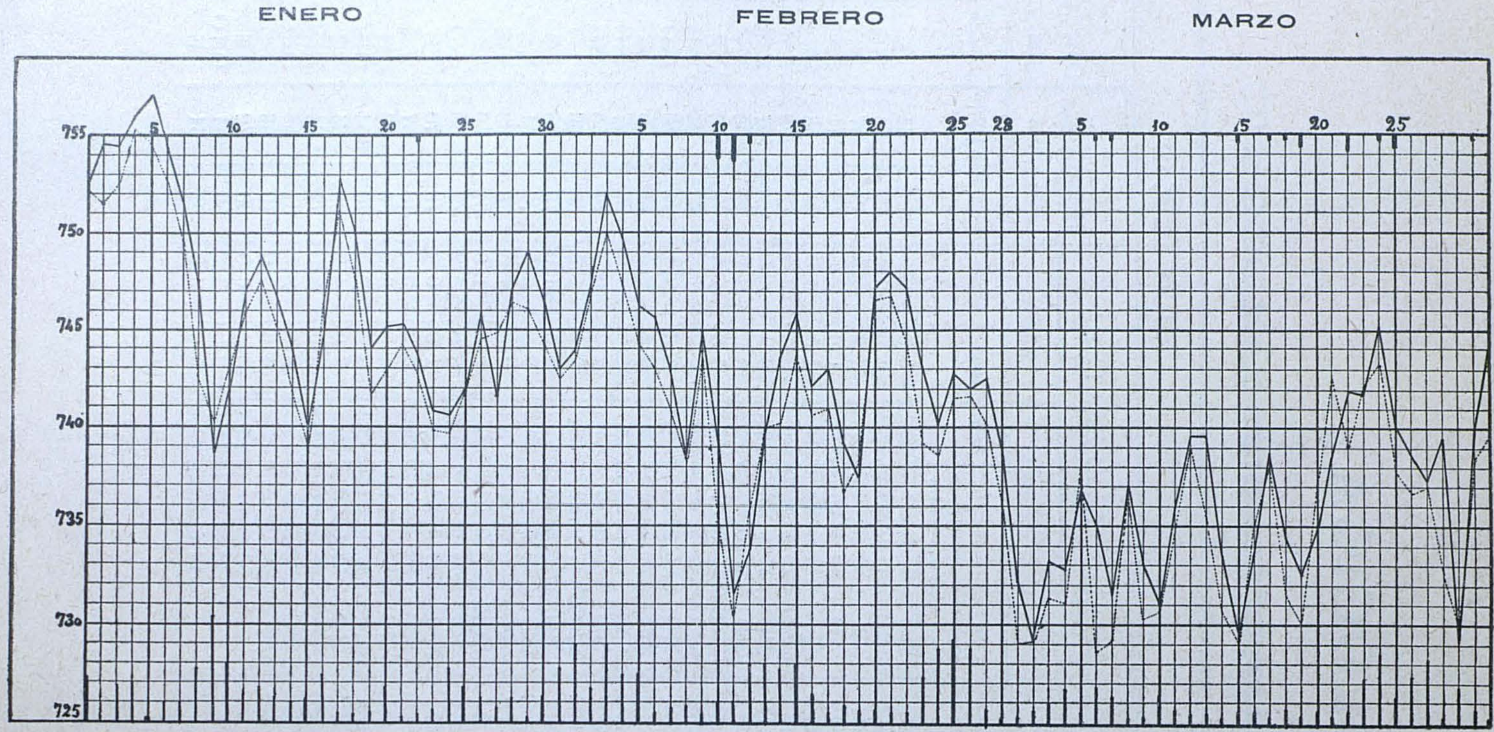
TEOROLÓGICA

te el primer trimestre de 1909

RERO				MARZO									
HUMEDAD RELATIVA		DIRECCIÓN DEL VIENTO		TEMPERATURA					HUMEDAD RELATIVA		DIRECCIÓN DEL VIENTO	
				MÁXIMA			MÍNIMA					
A las 9h	A las 15h	A las 9h	A las 15h	Sol		Sombra	Cubierto	Reflector	A las 9h	A las 15h	A las 9h	A las 15h
				Vacío	Aire							
67	54	NO	NO	48.5	27.7	10.9	—6.0	—7.5	69	64	E	N
72	50	NO	NO	48.0	22.5	10.9	—4 0	6 5	69	54	NO	NO
77	56	NO	O	49 3	19 5	13 4	—2.9	—4.0	49	57	NO	NO
66	35	O	NO	53.4	23.9	14.8	1.0	—2.0	72	41	ESE	O
66	54	ONO	NO	44.5	21.2	10 9	1 5	0.0	78	56	ONO	NO
82	62	O	ONO	18.5	15.0	14.8	0.0	-2.0	72	59	ESE	SO
84	59	SSE	SE	19.5	16.3	10.3	6 3	4.5	63	87	ESE	NE
89	76	E	SE	38.0	17.0	12.5	0 5	—2.0	82	60	N	NO
73	44	E	ESE	12.0	7 0	7 0	1 8	0.0	97	93	E	ESE
92	72	ESE	NNO	45.5	16.0	12.3	3 0	1 5	74	88	NO	ONO
73	74	N	NO	46.5	16.0	12.4	3.3	2.1	67	56	NO	NO
60	94	ONO	NNO	24.5	14.0	13.0	0.0	—2.5	71	55	E	N
68	72	ONO	NNO	47.0	20.5	13 0	—1.0	—3.0	77	57	NO	NO
70	47	NO	NO	46.5	19.9	11.0	2.0	0.0	77	53	NO	N
74	51	ONO	NNO	47.0	22.0	18.0	3 0	1.5	63	56	O	N
68	57	NO	NO	44.0	19.5	11.0	0 5	—1.0	73	45	O	NO
71	41	ONO	NO	46.5	29.5	16 0	—2.9	—5.0	77	51	NNE	E
84	67	ENE	E	30.5	17 6	15 0	2 0	1.5	86	68	SE	SE
89	62	E	ESE	38.0	29.6	23.0	2.5	1.6	61	50	ESE	SSO
72	48	E	SE	44 0	29 8	20.0	5 0	3.2	77	59	NO	NNO
78	88	O	NNO	47.5	28 0	18.5	1 0	0.0	79	70	E	O
70	79	NNO	NO	42 5	23 6	20.0	6.0	3.0	78	57	SE	O
81	82	N	NO	55.0	21.0	16 0	6 5	3.2	66	63	N	NNO
72	73	NO	NNO	48 5	24.6	18.5	4.5	2 5	76	54	ONO	NNO
69	84	ONO	NO	53.0	30.0	20 0	6 0	4.2	80	64	N	NNO
69	43	NNO	NNO	48 7	21.6	15.8	5.0	3.0	77	64	NNO	NNO
67	48	NO	NO	48.5	25.6	19.5	5.0	2.5	67	56	ONO	NO
83	64	ONO	NO	50.0	30.0	25.0	4 0	3.0	70	66	SE	SE
				53.0	27 0	19.0	8.0	6.0	80	72	E	O
				48.5	28.0	15.6	6.0	3.2	56	51	ONO	NNO
				48.5	33.5	22 0	5.0	3.0	94	51	E	NNO

GRÁFICAS DE LAS OBSERVACIONES DEL PRIMER TRIMESTRE

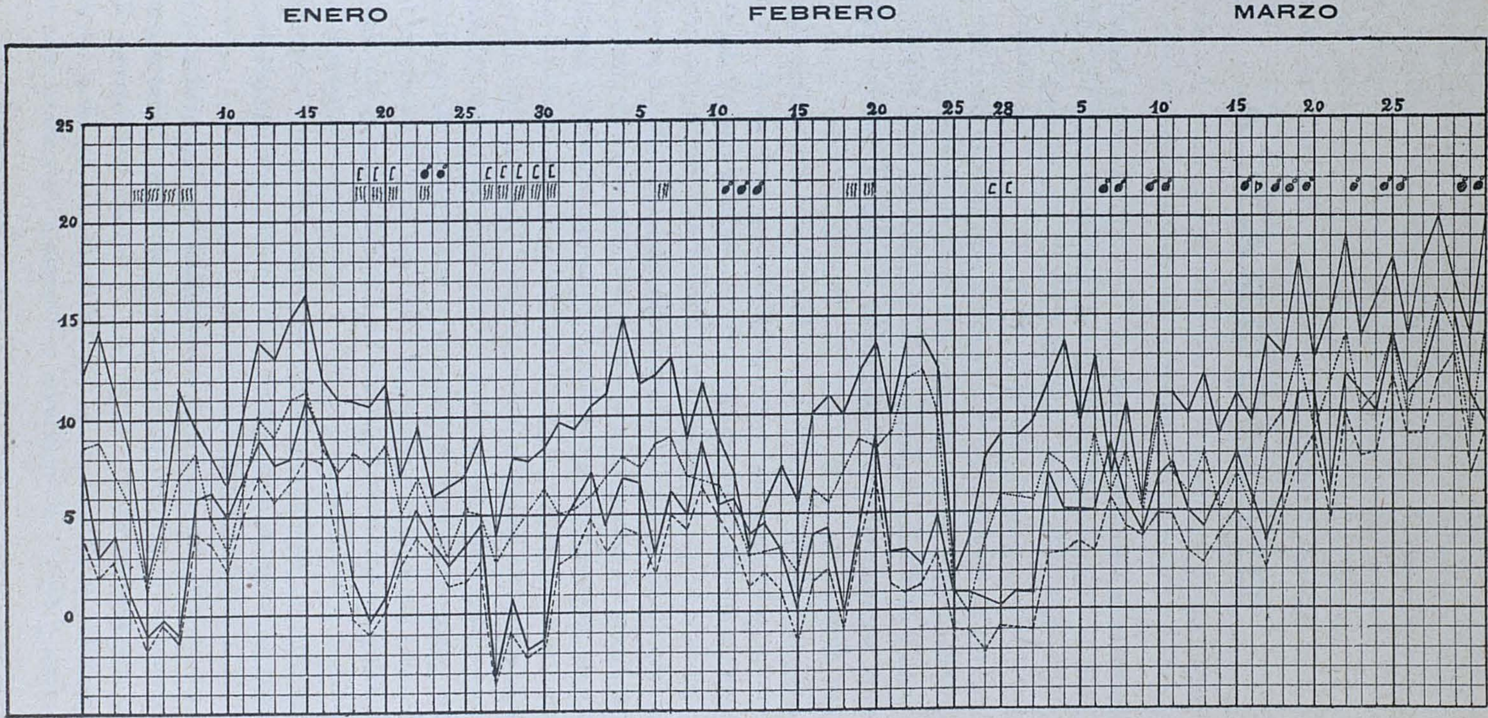
BARÓMETRO, PLUVIÓMETRO, ANEMÓMETRO



NOTA.—Las líneas llenas y de puntos representan respectivamente las presiones á 0°, corregidas de capilaridad, á las 9h y á las 15h.

Los trazos gruesos inferiores representan el recorrido diario del viento, 1mm = 100km, y los superiores el agua de lluvia, 1mm = 2mm de lluvia.

TERMÓMETRO



NOTA.—Las líneas continuas representan respectivamente las temperaturas del termómetro seco á las 9h y á las 15h.
Las de puntos y trazos las temperaturas del termómetro húmedo á las mismas horas.

BIBLIOGRAFÍA

Lecciones de Geometría métrica, por D. Cecilio Jiménez Rueda, catedrático de la Universidad central. 2.º edición aumentada. Vol, de 15 por 23, de 878 páginas de texto. Atlas de LXXXI láminas con 653 figuras. Librería de Victoriano Suárez. Madrid, 1909.

Conocida es de todos los matemáticos españoles la obra del Sr. Jiménez Rueda, cuya labor científica está llena de puntos de vista personales y muy particular originalidad, bien manifiesta en el libro que examinamos, segunda edición y aun mejor refundición del que publicara hace seis años.

Al recorrer, aunque sea de ligero, la obra del distinguido catedrático, se notan muy marcados, tres propósitos: el de fusionar las verdades de la Geometría plana con sus análogas de la radiada y del espacio; el de aplicar á las propiedades métricas una cierta correlación geométrica que permita al alumno la generalización y adaptación de propiedades de unas figuras á otras; y el afán, muy laudable, de acumular el mayor número de proposiciones y cuestiones varias, que tiendan á dar aires de importancia á asignatura, si bien muy necesaria, tan elemental como la expuesta en la obra que estudiamos, por creer sin duda el autor que ha de ser suma y compendio de cuanto á la Geometría métrica se refiera.

Tres partes tiene la obra examinada; una primera en que desarrolla las *Nociones que pueden considerarse como base para el estudio de la Geometría métrica*, otra que comprende los *Estudios de cada clase de figuras en particular y medida de su extensión*, y una tercera que estudia las *Relaciones entre las formas geométricas en general*. El simple anunciado de los temas generales de cada lección, manifestará claramente el desarrollo y plan de la obra notable que nos ocupa.

Comienza esta con unos *Preliminares* lógicos y aritméticos, y siguen 13 lecciones de la primera parte, cuyos títulos son: *Primeros conceptos y relaciones fundamentales.—Segmentos y ángulos.—Relaciones de perpendicularidad y paralelismo.—Generalización de las ideas de ángulo, punto, recta y plano.—Proyecciones y simetría.—Relaciones entre los ele-*

mentos de un triángulo ó triedro, con aplicación á la comparación de distancias y ángulos.—Relaciones de igualdad y leyes de variación y de constancia de distancias y ángulos deducidas de las teorías anteriores. Problemas.—Polígonos, Angulos poliédricos y poliedros en general.—De los ángulos en los polígonos y poliedros.—Círculo. Superficie cónica de revolución y esfera. Angulos relacionados con la circunferencia y superficies cónicas de segundo orden.—Teoría de la proporcionalidad de rectas.—Rectificación de líneas y determinación de la amplitud de las superficies cónicas.—Construcción de fórmulas y resolución de problemas numérico-geométricos.

Claros resaltan en el plan de esa primera parte los particulares puntos de vista del autor, que desde la segunda lección comienza ya á estudiar simultáneamente los segmentos rectilíneos con los ángulos planos y diedros, y aún con los esféricos, iniciando además, no una correlación geométrica propiamente tal, pero sí una dualidad de exposición, que le permite estudiar á doble columna propiedades en cierto modo semejantes. Pueden servir como muestra las siguientes:

a) Por un punto A situado fuera de una recta b en el plano Ab puede trazarse á dicha recta una perpendicular y sólo una.	*a*,) Por una recta a oblícua á un plano β, en la radiación de centro β, puede trazarse á dicho plano otro perpendicular y sólo uno.
b) Por un punto A situado fuera de un plano, se puede trazar á este plano una recta perpendicular y sólo una.	*b*,) Por un punto A situado fuera de una recta, se puede trazar á ésta recta un plano perpendicular y sólo uno.
Dos rectas de un plano perpendiculares á otras dos que se cortan, se cortan siempre.	Dos planos perpendiculares á otros dos que se cortan, trazados por paralelas á su intersección, se cortan siempre.
En todo triángulo plano finito, á lados iguales se oponen ángulos iguales y recíprocamente.	En todo triedro convexo, á caras iguales se oponen diedros iguales y recíprocamente.
En todo triángulo finito, plano ó esférico convexo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.	En todo triedro convexo una cara es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia.
De dos oblícuas AD y AC trazadas desde un punto á una recta p y cuyos pies se apartan des-	De dos ángulos planos comprendidos entre una oblícua a á un plano π y este plano, y cu-

igualmente del de la perpendicular, la que tenga su pie más distante es *mayor* y formará *mayor* ángulo, recíprocamente, etc.	yos lados en π formen ángulos ángulos desiguales con la traza b del plano perpendicular $ba < 90^\circ$, el que tenga mayor este ángulo es mayor y formará mayor diedro con ab, y recíprocamente, etcétera.
Dos circunferencias que tienen tres puntos comunes coinciden. Y si están en dos superficies esféricas, estas quedarán con la circunferencia de congruencia común.	Dos superficies cónicas simples ó cilíndricas, ambas de revolución, con tres generatrices comunes coinciden siempre.
En todo triángulo plano los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.	En todo triedro los senos de sus caras son proporcionales á los senos de sus driedros opuestos.

La segunda parte se desarrolla en 19 lecciones que tratan sucesivamente: *Series y haces.—Figuras inarmónicas y armónicas* (en las series y haces de primer orden).—*Proyectividad* (ídem íd.)—*Elementos polares respecto del círculo, cono y esfera.—Triángulos. Productos. Potencias y cocientes entre segmentos.—Propiedades de los triángulos, comunes con los triedros* (transversales, polaridad, involución).—*De los paralelógramos, ángulos tetraédricos, análogos y paralelepípedos.—De los cuadriláteros en general.—Propiedades de los tetraedros en general.—De los polígonos y ángulos poliedros en general.—De los polígonos regulares y semirregulares.—Medida de la circunferencia y de la amplitud del cono de revolución. —Poliedros regulares.—Sistemas de círculos y esferas.—Curvas de segundo orden y superficies cónicas de segundo orden.—Centros de distancias proporcionales y de gravedad.—Areas de las figuras.—Equivalencias de superficies. Sus máximos y mínimos.—Volúmenes.*

Existen en esta parte menos aplicaciones y en general más legítimas de la correlación geométrica; continúa la fusión de las diversas geometrías; y hay no pequeña parte de labor propia del ilustrado autor, que en algunas lecciones como en la 20 muestra á los alumnos notables ejemplos de generalización y adaptación de propiedades de unas figuras á otras análogas.

Finalmente, la última parte contiene sólo cuatro lecciones, que estudian: *Igualdad y semejanza. Homografía y afinidad.—Homotecía, homología, afinidad, involución y simetrías.—Figuras polares recíprocas y figuras inversas.—Trigonometría* (plana y esférica).

Acompañan á todas las lecciones ejercicios adecuados, en númeio total de 554, que no sólo aclaran, practican y completan las proposiciones estudiadas en cada caso, sino que inician al lector en las aplicaciones prácticas más útiles de las teorías geométricas, tales como la topografía, la agrimensura, el cálculo gráfico, etc., etc. Y suma el total de conocimientos expuestos un volumen muy notable de cuestiones geométricas, cuya exposición metódica y ordenada requiere en el profesor dotes nada comunes.

Esto unido á los procedimientos de exposición empleados en el texto del Sr. Jiménez Rueda, poco aptos para aquellos que no se penetren bien de sus ventajas ni tengan fe en ellos, explicará la persistente afición á los textos clásicos de algunos profesores, que una vez penetrados del espíritu del libro, como lo está su autor, tal vez obtuvieran con sus alumnos los brillantes resultados que con los suyos alcanza el docto profesor de la Central.

Pocas y sin importancia esencial son las observaciones críticas que, fiado en la benevolencia del autor, me voy á permitir. Primeramente, vemos en todo el libro un exceso de conceptos, tan rápidamente acumulados y tan sin tasa, que puede decirse no hay apenas palabra, locución ó idea más ó menos relacionada con las cuestiones de Geometría elemental que deje de aparecer en cuanto que el autor tenga ocasión próxima ó remota de darle puesto en su trabajo. Especialmente en la lección primera llega al summun la acumulación de conceptos, que resulta altamente fatigosa para el principiante y en gran parte innecesaria, porque muchos de esos conceptos han de ser tratados de nuevo en su oportuno lugar.

Aparte de eso, algunos como el de *postulado*, únicamente experimental para el autor, lo que le conducirá á considerar la Geometría como Matemática aplicada (opinión sostenida y defendible); el de *M. m. c.* de magnitudes geométricas, sólo definible para ángulos, distancias y arcos de círculo; el de *distancia*, que en la nota de la página 34, le conduce á un error muy corriente (véanse los números 167 y 168 del *Essai dur les fondements de la Geometríe* por M. A. W. Russell); y otros que pudiéramos citar, pueden ser tachados de erróneos, incompletos ó al menos poco oportunos.

Nada valen los pequeños lunares anotados y otros que pudieran señalarse, al lado de los muchos méritos de la obra, muy recomendable como trabajo en que el autor ha especializado sus reconocidas dotes matemáticas, y como libro de consulta para todos aquellos que quieran ver fusionadas en la enseñanza elemental las propiedades de las geometrías plana y del espacio.

G. S.

Dr. Fiedrich Schilling, professeur á la Zechnische Hochschule de Danzig. **La Photogrammetrie comme Application de la Geometrie Descriptive.** Edition francaise redigée, avec la collaboration de l' Auteur, par L. Gerard, docteur ès Sciences, professeur au Collége Chaptal. París. Gautier Villars. 1908. 101 páginas con 72 figuras y V láminas.

Forma el presente libro un resumen de las Conferencias dadas por su autor en Gottinga con ocasión de un Curso de vacaciones organizado en 1904 en esta ciudad, siendo el fin principal de uno y otras el de exponer los principios teóricos de la Fotogrametría como aplicación de la Geometría Descriptiva.

Divide su obra el Dr. Schilling en tres partes, precedidas de una breve introducción en la que define el objeto de la Fotogrametría y la noción de lo que llama *primera orientación* de una perspectiva y que consiste en dar la *distancia, el punto principal* y la *línea de horizonte.*

La primera parte consiste en la *exposición de los métodos fotogramétricos en el caso en que se da una sola perspectiva del objeto,* y se subdivide á su vez en tres párrafos.. Trata en el primero de los *métodos para la determinación de la primera orientación* y contiene la solución de este problema por caminos diferentes, según que se trate de una figura arquitectónica en la que *á priori* se conoce la posición absoluta ó relativa de ciertos elementos (horizontalidad y paralelismo) que pueda sernos útil, ó que carezcamos por completo de este conocimiento.

Pasa después el autor al *método para determinar la planta y alzado de un objeto representado en una proyección cónica,* que constituye el párrafo segundo de esta primera parte y que subdivide en tres casos, según que el plano de la vista sea vertical, ó que sea inclinado conteniendo el punto límite de las verticales ó cayendo este punto fuera de los límites del dibujo.

El párrafo tercero, dedicado á presentar algunos *ejemplos ds la aplicación de las construcciones anteriores,* comienza por una muy curiosa al cuadro de Alberto Durero, representando á S. Gerónimo en su celda, en el cual se comprueba el conocimiento que el ilustre inventor del grabado al agua fuerte tenía de las leyes de la perspectiva; presenta luego el autor la construcción de la planta y alzado de dos edificios, sacándolos de perspectivas comprendidas en el primero y segundo de los casos explicados.

La segunda parte de la obra de los Dres. Schilling y Gerard se refiere á lo que ordinariamente recibe el nombre de Fotogrametría, y en ella el elemento que se determina directamente es el punto, y no la recta como en la Perspectiva, por lo cual aquella no necesita como ésta, el conocimiento de propiedad geométrica alguna de los cuerpos representados.

Comienza recordando el teorema de Hanck relativo á los puntos llamados por Gérard «*noyaux*» traduciendo directamente del alemán «*kernpunkte*», y que son las imágenes en cada una de las vistas, del centro de proyección de la otra.

El de Finsterwalder que dice que «dos perspectivas de un objeto cualquiera, con su orientación interior, bastan para reconstruir el objeto, salvo la escala».

Después de indicar el camino para resolver este problema, pasa á determinar la *segunda orientación*, que nos da los elementos necesarios para determinar una figura semejante á la constituída por las proyecciones sobre un plano horizontal, de los centros de proyección y los ejes principales de las diferentes perspectivas. A la resolución de este problema por cuatro diferentes métodos topográficos, sigue el estudio de la construcción de la planta y alzado del objeto, efectuándolo por el método usual que aplica á dos ejemplos, y citando los conocidos aparatos de Hanck y Ritter.

La parte tercera trata de las *aplicaciones de la Fotogrametría.* Comienza viendo hasta qué punto han tenido en cuenta las leyes de la Perspectiva los *pintores* de las diversas épocas, y pasa luego á indicar algo de la aplicación de la Fotogrametría á la *Arquitectura,* tratando principalmente de los trabajos realizados por el Konigle Preussiche Messbildanstalt, fundado en Berlín el año 1885 por iniciativa de su actual director el ilustre Meydenbauer quien ha facilitado, con la perfección alcanzada por el Instituto, la formación de un Archivo de Monumentos que comprende muchos miles de estos y permite dar á conocer á las generaciones futuras y á los países extranjeros su actual estado. Reproduce, como muestra, las fotografías originales, y las plantas y alzados de ellas deducidos, referentes á una iglesia de Jerichow.

Sabido es que la aplicación que motivó la creación de la Fotogrametría, y de la que mayor partido se ha sacado en Alemania, Austria, Canadá, Italia, Japón, Rusia, Suiza y otros muchos países, ha sido la Topografía, tomando en este caso en nombre de *Fototopografía.* A ella dedica algunas páginas el autor de la obra que examinamos, comenzando por una ligera reseña de los importantísimos trabajos llevados á cabo por el profesor C. Koppe para el ferrocarril de la Jungfran, ilustrada con fotografías sacadas desde globos, método de gran porvenir y que puede tener dos objetos diferentes, ó bien formar el mapa topográfico de un terreno, ó determinar con exactitud la posición del globo en el instante de ser impresionada la placa, dato de gran importancia para las observaciones meteorológicas á grandes alturas, que tan gran desarrollo han adquirido recientemente. Reproduce el plano del glaciar de Gobbia, con el plano por curvas de nivel deducido de ellas; otros levantamientos topográficos del lago de Eib (Zugspitze) y de Neuotting, debidos todos al infatigable Dr. Finsterwalder, de Munich.

Entre las aplicaciones de la Fotogrametría á la Geodesia y á la Astronomía figuran las observaciones de formación, altura y movimiento de las nubes, relámpagos, auroras boreales y otras en nuestra atmósfera, y la observación de estrellas nuevas, extraordinariamente facilitada en los últimos tres años por la aplicación de la fotografía estereoscópica. Termina la obra con una reseña ligera de algunos aparatos fotogramétricos y el enunciado de cinco problemas geométricos que se presentan en la Fotogrametría.

Aunque los cuatro años transcurridos desde la celebración del curso de vacaciones de Gottinga hasta que vió la luz pública hagan que la presente obrita resulte algo atrasada y no se ocupe, al menos con la debida extensión, de los trabajos teóricos del Dr. Gino Loria sobre la determinación de los *kernpunkte*, de los levantamientos topográficos desde globos del ingeniero ruso Thiele, de las innumerables aplicaciones del estereocomparador del Dr. Pulfrich y otros trabajos igualmente interesantes que de día en día ensanchan los horizontes abiertos por el ilustre coronel Laussedat, resulta interesante la obra de los doctores Schilling y Gérard, no sólo en la parte de aplicaciones, sino también en la teórica que constituye una sencilla exposición, muy elemental, de los problemas fotogramétricos.

J. M. Torroja.

Lecons sur les fonctions définies par les equations differentielles du premier ordre. Pierre Boutroux, París, 1908.

Forma parte esta monografía de la valiosa colección que acerca de diversos puntos de la teoría de funciones viene publicándose bajo la dirección del eminente analista francés M. Borel.

Para comprender el alcance é importancia de este trabajo son precisas algunas palabras acerca del estado actual de dos teorías íntimamente ligadas; la general de funciones, y la de ecuaciones diferenciales.

La primera ha experimentado en poco tiempo un cambio tan radical que más bien es una renovación completa. Desde el punto de vista local de Weiertrass concretándose al estudio de las funciones analíticas en la proximidad de un punto mediante un desarrollo convergente en un círculo ó corona, extendiéndolo luego cuando esto era posible, por una prolongación analítica á los demás puntos en que la función estuviera definida, han sido muchas las tentativas hechas para cambiar de rumbo, substituyendo la fórmula de Taylor por otros desarrollos (productos infinitos series divergentes, desarrollos convergentes en una estrella de Mittag-Leffler, etc.), consiguiendo así definir las funciones en regiones más extensas que antes, é iniciando estudios tan interesantes como los de M. Borel sobre los modos de crecimiento de las funciones, leyes que limitan el número de ceros en una área dada, etc.

No así la teoría de ecuaciones diferenciales cuya evolución ha sido menos completa por no apartarse demasiado del camino trazado por Cauchy; y á pesar de sus innegables progresos quédanle no pocos puntos importantes por esclarecer, ante los cuales son impotentes los antiguos recursos.

M. Painlevé ha sido el primero en abandonar este reducido punto de vista abordando con toda generalidad la cuestión. Esto es: en vez de limitarse al estudio de las integrales en la proximidad del valor inicial x_0, ¿por qué no investigar su variación cuando x se aleja de x_0 describiendo un camino cualquiera?

El problema como se ve, es de transcendencia suma y aun no conseguida la solución completa, ha obtenido muy notables resultados.

El capítulo I de la obra que nos ocupa está dedicado á la exposición de ellos. limitándose al caso concreto en que el segundo miembro de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f\ (x\ y)$ es una función racional de y. Comienza señalando los puntos en que el teorema de Cauchy no es aplicable; esto sucede cuando la función presenta para $x = x_0$, $y = y_0$ una singularidad de los que clasifica en cinco categorías. Sin embargo la distinción más importante es la que divide á los puntos críticos en *móviles* y *fijos* (algebráicos y trascendentes).

Casi exclusivamente al estudio de los segundos están destinados los restantes capítulos. En el II estudia los modos de crecimiento de una rama de integral en la proximidad de uno de dichos puntos. clasificándolos en crecimiento exponencial ó racional según que el grado el en y de $f\ (xy)$ sea igual á 1 ó no.

En el III, el más extenso de la obra, clasifica los puntos singulares del segundo grupo antes citado (fijos). M. Painlevé los divide así: ó bien la función que presenta en el punto X una singularidad trascendental se hace indeterminada cuando x tiende á X siguiendo un camino cualquiera (el punto $x = 0$ para $e^{\frac{1}{x}}$) ó adquiere un valor determinado, finito ó no (el mismo para log x).

Según suceda una cosa ú otra los llama *esenciales* ú *ordinarios* siendo esta la clasificación corriente en los libros de Análisis. Pero el autor, bajo distinto punto de vista da otra fundada en las permutaciones que se operan en la proximidad de cada punto crítico, concepto que aclara con varios ejemplos.

No podía faltar tampoco el estudio de algunos puntos singulares clásicos, como son los de Briot y Bouquet dedicándoles el cap. IV, y pasando á tratar en el último, si bien menos extensamente de lo que merece, una cuestión tan importante como el ver la relación existente entre las diversas singularidades trascendentes de una misma ecuación. Es de desear dedique el autor algún trabajo á esta segunda parte del problema, apenas esbozada en éste por no ser su principal objeto.

Avalora extraordinariamente la obra la extensa nota de M. Painlevé acerca de las ecuaciones de primer grado cuya integral general tiene un número finito de ramas. llegando á establecer de modo admirable que todas ellas pueden transformarse en ecuaciones de Riccati por un cambio de variable racional, pudiendo reconocerse por un número finito de operaciones si tal cambio es ó no posible.

En suma, un trabajo notabilísimo que estudiarán con gusto los cultivadores del alto análisis.

J. R. P.

Leçons sur les théories générales de l' Analyse. por **R**ené Baire. Tome II. Variables complexes.—Applications géométriques. París, 1908.

De índole muy diversa al anterior, puesto que está destinado á servir de texto en al Facultad de Ciencias, pero también de condiciones muy recomendables dado su objeto, es el tratado de Análisis de cuyo segundo tomo vamos á dar sucinta cuenta á nuestros lectores.

Con sólo la lectura del título se nota una innovación introducida por el autor, apartándose de la costumbre generalmente seguida que divide al Análisis en cálculo diferencial é integral, como si no fuera el segundo continuación natural del primero. Opina que en cambio es mucho más honda la separación entre el Análisis de variables reales y el de variables complejas, y con arreglo á este criterio está dividida su obra.

Sacrificando lo accesorio á lo esencial y empleando un estilo conciso sin dejar de ser claro, ha conseguido el autor en este tomo dar gran cantidad de materia en espacio relativamente pequeño.

Suponiendo conocidos los fundamentos de los números imaginarios define y estudia las funciones de variables complejas, condiciones de holomorfía, derivadas, integrales y series, aplicando todo ello á las funciones elementales. Dos artículos más dedicados á propiedades de las funciones analíticas y teoría de resíduos y otro á las series de muchas variables complejas, completan este primer capítulo (IV de la obra) verdaderamente interesante sabido el cual, podrán los alumnos estudiar con fruto la teoría de funciones en toda su extensión.

En el V y VI de ecuaciones diferenciales ó aplicaciones geométricas trata lo que es corriente en los buenos tratados de Cálculo, llegando en el 1.º hasta las ecuaciones de derivadas parciales de primer orden, y hasta la deformación de superficies en el 2.º; todo ello clara y sobriamente escrito. Acaso sea la brevedad causa de la carencia de ejemplos y ejercicios que serían muy útiles en ciertos puntos á los alumnos.

Constituye el último capítulo la teoría de funciones elípticas expuesta por el método moderno. Comienza por establecer las funciones σu, ζu, $\wp u$ advirtiendo su doble periodicidad, expone en seguida las propiedades generales de las funciones elípticas (en el sentido más amplio de funciones meromorfas con dos períodos) y especialmente de aquellas tres, llegando así naturalmente al concepto primitivo, con gran ventaja sobre los antiguos procedimientos, y evitando los pesados cálculos que éstos exigían.

Una aplicación muy interesante es la que hace de esta teoría al estudio de las curvas de género *uno*, demostrando que las coordenadas de sus puntos pueden expresarse en funciones elípticas de un parámetro.

Con esto y la integración de la clásica ecuación de Euler, termina este tomo, cuya lectura hace desear la terminación de la obra que constituirá seguramente un excelente libro de texto.

J. R. P.

CRÓNICA CIENTÍFICA

R. Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales de Madrid. Concurso del año 1910.—La Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, abre concurso público para adjudicar tres premios á los autores de las memorias que desempeñen satisfactoriamente, á juicio de la misma Corporación, los temas siguientes:

1.º «Determinar la figura definitiva que, por efecto de las presiones del gas interior, del aire exterior y de los sistemas de suspensión de los diversos pesos, tomará un aeróstato fusiforme, construído con una tela flexible y eláctica, suponiéndole en reposo en medio de una atmósfera tranquila, y calculando asímismo las tensiones correspondientes á cada punto de la tela.»

2.º «Deducción y estudio de la ley de las fases, partiendo de las teorías químicas que suponen el átomo compuesto por un núcleo rodeado de una atmósfera de elementos etéreos.»

3.º «Monografía de los minerales de plomo en España.»

El aspirante al premio no sólo ha de describir los minerales é indicar la procedencia y condiciones de los criaderos en que se encuentran, sino que señalará las aplicaciones que aquéllos tienen en las Artes y en la Industria, y presentará, como justificantes de la obra, los ejemplares de menas, las preparaciones microscópicas, los datos de ensayos y análisis, las muestras de metal, etc., que juzgue pertinentes para la mejor y más completa inteligencia de su trabajo.

Para cada tema se adjudicarán: *premio*, consistente en medalla de oro, diploma, 1.500 pesetas, y 100 ejemplares de la memoria; *accesit*, con medalla de oro y diploma; y *mención honorífica*, en su correspondiente diploma.

Las memorias habrán de estar escritas en castellano ó latín, y se presentarán en la Secretaría de la Academia, (Valverde, 26, Madrid) antes del 31 de Diciembre de 1910. No han de llevar firma ni indicación del nombre del autor, distinguiéndolas por un lema, escrito también en otro sobre cerrado que contenga el nombre del autor y las señas de su residencia habitual. Los autores pueden ser españoles ó extranjeros.

Comisión internacional de la enseñanza matemática.—Esta comisión creada por el IV Congreso internacional de matemáticos, se ha organizado bajo la presidencia del *Comité central* formado de los señores KLEIN, *Presidente*, GREENHILL, *Vicepresidente*, y FEHR, *Secretario general*, constituyendo Delegaciones y Subcomisiones nacionales en las principales naciones.

En España ha sido nombrado para el cargo de Delegado, Presidente de la Subcomisión española, el distinguido catedrático, nuestro querido compañero Dr. D. ZOEL GARCÍA DE GALDEANO, que á su vez ha designado para individuos de la *Subcomisión española* á muy ilustrados profesores de los diversos grados y clases de enseñanza.

Con motivo del próximo Congreso del Progreso de las ciencias, celebrará otro la citada Subcomisión en Valencia, del 27 de Octubre al 3 de Noviembre próximos, de cuyos trabajos daremos cuenta en el próximo número.

Asociación española para el Progreso de las ciencias.—Por acuerdo del Congreso de Zaragoza se ha constituído la nueva *Sección de Astronomía y Física del Globo*, bajo la presidencia del Excelentísimo Sr. D. Tomás de Azcárate, Director del Observatorio de San Fernando.

El próximo Congreso de la Asociación celebrará sus sesiones en Valencia, del 27 de Octubre al 3 de Noviembre próximos, y son varios y muy interesantes los trabajos que habrán de presentarse, y de los cuales daremos cuenta oportunamente en las columnas de esta Revista.

Como en el Congreso anterior habrá interesantes conferencias, en que muy distinguidos profesores expondrán temas especiales ó de carácter general.

Nueva Cátedra de Matemáticas.—Por reciente disposición oficial se ha completado la enseñanza del *Cálculo infinitesimal*, muy poco atendida hasta la fecha, con una nueva asignatura que comprende los *Complementos de Cálculo infinitesimal*, y cursarán en el cuarto grupo los alumnos de las Facultades de Ciencias exactas y físicas.

Creemos muy acertada la reforma, aunque no satisfaga del todo las necesidades de la enseñanza, que reclaman una modificación más profunda en la organización actual de las Facultades de Ciencias.—G. S.

CUESTIONES PROPUESTAS

23 (*). Sea r el radio de un polígono regular de n lados, y d la distancia de su centro á un punto P de su plano; y trácense por este punto las perpendiculares á todos los lados del polígono. Demostrar que la suma de los cuadrados de los segmentos ε, que unen consecutivamente los pies de estas perpendiculares, es

$$\Sigma\varepsilon^2 = n\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\right)^2 (r^2 + d^2).$$

C. Alasia.

24 (**). Sobre los lados BC, CA, AB, de un triángulo ABC, se toman los puntos A_1, B_1, C_1, tales que

$$A_1C = \frac{BC}{k}, \quad B_1A = \frac{CA}{k}, \quad C_1B = \frac{AB}{k}.$$

Siendo N, M, P, los puntos medios de AA_1, BB_1, CC_1; demostrar que los triángulos MNP y ABC tienen el mismo baricentro, y expresar el área del triángulo MNP en función de la de ABC.

E. N. Barisien.

25 (***). Sobre los tres lados de un triángulo ABC se toman puntos A', B', C', que los dividan en una misma relación m/n. Las rectas AA', BB', CC', se cortan en los puntos M, N, P, por los que se trazan: primero, las rectas B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, paralelas respectivamente á BC, CA, AB; después, las rectas C_2A_2, A_2B_2, B_2C_2, paralelas á CA, AB, BC; en fin, las rectas A_3B_3, B_3C_3, C_3A_3, paralelas á AB, BC, CA. Ahora:

1.° Demostrar que los vértices homólogos de los cuatro triángulos homotéticos ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, están en tres líneas rectas que son las medianas del triángulo ABC.

2.° Demostrar que las distancias de los vértices del triángulo ABC á los vértices homólogos del $A_1B_1C_1$ son medias proporcionales entre las distancias de los vértices del primero á los vértices homólogos de los otros dos triángulos $A_2B_2 = C_2$, $A_3B_3C_3$.

3.° Determinar las razones de homotecia de los triángulos $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ al triángulo ABC.

H. van Aubel.

26 (****). Las expresiones

$$(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)(a_3x^2+2b_3xy+c_3y^2)-(a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2)^2,$$
$$(a_1x^2+2a_2xy+a_3y^2)(c_1x^2+2c_2xy+c_3y^2)-(b_1x^2+2b_2xy+by_3{}^2)^2,$$

representan dos cuárticas: demostrar que tienen las mismas invariantes.

Burnside.

27 (*****). Sobre los seis lados de un exágono $A_1A_2A_3$ ..... se construyen exteriormente los triángulos equiláteros $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, ..., é interiormente los triángulos equiláteros $A_1b_1A_2$, $A_2b_2A_3$, ... Sean I_1, I_2, ..., i_1, i_2, ..., los centros de estos triángulos:

1.° Si se construyen los paralelógramos $I_6I_2I_3D$, $I_4I_2I_1E$, el triángulo DI_5E será equilátero.

2.° Si sobre B_6B_4, B_3B_1, se construyen los triángulos equiláteros B_6FB_4, B_3GB_1, la figura FB_2B_5G será un paralelógramo.

3.° Si sobre I_3I_2, i_4i_5, se construyen los triángulos equiláteros I_3HI_2, i_4Ki_5, la figura HI_1i_6K será un paralelógramo.

4.° Si se traza la recta i_2L igual y paralela á I_3i_4 la recta LI_1 será igual y paralela á I_5i_6.

5.° Si se traza la recta b_2M igual y paralela á B_3b_4, la recta MB_1 será igual y paralela á B_5b_6.

6.° Si sobre B_3B_1, b_4b_6, se construyen los triángulos equiláteros B_3NB_1, b_4Pb_6, la figura NB_2b_5P será un paralelógramo.

Esta cuestión de los medios de construir el exágono conociéndose, por ejemplo: 1.° los puntos I_1, I_2, I_3, I_4, i_5, I_6; 2.° B_1, b_2, B_3, B_4, B_5, B_6; 3.° I_1, I_2, I_3, i_4, i_5, I_6; 4.° I_1, i_2, I_3, i_4, I_5, I_6; 5.° B_1, b_2, B_3, b_4, B_5, B_6; 6.° B_1, B_2, B_3, b_4, B_5, b_6.

H. van Aubel.

(*) Cuestión 131 de la R. T. M.
(**) » 132 » » »
(***) » 133 » » » y 271 del P. M.
(****) » 134 » » »
(*****) » 135 » » » y 140 del P. M.

CUESTIONES RESUELTAS

12. En un cuadrilátero inscriptible y circunscriptible sean O el centro del círculo circunscripto, I el centro del círculo inscripto, L el punto de intersección de los diagonales, α y β dos ángulos internos consecutivos. Demostrar que

$$IL = IO \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

G. PESCI.

Designando por l, m, n y p las longitudes de los lados del cuadrilátero, y α, β, γ y δ los ángulos lm, mn, np y pl, respectivamente, siempre pueden expresarse n y p en función de l y m y de los ángulos, cualquiera que sea el cuadrilátero, de este modo

$$n \operatorname{sen} \gamma = m \operatorname{sen} (\beta + \gamma) + l \operatorname{sen} \delta, \quad p \operatorname{sen} \gamma = m \operatorname{sen} \beta + l \operatorname{sen} (\gamma + \delta).$$

Si el cuadrilátero es inscriptible, $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$, y las fórmulas anteriores pueden escribirse así:

$$n \operatorname{sen} \alpha = m \operatorname{sen} (\alpha - \beta) + l \operatorname{sen} \beta, \quad p \operatorname{sen} \alpha = m \operatorname{sen} \beta - l \operatorname{sen} (\alpha + \beta).$$

Si además el cuadrilátero es circunscriptible deberá ser

$$l - m = p - n,$$

condición que puede ponerse en esta forma:

$$m \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2} = l \cos \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta + \alpha}{2}, \qquad [1]$$

lo que permitirá expresar l en función de m, α y β cuando convenga.

Tomando, ahora, como ejes condenados y y x las rectas que contienen los lados l y m, respectivamente, la circunferencia circunscripta al cuadrilátero tendrá por ecuación

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha - mx - ly = 0,$$

y las condenadas de su centro O serán

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{m\left[\cos\frac{\beta}{2}\,\text{sen}\,\frac{\beta+\alpha}{2} - \text{sen}\,\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\alpha\right]}{2\,\text{sen}^2\alpha\cos\frac{\beta}{2}\,\text{sen}\,\frac{\beta+\alpha}{2}} \\ y_1 &= \frac{m\left[\text{sen}\,\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2}\,\text{sen}\,\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\alpha\right]}{2\,\text{sen}^2\alpha\cos\frac{\beta}{2}\,\text{sen}\,\frac{\beta+\alpha}{2}} \end{aligned}\right\} \quad [2]$$

Las rectas n y p tienen por ecuaciones

$$y = -\frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,(\beta+\alpha)}(x-m); \qquad y = -\frac{\text{sen}\,(\beta-\alpha)}{\text{sen}\,\beta}x + l, \quad [3]$$

luego las coordenadas del punto np son

$$x = \frac{m\,\text{sen}^2\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad y = \frac{m\,\text{sen}\,\beta\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\,\text{sen}\,\frac{\beta+\alpha}{2}},$$

de las cuales se deduce la ecuación de la diagonal $lm - np$ que combinada con la de $mn - lp$, da las siguientes coordenadas para el punto L

$$x_2 = m\,\text{sen}^2\frac{\beta}{2}, \qquad y_2 = \frac{m\,\text{sen}\,\beta\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}{2\,\text{sen}\,\frac{\beta+\alpha}{2}}. \quad [4]$$

Para hallar las coordenadas x_3 é y_3 del punto I, observemos que la condición para que la recta $Ax + By + C = 0$ sea tangente á una circunferencia que lo es á los ejes coordenados y está en el primero ó en el tercero de sus ángulos, es

$$4ABx_3^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2C(A+B)\,x_3 + C^2 = 0,$$

de donde

$$x_3 = \frac{C}{4AB\cos^2\frac{\alpha}{2}}\left[-A - B \pm \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\alpha}\right]$$

siendo $x_3 = y_3$ las coordenadas del centro.

Aplicando esta fórmula á las rectas [3], se encuentra que las cordenadas de I son

$$x_3 = y_3 = \frac{m \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta + \alpha}{2}}.$$

Sospechando que los puntos O, L é I están en línea recta pueden formarse las razones $\frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}$ y $\frac{y_2 - y_3}{y_1 - y_3}$, que deben ser iguales, y, si lo son, su valor común es igual al de la razón buscada $\frac{IL}{IO}$.

Así se encuentra

$$\frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} = \frac{y_2 - y_3}{y_1 - y_3} = - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{IL}{IO}.$$

El signo — indica la posición de I entre O y L. Si el ángulo β fuese recto, según la relación (1) sería $l = m$ y $c = d$ y la recta OIL se confundiría con $lm - np$.

J. J. Camacho.

Otra solución de D. J. Rey Pastor, quien hace observar que en un artículo del Sr. G. Pesci que apareció en el número 1 de ANALES titulado *Sobre el cuadrilátero plano inscriptible y circunscriptible á un círculo,* está, entre otras, demostrada la propiedad enunciada en esta cuestión.

13. Determinar tres números x, y, z tales que

$$(y + z)^2 - x^2 = q_1^2; \quad (x + z)^2 - y^2 = q_2^2; \quad (x + y)^2 - z^2 = q_3^2;$$

siendo q_1 q_2 q_3 números enteros.

Este problema enunciado como lo fué por primera vez en la R. T. M. (*) exigiendo á los números pedidos x y z la condición de ser enteros, es en general imposible si los números dados q_1 q_2 q_3 son enteros cualesquiera.

En efecto; puestas las ecuaciones bajo la forma

$$\left.\begin{aligned} (x + y + z)(y + z - x) &= q_1^2 \\ (x + y + z)(z + x - y) &= q_2^2 \\ (x + y + z)(x + y - z) &= q_3^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

se deduce sumando,

$$(x + y + z)^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \qquad (2)$$

(*) Cuestión 118. Núm. 19. p. 132.

luego

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = k^2, \tag{2'}$$

ha de ser un cuadrado perfecto.

Con el nuevo enunciado en el que se ha suprimido aquella condición no exigiéndose otras á los números x y z que la de satisfacer á las ecuaciones (1), es de solución inmediata, pues combinando (2), con las que se deducen de (1) sumadas dos á dos, resulta:

$$x = \frac{q_2^2 + q_3^2}{2k} \qquad y = \frac{q_3^2 + q_1^2}{2k} \qquad z = \frac{q_1^2 + q_2^2}{2k} \tag{3}$$

Para dar algún mayor interés á la cuestión nos referiremos al primer enunciado, investigando las condiciones que deben cumplir los números q_1 q_2 q_3 para que el problema tenga solución, y el modo de hallar dichos números. O lo que es lo mismo, en resumen, vamos á resolver el sistema indeterminado (1) con las seis incógnitas x, y, z, q_1, q_2, q_3, en números enteros. Y esto nos dará ocasión para resolver otro problema de análisis indeterminado más importante.

De (3) se deduce que las sumas $q_2^2 + q_3^2$, $q_3^2 + q_1^2$, $q_1^2 + q_2^2$, y por consiguiente las diferencias $q_2^2 - q_3^2$, $q_3^2 - q_1^2$, $q_1^2 - q_2^2$, han de ser múltiplas de $2k$; es decir,

$$q_1^2 = km, \quad q_2^2 = kn, \quad q_3^2 = kp, \tag{4}$$

siendo m . n . p enteros de la misma paridad; y recíprocamente, si q_1, q_2, q_3 son números que cumplen las condiciones (2') y (4), los valores de x, y, z que se obtienen de (3) resuelven el próblema.

Todo se reduce, pues, á resolver la ecuación (2') en números enteros de esta naturaleza.

Cualquiera que sea k, siempre puede ponerse bajo la forma $k = \lambda K^2$ siendo K entero y $\lambda = abc \ldots\ldots$ producto de factores primos diferentes entre sí.

Para que se cumplan las condiciones (4) habrá de ser

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \lambda K X \\ q_2 &= \lambda K Y \\ q_3 &= \lambda K Z \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

donde X, Y, Z son enteros que satisfacen á la ecuación

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = K^2. \tag{6}$$

Recíprocamente; resuelta esta ecuación en números primos entre sí, las fórmulas que dan todas las soluciones de la cuestión son las (5) y las

$$x=\frac{\lambda}{2}(Y^2+Z^2),\qquad y=\frac{\lambda}{2}(Z^2+X^2)\qquad z=\frac{\lambda}{2}(X^2+Y^2)$$

pudiendo recibir λ cualquier valor entero positivo ó negativo, par necesariamente puesto que siendo los restos cuadráticos respecto al módulo 4 sólo 0 y 1, resulta que uno sólo de los números X, Y, Z es impar y los otros dos pares.

Fáltanos indicar como pueden obtenerse todas las soluciones en números enteros primos entre sí de la ecuación (6). Para ello, teniendo en cuenta esto último, tomamos dos enteros cualesquiera pares X, Y; descomponiendo el número que resulta de sumar sus cuadrados, en diferencia de dos, para lo cual basta descomponer dicho número en producto de dos factores pares de todos los modos posibles pues si $2a$ $2b$ son estos, se tiene idénticamente

$$2a\,.\,2b=(a+b)^2-(a-b)^2.$$

Ahora bien, procediendo ordenadamente partiendo de los números menores pares, á fin de evitar que alguno de los sistemas de números X, Y, Z, K que así se van obteniendo resulte múltiplo de otro ya obtenido antes lo cual sucedería si $a+b$ y $a-b$ fuesen pares, se tomarán a y b de distinta paridad para lo cual es preciso tomar aquéllos dos primeros X, Y tales que sus mitades sean de la misma paridad, es decir, que X é Y sean los dos múltiplos de 4 ó los dos simplemente pares.

Procediendo de este modo, de menor á mayor, y combinando cada número par X con los pares Y mayores que él, se obtienen todas las soluciones enteras de la ecuación (6) y con ellas, todas las del sistema (1).

He aquí los sistemas primeros de valores de X, Y, Z, y los correspondientes de x, y, z, q_1, q_2, q_3, deducidos de ellos con el valor $\lambda = 2$ que es el más sencillo posible.

X	0	0	0	.	0	0	.	.	2	2	2	2	2	. .
Y	0	0	0	.	4	8	.	.	2	6	6	10	10	. .
Z	1	3	5	.	3	15	.	.	1	3	9	11	25	. .
K	1	3	5	.	5	17	.	.	3	7	11	15	27	. .

. .	4	4	4	4	4	. .
. .	4	8	8	12	12	. .
. .	7	1	19	39	3	. .
. .	9	9	21	41	13	. .

x	1	9	25	.	25	189	.	.	5	45	117	221	725	. .
y	1	9	25	.	9	125	.	.	5	13	85	125	629	. .
z	0	0	0	.	16	64	.	.	8	40	40	104	104	. .

q_1	0	0	0	.	0	0	.	.	12	28	44	60	88	. .
q_2	0	0	0	.	40	272	.	.	12	84	132	300	540	. .
q_3	2	18	50	.	30	510	.	.	6	42	198	330	1350	. .

Claro está que además de todas las soluciones obtenidas tiene el sistema (1) todas las del

$$x + y + z = 0 \qquad q_1 = 0 \quad q_2 = 0 \quad q_3 = 0.$$

Para terminar, citaremos la identidad curiosa

$$(A\,B)^2 + (A\,(A \pm B))^2 + (B\,(A \pm B))^2 = (A^2 + B^2 \pm AB)^2$$

deducida por el Sr. Ugo Dainelli en el Giornale de Battaglini 1877 p. 378 de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = 0,$$

y que puede servir para obtener soluciones de la ecuación (6) sin más que dar valores enteros á A y B.

Julio Rey Pastor.

Otras soluciones más incompletas de los Sres. H. Brocard, L. de Alba; C. Allué y F. Parrado.

14. La suma de las potencias impares semejantes de $2n + 1$ es divisible por $2n + 1$.

E. H.

Si $a_0, a_1, \ldots\ldots a_{2n}$ son los números que forman el sistema incongruente, suponiendo el índice k tal que $a_k \equiv k$ (mód. $2n + 1$), se verificará respecto al mismo módulo, siendo m cualquier número entero

$$a_0^m + a_1^m + \ldots. + a_{2n}^m \equiv 1^m + 2^m + \ldots.. + (2n)^m =$$
$$= (1^m + (2n)^m) + (2^m + (2n-1)^m) + \ldots.. + (n^m + (n+1)^m);$$

pero si m es impar, cada suma parcial encerrada en paréntesis es divisible por $2n + 1$, luego también lo será el primer miembro de la congruencia.

J. Rey Pastor.

Otras soluciones de D. L. de Alba, D. J. Ximénez de Embún y J. Encinas.

15. **Siendo c la cuerda y f la flecha de un arco α, demostrar que se tiene aproximadamente $\alpha = \sqrt{c^2 + \frac{16}{3} f^2}$, y determinar la aproximación que se obtiene con esta fórmula.**

L. S. DE LA CAMPA.

Sean $c', f'; c'', f''; \ldots\ldots; c^{(n)}, f^{(n)}$, las cuerdas y flechas de los arcos $\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{4}, \ldots\ldots, \frac{\alpha}{2^n}$; tendremos. $c^2 + \frac{16}{3} f^2 = 4c'^2 + \frac{4}{3} f^2$,

y como $\quad \frac{f}{f'} = 2\left(1 + \cos\frac{\alpha}{4}\right)$, será $c^2 + \frac{16}{3} f^2 < 4c'^2 + \frac{64}{3} f'^2$.

Del mismo modo:

$$4c'^2 + \frac{64}{3} f'^2 < 16\, c''^2 + \frac{856}{3} f''^2 < \ldots\ldots < 4^n\, c^{(n)}{}_2 + \frac{16}{3}\, 4^n\, f^n <^2 \ldots\ldots$$

y puesto que, al crecer n indefinidamete,

$$\lim \frac{16}{3}\, 4^n f^{(n)^2} = 0 \quad \text{y} \quad \lim 4^n\, c^{(n)^2} = \alpha^2,$$

resulta

$$\alpha c' < \sqrt{c^2 + \frac{16}{3} f^2} < \alpha, \qquad \alpha - \sqrt{c^2 + \frac{16}{3} f^2} < \alpha - 2c' < \frac{\alpha^3}{96 R^2}$$

Puede obtenerse otra expresión para el caso en que

$$\cos\frac{\alpha}{4} \overline{\overline{>}} \sqrt{3} - 1 \quad \text{ó sea: } \cos\frac{\alpha}{2} \overline{\overline{>}} \frac{c^2 - 4f^2}{c^2 + 4f^2} > 7 - 4\sqrt{3}.$$

se tiene en efecto:

$$f^2 \overline{\overline{>}} 12 f'^2, \quad c^2 + \frac{16}{3} f^2 \overline{\overline{>}} 4\, c'^2 + 16\, f'^2 = 16\, c''^2,$$

y por tanto,

$$4\, c'' < \sqrt{c^2 + \frac{16}{3} f^2} < \alpha$$

de donde

$$\alpha - \sqrt{c^2 + \frac{16}{3} f^2} < \alpha\, 4\, c'' > \frac{\alpha^2}{384\, R^2}.$$

J. Rey.

16. La suma de los cuadrados de las rectas que unen entre sí los centros de los triángulos equiláteros construídos exterior ó interiormente sobre los lados de un triángulo cualquiera ABC es igual á

$$\frac{5}{3}(p^2 - r\delta) - 2S\sqrt{3}$$

siendo p, r, S y $\delta = 4R + r$ las notaciones usuales.

L. DE ALBA.

Designando por A_1, B_1 y C_1 los centros de los triángulos exteriores, y sustituyendo en la expresión

$$\overline{A_1B_1}^2 = \overline{A_1C}^2 + \overline{B_1C}^2 - 2A_1C \,.\, B_1C \cos A_1CB_1 \qquad (1)$$

los valores de

$$A_1C = \frac{a}{\sqrt{3}}, \; B_1C = \frac{b}{\sqrt{3}}, \; \widehat{A_1CB_1} = \frac{\pi}{3} - \hat{C}$$

se halla

$$\overline{A_1B_1}^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}{3} + \frac{ab \operatorname{sen} C}{\sqrt{3}},$$

y teniendo presente que

$$ab\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = p_c \quad \text{y} \quad ab \operatorname{sen} C = 2S,$$

será

$$\overline{A_1B_1}^2 = \frac{a^2 + b^2 - p_c}{3} + \frac{2S}{\sqrt{3}};$$

de donde se deduce

$$\Sigma\,\overline{A_1B_1}^2 = \frac{2\Sigma a^2 - \Sigma p_c}{3} + \frac{6S}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{4p^2 - 4r\delta - p^2 + r\delta}{3} + 2S\sqrt{3} = p^2 - r\delta + 2S\sqrt{3}.$$

De modo análogo, se halla para los triángulos interiores

$$\Sigma\,\overline{A_2B_2}^2 = p^2 - r\delta - 2S\sqrt{3}.$$

Las expresiones obtenidas difieren de las del enunciado, debido, sin duda, á la equivocación de un signo padecido por el autor, ya que á las últimas se llega cambiando por el signo + el — contenido en la fórmula (1).

A. U.

Otra solución analítica, conforme con la anterior, de D. J. Rey Pastor, quien además demuestra que siendo A', B' y C' los terceterceros vértices de los triángulos exteriores, y A'', B'' y C'' los de los interiores, se verifica

$$\Sigma \overline{A_1B_1}^2 = \overline{AA'}^2 \quad \text{y} \quad \Sigma \overline{A_2B_2}^2 = \overline{AA''}^2,$$

y que las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes, así como también las AA'', BB'' y CC''.

17. Se considera una cónica y un punto M de su plano. Una secante variable que pasa por M encuentra á la cónica en A y B. Hallar el lugar de los centros de semejanza de los círculos descritos sobre MA y MB como diámetros.

E. N. BARISIEN.

Designando por O y o' los centros de las dos circunferencias, y por N y P los conjugados armónicos del punto M respecto de los pares OO' y AB, respectivamente, se verificará $MP = 2MN$ por ser $MA = 2MO$ y $MB = 2MO'$ y corresponderse las figuras armónicas en las series semejantes. Ahora, el lugar de P al variar la posición de AB es la polar de M respecto de la cónica, y N es el centro de semejanza de los círculos O y o' distintos del M; luego el lugar pedido es la recta paralela á dicha polar que equidista de ella y del punto M.

J. Rey ***Pastor.***

Otra solución análoga de D. L. de Alba.

PUBLICACIONES RECIBIDAS

Polisección gráfica del ángulo, por el coronel de Artillería retirado, D. I. Cabanyes. Madrid 1908.

Leçons sur les fonctions définies par les équations differentielles du premier ordre, professées au collége de France, por P. Boutroux. París 1908.

Leçons de Mécanique céleste, professées á la Sorbonne, por H. Poincaré. Tome II—IIe partie.—*Théorie de la Lune.* París 1909.

Anales del Museo nacional de Montevideo, publicados bajo la dirección del prof. J. Arechavaleta. Volumen VII.—*Flora uruguaya,* T. IV. Entrega I. Montevideo 1909.

Boletín de crítica, enseñanza y bibliografía matemática, publicado por el Dr. Zoel G. de Galdeano. Núms. 1-2. Zaragoza 1908 y 1909.

Revista chilena de Historia Natural, publicación trimestral ilustrada. Director, Prof. C. E. Porter. Año XII, 1908. Santiago de Chile.

Discursos leídos ante la R. Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales, en las recepciones públicas de los Profesores D. Miguel Vegas, y D. Juan Fages. Madrid 1909.

Almanaque náutico para el año 1910, calculado en el Instituto y Observatorio de Marina de San Fernando para el meridiano de Greenwich. San Fernando 1908.

Introducción al estudio de los Miriópodos, por el Prof. G. E. Porter. Santiago de Chile 1908.

El arte de construir en los países expuestos á temblores de tierra, por el Conde de Montessus de Ballore, Jefe de escuadrón de Artillería. Traducido del francés. Santiago de Chile 1907.

Observations sur quelques fougères argentines nouvelles ou peu connues, por C. M. Hicken. Buenos Aires 1907.

Índice alfabético y sinonímico formado para la última edición española de la *Anatomía humana descriptiva* del Prof. Gh. C. Sappey, por C. E. Porter. Valparaíso 1900.

Notes on the climate of Mont Estoril and the Riviera of Portugal, by D. G. Delgado. Lisboa 1908.

IV Congreso científico latino-americano y 1.º Pan-americano. —*La enseñanza médica en el Perú*, por David Matto, Delegado de la Universidad de Lima. —*Bases para una oficina internacional pan-americana de informaciones sobre instrucción pública*, etcétera, por el Dr. Vicente H. Delgado. Lima 1908.

Catálogo metódico de los Mamíferos chilenos, existentes en el Museo de Valparaíso el 31 de Diciembre de 1905. Confeccionado por J. A. Wolffsohn y C. E. Porter. Santiago de Chile.

Los insectos de las arboledas de Contulmo, por M. J. Rivera. Santiago de Chile 1906.

Nuevo método general para la determinación electroquímica de los metales muy oxidables. Tesis de doctorado en Ciencias químicas, por J. Peset y Aleixandre. Valencia 1909.

Les observations solaires á l'Observatoire astronomique de Cartuja (Granada), par R. Garrido, S. J. Bruxelles 1909.

Lecciones de Geometría métrica, por el Prof. D. C. Jiménez Rueda. 2.ª ed. Madrid 1909.

Segunda enseñanza. Índice de materias que se han de tratar en cada una de las asignaturas del Plan de estudios de 15 de Febrero de 1908. San José de Costa Rica 1909.

Apuntes para la teoría geométrica de las líneas cíclicas de cuarto orden y primera clase. Tesis doctoral de Ciencias exactas, por Sixto Cámara. Zaragoza 1909.

Establecimiento tipográfico de Emilio Casañal, Coso 100, Zaragoza