

# Trabajo Fin de Grado

Análisis comparativo de distintas técnicas de enventanado para análisis armónico basado en la DFT.

Comparative analysis of different windowing techniques for harmonic analysis based on DFT.

Autor

Jorge Calvé Martín

Director

Pedro Ramos Lorente

Escuela Universitaria Politécnica de Teruel

2023



## Resumen

Este trabajo de fin de grado basado en la transformada discreta de Fourier se estructura en dos partes bien definidas. La primera consiste en el estudio de la transformada. Para ello, se hará uso de señales sintetizadas para entender el efecto de los distintos aspectos que afectan al resultado de las transformadas.

La segunda parte del trabajo, basado en el estudio de la primera parte, consistirá en el análisis espectral de unas pruebas tomadas en los años 2019 y 2022 en el telescopio JAST80 del Observatorio Astrofísico de Javalambre. El fin de esto será confirmar o rechazar la hipótesis de un desplazamiento frecuencial en este periodo de tiempo.

## Abstrac

This Bsc thesis, based on the discrete Fourier transform, is structured into two defined parts. The first part involves the study of the transform. To achieve this, synthetic signals will be used to understand the impact of various factors on the results of the transforms.

The second part of the work, based on the study of the first part, will consist of the spectral analysis of tests conducted in the years 2019 and 2022 at the JAST80 telescope of the Javalambre Astrophysical Observatory. The aim of this is to confirm or reject the hypothesis of a frequency shift during this time period.



## Índice

1	Introducción.....	1
2	Justificación del trabajo.....	2
3	Objetivos.....	2
4	Fundamentos teóricos.....	2
4.1	Series de Fourier .....	2
4.2	Transformada de Fourier .....	4
4.3	Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT) .....	4
4.4	Transformada Discreta de Fourier (DFT) .....	5
4.5	Transformada Rápida de Fourier (FFT) .....	5
4.6	Enventanado .....	6
4.6.1	Ventana rectangular .....	8
4.6.2	Ventana de Blackman .....	8
4.6.3	Ventana de Hamming .....	8
4.6.4	Selección ventanas .....	9
4.7	Resolución espectral .....	9
4.7.1	Número de muestras (M) .....	9
4.7.2	Tamaño FFT (N).....	12
4.7.3	Zero-padding .....	16
4.8	Añadir muestras (M) o aplicar Zero-padding.....	17
5	Análisis señales OAJ .....	17
5.1	Telescopio .....	19
5.2	Acelerómetro .....	20
5.3	Señales .....	23
5.3.1	Prueba 1.....	23
5.3.2	Prueba 2.....	26
5.3.3	Prueba 5.....	27
5.3.4	Prueba 6.....	28
5.3.5	Prueba 7.....	29
5.3.6	Prueba 8.....	30
5.3.7	Prueba 10.....	31
5.3.8	Prueba 11.....	32
5.3.9	Prueba 13.....	33



6	Conclusiones.....	34
6.1	Fase aceleración.....	34
6.2	Fase avance .....	39
6.3	Fase frenado .....	42
7	Referencias .....	47



## Índice de tablas

Tabla 1, pruebas analizadas.....	18
Tabla 2, prueba 1 .....	23
Tabla 3, prueba 1, fase aceleración .....	25
Tabla 4, prueba 1, fase avance .....	25
Tabla 5, prueba 1, fase frenado.....	25
Tabla 6, prueba 2 .....	26
Tabla 7, prueba 2, fase aceleración .....	26
Tabla 8, prueba 2, fase avance .....	26
Tabla 9, prueba 2, fase frenado.....	26
Tabla 10, prueba 5 .....	27
Tabla 11, prueba 5, fase aceleración .....	27
Tabla 12, prueba 5, fase avance .....	27
Tabla 13, prueba 5, fase frenado.....	27
Tabla 14, prueba 6 .....	28
Tabla 15, prueba 6, fase aceleración .....	28
Tabla 16, prueba 6, fase avance .....	28
Tabla 17, prueba 6, fase frenado.....	28
Tabla 18, prueba 7 .....	29
Tabla 19, prueba 7, fase aceleración .....	29
Tabla 20, prueba 7, fase avance .....	29
Tabla 21, prueba 7, fase frenado.....	29
Tabla 22, prueba 8 .....	30
Tabla 23, prueba 8, fase aceleración .....	30
Tabla 24, prueba 8, fase avance .....	30
Tabla 25, prueba 8, fase frenado.....	30
Tabla 26, prueba 10 .....	31
Tabla 27, prueba 10, fase aceleración .....	31
Tabla 28, prueba 10, fase avance .....	31
Tabla 29, prueba 10, fase frenado.....	31
Tabla 30, prueba 11 .....	32
Tabla 31, prueba 11, fase aceleración .....	32
Tabla 32, prueba 11, fase avance .....	32



Tabla 33, prueba 11, fase frenado.....	32
Tabla 34, prueba 13 .....	33
Tabla 35, prueba 13, fase aceleración.....	33
Tabla 36, prueba 13, fase avance .....	33
Tabla 37, prueba 13, fase frenado.....	33

## Índice de figuras

Figura 1, representación de espectros de DTFT frente DFT .....	5
Figura 2, número de operaciones para N muestras de DFT o FFT .....	6
Figura 3, ejemplo ventanas. ....	7
Figura 4, señal periódica.....	7
Figura 5, señal tras aplicar enventanado.....	8
Figura 6, señal temporal y espectro para 20 muestras .....	10
Figura 7, señal temporal y espectro para 50 muestras .....	10
Figura 8, señal temporal y espectro para 100 muestras .....	10
Figura 9, señal temporal y espectro para 150 muestras .....	11
Figura 10, señal temporal y espectro para 250 muestras .....	11
Figura 11, señal temporal y espectro para 450 muestras .....	11
Figura 12, señal temporal y espectro para 850 muestras .....	12
Figura 13, señal temporal y espectro para 1500 muestras .....	12
Figura 14, señales temporales.....	13
Figura 15, espectros para FFT de 4 puntos.....	13
Figura 16, espectros para FFT de 16 puntos.....	14
Figura 17, espectros para FFT de 256 puntos.....	14
Figura 18, espectros para FFT de 1024 puntos.....	14
Figura 19, espectros para FFT de 4096 puntos.....	15
Figura 20, espectros para FFT de 16384 puntos.....	15
Figura 21, espectros para FFT de 32768 puntos.....	15
Figura 22, espectros para FFT de 1048576 puntos .....	16
Figura 23, comparación del efecto Zero-padding .....	17
Figura 24, señales temporales prueba 13 .....	19
Figura 25, vista general del OAJ.....	19
Figura 26, telescopio JAST80 del OAJ .....	20
Figura 27, posición acelerómetros .....	21
Figura 28, acelerómetro sísmico Wilcoxon modelo 731A.....	22
Figura 29, acelerómetro acotado .....	22
Figura 30, prueba 1, espectro fase aceleración.....	23
Figura 31, prueba 1, espectro fase avance.....	24
Figura 32, prueba 1, espectro fase frenado .....	24



Figura 33, espectros prueba 2 .....	35
Figura 34, espectros prueba 7 .....	35
Figura 35, espectro prueba 6 200-400 Hz .....	36
Figura 36, espectros prueba 6 350-700 Hz.....	37
Figura 37, espectros prueba 7 350-700 Hz.....	37
Figura 38, espectros prueba 8 350-700 Hz.....	37
Figura 39, espectros prueba 13 650-1000 Hz.....	38
Figura 40, espectro prueba 11.....	38
Figura 41, espectro fase avance prueba 5.....	39
Figura 42, espectro fase avance prueba 7 400-600 Hz.....	39
Figura 43, señal temporal prueba 6 .....	40
Figura 44, espectro fase avance prueba 6.....	40
Figura 45, prueba 6, señal temporal recortada sin pico.....	41
Figura 46, espectro prueba 6 fase avance recortada .....	41
Figura 47, espectro avance prueba 13 .....	42
Figura 48, espectro fase frenado prueba 2 .....	42
Figura 49, espectro fase frenado prueba 5 .....	43
Figura 50, espectro fase frenado prueba 7 200-400 Hz .....	43
Figura 51, espectro fase frenado prueba 6 .....	44
Figura 52, espectro fase frenado prueba 7 .....	44
Figura 53, espectro fase frenado prueba 8 .....	44
Figura 54, espectro fase frenado prueba 13 .....	45



## 1 Introducción

En el procesado digital de señal, Jean Baptiste-Joseph Fourier es sinónimo de la transformada de Fourier y las series de Fourier. Jean Baptiste fue un matemático y físico francés del siglo XIX, descubrió estas herramientas fundamentales las cuales contribuyeron al desarrollo de la ciencia de procesado digital de señal.

Las series de Fourier permiten analizar y representar señales periódicas en términos de una suma de senos y cosenos. La transformada de Fourier es una extensión de las series de Fourier con la que podemos analizar señales no periódicas en el dominio de la frecuencia. Es una herramienta esencial en el análisis de señales y sistemas y es ampliamente utilizada en diversos campos como la física, la medicina, las telecomunicaciones o la informática entre tantos.

Además de la transformada de Fourier, existen otras transformadas derivadas de esta, como la transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT por sus siglas en inglés) y la transformada discreta de Fourier (DFT). La DFT es una versión discreta en frecuencia de la DTFT utilizada en el procesamiento digital de señales.

En 1963, EE. UU, la Unión Soviética y Reino Unido, firman el *Tratado de Prohibición de Pruebas Nucleares*. En este se ratificaba el compromiso de las potencias nucleares de no realizar pruebas en el espacio, atmósfera o bajo el agua pero no especificaba nada en cuanto a pruebas bajo tierra, debido a las limitaciones de los sismógrafos para diferenciar vibraciones causadas por movimientos propios de la tierra o explosiones [1]. Este hecho provocó que John Tukey, miembro del Consejo Asesor Científico del presidente Kennedy, trabajara en una forma más rápida de realizar transformadas y con la ayuda de James W. Cooley, programador de IBM, crearon el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) [2], este lo publicarían en el artículo *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series* [3].

En su publicación, Cooley y Tukey referenciaban a un artículo previo de I.J. Good publicado en 1958 para el desarrollo del algoritmo de la FFT [4], otros artículos previos fueron apareciendo como el de G.C. Danielson y C. Lanczos [5] y, aunque Cooley y Tukey no se basaron en el trabajo de ellos, se demostró que ya existían estudios previos en el avance de un sistema de cálculo de transformadas más eficiente. Pero el primero de todos se descubriría que fue del alemán Carl Friedrich Gauss, el cual nunca publicaría nada relacionado, solo se descubriría en un manuscrito, probablemente de 1805 (Fourier publicó su trabajo sobre series y transformadas en *Teoría analítica del calor* en 1822), donde escribió un algoritmo similar al de la FFT de Cooley y Tukey [6].

Este trabajo de fin de grado basa su estudio en la DFT y su algoritmo FFT. Estas herramientas han tenido innumerables aportaciones a diversos campos, desde su descubrimiento para la búsqueda de pruebas de experimentos nucleares durante la Guerra Fría hasta hoy en día, donde se aplica en procesado digital de señal para la comprensión de archivos, detección de señales en la industria de telecomunicaciones, análisis de vibraciones aplicándola en resonancias de estructuras mecánicas, motores, turbinas. En medicina se utiliza en la monitorización de señales biológicas como electroencefalogramas y electrocardiogramas, resonancias magnéticas, identificación de enfermedades o estudio de bacterias. Incluso en finanzas se utiliza en el análisis de

series de tiempo financieras, en resumen, la FFT ha tenido un gran impacto en innumerables campos permitiendo el procesado más rápido de datos, lo que ha llevado a grandes avances en estas y otras tantas áreas.

## 2 Justificación del trabajo

La precisión en un telescopio astronómico es crucial para obtener imágenes detalladas y de calidad del universo. Cualquier pequeña perturbación o desviación podría provocar distorsiones en la imagen y, en consecuencia, una incorrecta interpretación de los datos obtenidos.

Unos de los problemas que puede afectar a la precisión de un telescopio es vibración indeseable que puede ser causada por factores externos, como el viento o la actividad sísmica. Ante estos no podemos hacer nada, salvo ser conscientes de ellos a la hora de interpretar datos. En cambio, otros problemas que podemos encontrar son las vibraciones indeseables producidas por el desgaste de los elementos mecánicos.

Este trabajo aborda el posible desplazamiento de las frecuencias del telescopio JAST80 del Observatorio Astrofísico de Javalambre (OAJ) mediante el estudio de la DFT y la FFT aplicadas a muestras reales.

El trabajo puede aportar una mayor comprensión sobre el comportamiento del telescopio frente al paso del tiempo y si este se ve afectado por nuevas vibraciones debidas al deterioro de los componentes.

En conclusión, este trabajo estudiará la transformada discreta de Fourier, primero, utilizando señales sintetizadas para mostrar los efectos de ciertas técnicas del estudio de señales (enventanado, Zero-padding...) para finalmente aplicarlo a señales reales obtenidas del telescopio del OAJ y obtener conclusiones al respecto.

## 3 Objetivos

- Estudiar la problemática de la resoluciónpectral en el análisis de señales en el dominio frecuencial.
- Realizar un estudio teórico de distintas técnicas de enventanado para análisis armónico comparado basado en la DFT.
- Diseñar banco de pruebas y realizar ensayos sobre dichas señales.
- Analizar el efecto de distintos parámetros en el análisis espectral.
- Aplicar estas técnicas sobre un conjunto de señales representativas de problemáticas típicas.
- Aplicación de las técnicas sobre señales reales para confirmar o rechazar la hipótesis de desplazamientos en las principales frecuencias resonantes.

## 4 Fundamentos teóricos

### 4.1 Series de Fourier

Las series de Fourier son una herramienta matemática para analizar y representar cualquier señal periódica como un sumatorio de señales que componen la original. Es



decir, una combinación de funciones seno y coseno de diferentes amplitudes y frecuencias.

Una función podrá ser representada mediante series de Fourier si es:

- Periódica

$$f(t) = f(t + kT) \quad (1)$$

Donde  $T$  es el periodo de la señal y  $k$  es un entero.

- Continua a trozos.
- Está acotada.
- En un periodo cualquiera, existen un número finito de máximos y mínimos.

La ecuación general es la siguiente:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi}{T} nt + b_n \sin \frac{2\pi}{T} nt \right) \quad (2)$$

Donde:

- $f(t)$  es la señal original.
- $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de Fourier que toman los valores mediante estas ecuaciones:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (3)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \left( \frac{2\pi}{T} nt \right) dt \quad (4)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \left( \frac{2\pi}{T} nt \right) dt \quad (5)$$

Por la fórmula de Euler:

$$e^{\pm j\alpha} = \cos(\alpha) \pm j \sin(\alpha) \quad (6)$$

Las fórmulas trigonométricas anteriores se pueden expresar en su forma compleja:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi}{T} nt} dt \quad (7)$$

Donde  $C_n$ :

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt \quad (8)$$

## 4.2 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier (FT) permite representar una señal en tiempo continuo en el dominio frecuencial, facilitando el análisis de las componentes que la forman. La diferencia con las series de Fourier es que esta técnica se utiliza para analizar la señal como una suma de senos y cosenos de diferentes frecuencias, mientras que la transformada permite hacerlo en un solo paso proporcionando información sobre la amplitud y la fase de los componentes.

Para poder aplicar la transformada de Fourier a una señal, debe cumplir las siguientes premisas:

- En cualquier intervalo finito, deben existir:
  - Un número finito de máximos y mínimos.
  - Un número finito de discontinuidades.
- La señal debe ser absolutamente integrable.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = M ; -\infty < M < \infty \quad (9)$$

La ecuación que define la transformada de Fourier en tiempo continuo es:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (10)$$

## 4.3 Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT)

Análogamente, encontramos la trasformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT por sus siglas en inglés), periódica en  $2\pi$  de variable real  $f$  y debe cumplir con las premisas del apartado 4.2. Pero a diferencia de la TF, esta se aplica a funciones discretas y se define por la siguiente ecuación:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (11)$$

NOTA: En el trabajo, se referenciará a la frecuencia de señales de tiempo continuo como frecuencia analógica y, para señales discretas como frecuencia digital. Para la frecuencia analógica se utilizará las letras mayúsculas  $F$  (Hz) u  $\Omega = 2\pi F$  (rad) y letras minúsculas para la frecuencia digital ( $\omega = 2\pi f$ ). La ratio entre las frecuencias analógicas y digitales depende de la frecuencia de muestreo  $F_s$ :  $\omega = \Omega/F_s$  y  $f = F/F_s$

#### 4.4 Transformada Discreta de Fourier (DFT)

La DFT es una representación de Fourier alternativa para secuencias finitas, esta no es una función de variable continua, es una secuencia la cual corresponde a muestras equiespaciadas en frecuencia de la transformada de Fourier en tiempo discreto [7].

$$X[k] = X(\omega) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (12)$$

Donde:

- $N$  es el número de muestras de la DFT
- $k$  son los índices de la secuencia

La DFT se puede calcular también con la siguiente ecuación:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (13)$$

El número de muestras que tomemos es fundamental a la hora de representar la secuencia, a mayor  $N$ , mejor será el muestreo que realizamos sobre la DTFT y por lo tanto menos información perderemos al representarla.

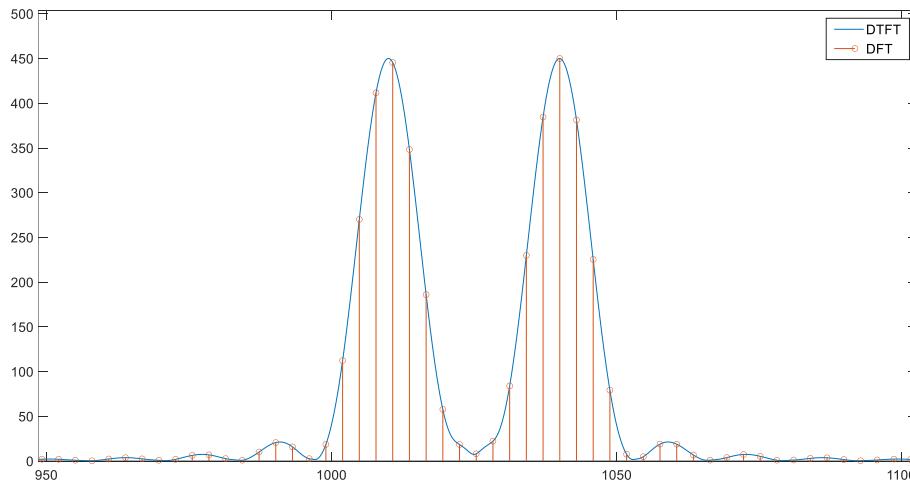


Figura 1, representación de espectros de DTFT frente DFT

#### 4.5 Transformada Rápida de Fourier (FFT)

La FFT es un algoritmo matemático que permite calcular la transformada de Fourier de manera mucho más eficiente. La FFT se basa en la descomposición de los cálculos en sucesivas DFT más pequeñas para aprovechar la simetría y periodicidad de la exponencial compleja  $W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$  [7].

El número de cálculos que hay que procesar mediante la DFT es  $N^2$ , siendo  $N$  el tamaño de la DFT. En cambio, con el algoritmo de la FFT la escala es  $N \log_2 N$  [3].

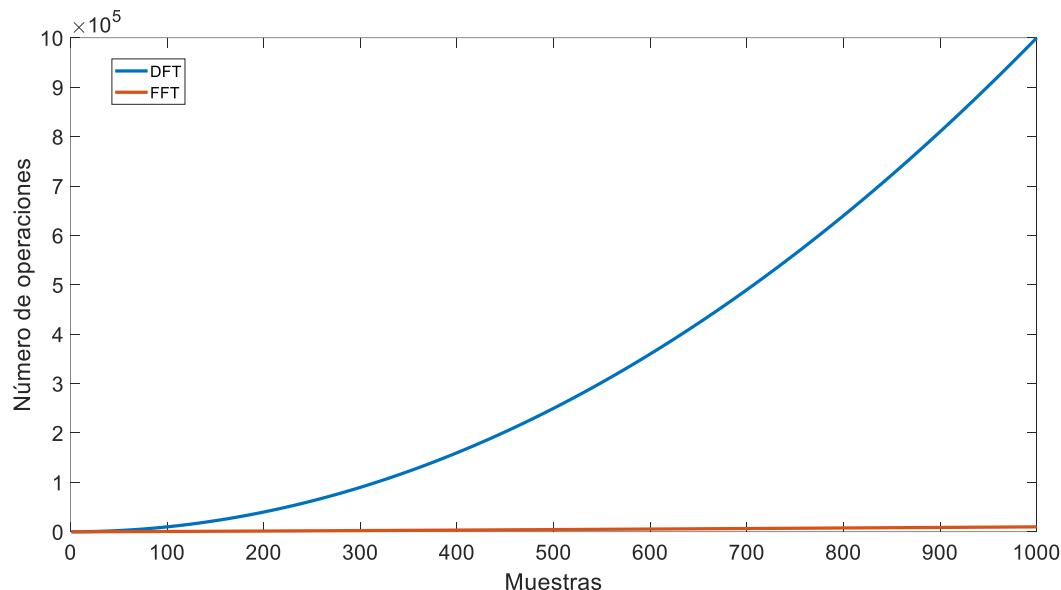


Figura 2, número de operaciones para  $N$  muestras de DFT o FFT

Como se aprecia en la figura 2, el número de operaciones requeridas para la FFT es muy inferior al de la DFT, cuando tenemos una secuencia de unas 1000 muestras, el número de operaciones para calcular el espectro escala a 1 millón en la DFT, mientras que para la FFT apenas llega a las 10.000, haciendo a esta mucho más óptima para cálculo computacional.

#### 4.6 Enventanado

El enventanado es la técnica utilizada para dar forma a una señal antes de calcular su transformada. Esta técnica consiste en multiplicar la señal original por una función ventana como las que se muestran en la figura 3. Por la naturaleza finita de las señales, la ventana rectangular está implícita en el cálculo de la transformada.

No obstante, es importante aplicar otras ventanas con ciertas características para mitigar efectos que pueden dificultar el estudio de una señal.

A continuación, se muestra el efecto de aplicar diferentes ventanas a una misma señal:

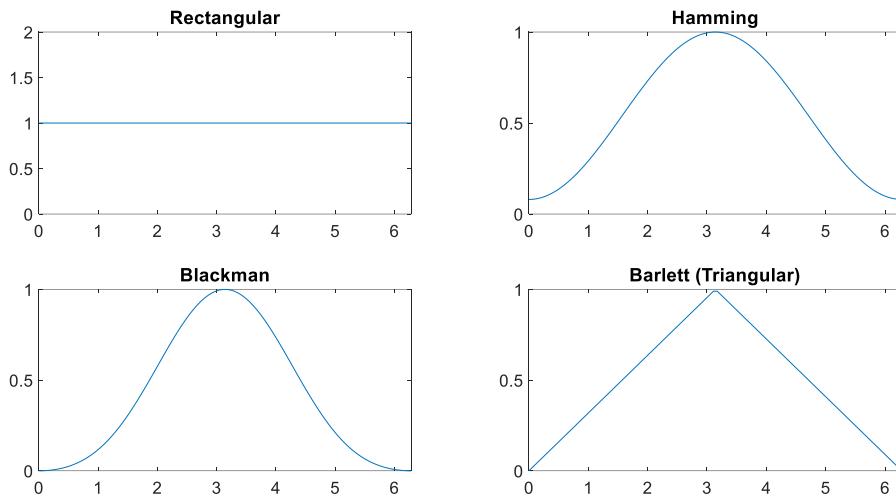


Figura 3, ejemplo ventanas.

Estas son sólo 4 entre muchas que existen. En el siguiente ejemplo se muestra el efecto de multiplicar las ventanas por la señal  $x(t) = \sin(2\pi 0.3t)$

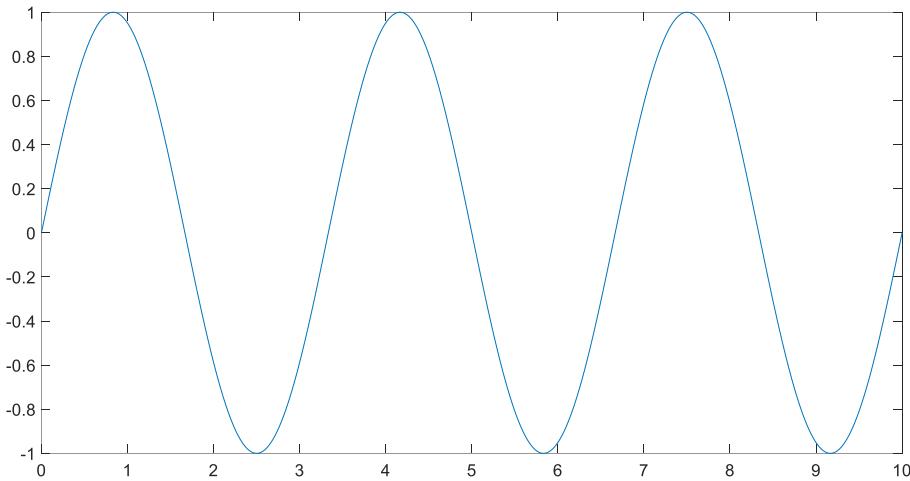


Figura 4, señal periódica

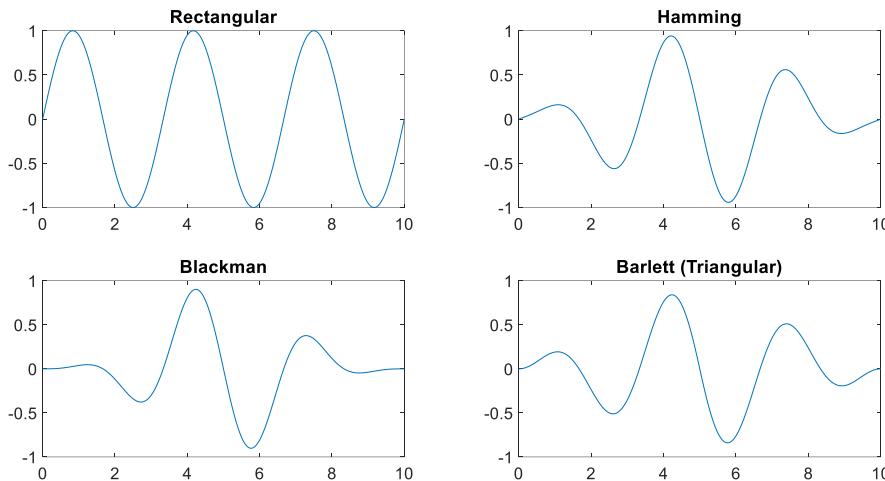


Figura 5, señal tras aplicar enventanado

Para realizar el análisis del apartado 5 se usarán las ventanas rectangular, Blackman y Hamming.

#### 4.6.1 Ventana rectangular

La primera ventana seleccionada es la rectangular debido a su simplicidad, no introduce distorsión debido a que estamos analizando la señal original sin modificar. Es la ventana que proporciona los lóbulos más estrechos, por lo que es idónea para evitar solapamientos entre frecuencias muy cercanas y de amplitud similar.

Por contra, la ventana rectangular tiene una gran fuga espectral, de este modo introduce lóbulos laterales muy pronunciados, lo que puede hacer que enmascare frecuencias pequeñas alrededor de la principal. También es sensible al ruido, debido a que no ofrece ningún tipo de suavizado en los bordes.

#### 4.6.2 Ventana de Blackman

La ventana de Blackman por su forma, realiza una atenuación gradual en los bordes lo que reduce significativamente los lóbulos laterales en comparación con la rectangular, permitiendo identificar frecuencias cercanas. Debido a dicha atenuación, también es menos sensible al ruido.

Por desventajas, esta ventana tiene una menor resolución de picos derivando en una menor precisión para identificar frecuencias, no elimina completamente los lóbulos laterales, tiene una mayor pérdida de energía debido a la atenuación y es la que muestra los lóbulos más anchos de las tres seleccionadas.

#### 4.6.3 Ventana de Hamming

La ventana de Hamming también reduce de manera significativa lóbulos laterales, aunque no tan efectiva como la ventana de Blackman.

Por otro lado, la ventana de Hamming también presenta un lóbulo principal ancho, lo que puede afectar a la precisión a la hora de identificar frecuencias cercanas. A pesar

---

de su atenuación, puede ser sensible al ruido además de tener una mayor pérdida de energía.

#### 4.6.4 Selección ventanas

En conclusión, se han elegido estas tres debido a que el análisis requerirá de la identificación de las frecuencias, ignorando la energía en los espectros, por lo que estas ventanas se complementan de manera efectiva proporcionando lóbulos estrechos, supresión de lóbulos secundarios y resolución suficiente para identificar frecuencias.

### 4.7 Resolución espectral

La transformada discreta de Fourier y la transformada rápida de Fourier son herramientas poderosas para el procesamiento de señales y análisis espectral. Sin embargo, hay ciertos aspectos que afectan a la resolución del espectro el cual puede ser pobre y puede propiciar una mala interpretación del resultado, para ello existen técnicas para mejorar la transformada.

#### 4.7.1 Número de muestras (M)

El tamaño de la señal es importante para que el resultado de la transformada nos muestre todas las frecuencias que forman la señal. A continuación, se muestra mediante el uso de señales sintetizadas el efecto de utilizar señales de mayor tamaño.

En las siguientes imágenes se está haciendo la FFT de  $2^{15}$  puntos de la señal enventanada con la ventana rectangular:

$$x(t) = \sin(2\pi 1000t) + \sin(2\pi 1050t) \quad (14)$$

El espectro deberá mostrar 2 frecuencias, una en 1000 Hz y otra en 1050 Hz.

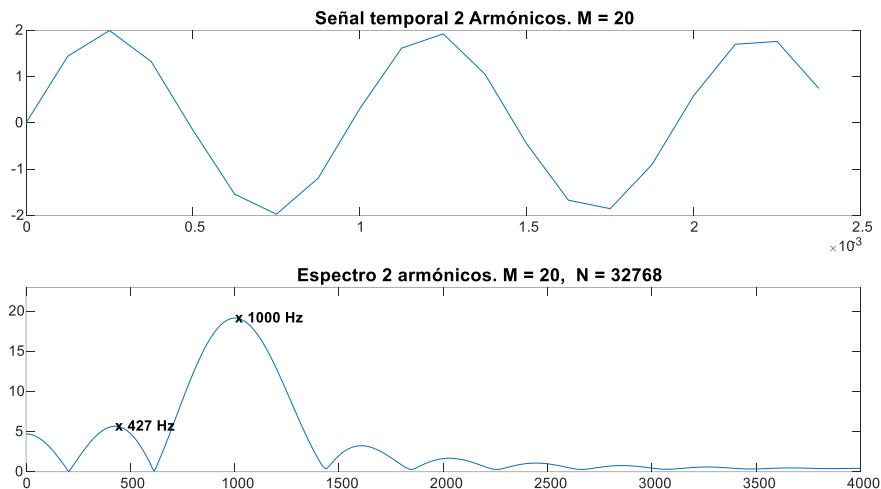


Figura 6, señal temporal y espectro para 20 muestras

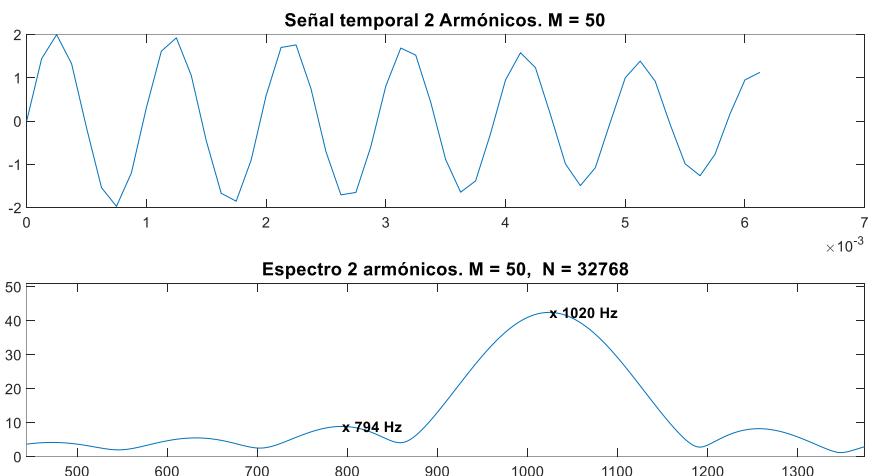


Figura 7, señal temporal y espectro para 50 muestras

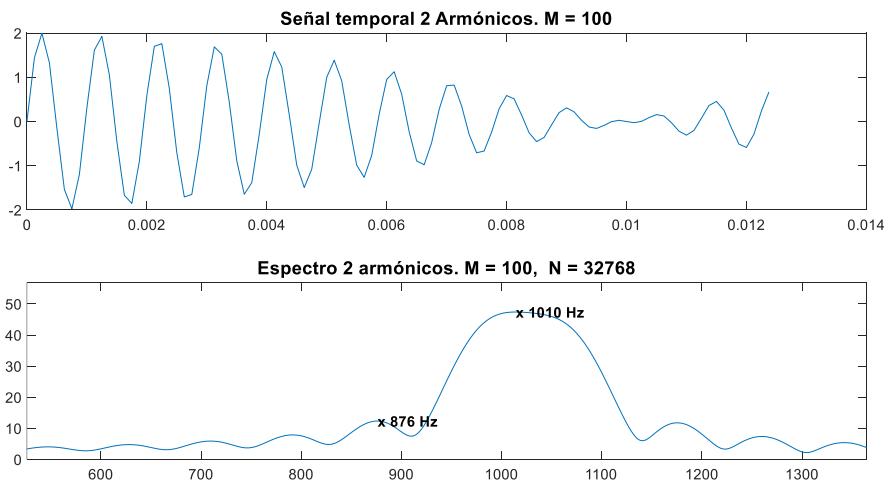


Figura 8, señal temporal y espectro para 100 muestras

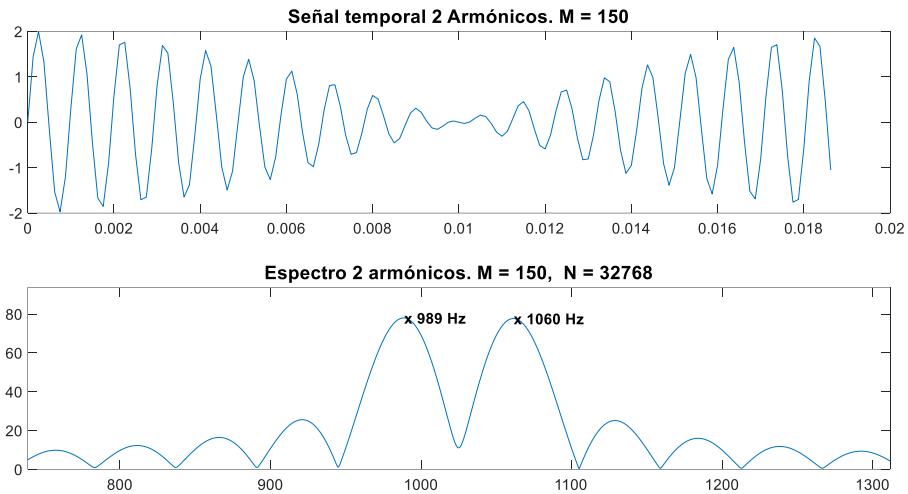


Figura 9, señal temporal y espectro para 150 muestras

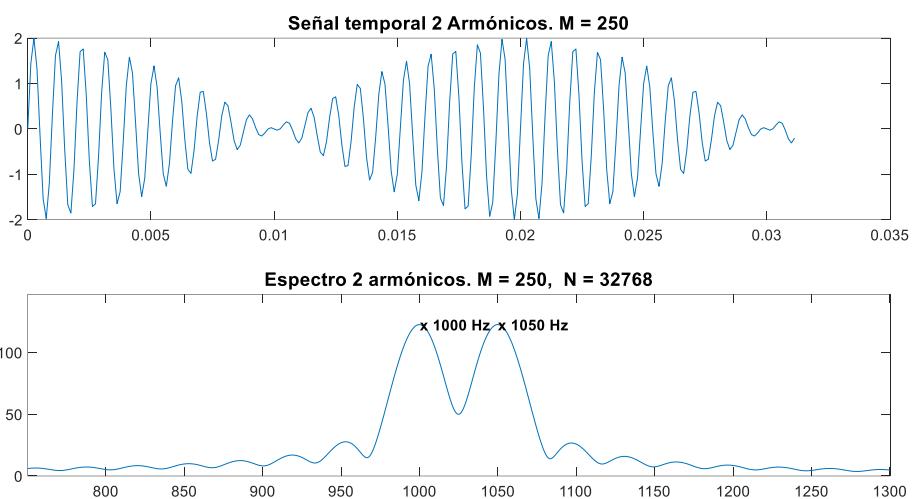


Figura 10, señal temporal y espectro para 250 muestras

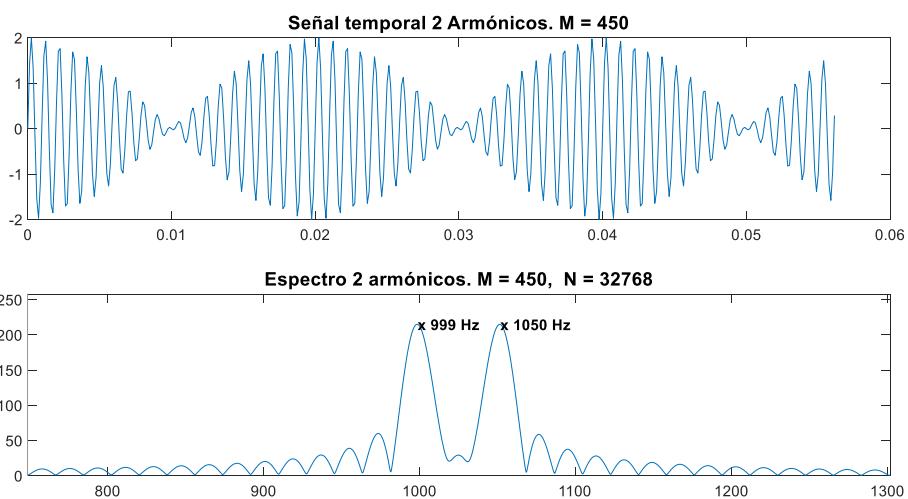


Figura 11, señal temporal y espectro para 450 muestras

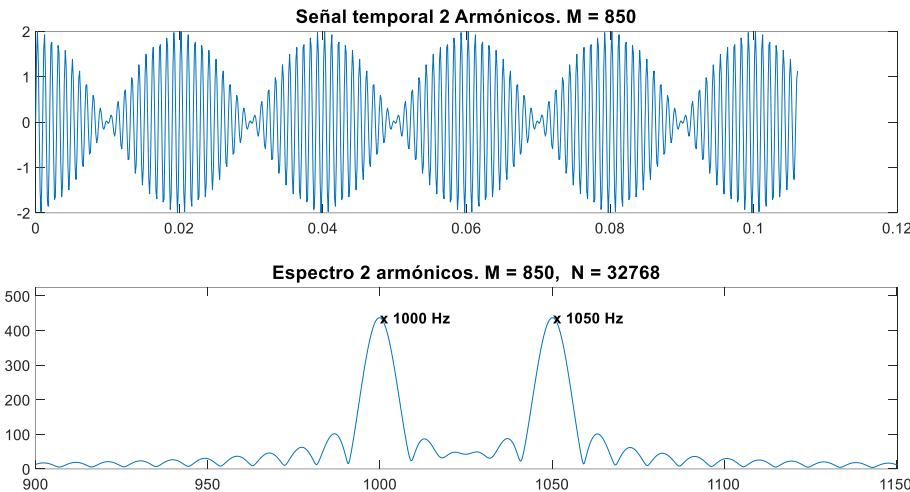


Figura 12, señal temporal y espectro para 850 muestras

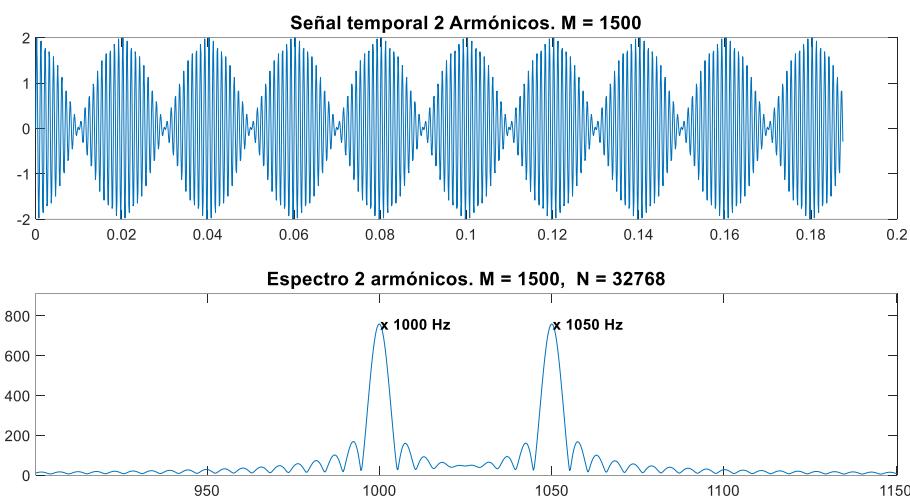


Figura 13, señal temporal y espectro para 1500 muestras

Como se puede comprobar en las imágenes, la longitud de la onda temporal es crucial para que la herramienta FFT pueda obtener correctamente las frecuencias que forman la señal. La longitud mínima que debemos tener debe ser al menos una en la que se muestre más de un periodo de la señal para poder representar correctamente su espectro.

En el anexo del trabajo, se adjunta una dirección para descargar la carpeta *efectoM* con los códigos y un documento de texto donde se explica el uso del código en MATLAB.

#### 4.7.2 Tamaño FFT (N)

La resolución del espectro también está determinada por el número de puntos de la FFT. Si se utilizan pocos puntos, la resolución de la FFT será baja y no se detectarán las frecuencias de la señal. Para ilustrar este efecto se va a usar 3 señales sintetizadas con un tamaño de muestra (M) de 1500 puntos. Las señales son las siguientes:

$$x_1(t) = \sin(2\pi 1000t) \quad (15)$$

$$x_2(t) = \sin(2\pi 1000t) + \sin(2\pi 1250t) \quad (16)$$

$$x_3(t) = 10\sin(2\pi 1000t) + \sin(2\pi 1050t) \quad (17)$$

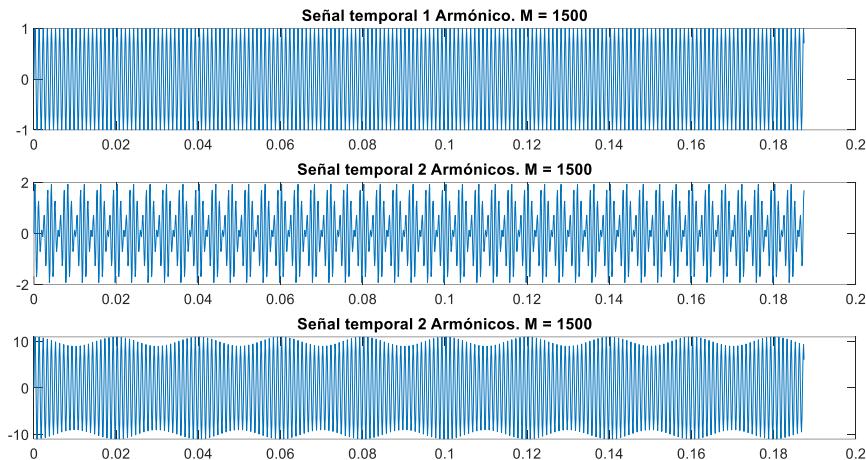


Figura 14, señales temporales

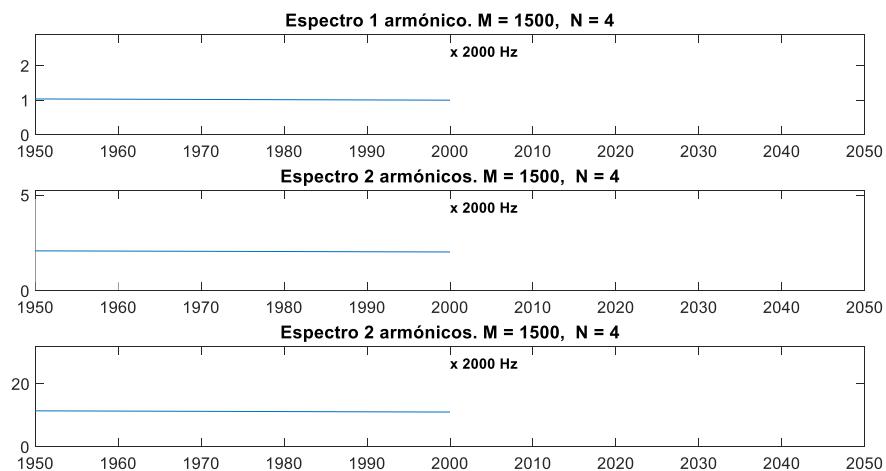


Figura 15, espectros para FFT de 4 puntos

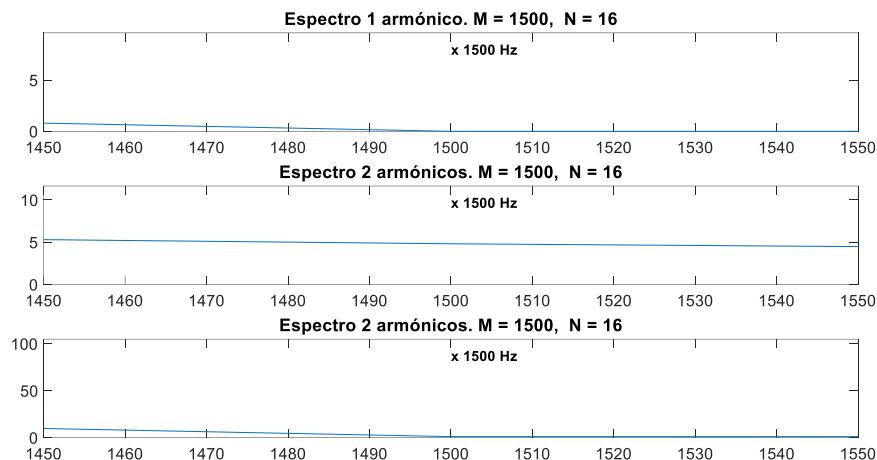


Figura 16, espectros para FFT de 16 puntos

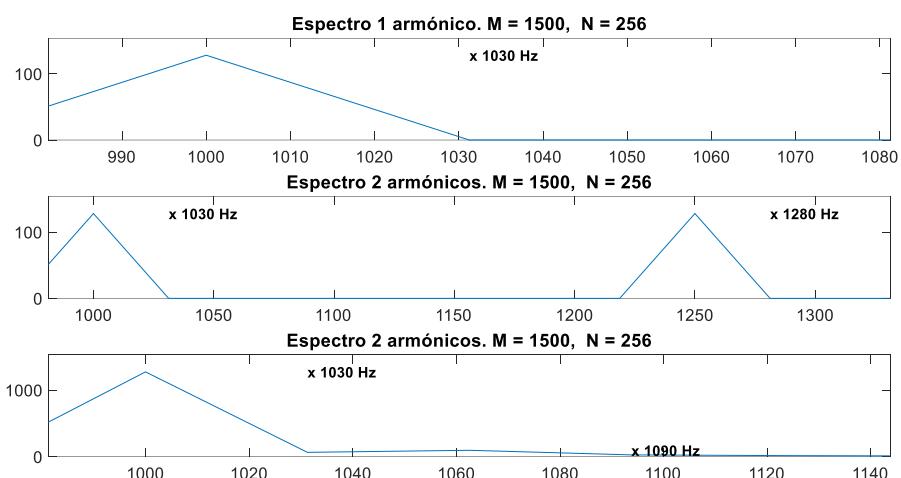


Figura 17, espectros para FFT de 256 puntos

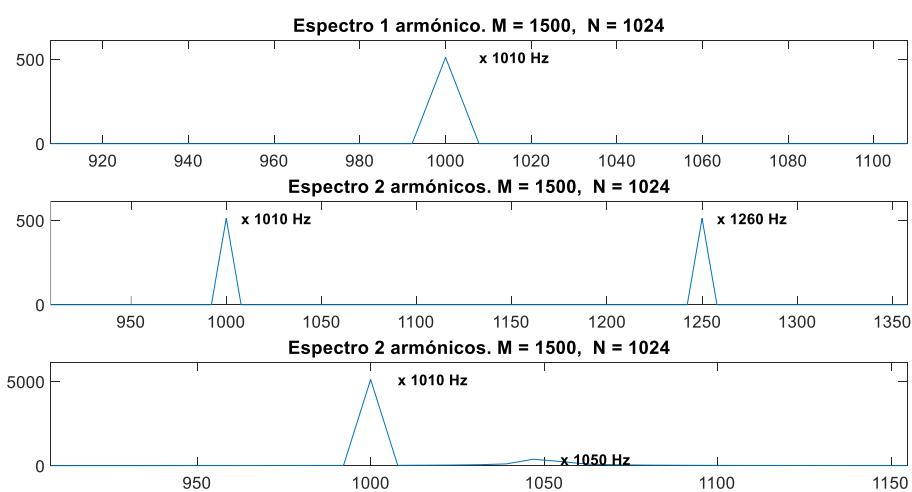


Figura 18, espectros para FFT de 1024 puntos

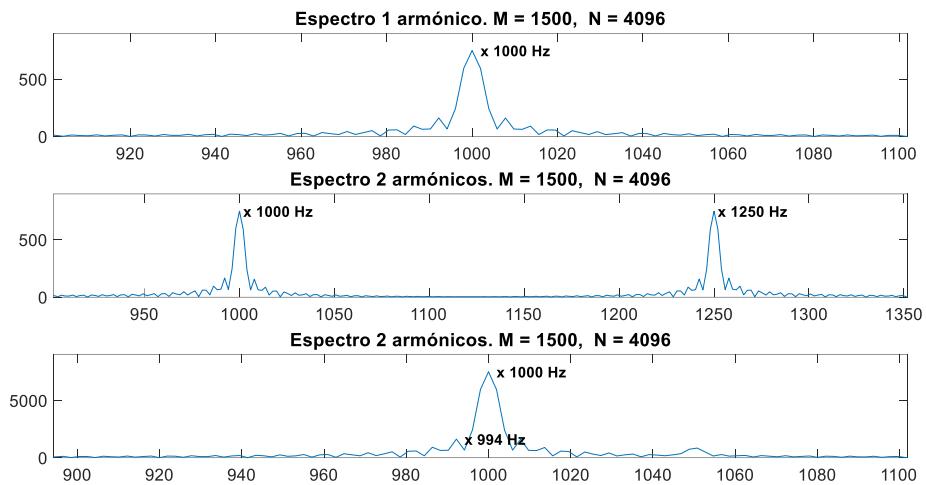


Figura 19, espectros para FFT de 4096 puntos

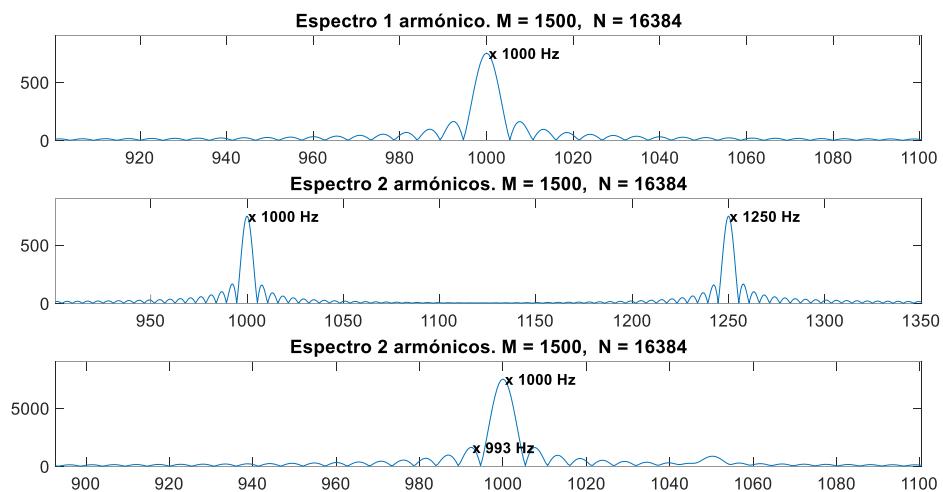


Figura 20, espectros para FFT de 16384 puntos

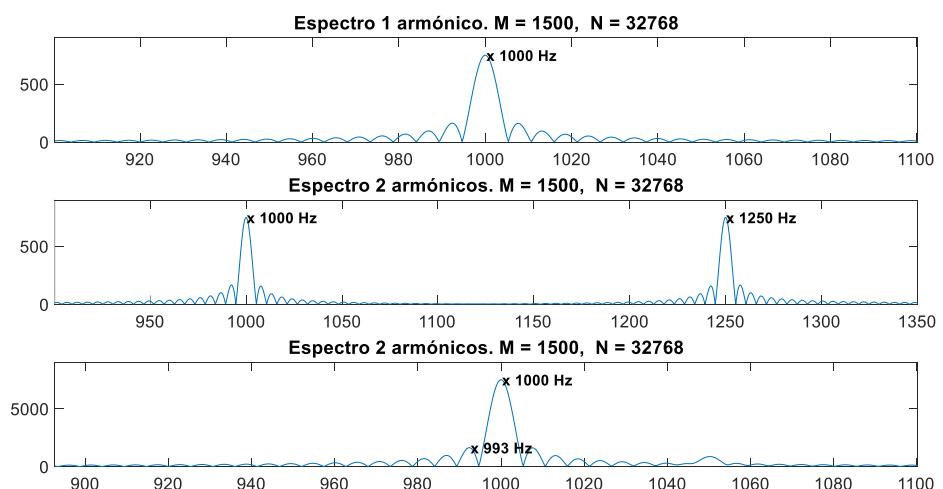


Figura 21, espectros para FFT de 32768 puntos

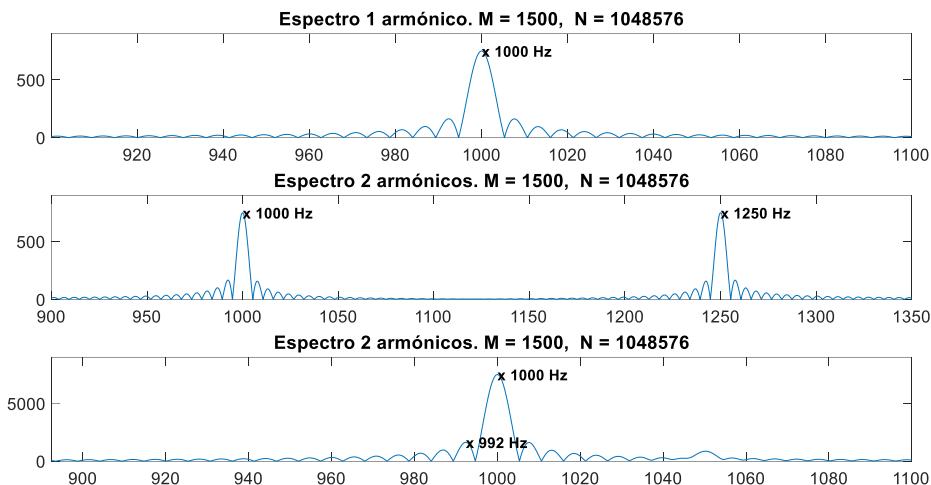


Figura 22, espectros para FFT de 1048576 puntos

Como se observa en las imágenes, la evolución en cuanto al número de puntos de la FFT resulta en una mejora de resolución de los espectros. Cabe destacar las figuras 21 y 22, en las que pasamos de 32.768 puntos a 1.048.576, se puede ver como en cierto momento, aumentar el tamaño de la FFT no repercute en una mejora sustancial del espectro. Esto es algo también a tener en cuenta. Si utilizamos un tamaño de FFT muy grande innecesariamente, estaremos poniendo en compromiso la velocidad de cálculo, lo cual, para este trabajo puede que no sea importante, pero sí podría serlo para otras aplicaciones de la FFT, por ejemplo, médicas.

En el anexo se adjunta la dirección para descargar el código empleado en la carpeta *efectoN*, con un documento de texto y los códigos para ejecutar en MATLAB.

#### 4.7.3 Zero-padding

La técnica *Zero-padding* consiste en añadir ceros al final de la señal temporal. Hay que tener en cuenta que esto no añade información adicional, sólo interpola entre los valores de frecuencia existentes generando más puntos en el dominio de la frecuencia dando la sensación de mayor resolución.

En el siguiente ejemplo se ilustra el efecto de añadir ceros a la señal:

$$x(t) = \sin(2\pi 1000t) + \sin(2\pi 1070t) \quad (18)$$

La señal tiene una longitud (M) de 500 puntos a la que se le añaden 2500 ceros. En el anexo se incluye la dirección para descargar la carpeta *Zeros* donde se encuentra el código empleado.

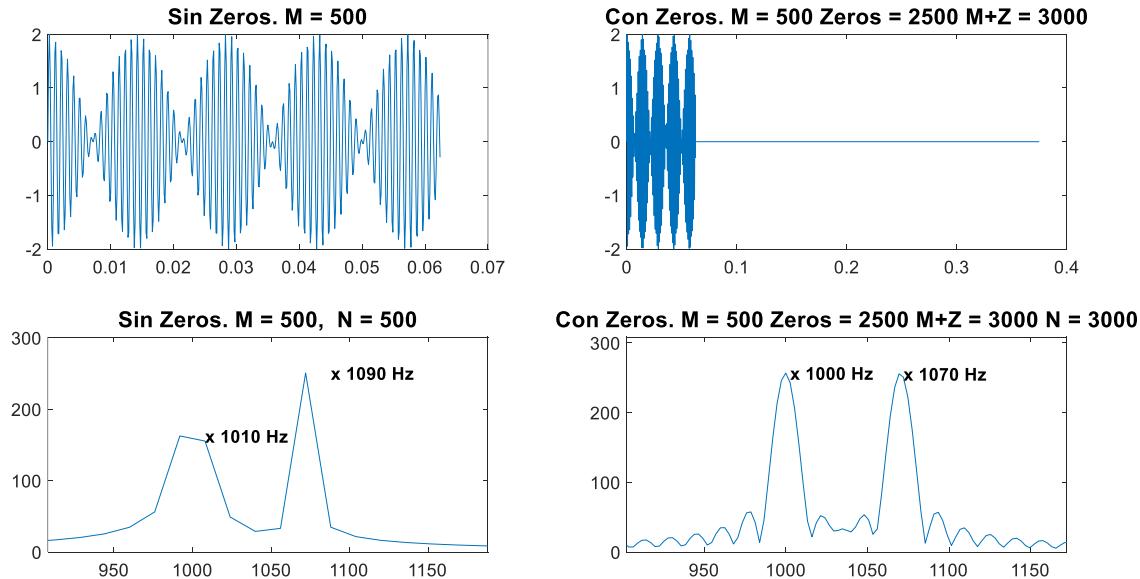


Figura 23, comparación del efecto Zero-padding

Como se observa, la señal periódica es igual, pero añadir ceros al final de esta, nos ha permitido obtener una mejor representación del espectro a pesar de que no se ha proporcionado información extra de la señal.

#### 4.8 Añadir muestras (M) o aplicar Zero-padding

Si la señal temporal de la que disponemos para analizar aumenta (mayor M), la cantidad de información que contiene la señal será mayor, especialmente de componentes de baja frecuencia y, por otro lado, también aumentaremos el intervalo de muestreo frecuencial que supone la FFT.

Mientras que, si se rellena con ceros, no estaremos añadiendo información adicional, sólo podremos mejorar la resolución frecuencial de la FFT.

## 5 Análisis señales OAJ

El estudio sobre las transformadas de Fourier realizado durante el trabajo, tiene como cometido final analizar señales tomadas del telescopio de Observatorio Astrofísico de Javalambre en 2019 y 2022. Las señales estudiadas son aquellas que tienen su réplica en ambos años. Para analizar las señales, se ha hecho lo siguiente, las pruebas (tabla 1) se dividen en 3 partes, aceleración, avance y frenado como se ve en la figura 24, tomando el inicio y final de cada fase, se le ha aplicado la FFT con un código generado propiamente para esto (código adjunto en los anexos con el nombre *pruebas\_OAJ*). A cada fase de la señal se le ha aplicado las ventanas comentadas en el punto 4.6, estas son la ventana rectangular, Blackman y Hamming.

PRUEBA 1			
EJE	INICIO	FIN	
ASCENSIÓN RECTA (AR)	0	0	Fm = 10240 m/s. Duración 60 segundos.
DECLINACIÓN (D)	40	0	
PRUEBA 2			
EJE	INICIO	FIN	
ASCENSIÓN RECTA (AR)	0	0	Fm = 10240 m/s. Duración 60 segundos. (AR = 0, D = 40) = posición de Parking
DECLINACIÓN (D)	0	40	
PRUEBA 5			
EJE	INICIO	FIN	
ASCENSIÓN RECTA (AR)	0	-40	Fm = 10240 m/s. Duración 60 segundos.
DECLINACIÓN (D)	-40	40	
PRUEBA 6			
EJE	INICIO	FIN	
ASCENSIÓN RECTA (AR)	0	40	Fm = 10240 m/s. Duración 60 segundos.
DECLINACIÓN (D)	80	80	
PRUEBA 7			
EJE	INICIO	FIN	
ASCENSIÓN RECTA (AR)	40	90	Fm = 10240 m/s. Duración 60 segundos.
DECLINACIÓN (D)	80	80	
PRUEBA 8			
EJE	INICIO	FIN	
ASCENSIÓN RECTA (AR)	90	0	Fm = 10240 m/s. Duración 60 segundos.
DECLINACIÓN (D)	80	80	
PRUEBA 10			
EJE	INICIO	FIN	
ASCENSIÓN RECTA (AR)	0	40	Fm = 10240 m/s. Duración 30 segundos.
DECLINACIÓN (D)	40	40	
PRUEBA 11			
EJE	INICIO	FIN	
ASCENSIÓN RECTA (AR)	40	0	Fm = 10240 m/s. Duración 30 segundos.
DECLINACIÓN (D)	40	40	
PRUEBA 12			
EJE	INICIO	FIN	
ASCENSIÓN RECTA (AR)	0	90	Fm = 10240 m/s. Duración 60 segundos.
DECLINACIÓN (D)	40	40	
PRUEBA 13			
EJE	INICIO	FIN	
ASCENSIÓN RECTA (AR)	90	0	Fm = 10240 m/s. Duración 60 segundos.
DECLINACIÓN (D)	40	40	

Tabla 1, pruebas analizadas

Los movimientos medidos en el telescopio son los que corresponden en la tabla 1, donde los movimientos de ascensión recta son propios del eje vertical de la montura del telescopio. Los movimientos de declinación pertenecen al eje perpendicular acoplado a la parte superior de la montura (figura 26).

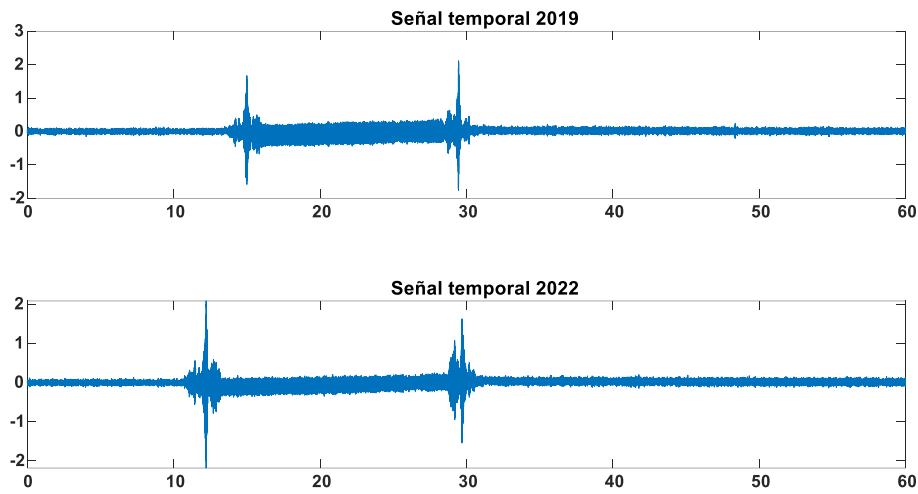


Figura 24, señales temporales prueba 13

## 5.1 Telescopio

Las señales analizadas en este trabajo fueron obtenidas del Observatorio Astrofísico de Javalambre (Teruel) concretamente del JAST80. El OAJ también dispone de otro telescopio, el JST250 además de otras instalaciones que componen el centro.

El OAJ, gestionado por el Centro de Estudios de Física del Cosmos de Aragón (CEFCA), es considerado una “Instalación Científico Técnico Singular” (ICTS) por el Gobierno de España.



Figura 25, vista general del OAJ

El JAST80 está sujeto por una montura equatorial alemana, la elección de esta se debe a la gran precisión en la observación de cuerpos celestes. La montura es perpendicular al eje de la tierra en su eje vertical y, el oblicuo al vertical, tiene su inclinación fija orientada al polo norte celeste, cerca de la estrella polar. Este está soportado sobre un pilar independiente de la estructura para mejorar el aislamiento de las vibraciones

generadas por otros elementos en las instalaciones. El telescopio se encuentra bajo una cúpula giratoria que tiene una abertura radial.

El telescopio tiene dos movimientos perpendiculares entre sí, uno es el movimiento horizontal o declinación (DEC) el cual, rota alrededor del eje orientado al polo norte, el otro, el movimiento vertical o ascensión recta (AR) sobre el eje de la montura. Los movimientos se pueden denominar de posicionamiento/parking “slewing” o de seguimiento “tracking”. Los movimientos de “slewing” se caracterizan por tener altas velocidades que colocan el telescopio en la posición de observación y comienza el movimiento de “tracking”.



Figura 26, telescopio JAST80 del OAJ

## 5.2 Acelerómetro

El acelerómetro que se usó para tomar las señales del telescopio fue el acelerómetro sísmico Wilcoxon 731A. Este dispositivo es el encargado de medir las vibraciones producidas en el telescopio durante las pruebas. Dadas las características del acelerómetro proporcionadas por el fabricante, este presenta una mayor precisión en el rango 0.05 – 450 Hz aunque en el trabajo se tendrá en cuenta hasta los 1000 Hz.

Para las pruebas se colocaron tres acelerómetros, como se muestra en la figura 27, estos dispositivos irían donde se indica con una cruz.



Figura 27, posición acelerómetros



Figura 28, acelerómetro sísmico Wilcoxon modelo 731A

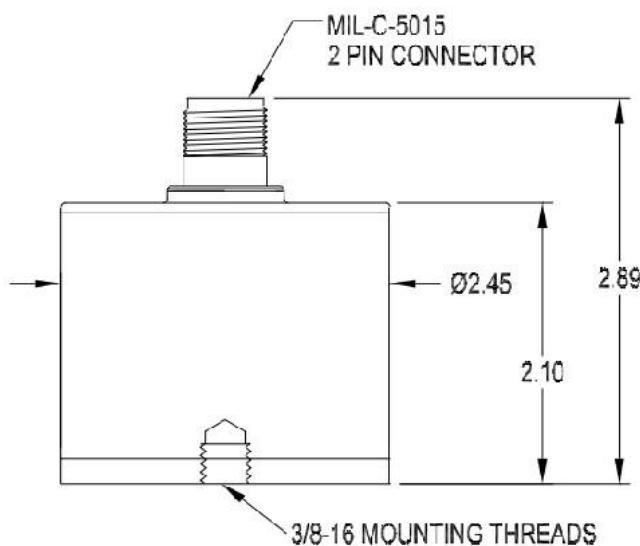


Figura 29, acelerómetro acotado

### 5.3 Señales

Como ya se ha comentado, las señales analizadas provienen del Observatorio Astrofísico de Javalambre, para obtener estas, se dispuso de tres acelerómetros resultando en unos datos de tres canales, para este trabajo se ha elegido trabajar siempre con el tercer canal, esta elección es arbitraria dado que no existe ningún motivo para considerar unos datos mejores que otros.

Estas fueron obtenidas en su día con una frecuencia de muestreo ( $F_m$ ) igual a 10240m/s, tal y como se indica en la tabla 1, las pruebas duran 60 segundos a excepción de la prueba 10 y 11 de 2019 que duran 30, por lo que se obtuvieron muestras de 614.400 puntos y 307.200 para la 10 y 11 de 2019.

Previamente a analizar las frecuencias, debemos conocer qué resolución frecuencial con la que se trabaja, esta se obtiene con la siguiente formula:

$$\Delta f = \frac{F_{muestreo}}{N_{fft}} = \frac{10240}{2^{21}} = 0,0049$$

No obstante, se ha decidido tomar sólo el primer decimal de los espectros obtenidos.

#### 5.3.1 Prueba 1

PRUEBA 1					
EJE	INICIO	FIN			
ASCENSIÓN RECTA (AR)	0	0	Fm = 10240 m/s. Duración 60 segundos.		
DECLINACIÓN (D)	40	0			

Tabla 2, prueba 1

A modo de ejemplo se añade los espectros de las 3 fases de la prueba 1, pero no se añadirán a lo largo de los demás apartados, estos quedan todos añadidos en el anexo del trabajo.

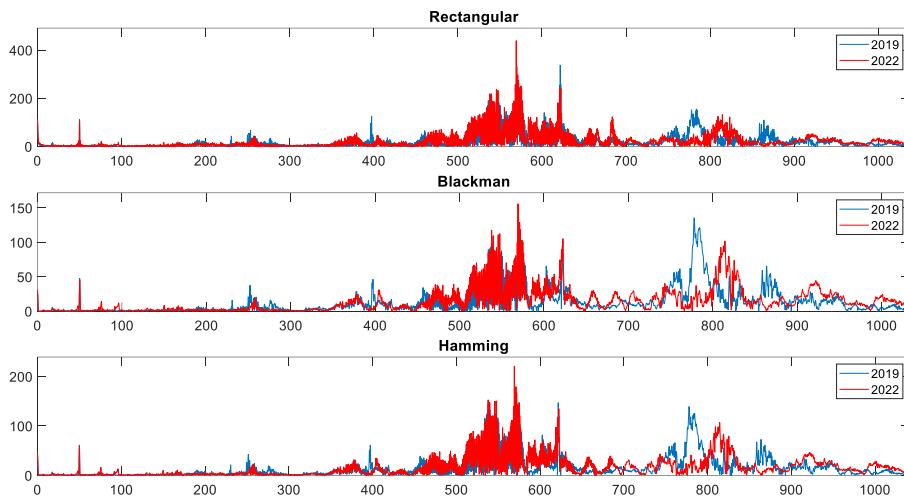


Figura 30, prueba 1, espectro fase aceleración

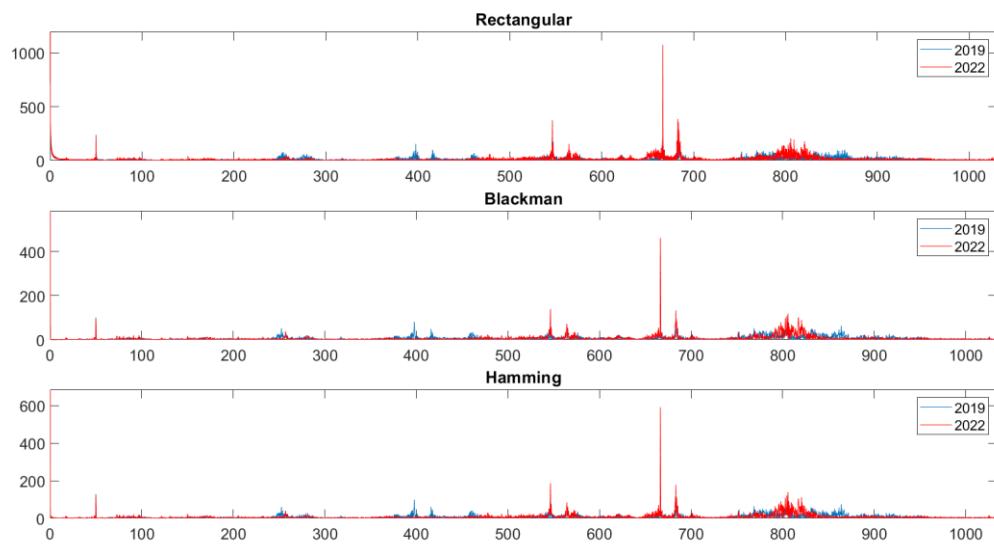


Figura 31, prueba 1, espectro fase avance

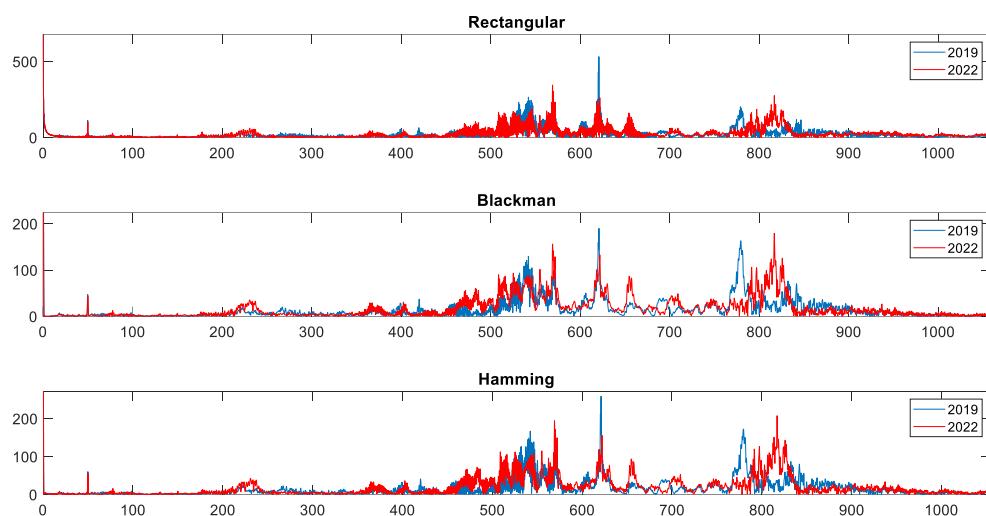


Figura 32, prueba 1, espectro fase frenado

Fase aceleración			
	2019 T=3,7-6,2seg	2022 T=10-12,5seg	(%)
1	229,6	-	
2	230,6	-	
3	249,6	-	
4	251,5	-	
5	251,8	-	
6	253,3	253,8	0,20
7	259	257,2	-0,69
8	275,7	-	
9	277,1	-	
10	396,5	404	1,89
11	397,3	405,4	2,04
12	419,2	417,7	-0,36
13	460,4	460	-0,09
14	520,2	520,1	-0,02
15	545,8	545,8	0,00
16	555,4	555,3	-0,02
17	569,4	569,4	0,00
18	602,2	602,5	0,05
19	621,7	622,4	0,11
20	629,1	630,6	0,24
21	-	665,5	
22	-	683,6	
23	778,2	814,4	4,65
24	863,7	922,4	6,80

Tabla 3, prueba 1, fase aceleración

Fase avance			
	2019 T=6,2-11,5 seg	2022 T=12,5-17,8 seg	(%)
1	17,5	17,3	-1,14
2	75,6	72,9	-3,57
3	-	121,6	
4	-	130,9	
5	149,9	150	0,07
6	165	157,5	-4,55
7	-	205,6	
8	252,6	257,1	1,78
9	252,6	257	1,74
10	253,9	259,2	2,09
11	279,5	281,1	0,57
12	317,2	-	
13	394,8	-	
14	395,4	-	
15	395,8	-	
16	397,3	-	
17	397,8	-	
18	416	-	
19	416,6	-	
20	417,9	-	
21	461,5	478,2	3,62
22	-	493	
23	545	545,1	0,02
24	546,1	546,1	0,00
25	546,4	546,4	0,00
26	547	547	0,00
27	547,3	547,3	0,00
28	564,3	564,3	0,00
29	572,3	572,1	-0,03
30	664,7	664,7	0,00
31	666,5	666,5	0,00
32	668,3	668,3	0,00
33	682,9	682,8	-0,01
34	683,5	683,4	-0,01

Tabla 4, prueba 1, fase avance

Fase frenado			
	2019 T=11,5-14 seg	2022 T=17,8-20,3 seg	(%)
1	18,3	18,3	0,00
2	-	77,7	
3	149,8	150,1	0,20
4	-	177,4	
5	-	178	
6	221,2	221,4	0,09
7	-	231	
8	265,2	-	
9	367,7	368	0,08
10	400	402,6	0,65
11	418,8	-	
12	419,3	-	
13	419,9	-	
14	555	555,1	0,02
15	562,5	562,6	0,02
16	569,2	569,2	0,00
17	572	572	0,00
18	620,3	620,3	0,00
19	621	621,2	0,03
20	630,4	630,3	-0,02
21	-	654,6	
22	779,3	817	4,84

Tabla 5, prueba 1, fase frenado

### 5.3.2 Prueba 2

PRUEBA 2			
EJE	INICIO	FIN	
ASCENSIÓN RECTA (AR)	0	0	Fm = 10240 m/s. Duración 60 segundos. (AR = 0, D = 40) = posición de Parking
DECLINACIÓN (D)	0	40	

Tabla 6, prueba 2

Fase aceleración			
	2019 T=15,2 18 seg	2022 T=9,2 - 12 seg	(%)
1	40,5	40,5	0,00
2	75,3	75,7	0,53
3		96,8	
4		122,3	
5	141		
6	149,9	150	0,07
7	178,4	178,9	0,28
8	222,2	231,8	4,32
9		234,7	
10	276		
11	291,7		
12	332,5		
13		365,5	
14	399,7	402,6	0,73
15	420,9		
16	421,7		
17	422,9		
18	621,6	630,6	1,45
19	660	664,8	0,73

Tabla 7, prueba 2, fase aceleración

Fase avance			
	2019 T=18 - 23,2 seg	2022 T=12 - 17,2 seg	(%)
1	50	50	
2	17,7	17,8	0,56
3		738	
4	89,7	91,4	1,90
5		121,5	
6	149,9	150	0,07
7	200-300		
8	398,4		
9	416,6		
10		477,2	
11	546,3	546,3	0,00
12	563,4	563,4	0,00
13	564,4	564,4	0,00
14	664,7	664,7	0,00
15	666,5	666,5	0,00
16	668,2	668,2	0,00
17		683,4	
18	768,6		

Tabla 8, prueba 2, fase avance

Fase frenado			
	2019 T=23,2 25,2 seg	2022 T=17,2 19,2 seg	(%)
1	50	50	
2	17,4	17,2	-1,15
3	88,6	86,9	-1,92
4	98	96,5	-1,53
5	149,9	150,1	0,13
6	233,2	237,6	1,89
7	253,3	256,5	1,26
8	377,9	378,2	0,08
9	396,9		
10	398,4		
11		406,6	
12	416,1		
13	542,6	542,5	-0,02
14	570,2	570,1	-0,02
15		594	
16	603,8	603,8	0,00
17	621	621,2	0,03
18		656,6	

Tabla 9, prueba 2, fase frenado



### 5.3.3 Prueba 5

PRUEBA 5			
EJE	INICIO	FIN	
ASCENSIÓN RECTA (AR)	0	-40	Fm = 10240 m/s. Duración 60 segundos.
DECLINACIÓN (D)	-40	40	

Tabla 10, prueba 5

Fase aceleración			
	2019 T=15,3 - 17,3 seg	2022 T=0,9 - 2,9 seg	(%)
1	50	50	
2	17,8	17,6	-1,12
3		96,2	
4	188	188	0,00
5	242,2	242,6	0,17
6	254,4	254,6	0,08
7	256,6	256,9	0,12
8	259,3	259,2	-0,04
9	276,1		
10	374	374	0,00
11	397	397	0,00
12	543	543	0,00
13	572	572	0,00
14		623	

Tabla 11, prueba 5, fase aceleración

Fase avance			
	2019 T=17,3 - 22,7 seg	2022 T=2,9 - 8,3 seg	(%)
1	50	50	
2	17	17	0,00
3	150	150	0,00
4	239,8	239,6	-0,08
5	250,4		
6	252,2		
7	253,2	253,7	0,20
8	259,2	259,4	0,08
9	317		
10	317,3		
11	317,5		
12	318		
13	397		
14	397,2		
15	397,6		
16	398,5		
17	416,9		
18	418,2		
19	545,8	545,7	-0,02
20	546,2	546,1	-0,02
21	546,6	546,7	0,02
22	564,3	564,3	0,00
23	666,5	666,5	0,00
24	683	683	0,00
25	683,7	683,7	0,00
26	684,2	684,2	0,00
27	684,5	684,5	0,00
28	684,8	684,8	0,00
29	685,2	685,2	0,00
30	751		
31	752		
32	752,4		
33	752,8		
34	766,6		
35	768,8	768,8	0,00
36	769	769	0,00

Tabla 12, prueba 5, fase avance

Fase frenado			
	2019 T=22,7 - 24,7 seg	2022 T=8,3 - 10,3 seg	(%)
1	50	50	
2	89,7	87,7	-2,23
3	99,6	97,6	-2,01
4	109,4	107,1	-2,10
5	190,4	190,5	0,05
6	242,5	243,3	0,33
7	252,5		
8	253,4		
9	254,4		
10	255,3		
11	257,2		
12	359,2	359,2	0,00

Tabla 13, prueba 5, fase frenado

### 5.3.4 Prueba 6

PRUEBA 6			
EJE	INICIO	FIN	
ASCENSIÓN RECTA (AR)	0	40	Fm = 10240 m/s. Duración 60 segundos.
DECLINACIÓN (D)	80	80	

Tabla 14, prueba 6

Fase aceleración				Fase avance				Fase frenado			
	2019 T=18,7- 20,7 seg	2022 T=1,1- 3,1 seg	(%)		2019 T=20,7- 26,1 seg	2022 T=3,1- 8,5 seg	(%)		2019 T=26,1- 28,1 seg	2022 T=8,5- 10-5 seg	(%)
1	50	50	0,00	1	50	50		1	50	50	
2	55,3	55	-0,54	2	150	150,2	0,13	2		87,5	
3		92,6		3		182,8		3	98,9		
4	150	150,2	0,13	4	249,1			4		130,2	
5	228,5	228,4	-0,04	5	250,3			5	251,4	256,6	2,07
6	230,2	229,7	-0,22	6	251,6			6	253,3	257,6	1,70
7	242	242,4	0,17	7	261,5	261,8	0,11	7	261,2	260,5	-0,27
8	253,3	255,9	1,03	8	396,5			8	361	361,1	0,03
9	254,4	256,6	0,86	9	397,7			9	381,1	380	-0,29
10	260,4	259,3	-0,42	10	397,9			10	383,5	383,7	0,05
11	261,8	260,6	-0,46	11	398,6			11	458,5	456,1	-0,52
12	361,1	361,2	0,03	12	398,8			12		475,7	
13	365	363,6	-0,38	13	416,5			13		481,3	
14	395,5	394,3	-0,30	14	416,8			14	500,7	499,8	-0,18
15	399,7	398,8	-0,23	15	417,1			15	719,7	722,1	0,33
16		475,6		16	417,7						
17	570,9	570	-0,16	17	418,5						
18	590,8	589,2	-0,27	18		476,6					
19	605,8	603,3	-0,41	19		476,8					
20	620,4	619,9	-0,08	20		477,4					
21	702,4	702,4	0,00	21		477,9					
				22		478,5					
				23	546,2	546,3	0,02				
				24	546,7	546,8	0,02				
				25	570,3	570,5	0,04				
				26	666,5	666,5	0,00				
				27	669,4	669,3	-0,01				
				28	682,7	682,7	0,00				
				29	683,2	683,2	0,00				
				30	683,6	683,7	0,01				
				31	683,9	683,9	0,00				
				32	684,2	684,2	0,00				
				33	751,9	751,9	0,00				
				34	752,3	752,6	0,04				
				35	888,9						

Tabla 16, prueba 6, fase avance

Tabla 17, prueba 6, fase frenado

Tabla 15, prueba 6, fase aceleración

### 5.3.5 Prueba 7

PRUEBA 7			
EJE	INICIO	FIN	
ASCENSIÓN RECTA (AR)	40	90	$F_m = 10240 \text{ m/s. Duración 60 segundos.}$
DECLINACIÓN (D)	80	80	

Tabla 18, prueba 7

Fase aceleración			
	2019 T=15,2-17,2 seg	2022 T=8,9-10,9 seg	(%)
1		188,6	
2	200,2		
3	231,4	230,7	-0,30
4	251,7	252,6	0,36
5	255	256,7	0,67
6	325	323,5	-0,46
7	348,6	348,4	-0,06
8	361,9	361,6	-0,08
9	364,5	363,5	-0,27
10	380,5	378,9	-0,42
11	399,2	398,2	-0,25
12	407	408,4	0,34
13	452,6	457,4	1,06
14		475,4	
15	499	499,2	0,04
16	621,3	621,3	0,00

Tabla 19, prueba 7, fase aceleración

Fase avance			
	2019 T=17,2-24,6 seg	2022 T=10,9-18,3 seg	(%)
1	75	75,3	0,40
2		91,4	
3		92	
4	150	150,2	0,13
5		182,4	
6	253,5	257,6	1,62
7	398,2		
8	398,4		
9	417,9		
10		477,8	
11		478,7	
12	546,3	546,3	0,00
13	546,3	546,3	0,00
14	547	547	0,00
15	666,5	666,5	0,00
16	682,2	682,2	0,00
17	683,3	683,4	0,01
18	683,6	683,6	0,00
19	683,8	683,8	0,00
20	684	684	0,00
21	684,2	684,2	0,00
22	684,8	684,8	0,00
23	751,6	751,6	0,00
24	751,9	751,9	0,00

Tabla 20, prueba 7, fase avance

Fase frenado			
	2019 T=24,6-26,6 seg	2022 T=18,3-20,3 seg	(%)
1	46,7		
2	75		
3		87,5	
4	252		
5	345,5	345,4	-0,03
6	361,8	360,8	-0,28
7	457	456	-0,22
8	510	509	-0,20
9	795,5	795,5	0,00
10	834,8	834,4	-0,05
11	882,2		
12	893,8		

Tabla 21, prueba 7, fase frenado

### 5.3.6 Prueba 8

PRUEBA 8			
EJE	INICIO	FIN	
ASCENSIÓN RECTA (AR)	90	0	Fm = 10240 m/s. Duración 60 segundos.
DECLINACIÓN (D)	80	80	

Tabla 22, prueba 8

Fase aceleración			
	2019 T=20-22seg	2022 T=13,3-15,3seg	(%)
1	24,1	24,2	0,41
2	253,2	255,5	0,91
3	273,4		
4	279		
5	346,6	345	-0,46
6	362,1	361,3	-0,22
7	365,4	363,8	-0,44
8	399,1	398,8	-0,08
9	416,6		
10	457,5	457,6	0,02
11		717,5	
12		722	
13		723,6	
14		725,2	
15		734,5	
16	782,7	782,7	0,00
17	792,6	792,8	0,03
18	794,5	794,5	0,00
19	800,8	800,8	0,00

Tabla 23, prueba 8, fase aceleración

Fase avance			
	2019 T=22-37,4seg	2022 T=15,3-30,7seg	(%)
1	8,5	8,4	-1,18
2		19,4	
3		29,1	
4		29,3	
5	89,6		
6	255,5	256,6	0,43
7	276,5		
8	397		
9	397,5		
10	398		
11	398,2		
12	398,6		
13	416,6		
14	417,1		
15	417,4		
16	417,5		
17		477,6	
18		477,9	
19		478,2	
20		478,6	
21		478,8	
22	547	547	0,00
23	547,1	547,1	0,00
24		564,3	
25	666,5	666,5	
26	680,5	680,5	0,00
27	682	682	0,00
28	682,2	682,2	0,00
29	683,3	683,3	0,00
30	683,6	683,6	0,00
31	683,9	683,9	0,00
32	684,2	684,2	0,00
33	684,9	684,9	0,00
34	751,8	751,8	0,00
35	751,9	751,9	0,00
36	752	752	0,00
37	768,8	768,8	0,00
38	888,4		0,00
39	888,7		
40	888,9		
41	889		
42	889,2		

Tabla 24, prueba 8, fase avance

Fase frenado			
	2019 T=37,4-39,4 seg	2022 T=30,7-32,7seg	(%)
1	50	50	
2	6,5	6,5	0,00
3	47		
4	231,4	232,3	0,39
5	248		
6	249,3		
7	250,8		
8	251,6		
9	253,2	254,2	0,39
10	254,7	255,5	0,31
11	255,7	256,2	0,20
12	361	360,5	-0,14
13	481,8	481,9	0,02
14	570	567,1	-0,51
15	571	569,2	-0,32
16	621,9	622	0,02
17	701,6	701,5	-0,01

Tabla 25, prueba 8, fase frenado

### 5.3.7 Prueba 10

PRUEBA 10			
EJE	INICIO	FIN	
ASCENSIÓN RECTA (AR)	0	40	Fm = 10240 m/s. Duración 30 segundos.
DECLINACIÓN (D)	40	40	

Tabla 26, prueba 10

Fase aceleración			
	2019 T=18-20,1seg	2022 T=11,9-14seg	(%)
1	231,3	231,2	-0,04
2	233,5	233	-0,21
3	235,3	234,5	-0,34
4	242,3	242,7	0,17
5	249,4		
6	250,3		
7	251,6		
8	252,9		
9	254,6		
10	256,9	257,2	0,12
11	261,2		
12	263,3		
13	264,8		
14	271,1		
15		282,4	
16		284	
17	342,9	342,9	0,00
18	360,9	360,8	-0,03
19	379,5	378,3	-0,32
20	383,6	380,9	-0,70
21	417,6	418,9	0,31
22	500,7	499,7	-0,20
23	547	547,5	0,09
24	621,2	622,1	0,14

Tabla 27, prueba 10, fase aceleración

Fase avance			
	2019 T=20,1-25,4 seg	2022 T=14-19,3 seg	(%)
1	17,1	17,1	0,00
2	18,3	18,3	0,00
3	150	150,1	0,07
4	254,5	257,1	1,02
5	278,4		
6	396		
7	397,2		
8	398,1		
9	399		
10	415,2		
11	417,7		
12	546,8	546,8	0,00
13	547	547,1	0,02
14		569	
15		569,6	
16	620,5	621,9	0,23
17	663,8	663,8	0,00
18	666,5	666,5	0,00
19	669,3	669,3	0,00
20	683	682,9	-0,01
21	683,3	683,2	-0,01
22	683,9	684	0,01
23	751,9		
24	768,7		

Tabla 28, prueba 10, fase avance

Fase frenado			
	2019 T=25,6-27,6 seg	2022 T=19,3-21,6seg	(%)
1	20	19,5	-2,50
2	242,1	242,8	0,29
3	248,3	249	0,28
4	254,4	255,2	0,31
5	256,5	256,9	0,16
6	263,4	263,2	-0,08
7	271,8	270,7	-0,40
8	344,7	344,5	-0,06
9	360,9	359,7	-0,33
10	383,9	379,8	-1,07
11	509,4	508,4	-0,20
12		570,4	
13	620,4	621,5	0,18

Tabla 29, prueba 10, fase frenado

### 5.3.8 Prueba 11

PRUEBA 11			
EJE	INICIO	FIN	
ASCENSIÓN RECTA (AR)	40	0	Fm = 10240 m/s. Duración 30 segundos.
DECLINACIÓN (D)	40	40	

Tabla 30, prueba 11

Fase aceleración			
	2019 T=18,2- 20,2seg	2022 T=8,8- 10,8seg	(%)
1	233,5	233,6	0,04
2	242,5	242,5	0,00
3	252,9	255,2	0,91
4	254,5	256,6	0,83
5	360,8	360,3	-0,14
6	364,4	363,1	-0,36
7	383,7	380,2	-0,91
8	417,6		
9	546	546,6	0,11
10	567	569,5	0,44
11	621,3	621,6	0,05

Tabla 31, prueba 11, fase aceleración

Fase avance			
	2019 T=20,2- 25,6 seg	2022 T=10,8- 16,2 seg	(%)
1	17,4	17,4	0,00
2	17,6	17,6	0,00
3	44,9		
4	45,2		
5	150	150	0,00
6		168	
7	251,4	255,8	1,75
8	252,3	256,9	1,82
9	254,5	258	1,38
10	278,4	280,1	0,61
11	396		
12	397,3		
13	398,1		
14	399		
15	417,7		
16	546,4	546,5	0,02
17	546,8	546,9	0,02
18	547,1	547,1	0,00
19	620,5	621,8	0,21
20	663,8		
21	666,5	666,5	0,00
22	681,9	682	0,01
23	682,9	683	0,01
24	683,3	683,3	0,00
25	683,9	684	0,01
26	751,9		
27	768,7		

Tabla 32, prueba 11, fase avance

Fase frenado			
	2019 T=25,6- 27,6 seg	2022 T=16,2- 18,2seg	(%)
1	19,9		
2	241,5	242,9	0,58
3	254,4	255,1	0,28
4	361,1	360,3	-0,22
5	366,9	366,2	-0,19
6	481,2	482	0,17
7	543,8	545,1	0,24
8	620,3	622,8	0,40

Tabla 33, prueba 11, fase frenado

### 5.3.9 Prueba 13

PRUEBA 13			
EJE	INICIO	FIN	
ASCENSIÓN RECTA (AR)	90	0	Fm = 10240 m/s. Duración 60 segundos.
DECLINACIÓN (D)	40	40	

Tabla 34, prueba 13

Fase aceleración			
	2019 T=13,6-16,1seg	2022 T=10,8-13,3seg	(%)
1	24,3	24,4	0,41
2	92	92,3	0,33
3	189	189	0,00
4	192,3	192	-0,16
5	203,2	202,9	-0,15
6	213,2	213	-0,09
7	256	256	0,00
8	257,5	257,4	-0,04
9	361,4	361	-0,11
10	406,5	406,3	-0,05
11	416,6	416,8	0,05
12	500,6	500,3	-0,06
13	510,8	509,9	-0,18
14	570,4	569,3	-0,19
15	619,7	618,4	-0,21
16	620,2	619,4	-0,13

Tabla 35, prueba 13, fase aceleración

Fase avance			
	2019 T=16,1-28,3 seg	2022 T=15-27,2seg	(%)
1		19,5	
2		29,3	
3	85,9	87,4	1,75
4	149,9	150	0,07
5		168,7	
6	230,3	232,5	0,96
7	253,1	255,3	0,87
8	318,3		
9	394,2		
10	396,5		
11	397,4		
12	398		
13	398,8		
14	414,9		
15	416,9		
16	417,5		
17		500	
18		523,1	
19		547	
20		570	
21	664,7	664,7	0,00
22	666,5	666,5	0,00
23	683,2	683,2	0,00
24	683,3	683,3	0,00
25	683,5	683,5	0,00
26	683,8	683,8	0,00
27	684,8	684,8	0,00
28	751,5		
29	751,8		
30	752		
31	752,7		
32	766,5		
33	768,8	768,8	0,00

Tabla 36, prueba 13, fase avance

Fase frenado			
	2019 T=28,3-30,7seg	2022 T=28,6-31seg	(%)
1		19,4	
2		29,2	
3	184,4	184,2	-0,11
4	186,7	186,9	0,11
5	189,8	189,6	-0,11
6	241,6	242,1	0,21
7	247,8	248	0,08
8	252,4		
9	254		
10	256,7	256,6	-0,04
11	361,6	360,3	-0,36
12	396,9		
13	482,2	481,5	-0,15
14	510,2	508,7	-0,29
15	546,5	547,9	0,26
16	575,6	573,3	-0,40
17		622,8	

Tabla 37, prueba 13, fase frenado

## 6 Conclusiones

Las primeras conclusiones que se obtienen de este trabajo respecto al análisis frecuencial son haber descubierto la complejidad del estudio de señales. La transformada discreta de Fourier y el algoritmo FFT son herramientas las cuales se ven afectadas por muchas variables, algunas estudiadas a lo largo de este trabajo como la resolución frecuencial, los efectos del enventanado, tamaño de la señal o de la transformada y las cuales sólo son una pequeña parte de una ciencia mucho más amplia.

Antes de comentar las conclusiones de las señales, cabe explicar ciertos aspectos:

El rango de trabajo ideal que propone el fabricante de los acelerómetros mostraba en la hoja de características que su rango de precisión era mejor hasta 450 Hz, no obstante, y teniendo en cuenta que lo que se ha hecho ha sido comparar las mismas pruebas, se acepta que, si existe cierto error a partir de esta frecuencia, este debería ser el mismo para la señal de 2019 y 2022.

El número de pruebas comparadas han sido 9, cada una constaba de 3 fases a las que se les ha aplicado 3 ventanas, dando un total de 81 espectros analizados. En algunos espectros de la fase de aceleración y frenado, por efecto del enventanado ha sido preciso acortar estas fases en su forma temporal (por ejemplo, las fases de aceleración y frenado suelen durar en torno a 2 segundos, se recortaba 0,5 segundos) para buscar más en detalle ciertas frecuencias.

Por su simplicidad, las señales óptimas para el trabajo, lógicamente, son las que pertenecen a la fase de avance debido a que no tienen movimientos bruscos y el telescopio se mueve de manera constante.

A pesar de esto, se concluye lo siguiente en torno al análisis de las pruebas realizadas sobre el telescopio JAST80 del Observatorio Astrofísico de Javalambre en los años 2019 y 2022:

### 6.1 Fase aceleración

Uno de los efectos que se ha descubierto respecto a las pruebas 1 y 2 es que sus espectros son más “sucios”, esto coincide con que son las únicas en las que no existe un movimiento de ascensión recta (eje vertical de la montura del telescopio). Esto podría indicar que estos movimientos producen más frecuencias. En las figuras 33 y 34 se muestra una comparación entre los espectros de la prueba 2 y 7.

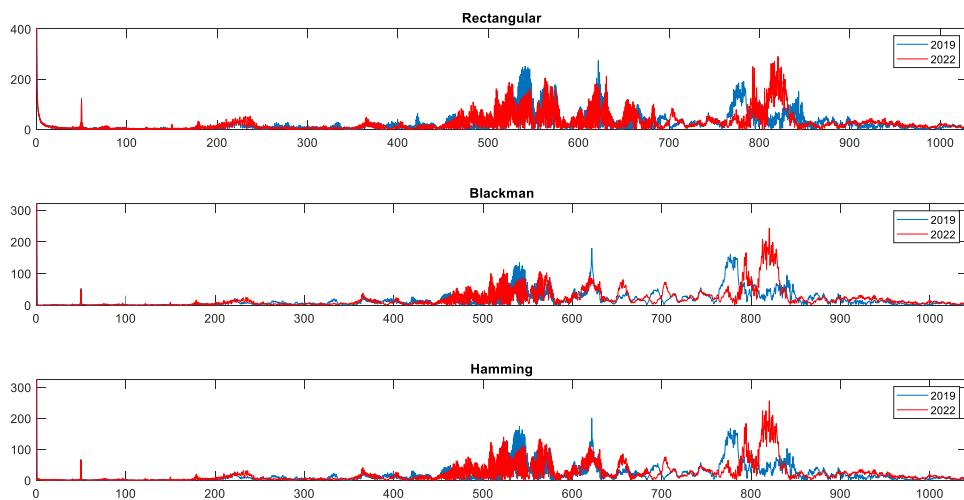


Figura 33, espectros prueba 2

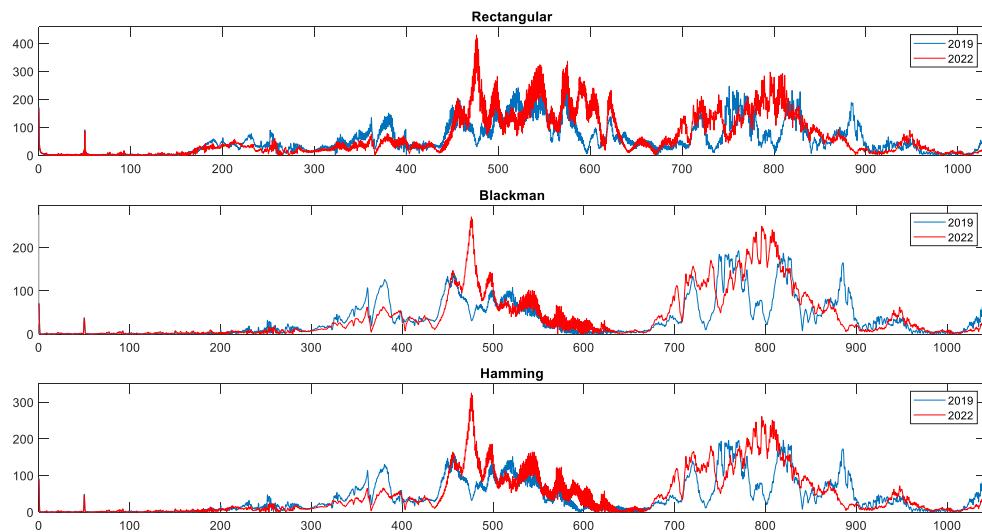


Figura 34, espectros prueba 7

Todos los espectros siguen el mismo patrón, pequeños grupos o picos de frecuencias pueden aparecer hasta los 350-400 Hz, aunque las pruebas 1 y 2 presentan un patrón distinto en torno a los 250 Hz, las pruebas 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12 y 13 forman un grupo de frecuencias el cual puede parecer por efecto visual que las del año 2022 son más altas en frecuencia, usando de ejemplo la prueba 6, en el cùmulo comentado, sólo se encuentra el valor de 253,4 Hz de 2019 el cual aumenta a 256 Hz en 2022, un 1% más, pero como se muestra en la tabla 12, no se encuentra ningún patrón que haga indicar que este aumento es constante en toda la señal hasta 400 Hz.

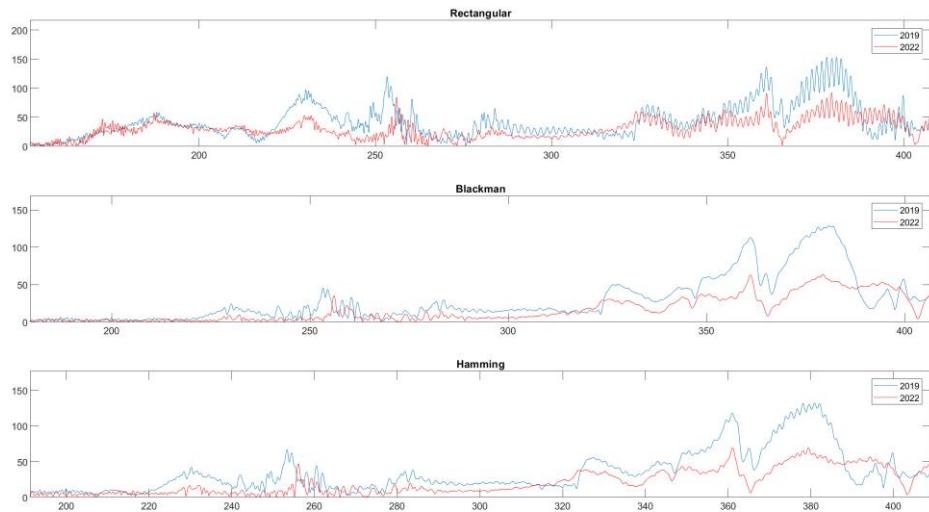


Figura 35, espectro prueba 6 200-400 Hz

A partir de los 400 Hz aparecen las frecuencias de mayor amplitud, todas las señales presentan similitudes de 2019 a 2022, pero hay que destacar las pruebas 6, 7 y 8. En torno a los 475 Hz, las señales 6 y 7 presentan un pico de frecuencia muy acentuado en 2022 y, por contrapartida, en 2019 se hunde en la gráfica como se muestra en las figuras 36 y 37. La prueba 8 (figura 38) también se añade porque se sospecha que existe algo relacionado como en la prueba 6 y 7, ya que sí existe en 2019 el descenso en la gráfica sobre los 475 Hz pero no el pico en 2022, ¿por qué se incluye entonces aquí?, es debido a que las pruebas 6, 7 y 8 son las únicas que mantienen 80 grados en declinación durante el movimiento de ascensión recta de la prueba.

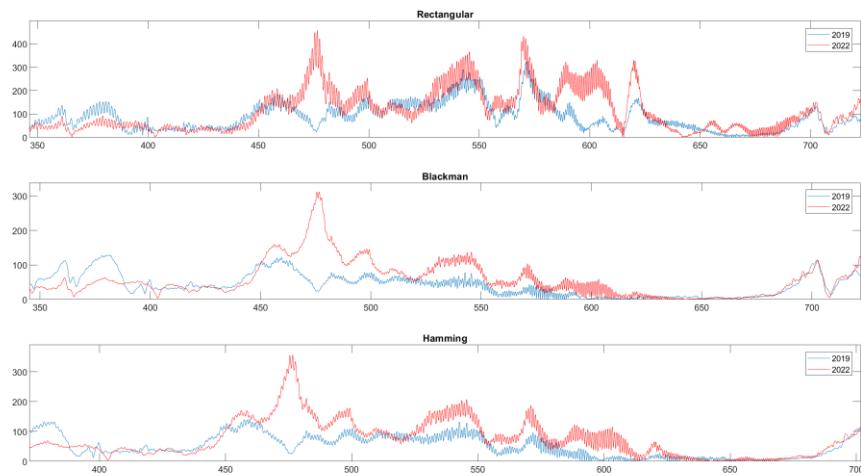


Figura 36, espectros prueba 6 350-700 Hz

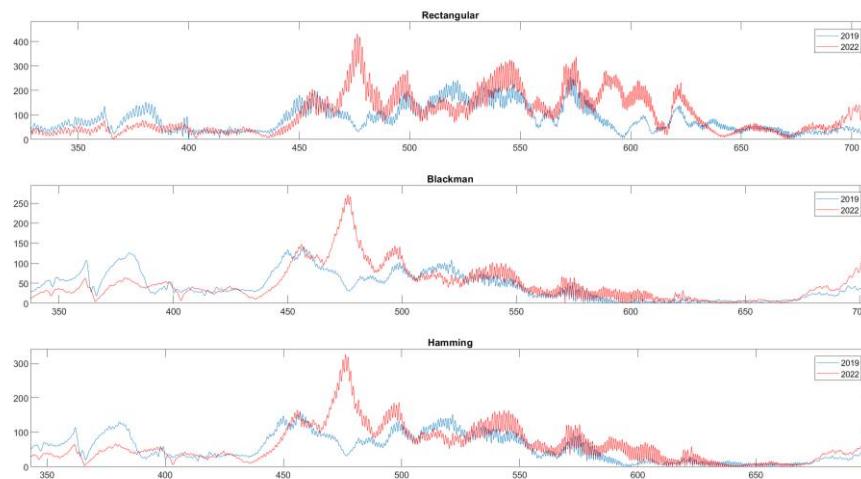


Figura 37, espectros prueba 7 350-700 Hz

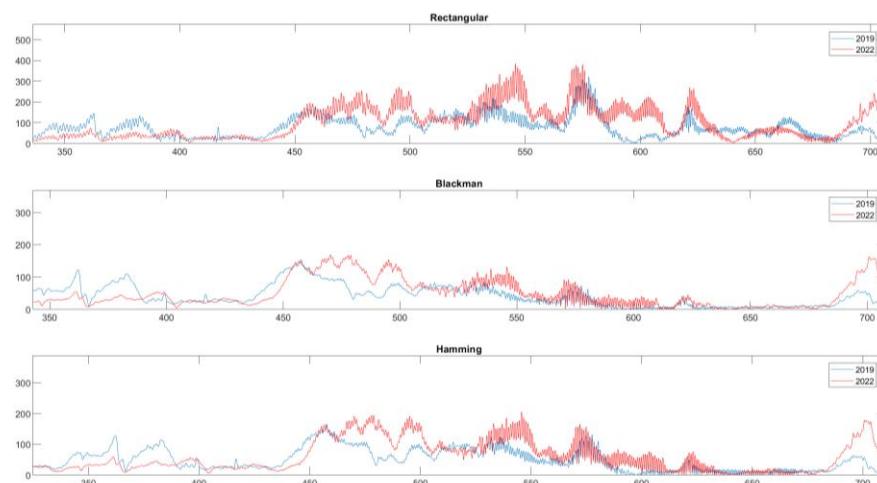


Figura 38, espectros prueba 8 350-700 Hz

En cuanto a variación frecuencial en el rango de 350-700 Hz, este rango es el más difícil de analizar en la fase de aceleración, a pesar de esto, gracias al análisis visual y a las frecuencias que se han podido añadir en las tablas del apartado 5.3, no se puede concluir que haya ninguna variación constante, tenemos picos en los que en 2019 son ligeramente superiores y viceversa, además estas diferencias son de décimas porcentuales en su mayoría.

A partir de 700 Hz, los espectros de 2019 y 2022 son muy diferentes, de hecho, la única que tiene similitudes entre los años es la prueba 13.

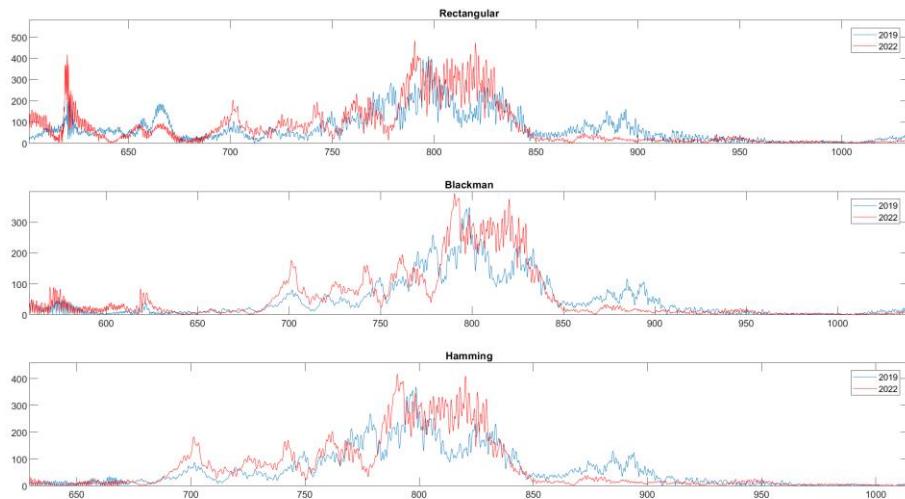


Figura 39, espectros prueba 13 650-1000 Hz

En cambio, en el resto de las pruebas, tiende a haber un patrón distinto entre los 2 años, por ejemplo, este de la prueba 11:

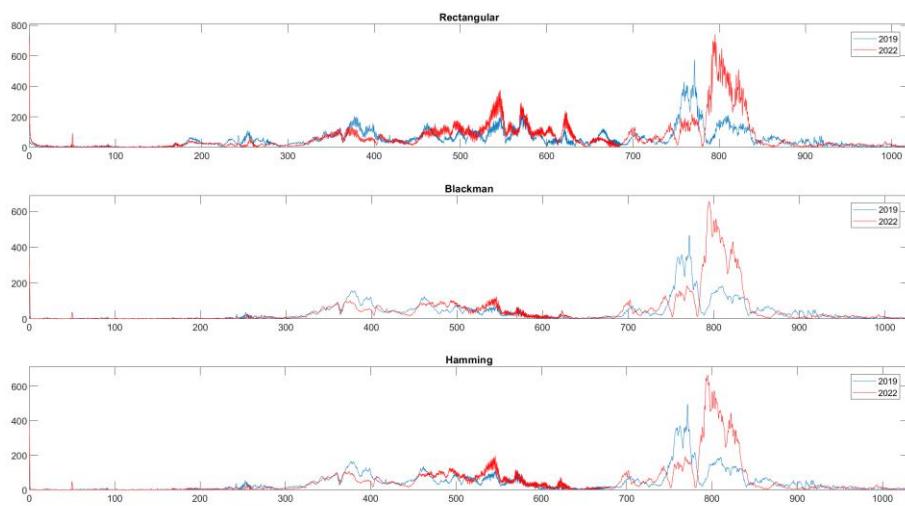


Figura 40, espectro prueba 11

Como se ve, las frecuencias más altas en 2019 han aumentado en frecuencia en 2022. Ante estos cambios en los espectros de un año a otro no se encuentra relación entre las pruebas, por lo que quizás habría que considerar que son propias del telescopio.

## 6.2 Fase avance

La fase de avance del telescopio es más fácil de analizar debido al movimiento constante del telescopio. No se aprecia ninguna diferencia significativa entre las pruebas 1 y 2 respecto a las demás como en el apartado 6.1.

Todos los espectros siguen el mismo patrón con pocas diferencias.

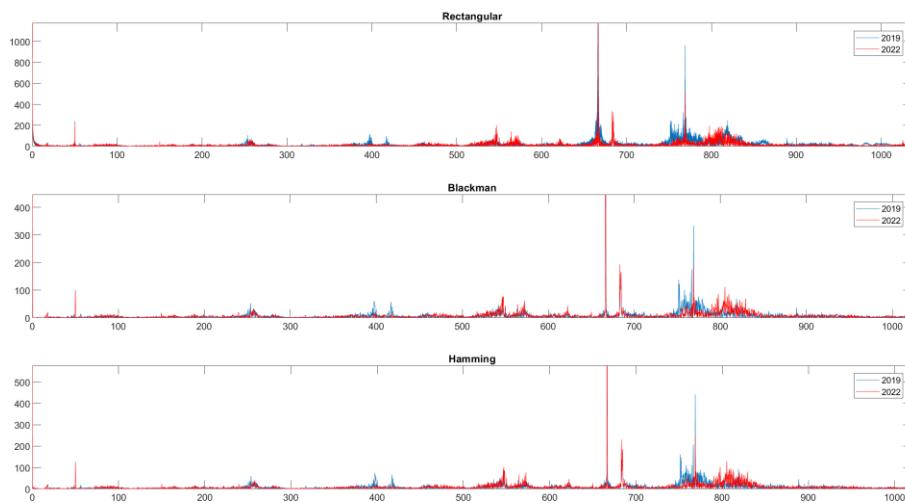


Figura 41, espectro fase avance prueba 5

Las únicas pruebas que presentan algún tipo de diferencia significativa entre las pruebas de 2019 y 2022 son la 6, 7 y 8 como en el apartado anterior. Los espectros de estas presentan nuevamente un pico en el espectro de 2022 el cual no aparece en 2019 ni en el resto de las pruebas. Este pico vuelve a aparecer en torno a los 475 Hz, como en la fase de aceleración.

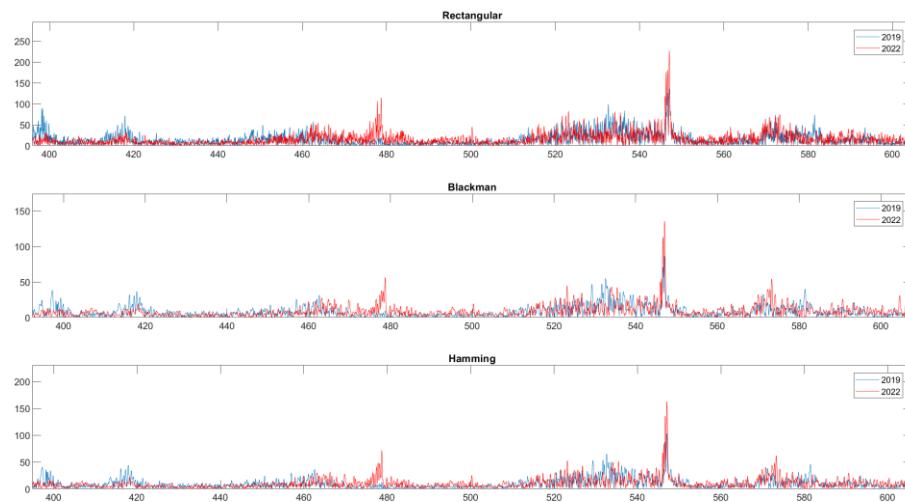


Figura 42, espectro fase avance prueba 7 400-600 Hz

Otro caso el cual produce algún efecto distinto en el espectro es la prueba 6, esta prueba tiene las siguientes señales temporales para 2019 y 2022:

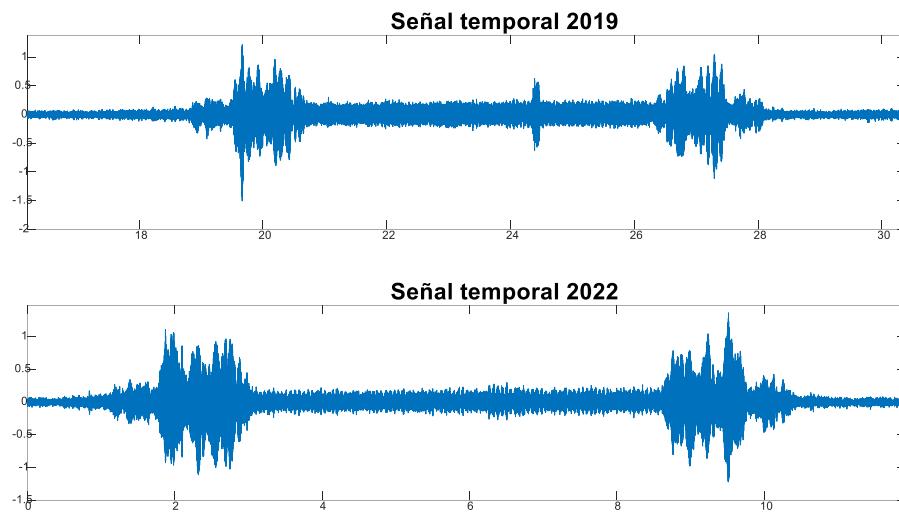


Figura 43, señal temporal prueba 6

Como se observa en la fase central de la señal, la de avance, en 2019 apareció algo que afectó a esta, de la señal se obtiene el siguiente espectro:

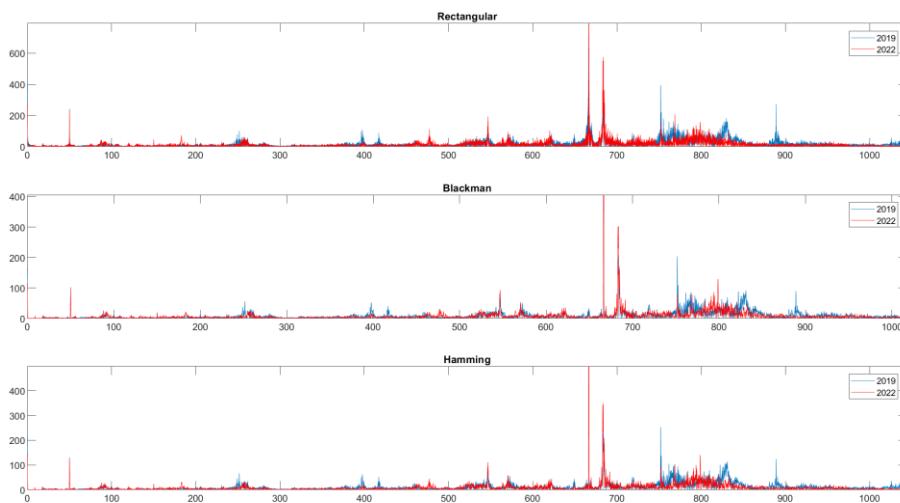


Figura 44, espectro fase avance prueba 6

Si se calcula la FFT de la señal recortada se obtiene lo siguiente:

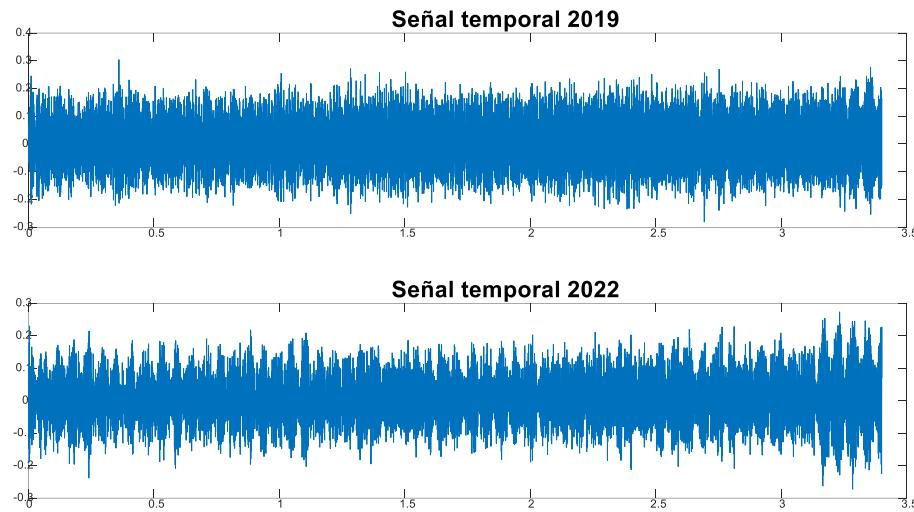


Figura 45, prueba 6, señal temporal recortada sin pico

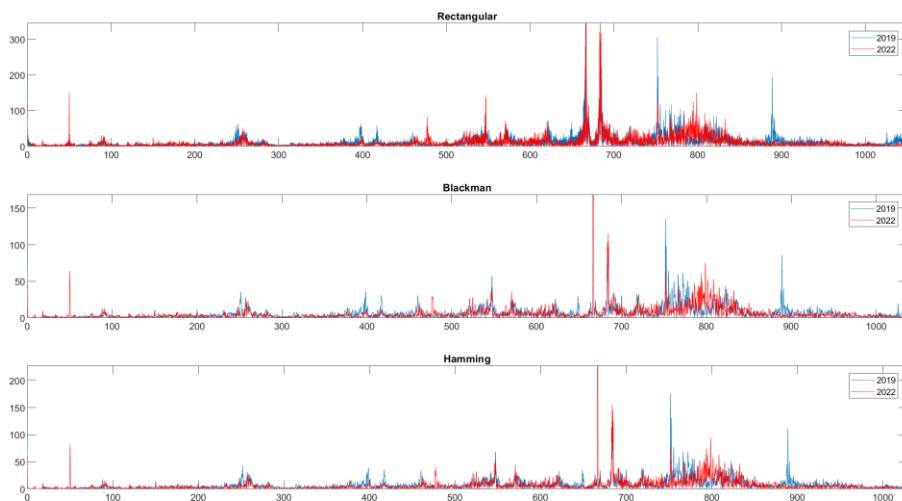


Figura 46, espectro prueba 6 fase avance recortada

Se observa que, al recortar el pico en la señal temporal ha hecho que desaparezcan las frecuencias en la parte más alta del espectro sobre los 830 Hz que sí aparecen en la figura 44.

Aparte de estos dos casos particulares, el resto de señales presenta los mismos patrones, todas las señales tienen un cúmulo de frecuencias sobre los 243-247 Hz, donde los valores de 2022 son uno 3 Hz mayores.

La señal de 2019 presenta dos grupos de frecuencias sobre los 398 Hz y 417 Hz, los cuales en 2022 se pueden dilucidar que también existen, pero muy pequeños.

Otros grupos de frecuencias, pero estos si están presentes en ambas señales en 546 Hz, 564 Hz y en 684 Hz. Además, todas las señales respetan la frecuencia principal

presente en el avance del telescopio al moverse, esta frecuencia es 666,5 Hz sin diferencias entre 2019 y 2022.

Nuevamente, las frecuencias a partir de 700 Hz se comportan de manera distinta para los dos años. Para el año 2022 no aparece ningún pico, sí aparecen para el año 2019 y de manera muy significativa.

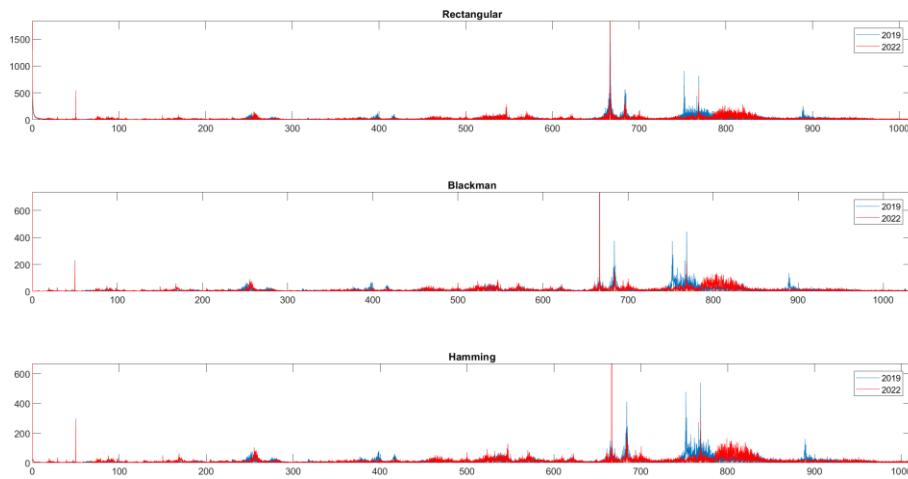


Figura 47, espectro avance prueba 13

Como se puede ver en las figuras 41, 44 y 46, aparecen picos en 751 Hz o 768 Hz, en cambio los espectros de 2022 se comportan igual siempre.

### 6.3 Fase frenado

Nuevamente y como pasaba en la fase de aceleración, las pruebas 1 y 2, las cuales no tenían movimiento en ascensión recta, vuelven a tener espectros con más ruido que el resto de señales.

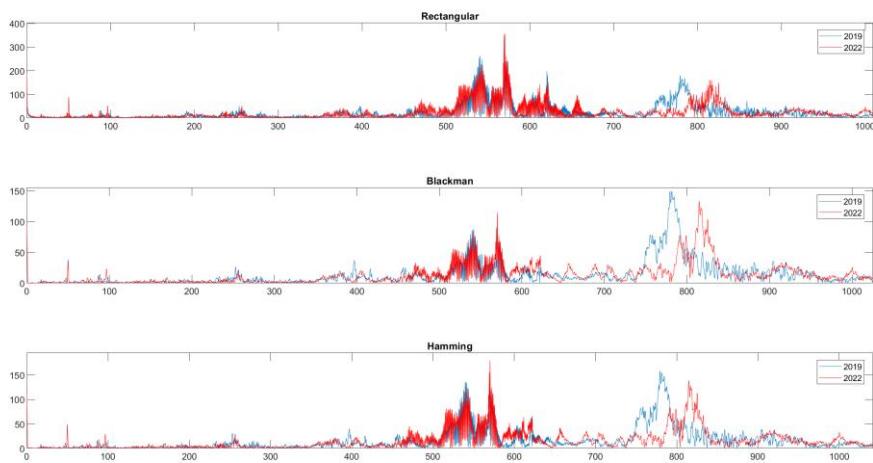


Figura 48, espectro fase frenado prueba 2

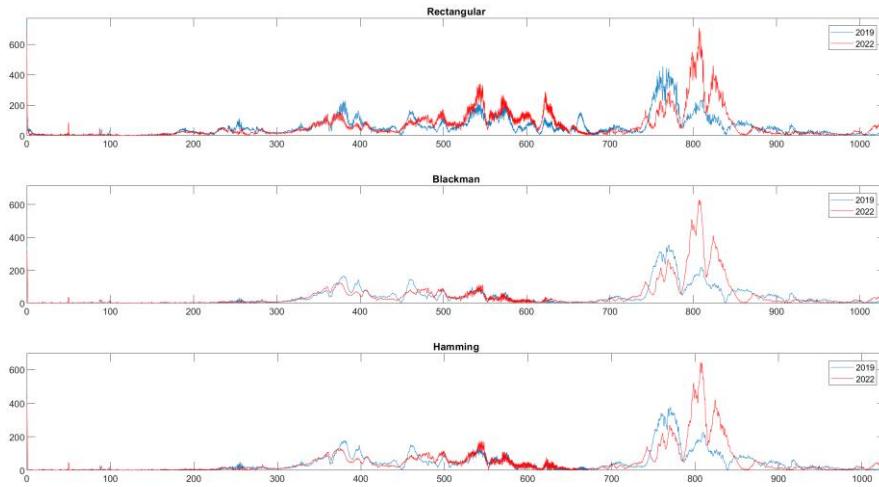


Figura 49, espectro fase frenado prueba 5

La fase de frenado se comporta de manera semejante a la de aceleración en su forma, aparecen pequeñas frecuencias despreciables hasta los 200 Hz y aparecen los primeros grupos de frecuencias hasta los 400 Hz, en la fase de frenado se concluía que había un ligero aumento en frecuencia de la señal de 2022 en 255 Hz más o menos, en la fase de frenado ocurre lo mismo con la diferencia que en 400 Hz, el espectro de 2022 es unas décimas porcentuales menor en frecuencia, como si se comprimiera. Esto, como en la fase de frenado, no ocurre con las pruebas 1 y 2.

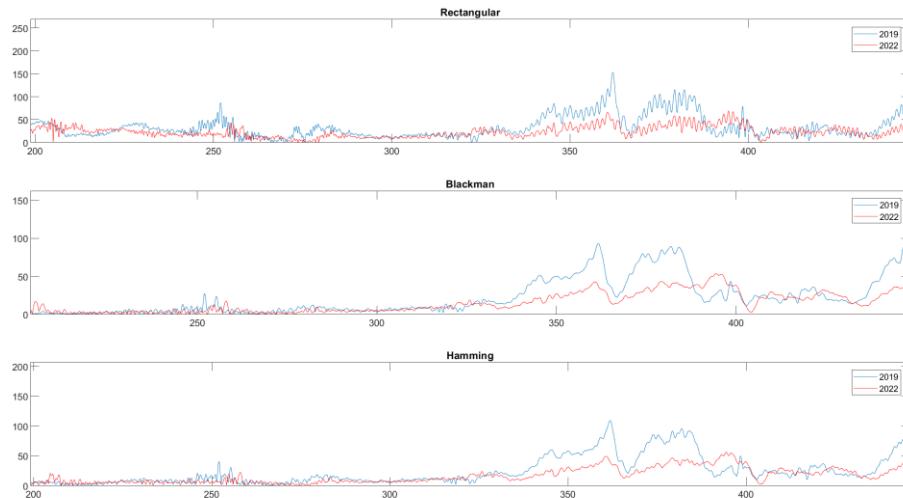


Figura 50, espectro fase frenado prueba 7 200-400 Hz

A partir de los 400 Hz hasta los 700 Hz, las señales, nuevamente siguen un patrón parecido entre ellas. De este modo, las señales 6, 7 y 8 vuelven a presentar un patrón que llama la atención en 475 Hz, pero con una ligera diferencia, antes los espectros de las pruebas 6 y 7 mostraban el pico de frecuencia mencionado (figuras 36, 37 y 38) en este caso, espectro que no muestra el pico acentuado es la muestra de la prueba 7.

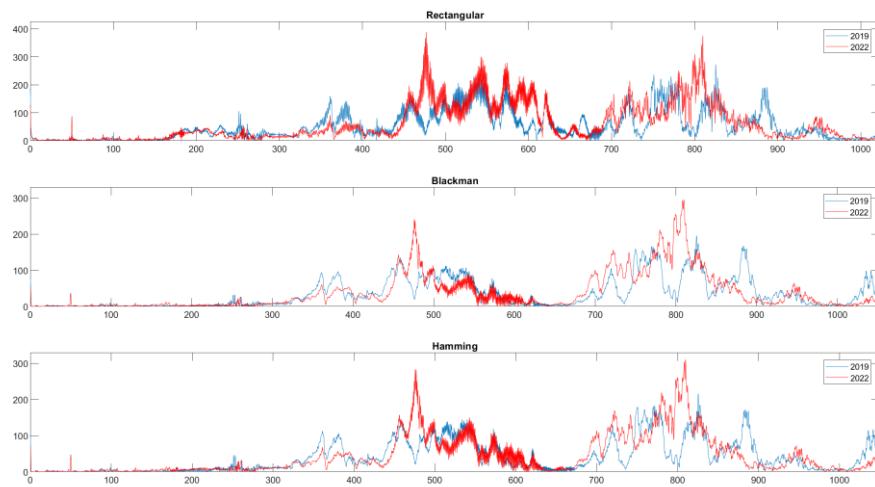


Figura 51, espectro fase frenado prueba 6

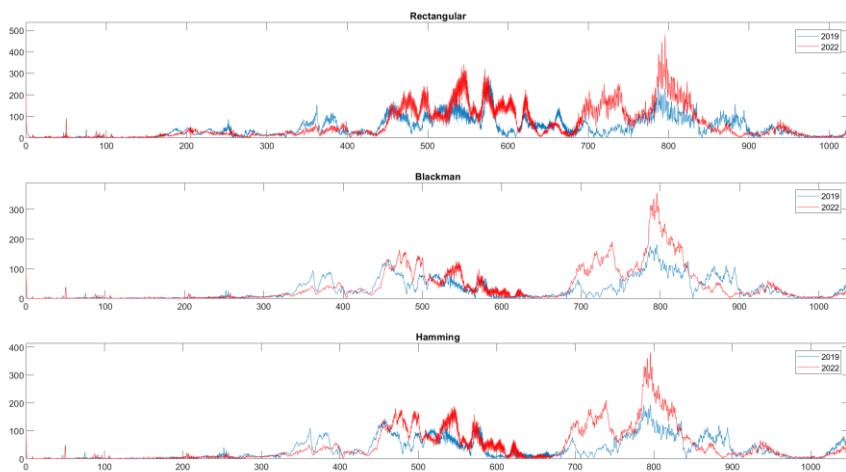


Figura 52, espectro fase frenado prueba 7

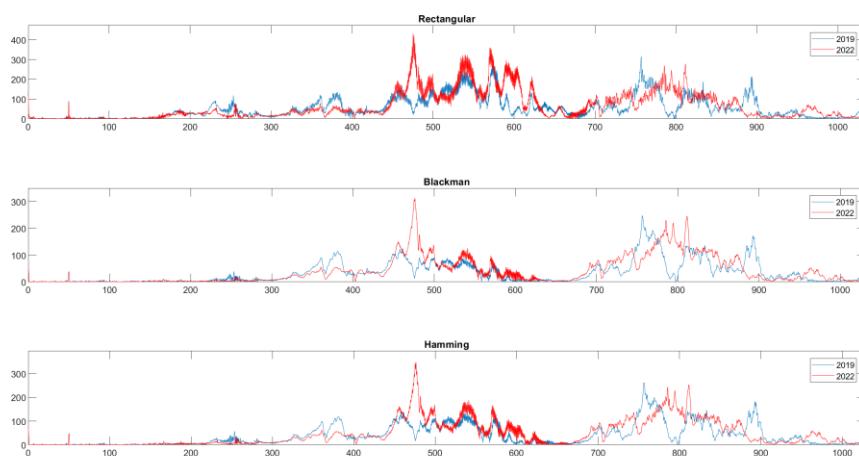


Figura 53, espectro fase frenado prueba 8

Análogamente a la fase de aceleración, el rango de 400 Hz a 700 Hz es bastante complicado de dilucidar si existe alguna variación significativa, a pesar de esto, visualmente, las gráficas presentan similitudes y las frecuencias obtenidas apenas varían.

En el rango de 700 Hz a 900 Hz, nos encontramos con lo mismo, frecuencias muy distintas en ambos años. Por ejemplo, la prueba 13 era la que más se asemejaba entre los dos años en aceleración, en cambio para frenado cambia totalmente (también se puede observar este rango en las figuras 48, 49, 51, 52 y 53).

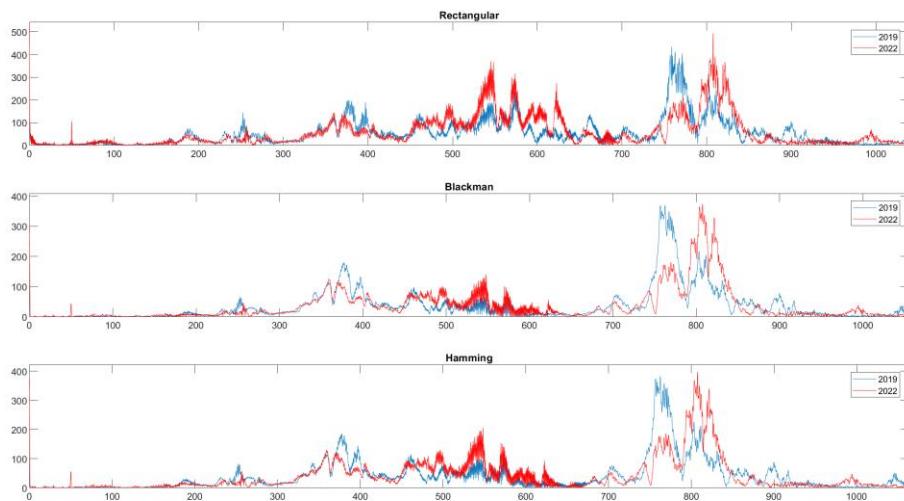


Figura 54, espectro fase frenado prueba 13

Para finalizar y comprimir en un resumen las conclusiones de este trabajo:

- El tamaño de la muestra ( $M$ ) es muy importante ya que afecta a la resolución y precisión en frecuencia. Además, una muestra suficientemente grande proporcionará mayor información al espectro.
- El tamaño de la FFT ( $N$ ) también afecta a la resolución y precisión frecuencial, además de reducir efectos de fuga espectral.
- La técnica de *zero-padding* no agrega información en el espectro, pero sí ayuda a suavizarlo.
- El uso correcto de las ventanas es importante para poder analizar adecuadamente las frecuencias, no existe ninguna mejor que otra para todos los aspectos a analizar en una señal, por eso, es importante conocer los pros y contras de ellas y usarlas en conjunto.
- En la fase de avance, existe similitud entre las señales respecto a las frecuencias más importantes de 2019 y 2022, aunque se han encontrado algunas menores que distan en unos pocos hertzios o simplemente sólo aparecían en un año. Esto, hasta el rango de 700 Hz a 900 Hz.
- Las frecuencias que aparecen desde 700 Hz a 900 Hz requerirían saber por qué son así. Quizá el problema radique en el telescopio. Cabe recordar que el fabricante de los acelerómetros en su hoja de características indicaba que el

rango idóneo de trabajo llegaba hasta los 450 Hz y quizá a partir de los 700 Hz comienza a comportarse de manera más errática tras el intervalo de tres años.

- Las pruebas 6, 7 y 8 han presentado un caso concreto de un pico muy pronunciado y, como se ha comentado en el trabajo, estas tres pruebas coincidían en ser fijas en el mismo ángulo de declinación durante el movimiento de ascensión recta.
- Las fases de aceleración y frenado, lógicamente, por ser fases en las que el telescopio genera movimientos más bruscos tienen unos espectros con más componentes frecuenciales y, además, parecían verse más afectadas por efectos indeseados del enventanado. Se podría realizar un trabajo más a fondo de estas analizando de manera más precisa de la siguiente manera, estas duraban normalmente unos dos segundos, la idea sería dividirlas en cuatro señales de medio segundo. No se ha realizado en este trabajo porque esto requeriría mucho tiempo, en este trabajo se ha trabajado con nueve pruebas, cada una consta de tres fases a las que se les ha aplicado tres ventanas (Rectangular, Blackman y Hamming), esto resulta en 81 espectros analizados. Si se realizara el troceo de las fases de aceleración y frenado resultaría en 297 espectros, por lo que se descarta (sí se hizo en alguna señal concreta cuyo espectro era pobre, por ejemplo, en la fase de aceleración de la prueba 5) ya que se considera que con los análisis hechos es suficiente.
- Se concluye que los espectros de las pruebas 1 y 2 eran distintos por no tener movimiento de ascensión recta.
- En este trabajo no se ha estudiado la amplitud de los espectros, pero se ha observado que, generalmente, los espectros del año 2022 solían superar en amplitud a los del 2019, lo que indicaría mayor intensidad.
- Por último, indicar la importancia de algunos aspectos: La importancia de evitar distorsiones como el ejemplo tratado en el apartado 6.2 con la prueba 6. También es muy importante para el análisis frecuencial seleccionar correctamente unas ventanas que trabajen en conjunto lo cual creo que se ha conseguido en este trabajo.

## 7 Referencias

- [1] P. Richards y W.-Y. Kim, "Monitoring for Nuclear Explosions," *Sci. Am.*, vol. 300, pp. 70–77, 2009, doi: 10.1038/scientificamerican0309-70.
- [2] "James W. Cooley, an oral history conducted in 1997 by Andrew Goldstein, IEEE History Center, Piscataway, NJ, USA," [Online]. Available: [https://ethw.org/w/index.php?title=Oral-History:James\\_W.\\_Cooley&oldid=183791](https://ethw.org/w/index.php?title=Oral-History:James_W._Cooley&oldid=183791).
- [3] J. W. Cooley y J. W. Tukey, "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series," *Math. Comput.*, vol. 19, no. 90, pp. 297–301, 1965, Accessed: Jan. 24, 2023. [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/2003354>.
- [4] I. J. Good, "The Interaction Algorithm and Practical Fourier Analysis," *J. R. Stat. Soc. Ser. B*, vol. 20, no. 2, pp. 361–372, 1958, doi: <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1958.tb00300.x>.
- [5] G. C. Danielson y C. Lanczos, "Some improvements in practical Fourier analysis and their application to x-ray scattering from liquids," *J. Franklin Inst.*, vol. 233, no. 4, pp. 365–380, 1942, doi: [https://doi.org/10.1016/S0016-0032\(42\)90767-1](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(42)90767-1).
- [6] M. T. Heideman, D. H. Johnson, y C. S. Burrus, "Gauss and the history of the fast Fourier transform," *Arch. Hist. Exact Sci.*, vol. 34, no. 3, pp. 265–277, 1985, doi: 10.1007/BF00348431.
- [7] A. V. Oppenheim y R. W. Schafer, *Tratamiento de señales en tiempo discreto*, 3<sup>a</sup> edición. Pearson Educación, S.A., 2011.