Clasificación de grupos abelianos infinitos inyectivos y proyectivos

Álvaro Navarro Álvarez
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Fernando Montaner Frutos
5 de julio de 2023

Resumen

El presente trabajo está dedicado al estudio de los grupos abelianos infinitos inyectivos y proyectivos, grupos de gran importancia al tratar con sucesiones exactas en el campo del álgebra homológica. El principal objetivo del mismo es caracterizar dichos grupos abelianos y proporcionar una clasificación, mediante módulos libres en el caso de los grupos proyectivos, y a través del Teorema de Matlis en el caso de los grupos inyectivos. Para llevar a cabo dicho estudio se aborda la teoría en tres niveles de abstracción:

En el capítulo 1 se presenta una introducción básica desde la visión dada por los grupos cíclicos, trasladándonos eventualmente al ámbito de la teoría de módulos, en la cuál un grupo abeliano es lo mismo que un $\mathbb{Z}$-módulo. En dicha parte se estudian las operaciones de suma y producto directo, así como las sucesiones exactas y la relación fundamental de los módulos proyectivos e inyectivos con la escisión de sucesiones exactas cortas.

Posteriormente, en el capítulo 2 se abarca un estudio desde el punto de vista de la teoría de categorías, en la que los módulos y sus homomorfismos constituyen una categoría abeliana. Dicha abstracción nos permitirá tratar functores como el Hom y el Ext, así como introducir las nociones de resolución proyectiva e inyectiva, cubierta proyectiva y generadores proyectivos.

La segunda mitad del trabajo está dedicada a la profundización por individual en los módulos proyectivos e inyectivos.

El capítulo 3 se enfoca en los módulos proyectivos, y en él se analiza en mayor profundidad la noción de módulo libre que facilitará una clasificación de los mismos. Asimismo, se trata la idea de torsión de un módulo, el producto tensorial y el functor Tor, de nuevo desde un punto de vista categórico. Finalmente se plantean algunos problemas abiertos relevantes formulados por Kaplansky, así como el problema indecidible de Whitestone.

En el capítulo 4 se exploran los módulos inyectivos, analizando para ello algunas nociones duales en sentido categórico a las vistas para módulos proyectivos. De este modo, se estudian los conceptos de módulo divisible y envolvente inyectiva, con resultados importantes como el criterio de Baer. Dicho estudio finaliza con la clasificación de módulos inyectivos dada por el Teorema de Matlis.

Adicionalmente, el trabajo consta de tres apéndices en los que se pueden consultar las nociones básicas de teoría de categorías, álgebra homológica y producto tensorial que serán necesarios para un mayor entendimiento de los módulos proyectivos e inyectivos.

Abstract

This work is dedicated to the study of infinite injective and projective abelian groups, which are of great importance in dealing with exact sequences in the field of homological algebra. The main objective is to characterize these abelian groups and provide a classification, using free modules in the case of projective groups, and through the Matlis Theorem in the case of injective groups. This study is approached at three levels of abstraction:

Chapter 1 presents a basic introduction starting from the perspective of cyclic groups, eventually transitioning to the realm of module theory, where an abelian group is the same as a $\mathbb{Z}$-module. This part covers the operations of direct sum and direct product, as well as exact sequences and the fundamental relationship of projective and injective modules with the splitting of short exact sequences.

Chapter 2 covers the study from the viewpoint of category theory, where modules and their homomorphisms form an abelian category. This abstraction allows us to deal with functors such as Hom and Ext, and introduces the notions of projective and injective resolutions, projective covers, and projective generators.

The second half of the work is dedicated to a deeper exploration of projective and injective modules.

Chapter 3 focuses on projective modules and delves into the notion of free modules, which facilitates their classification. The idea of module torsion, tensor product, and the functor Tor are also discussed from a categorical perspective. Finally, some relevant open problems formulated by Kaplansky are presented, as well as the undecidable Whitestone problem.

Chapter 4 analyzes the case of injective modules, and covers certain dual notions in a categorical sense to those seen for projective modules. Thus, the concepts of divisible module and injective envelope are explored, along with important results such as the Baer criterion. This study concludes with the classification of injective modules given by the Matlis Theorem.

Additionally, the work includes three appendices that provide the basic notions of category theory, homological algebra, and tensor product, which will be necessary for a better understanding of projective and injective modules.

Índice general

Capítulo 1

Introducción básica

En este primer capítulo se introducirán conceptos fundamentales como los grupos cíclicos y los módulos, así como las operaciones de sumas y productos directos. Además, se explorarán las sucesiones exactas, herramientas clave para comprender la estructura de los grupos abelianos y su clasificación.

1.1. Grupos cíclicos

Uno de los tipos de grupos que resulta de mayor importancia, como bien afirma L. Fuchs [3], son los grupos cíclicos. Para definirlos, consideremos en primer lugar la siguiente notación:

Sea S un subconjunto de un grupo abeliano A, denotaremos por $\langle S \rangle$ al subgrupo de A generado por S, i.e., la intersección de todos los subgrupos de A que contienen a S.
Si S consiste en los elementos a_i $(i \in I)$, se escribe

$$\langle S \rangle = \langle \dots, a_i, \dots \rangle_{i \in I},$$

o simplemente $\langle S \rangle = \langle a_i \rangle_{i \in I}$.

Definición. El subgrupo $\langle S \rangle$ contiene todas las sumas de la forma $n_1 a_1 + \cdots + n_k a_k$, llamadas *combinaciones lineales* de $a_1, \dots, a_k$, con $a_i \in S$, $n_i \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{N}$.

Si S es vacío, entonces $\langle S \rangle = 0$.

Definición. Si $\langle S \rangle = A$, S se dice *sistema generador* de A. Los elementos de S son *generadores* de A. Un grupo *finitamente generado* es aquel que tiene un sistema generador finito.

Con esta notación se tiene la siguiente definición de grupo cíclico:

Definición. Sea un grupo G generado por un único elemento, $G = \langle a \rangle$, decimos que G es un *grupo monógeno* o *cíclico*.

Una clasificación se tiene al considerar la finitud de los grupos cíclicos:

- Si $G = \langle a \rangle$ es un grupo cíclico infinito, entonces es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Z}$ de los enteros $0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Se tiene, por tanto, que todos lo grupos cíclicos infinitos son isomorfos.

- Si $G = \langle a \rangle$ es un grupo cíclico finito de orden m, entonces consiste en los elementos $0, a, 2a, \dots, (m-1)a$ (pues $ma = 0$), es decir, G es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Z}_m$. Se tiene que todos los grupos cíclicos finitos del mismo orden son isomorfos.

Utilizaremos las notaciones de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_m$ respectivamente para referirnos a estos grupos cíclicos.

Proposición 1.1. *Todo subgrupo de un grupo cíclico es también cíclico.*

Proposición 1.2. *Todo grupo cociente propio de un grupo cíclico es un grupo cíclico finito.*

Por último, notar la siguiente relación entre los grupos cíclicos y los grupos abelianos:

Proposición 1.3. *Todo grupo cíclico es un grupo abeliano.*

Demostración. *En efecto, sea el grupo cíclico $G = \langle g \rangle$, se cumple que si $a \in G$, entonces $a = g^k$ para algún k, y por tanto considerando dos elementos $g^{k_1}, g^{k_2} \in G$, se sigue*

$$g^{k_1} g^{k_2} = g^{k_1+k_2} = g^{k_2+k_1} = g^{k_2} g^{k_1},$$

para cualesquiera k_1 y k_2. ■

Así pues, los grupos cíclicos son unos de los más importantes, si bien cabe destacar otros tipos de grupos abelianos como los grupos cocíclicos, los grupos racionales o los enteros p-ádicos, en los que no nos detendremos en este trabajo.

1.2. Módulos

A partir de los grupos cíclicos se pueden construir muchos otros grupos. La construcción más inmediata de grupos a partir de grupos cíclicos se obtiene a través de la suma directa, pero para introducirla, vamos primero a trasladarnos a un nivel de abstracción mayor. Las ideas presentadas a continuación pueden ser consultadas y ampliadas en libros como el de L. Fuchs [3] o el de N. Jacobson [5].

1.2.1. Primeras definiciones

El concepto de módulo resulta de gran importancia, pues nos proporciona una forma algo más abstracta de ver los grupos abelianos, y lo manejaremos durante gran parte del trabajo:

Definición. Sea R un anillo asociativo y sea M un grupo abeliano tal que

1. $\forall\ \alpha \in R,\ a \in M$, se tiene un elemento $\alpha a \in M$ llamado producto de α y a.
2. $\forall \alpha, \beta \in R$ y $a \in m$ se tiene $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$.
3. $\forall \alpha \in R$ y $a, b \in M$, $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$.
4. $\forall \alpha, \beta \in R$ y $a \in M$, $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$.

   Llamamos a M un *R-módulo a izquierda sobre R*. Si R tiene un elemento unital e, dicho elemento actúa como identidad en M:

5. $ea = a$, $\forall a \in M$.

Se habla entonces de un *R-módulo unital*.
De manera análoga se define un *R-módulo a derecha sobre R*. Además, si el anillo es conmutativo las nociones de R-módulo a izquierda sobre R y R-módulo a derecha sobre R son equivalentes. En este caso se puede hablar simplemente de *R-módulo sobre R*

Con estas nociones, notar que eligiendo $R = \mathbb{Z}$ como nuestro anillo, se tiene que un grupo abeliano no es otra cosa que un $\mathbb{Z}$-módulo.

Definición. Sea $N \subseteq M$ un subgrupo, decimos que N es un *submódulo* si $\forall \alpha \in R$ y $n \in N$ se tiene $\alpha n \in N$, es decir, si N es un R-módulo bajo las mismas operaciones.

En el caso de los $\mathbb{Z}$-módulos, un submódulo es lo mismo que un subgrupo.

Definición. Sea M un R-módulo y sea $(x_i)_{i\in I}$ una *familia libre* de M (es decir, $k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots = 0 \iff k_i = 0,\ \forall i \in I$), diremos que $(x_i)_{i\in I}$ es una *base* de M sobre R si el submódulo generado por $(x_i)_{i\in I}$ es M.
Un R-módulo con base se denomina *libre*.

1.2.2. Suma y producto directo

Definición. Sea A un módulo, $B,\ C \leq A$ submódulos, se dice que A es *suma directa interna* de B y C, denotado $A = B \oplus C$ si:

1. $A = B + C$, es decir, $\forall a \in A, \exists! b \in B, c \in C$ tales que $a = b + c$,

2. $B \cap C = 0$.

Dado $A = B \oplus C$ tal que $a = b + c$, se pueden entonces definir los epimorfismos $\pi_B : a \mapsto b$ y $\pi_C : a \mapsto c$, de forma que, por el primer teorema de isomorfía se tiene:

$$B \cong {}^{A}\!/_{C} \qquad\qquad C \cong {}^{A}\!/_{B}$$

Definición. Sean $B,\ C$ dos módulos, el conjunto de pares (b, c) con $b \in B,\ c \in C$ forma un módulo $A = B \oplus C$ llamado *suma directa externa* de B y C, cumpliendo:

1. $(b_1, c_1) = (b_2, c_2) \iff b_1 = b_2, c_1 = c_2$,

2. $(b_1, c_1) + (b_2, c_2) = (b_1 + b_2, c_1 + c_2)$.

Definición. Sea $\{B_i\}_{i \in I}$ un conjunto de módulos, el conjunto de vectores $\{b_i\}_{i \in I}$ forma un módulo C llamado *producto directo* de los B_i:

$$C = \prod_{i \in I} B_i.$$

Las aplicaciones

$$\rho_i : b_i \mapsto c_j,$$

donde $c_j = 1$ si $j = i$ y $c_j = 0$ en otro caso, son isomorfismos de B_i con un submódulo $B_i' \leq C$. Dichos $\{B_i'\}_{i \in I}$ generan en C el módulo A de todos los vectores con $b_i = 0$ para casi todo $i \in I$ (es decir, para todo $i \in I$ salvo, posiblemente, un número finito de excepciones). Llamamos a A *suma directa externa* de los B_i:

$$A = \bigoplus_i B_i.$$

Notar que, con la notación anterior, $A = C$ si y solo si I es finito.
Se obtienen así homomorfismos

$$\rho_B : b \to (b, 0), \qquad \rho_C : c \to (0, c)$$

$$\pi_B : (b, c) \to b, \qquad \rho_C : (b, c) \to c$$

denominadas respectivamente *inyecciones* y *proyecciones*, y teniéndose la relación

$$B \underset{\rho_B}{\overset{\pi_B}{\leftrightarrows}} B \oplus C \underset{\pi_C}{\overset{\rho_C}{\leftrightarrows}} C$$

Además, la suma y el producto directos definen para cada $i \in I$ una inyección ρ_i y una proyección π_i:

$$B_i \xrightarrow{\rho_i} \bigoplus B_i \xrightarrow{\pi_i} B_i \qquad B_i \xrightarrow{\rho_i} \prod B_i \xrightarrow{\pi_i} B_i$$

Teorema 1.1. *Sean $\varphi_i : B_i \to A,\ i \in I$ homomorfismos, se tiene el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} B_i \arrow[r, "\rho_i"] \arrow[d, "\varphi_i"] & \bigoplus_i B_i \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ A & \end{tikzcd}$$

donde la flecha punteada puede ser completada por un homomorfismo único ψ para hacer el diagrama conmutativo.

Teorema 1.2. *Sean $\varphi_i : A \to B_i,\ i \in I$ homomorfismos, existe un homomorfismo único ψ tal que el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, dashed, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi_i"] & \\ \prod_i B_i \arrow[r, "\pi_i"] & B_i \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

1.2.3. Sucesiones exactas

La teoría relacionada con sucesiones exactas es de mucha relevancia, pues en ella se basa el campo del álgebra homológica. Para lo que nos atañe nos centraremos en las nociones básicas, pero para profundizar más en el tema pueden consultarse los libros de P. J. Hilton y U. Stammbach [4] o el de E. Lluis-Puebla [7].

Definición. Una sucesión de R-módulos A_i y homomorfismos α_i:

$$A_0 \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_k} A_k$$

es *exacta* si

$$Im\alpha_i = Ker\alpha_{i+1},\ \forall i = 1, \dots, k-1.$$

Es fácil ver que, en particular, $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B$ es exacta si y solo si α es monomorfismo, y $B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ es exacta si y solo si β es epimorfismo.

Definición. Una sucesión exacta de la forma:

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

se denomina *sucesión exacta corta*.

Notar que, dado que $Ker(\alpha) = 0$, se tiene por el primer teorema de isomorfía que

$$A/Ker(\alpha) = A \cong Im(\alpha).$$

Por otro lado $Im(\beta) = C$, por lo que usando de nuevo el primer teorema de isomorfía

$$B/Ker(\beta) = B/Im(\alpha) \cong B/A \cong Im(\beta) = C.$$

Por lo tanto, la sucesión exacta corta anterior es equivalente a:

$$0 \to Im(\alpha) \to B \to B/A \to 0$$

Definición. Dada una sucesión exacta corta

$$0 \to B \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

decimos que A es una *extensión* de B por C.

Para relacionar con las sumas directas de módulos anteriormente vistas, se tiene que si $A = B \oplus C$, entonces A es una extensión de B por C y se tiene la sucesión exacta corta:

$$0 \to B \xrightarrow{\iota} B \oplus C \xrightarrow{\pi} C \to 0,$$

donde ι es la inclusión canónica $b \mapsto (b, 0)$, y π es la proyección $(b, c) \mapsto c$.

Definición. Diremos que una sucesión exacta corta

$$0 \to B \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

se escinde si $Im(\alpha)$ es un sumando directo de A, es decir, si existe un submódulo $M \cong C$ tal que $A = Im(\alpha) \oplus M$, de forma que se tiene el isomorfismo $A/Im(\alpha) = Im(\alpha) \oplus M / Im(\alpha) = M \cong C$.

La escisión es una condición que resulta de gran utilidad para analizar y manipular sucesiones exactas cortas, y con ello las extensiones, sirviendo por tanto en la construcción de módulos a partir de componentes más "sencillas"(por ejemplo módulos cíclicos). Existen ciertos tipos de módulos con propiedades interesantes relacionadas con la escisión que merece la pena estudiar. Se trata de los módulos inyectivos y proyectivos.

Procedemos ahora a hacer una breve definición de los mismos:

Definición. Un módulo P se dice *proyectivo* si todo diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\ B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con una fila exacta puede ser completada mediante un homomorfismo $\psi : P \to B$ de forma que sea conmutativo.

Definición. Un módulo I se dice *inyectivo* si todo diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\xi"] & B \arrow[dl, dashed, "\eta"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

con una fila exacta puede ser completada mediante un homomorfismo $\eta : B \to I$ de forma que sea conmutativo.

Estos módulos se pueden caracterizar del siguiente modo:

- Un módulo P es proyectivo si y solo si toda sucesión exacta corta

  $$0 \to A \to B \to P \to 0$$

  se escinde.

- Un módulo I es inyectivo si y solo si toda sucesión exacta corta

  $$0 \to I \to B \to C \to 0$$

  se escinde.

Es claro que estos módulos serán importantes a la hora de trabajar con sucesiones exactas cortas, y dedicaremos el resto del trabajo al estudio en mayor profundidad de sus características y propiedades.

Capítulo 2

Categorías abelianas y de módulos

Antes de continuar y profundizar en los dos tipos de módulos recién mencionados, vamos a trasladarnos una vez más a un nivel de abstracción superior, y para ello debe uno estar familiarizado con la teoría de categorías. Algunos conceptos básicos previos para el entendimiento de lo que sigue son explicados en el apéndice, y para una mayor profundización en el tema puede consultarse el libro de P. Freyd [8].

2.1. Categorías abelianas

Los módulos y sus homomorfismos constituyen, como muchos otros objetos matemáticos, una categoría, y en particular una categoría abeliana. Para empezar, introduciremos la noción de categoría abeliana, para cuya definición se necesitan algunos conceptos previos:

Definición. Un monomorfismo se dice *normal* si es el núcleo de algún morfismo. Análogamente, un epimorfismo se dice *conormal* si es el conúcleo de algún morfismo.
Una categoría se dice *normal* (resp. *conormal*) si todo monomorfismo (resp. epimorfismo) es normal en dicha categoría. Una categoría que es a la vez normal y conormal se dice *binormal*.

Definición. Sea $\mathscr{C}$ una categoría con morfismos cero. Dada una colección finita de objetos $A_1, \dots, A_n$ en $\mathscr{C}$, su *biproducto* es un objeto $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ en $\mathscr{C}$ junto con morfismos:

$$\pi_i : A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \longrightarrow A_i \quad \text{(los morfismos de proyección)}$$

$$\iota_i : A_i \longrightarrow A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \quad \text{(los morfismos de inclusión)}$$

que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\pi_i \circ \iota_j = \delta_{i,j}$ (la identidad si $i = j$, y el morfismo cero si $i \neq j$).
2. $(A_1 \oplus \cdots \oplus A_n, \pi_i)$ es un producto para los A_i.
3. $(A_1 \oplus \cdots \oplus A_n, \iota_i)$ es un coproducto para los A_i.

Definición. Una categoría preaditiva $\mathscr{C}$ se dice *categoría abeliana* si:

1. Tiene objeto cero.
2. Tiene todos sus núcleos, conúcleos, y biproductos.
3. Todos los monomorfismos y epimorfismos son normales.

Se tiene que precisamente las categorías ${}_R Mod$ y Mod_R de módulos a izquierda y a derecha son categorías abelianas (entre muchas otras como la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo o la categoría de complejos de cadenas). Es decir, podemos ver los módulos (y, en particular, los grupos abelianos) como objetos de una categoría abeliana.

2.2. Functor Hom

Una vez colocados en el nivel de la teoría de categorías, una herramienta clave a tener en cuenta son los functores, y su relación con los módulos proyectivos e inyectivos anteriormente mencionados. Comenzaremos definiendo uno de los más importantes, el functor Hom:

Definición. Sean A,B,C tres objetos de una categoría $\mathscr{C}$, se define:

- Un functor covariante
$$Hom(A,-) : \mathscr{C} \to Set$$
que envía cada objeto X en $\mathscr{C}$ al conjunto de morfismos de A en X,
$$X \mapsto Hom(A,X),$$
y cada morfismo $f : X \to Y$ a la función $Hom(A,f) : Hom(A,X) \to Hom(A,Y)$ dada por $g \to f \circ g$, $\forall g \in Hom(A,X)$,
$$f \mapsto Hom(A,f).$$

- Un functor contravariante
$$Hom(-,B) : \mathscr{C} \to Set$$
que envía cada objeto X en $\mathscr{C}$ al conjunto de morfismos de X en B,
$$X \mapsto Hom(X,B),$$
y cada morfismo $h : X \to Y$ a la función $Hom(h,B) : Hom(Y,B) \to Hom(X,B)$ dada por $g \to g \circ h$, $\forall g \in Hom(Y,B)$,
$$h \mapsto Hom(h,B).$$

Los functores $Hom(A,-)$ y $Hom(-,B)$ están relacionados de manera natural: para cada par de morfismos $f : B \to B'$ y $h : A' \to A$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Hom(A,B) \arrow[r, "Hom(h,B)"] \arrow[d, "Hom(A,f)"] & Hom(A',B) \arrow[d, "Hom(A',f)"] \\
Hom(A,B') \arrow[r, "Hom(h,B')"] & Hom(A',B')
\end{tikzcd}$$

La conmutatividad en el diagrama anterior implica que $Hom(-,-)$ es un bifunctor de $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$ en Set, que es contravariante en el primer argumento y covariante en el segundo, o, equivalentemente,
$$Hom(-,-) : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to Set.$$

Del diagrama se infiere también que todo morfismo $h : A' \to A$ da lugar a una transformación natural
$$Hom(h,-) : Hom(A,-) \to Hom(A',-)$$
y cada morfismo $f : B \to B'$ da lugar a una transformación natural
$$Hom(-,f) : Hom(-,B) \to Hom(-,B').$$
Por el lema de Yoneda se tiene que toda transformación natural entre functores Hom es de esta forma, es decir, los functores Hom dan lugar a una subcategoría plena y fiel $\mathscr{C}$ en la categoría de functores $Set^{\mathscr{C}^{op}}$.

Es interesante mencionar algunas propiedades que resultan de la definición del functor Hom:

Proposición 2.1. *Sean M y N dos objetos de la categoría de módulos Mod_R,*

- *El functor covariante $Hom_R(R,-) \cong Id$. En particular, es claro que $Hom_R(R,M) \cong M$.*
- *El functor contravariante $Hom_R(-,R) \cong (\cdot)^*$. En particular, es claro que $Hom_R(M,R) \cong M^*$.*
- *El functor contravariante $Hom_R(-,N)$ preserva sumas directas, es decir,*

$$Hom_R\left(\bigoplus_{i\in I} M, N\right) \cong \bigoplus_{i\in I} Hom_R(M,N).$$

- *El functor covariante $Hom_R(M,-)$ preserva productos directos, es decir,*

$$Hom_R\left(M, \prod_{i\in I} N\right) \cong \prod_{i\in I} Hom_R(M,N).$$

También con la noción de functor Hom, se tiene una nueva caracterización para los módulos proyectivos e inyectivos:

Proposición 2.2. *Sean A,B,P,I objetos de la categoría de módulos Mod_R,*

- *P es un módulo proyectivo si y solo si*

$$Hom_R(P,B) \to Hom_R(P,A)$$

  es suprayectiva para todo epimorfismo $A \to B$.

- *I es un módulo inyectivo si y solo si*

$$Hom_R(B,I) \to Hom_R(A,I)$$

  es suprayectiva para todo monomorfismo $A \to B$.

Recordemos antes de continuar la noción de functor exacto:

Definición. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ dos categorías abelianas y sea $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un functor:

- Si F es covariante, F se dice *exacto* si, dada una sucesión exacta corta

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

  en $\mathscr{A}$, se tiene una sucesión exacta corta

$$0 \to F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \to 0$$

  en $\mathscr{B}$.

- Si F es contravariante, F se dice *exacto* si dada una sucesión exacta corta

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

  en $\mathscr{A}$, se tiene una sucesión exacta corta

$$0 \to F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \to 0$$

  en $\mathscr{B}$.

En particular, un functor covariante F se dice *exacto a derecha* (resp. *exacto a izquierda*), si $0 \to A \to B \to C \to 0$ exacta implica que $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ es exacta (resp. $0 \to A \to B \to C \to 0$ exacta implica que $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ es exacta), y un functor contravariante F se dice *exacto a derecha* (resp. *exacto a izquierda*) si $0 \to A \to B \to C \to 0$ exacta implica que $F(C) \to F(B) \to F(A) \to 0$ es exacta (resp. $0 \to A \to B \to C \to 0$ exacta implica que $0 \to F(C) \to F(B) \to F(A)$ es exacta).

Con esto, el functor covariante $Hom_R(M,-)$, es un functor exacto a izquierda, y el functor contravariante $Hom_R(-,M)$ es también un functor exacto a izquierda.

Proposición 2.3. *Se tienen las siguientes afirmaciones sobre la exactitud del functor Hom:*

- *El functor covariante $Hom_R(P,-)$ es exacto si y solo si P es proyectivo.*
- *El functor contravariante $Hom_R(-,I)$ es exacto si y solo si I es inyectivo.*

Es decir, el functor $Hom_R(P,-)$ que va de la categoría de módulos a la categoría de grupos abelianos preserva la exactitud de sucesiones exactas cortas. Si la sucesión

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

es exacta en la categoría de módulos se tiene la correspondiente sucesión exacta corta

$$0 \to Hom_R(P,A) \to Hom_R(P,B) \to Hom_R(P,C) \to 0$$

en la categoría de grupos abelianos (se tiene un resultado similar, en su versión contravariante, para módulos inyectivos).

De todo lo anterior se infiere que si $P \oplus Q$ es proyectivo, entonces también lo son P y Q. Por otra parte, si $I \times J$ es inyectivo, entonces también lo son I y J. Es claro que en este caso $I \times J$ es isomorfo a $I \oplus J$, pero podemos considerar un caso más general:

Teorema 2.1. *Si $\{P_\alpha\}_{\alpha\in S}$ es una familia de módulos proyectivos, entonces $\bigoplus_{\alpha\in S} P_\alpha$ es un módulo proyectivo. Análogamente, si $\{I_\alpha\}_{\alpha\in S}$ es una familia de módulos inyectivos, entonces $\prod_{\alpha\in S} I_\alpha$ es un módulo inyectivo.*

Definición. Decimos que una categoría $\mathscr{C}$ tiene *suficientes proyectivos* (resp. *suficientes inyectivos*) si para cada objeto M en $\mathscr{C}$ existe un epimorfismo $P \to M$ con P proyectivo (resp. un monomorfismo $M \to I$ con I inyectivo).

Notar que la categoría $\mathscr{C}$ tiene suficientes proyectivos (resp. suficientes inyectivos) si y solo si la categoría opuesta $\mathscr{C}^O$ tiene suficientes inyectivos (resp. suficientes proyectivos). Pese a todo, existe una asimetría fundamental en el hecho de que muchas categorías abelianas tienen suficientes inyectivos pero no suficientes proyectivos.

Proposición 2.4. *La categoría abeliana Mod_R de R-módulos tiene suficientes proyectivos, y también suficientes inyectivos.*

2.3. Resolución proyectiva e inyectiva

Para lo que sigue se usará notación y conceptos del álgebra homológica que pueden consultarse en el apéndice.

Definición. Sea M un R-módulo, una *resolución proyectiva* de M es una sucesión exacta $\mathbb{P}$ de la forma:

$$\mathbb{P} : \cdots \to P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \to P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

donde P_n es proyectivo para todo $n \geq 0$.

Por tanto, una resolución proyectiva es una cadena de R-módulos proyectivos $\mathbb{P} = \{P_n, \partial_n\}$ tal que el módulo de homología $H_n(\mathbb{P}) = 0$ para $n \geq 1$.

Definición. Sea M un R-módulo, una *presentación proyectiva* de M es una sucesión exacta corta de R-módulos:

$$0 \to K \to P \to M \to 0$$

tal que P es proyectivo.

Notar que una presentación proyectiva no es otra cosa que un segmento inicial de una resolución proyectiva con $P = P_0$ y $K = ker(\partial_1)$.
Si P es un módulo libre, se habla de *presentación libre* de M.

Definición. Si para $i > n,\ P_i = 0$, diremos que la resolución $\mathbb{P}$ tiene *longitud*$\leq n$, y escribimos

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0.$$

Definición. Sea $\mathbb{P}$ una resolución proyectiva de un R-módulo M, una *resolución proyectiva reducida* de M es una resolución proyectiva de M en la cual M ha sido suprimido:

$$\mathbb{P}_M : \cdots \to P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \to P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \to 0.$$

Es importanto notar que no se pierde ninguna información acerca de $\mathbb{P}$, ya que $M = Coker(\partial_n)$. La ventaja que suponen las resoluciones proyectivas reducidas es que constan exclusivamente de R-módulos proyectivos.

Recordar que todo R-módulo M es cociente de un R-módulo libre. Se tiene por tanto el resultado:

Proposición 2.5. *Sea M un R-módulo. Entonces existe una resolución libre L de M.*

Además, como todo módulo libre es proyectivo, se tiene también que todo módulo posee una resolución proyectiva.

Ejemplo 2.1. *Particularizando al caso de los $\mathbb{Z}$-módulos, como consecuencia de que los subgrupos de un grupo libre son libres, se tiene que cualquier grupo abeliano G admite una resolución libre de longitud menor o igual a 1:*

$$0 \to L_1 \to L_0 \to G \to 0.$$

Por ejemplo, consideremos el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_p$ con p un número primo. Se tiene entonces la resolución:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p \to 0,$$

donde μ es la multiplicación por p.

Lógicamente, todo lo visto se puede trasladar a módulos inyectivos:

Definición. Sea M un R-módulo, una *resolución inyectiva* de M es una sucesión exacta $\mathbb{I}$ de la forma:

$$\mathbb{I} : 0 \to M \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \xrightarrow{\partial^1} I^2 \xrightarrow{\partial^2} \cdots \to I^n \xrightarrow{\partial^n} I^{n+1} \xrightarrow{\partial^{n+1}} \cdots$$

donde I^n es inyectivo para todo $n \geq 0$.

Por tanto, una resolución inyectiva es una cadena de R-módulos inyectivos $\mathbb{I} = \{I^n, \partial^n\}$ tal que el módulo de homología $H_n(\mathbb{I}) = 0$ para $n \geq 1$.

Así, se obtienen de manera análoga los mismos resultados obtenidos para módulos proyectivos, con los cambios obvios.

2.4. Functor Ext

El functor *Hom* ya visto no preserva sucesiones exactas en general. Para apañarlo, vamos a ver ahora otro functor de gran relevancia relacionado con los módulos proyectivos e inyectivos, que nos dará una nueva caracterización de los mismos.

Sea $\mathbb{P}_M : \cdots \to P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \to P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \to 0$ una resolución proyectiva reducida del R-módulo M y sea N un R-módulo, consideremos $Hom_R(\mathbb{P}_M, N)$, es decir, la sucesión

$$Hom_R(\mathbb{P}_M,N) : \cdots \leftarrow Hom_R(P_n,N) \xleftarrow{Hom_R(\partial_n,N)} \cdots \leftarrow Hom_R(P_1,N) \xleftarrow{Hom_R(\partial_1,N)} Hom_R(P_0,N) \leftarrow 0.$$

$Hom_R(\mathbb{P}_M,N)$ es entonces una sucesión semiexacta, pues para todo $n > 1$ se cumple

$$Hom_R(\partial_n,N) \circ Hom_R(\partial_{n-1},N) = Hom_R(\partial_{n-1} \circ \partial_n,N) = Hom_R(0,N) = 0.$$

Podemos por tanto formar el R-módulo graduado

$$H^*(Hom_R(\mathbb{P}_M,N)) = \{H^n(Hom_R(\mathbb{P}_M,N))\}_{n \geq 0}.$$

Definición. Para cada $n \geq 0$, denotamos $H^n(Hom_R(\mathbb{P}_M,N))$ por $Ext^n_R(M,N)$, y lo llamaremos *functor de extensión* de grado n sobre R de M por N.

Notar que si $\mathbb{Q}_M$ es otra resolución proyectiva reducida de M, entonces

$$H^n(Hom_R(\mathbb{P}_M,N)) \cong H^n(Hom_R(\mathbb{Q}_M,N)),$$

por lo que el functor $Ext^n_R(M,N)$ depende únicamente de M, N, y n.

Teorema 2.2. *$Ext^n_R(-,-)$ es un bifunctor de la categoría de R-módulos en la categoría de grupos abelianos, contravariante en la primera variable y covariante en la segunda.*

Teorema 2.3. *Sean $N' \to N \to N''$ una sucesión exacta corta de R-módulos y M un R-módulo, existe una sucesión exacta*

$$0 \to Ext^0_R(M,N') \to \cdots \to Ext^n_R(M,N'') \xrightarrow{\kappa^n} Ext^{n+1}_R(M,N') \to Ext^{n+1}_R(M,N) \to Ext^{n+1}_R(M,N'') \to \ldots.$$

De forma análoga se tiene también:

Teorema 2.4. *Sean $M' \to M \to M''$ una sucesión exacta corta de R-módulos y N un R-módulo, existe una sucesión exacta*

$$0 \to Ext^0_R(M'',N) \to \cdots \to Ext^n_R(M',N) \xrightarrow{\kappa^n} Ext^{n+1}_R(M'',N) \to Ext^{n+1}_R(M,N) \to Ext^{n+1}_R(M',N) \to \ldots.$$

Vamos ahora a relacionar el functor Ext con los módulos inyectivos:

Sea $\mathbb{I}_N : \cdots \to I^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} I^n \to \cdots \to I^1 \xrightarrow{\delta^1} I^0 \to 0$ una resolución inyectiva reducida del R-módulo M y sea M un R-módulo, consideremos $Hom_R(M,\mathbb{I}_N)$, es decir, la sucesión

$$Hom_R(M,\mathbb{I}_N) : \cdots \leftarrow Hom_R(M,I^n) \xleftarrow{Hom_R(1,\delta^n)} \ldots \xleftarrow{Hom_R(1,\delta^1)} Hom_R(M,I^0) \leftarrow 0.$$

$Hom_R(M,\mathbb{I}_N)$ es entonces una sucesión semiexacta. A su cohomología de grado n, $H^n(Hom_R(M,I_N))$, la denotaremos por $\overline{Ext}^n_R(M,N)$.

Proposición 2.6. *Se tiene que $Ext^n_R(M,N) \cong \overline{Ext}^n_R(M,N)$.*

Vamos ahora a ver una relación directa entre los dos functores estudiados:

Teorema 2.5. *Los functores $Ext_R^0(-,N)$ y $\overline{Ext}_R^0(M,-)$ son equivalentes naturalmente a los functores $Hom_R(-,N)$ y $Hom_R(M,-)$, respectivamente.*

Debido a este teorema, las sucesiones vistas toman la siguiente forma:

$$0 \to Hom_R(M,N') \to Hom_R(M,N) \to Hom_R(M,N'') \to Ext_R^1(M,N') \to \cdots \to Ext_R^n(M,N'') \to \dots$$

y

$$0 \to Hom_R(M'',N) \to Hom_R(M,N) \to Hom_R(M',N) \to Ext_R^1(M'',N) \to \cdots \to Ext_R^n(M',N) \to \dots$$

En el caso en que $n = 1$, dada una presentación proyectiva $P_1 \to P_0 \to M$ de M, se tiene la sucesión exacta corta:

$$0 \to Hom_R(M,N) \to Hom_R(P_0,N) \to Hom_R(P_1,N) \to Ext_R^1(M,N) \to 0,$$

luego $Ext_R^1(M,N)$ es un functor que arregla la inexactitud, formando el módulo de homomorfismos con una resolución proyectiva finita de un R-módulo M. De manera análoga, se tiene un resultado para $\overline{Ext}_R^1(M,-)$.

Proposición 2.7. *Sean M y N dos R-módulos:*

- *Sea I un módulo inyectivo, entonces $Ext_R^n(M,I) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
- *Sea P un módulo proyectivo, entonces $Ext_R^n(P,N) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Tenemos pues, una caracterización más para los módulos proyectivos e inyectivos: que el functor Ext se anule (es decir, que el functor Hom sea exacto y no haya extensiones no triviales).

2.5. Cubierta proyectiva y generadores proyectivos

Un concepto relacionado con los módulos proyectivos es el de cubierta proyectiva, si bien su equivalente noción dual, la envolvente inyectiva, será de mayor relevancia en futuras secciones. En primer lugar debemos conocer algunas definiciones previas:

Definición. Sea M un R-módulo, $K \subset M$ un submódulo, entonces K se dice *superfluo* en M (denotado $K \ll M$) si para cada submódulo $L \subset M$ la igualdad $K + L = M$ implica que $L = M$.
Un epimorfismo $f : M \to N$ se dice *superfluo* si $ker(f) \ll M$.

Los conceptos de módulo y epimorfismo superfluo tienen su noción dual en los módulos y monomorfismos esenciales que estudiaremos llegado el momento.

Definición. Sea P un módulo proyectivo y M un R-módulo, un morfismo $P \to M$ se dice *cubierta proyectiva* si es un epimorfismo superfluo.

Es importante notar que no siempre existe una cubierta proyectiva para un módulo M dado.

Proposición 2.8. *Sea M un R-módulo, si existe cubierta proyectiva, ésta es única salvo isomorfismo.*

Claramente para un módulo proyectivo P, se tiene que la identidad $P \to P$ es un epimorfismo superfluo (tiene núcleo 0), luego trivialmente los módulos proyectivos siempre tienen cubierta proyectiva.

Recordar la definición de generador de un grupo cíclico (o un módulo) vista en el primer capítulo, y echemos un vistazo a la noción de generador proyectivo.

Definición. Un R-módulo G en una categoría abeliana de módulos Mod_R es un *generador proyectivo* si es proyectivo y para cada R-módulo H de Mod_R existe un homomorfismo no nulo $\varphi : G \to H$.

Proposición 2.9. *Sean M y N dos R-módulos, se tienen las siguientes caracterizaciones:*

- *G es un generador si y solo si para cada $M \to N \neq 0$ existe una aplicación $G \to M \to N \neq 0$.*
- *G es un generador si y solo si para cada submódulo propio de M existe una aplicación $G \to M$ cuya imagen no está contenida en dicho submódulo.*

Proposición 2.10. *Sea M un R-módulo:*

- *M es proyectivo si y solo si M es un sumando directo de una suma directa (posiblemente infinita) de copias de R.*
- *M es un generador si y solo si R es un sumando directo de una suma directa (posiblemente infinita) de copias de M.*

Notar que si R es un anillo, considerando la categoría de R-módulos Mod_R, entonces R es un generador proyectivo en Mod_R. de hecho, el functor

$$(R, -) : Mod_R \to Mod$$

es el functor olvido, el cuál asigna a cada R-módulo el grupo abeliano subyacente.

Capítulo 3

Módulos proyectivos y libres

Vamos ahora a dedicar la sección al estudio de los módulos proyectivos en particular. Para ello, vamos a considerar las nociones de módulos libres ya vistas, así como nuevos conceptos como la torsión y su relación con el producto tensorial. Finalmente se plantearán una serie de problemas abiertos.

3.1. Módulos libres

Como ya vimos en las primeras secciones, los módulos libres están muy relacionados con los módulos proyectivos. Recordemos la definición, desde un punto de vista algo distinto:

Definición. Un módulo F es libre si es suma directa de módulos cíclicos infinitos:

$$F = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle,$$

es decir, si para todo $g \in F$ existen $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}/\{0\}$, $k \in \mathbb{N}$, únicos tales que

$$g = n_1 x_{i_1} + \cdots + n_k x_{i_k}.$$

Llamamos *dimensión* del módulo al cardinal de su base. Un módulo libre F de dimensión n lo denotaremos como F_n.

Notar que esta caracterización es equivalente a la definición vista para módulos libres en el primer capítulo. Dada su relación con los módulos cíclicos, se cumplen también las siguientes propiedades:

Proposición 3.1. *Dos módulos libres finitamente generados F_m y F_n son isomorfos si y solo si $m = n$.*

Se tiene por tanto que dos módulos libres son isomorfos si y solo si tienen la misma dimensión.

Teorema 3.1. *Un conjunto $X = \{x_i\}_{i \in I}$ de generadores de F es un conjunto libre de generadores (y por tanto F es libre) si y solo si para cada morfismo φ de X en un módulo A, A puede ser extendido a un homomorfismo único $\psi : F \to A$.*

Corolario 3.1. *Todo módulo con a lo sumo m generadores es la imagen por un epimorfismo de F_m*

Teorema 3.2. *Si B es un submódulo de A tal que A/B es libre, entonces B es un sumando directo de A.*

Teorema 3.3. *Todo submódulo de un módulo libre es libre de dimensión menor o igual que la del módulo.*

Si tenemos una sucesión exacta

$$A \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

con C un módulo libre, entonces la sucesión se escinde.

3.2. Torsión

Un concepto relacionado con el de módulos libres es el de torsión, cuya ausencia nos servirá para definir la idea de divisibilidad en la sección dedicada a módulos inyectivos.

Definición. Sea T un $\mathbb{Z}$-módulo, decimos que T es *módulo de torsión* si todos sus elementos tienen orden finito. Opuestamente, si todos los elementos de T tienen orden infinito (salvo el 0), decimos que T es *libre de torsión*.

El conjunto T de todos los elementos de orden finito en un módulo M es un submódulo de M. Es fácil ver que T es módulo de torsión y el cociente M/T es libre de torsión.

Definición. Sea T un módulo de torsión, si todos sus elementos tienen orden una potencia de p con p un número primo, decimos que T es un *módulo primario*.

Teorema 3.4. *Todo módulo de torsión es suma directa de módulos primarios.*

Una relación importante entre la idea de torsión y los módulos libres es la siguiente:

Proposición 3.2. *Todo módulo libre es libre de torsión.*

Demostración. *En efecto, si F es un R-módulo libre con base $\{x_i\}_{i\in I}$, se tiene $x = \sum_{i\in I} r_i x_i$ donde $r_i \in R$ es 0 para casi todo $i \in I$. Si $0 \neq r \in \{r \in R | rx = 0\}$, se tiene que $0 = rx = \sum_{i\in I} rr_i x_i$, luego $rr_i = 0$ para todo $i \in I$ ya que los elementos $(x_i)_{i\in I}$ son una base. Esto implica que $r_i = 0$ para todo $i \in I$, porque R es un dominio y $R \neq 0$. Por tanto $x = 0$ y F es libre de torsión.* ■

Corolario 3.2. *Sea M un R-módulo con R un DIP, entonces M es libre si y solo si M es libre de torsión.*

Demostración. *Suponer que M es un R-módulo libre de torsión finitamente generado, $M = R\langle x_1, \dots x_n\rangle$, y probemos que M es libre por inducción en n. Si $n = 1$, $M = Rx_1$, considerar la aplicación $h : R \to M = Rx_n$ dada por $h(r) = rx_1$. h es un epimorfismo y $ker(h) = \{r \in R | rx_1 = 0\} = 0$ ya que M es libre de torsión, luego $M \cong R$, que es libre.*
Si $n \geq 2$ y se satisface la hipótesis para módulos con a lo sumo $n-1$ generadores, sea $N = R\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle$, entonces $M/N = \sum_{i=1}^{n} R(x_i + N) = Rx_n + N/N \cong Rx_n/N \cap Rx_n$. Como N puede ser generado por $n-1$ elementos y es un submódulo de un módulo libre de torsión, N es libre de torsión y por tanto libre por hipótesis inductiva. Por lo tanto $N \cap Rx_n$ es libre, y el epimorfismo $M \to M/Rx_n = N + Rx_n/Rx_n \cong N/N \cap Rx_n$ se escinde y $M \cong M/Rx_n \oplus Rx_n \cong N/N \cap Rx_n \oplus Rx_n$, que es una suma directa de R-módulos libres, luego es libre.
■

3.3. Producto tensorial

Un concepto también relevante a la hora de manejar módulos proyectivos, y que tiene relación con la torsión y el functor Hom es el producto tensorial, gracias al cuál podemos definir el functor Tor. Una introducción básica en la materia se encuentra en el apéndice, y para ahondar más puede encontrarse información en el libro de M. F. Atiyah y I. G. MacDonald [1], y en el de P.J. Hilton y U. Stammbach [4].

Proposición 3.3. *Sean M, N y P tres R-módulos se tiene el siguiente isomorfismo que relaciona el producto tensorial y el functor Hom:*

$$Hom(M \otimes N, P) \cong Hom(M, Hom(N, P))$$

Como luego veremos, el producto tensorial define un functor. En este caso, se dice que el producto tensorial y el functor Hom son functores *adjuntos*, es decir, se cumple la relación dada.

Proposición 3.4. *Sea*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

una sucesión exacta de R-módulos y homomorfismos y sea N un R-módulo, entonces la sucesión

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes N \to 0$$

es exacta.

Definición. Dada una aplicación $\alpha : A \to A'$ denotaremos por $\alpha_* : A \otimes B \to A' \otimes B$ a la aplicación inducida dada por $\alpha_*(a \otimes b) = (\alpha a) \otimes b$. Del mismo modo, dada la aplicación $\beta : B \to B'$ denotaremos por $\beta_* : A \otimes B \to A \otimes B$ a la aplicación inducida dada por $\beta_*(a \otimes b) = a \otimes (\beta b)$.

Con esto, se tiene que $\alpha \otimes \beta = \alpha_* \beta_* = \beta_* \otimes \alpha_*$.

Proposición 3.5. *Sean A y B dos R-módulos, se tienen el functor covariante*

$$- \otimes B : Mod_R \to Ab$$

y el functor covariante

$$A \otimes - : Mod_R \to Ab.$$

Además, $- \otimes -$ es un bifunctor.

Definición. Sean M y N dos R-módulos, N se dice módulo *plano* si para cada sucesión exacta corta $M' \xrightarrow{\mu} M \xrightarrow{\varepsilon} M''$, se induce otra sucesión exacta corta:

$$0 \to M' \otimes N \xrightarrow{\mu_*} M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0.$$

Es decir, para cada monomorfismo $\mu : M' \to M$, el homomorfismo inducido $\mu_* : M' \otimes N \to M \otimes N$ es un monomorfismo.

Notar que lo último no es cierto en general:

Ejemplo 3.1. *Consideremos el caso de grupos abelianos, es decir $R = \mathbb{Z}$, y tomemos $M = \mathbb{Z}_2$. Sea la sucesión exacta corta $\mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$, donde μ es la multiplicación por 2. Entonces*

$$\mu_*(n \otimes m) = n \otimes 2m = 2n \otimes m = 0 \otimes m = 0,$$

con $n \in \mathbb{Z}_2$ y $m \in \mathbb{Z}$. Por tanto, $\mu_* : \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}$ es la aplicación nula, pero $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$.

Los módulos planos son por tanto una herramienta importante, pues son los que preservan la exactitud de sucesiones exactas cortas tras aplicarles el functor dado por el producto tensorial.

Proposición 3.6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *N es plano.*
- *Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es cualquier sucesión exacta de R-módulos, entonces la sucesión $0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ es exacta.*
- *Si $f : M' \to M$ es inyectiva, entonces $f \otimes 1 : M' \otimes N \to M \otimes N$ es inyectiva.*
- *Si $f : M' \to M$ es inyectiva y M, M' son finitamente generados, entonces $f \otimes 1 : M' \otimes N \to M \otimes N$ es inyectiva.*

Veamos ahora la relación directa entre los módulos planos y los proyectivos:

Proposición 3.7. *Todo módulo proyectivo es plano.*

Es más, en el caso de los $\mathbb{Z}$-módulos, un módulo es plano si y solo si es libre de torsión. Notar que, en general, los módulos planos no son proyectivos (considérese el grupo de los racionales $\mathbb{Q}$, que es libre de torsión pero no libre).

Vamos a ver ahora el functor Tor, el cuál es, junto al functor Ext, uno de los conceptos centrales del álgebra homológica.

Definición. Sean M y N dos R-módulos, dada una presentación proyectiva $K \to P \to M$ de M, se define el functor:

$$Tor_{\varepsilon}^{R}(M,N) = ker(\mu_* : K \otimes N \to P \otimes M).$$

Proposición 3.8. *La sucesión*

$$0 \to Tor_{\varepsilon}^{R}(M,N) \to K \otimes N \to P \otimes N \to M \otimes N \to 0$$

es exacta.

De forma análoga:

Definición. Sean M y N dos R-módulos, dada una presentación proyectiva $S \xrightarrow{\nu} Q \xrightarrow{\eta} N$ de N, se define el functor:

$$\overline{Tor}_{\varepsilon}^{R}(M,N) = ker(\nu_* : M \otimes S \to M \otimes Q).$$

Proposición 3.9. *La sucesión*

$$0 \to Tor_{\varepsilon}^{R}(M,N) \to M \otimes S \to M \otimes Q \to M \otimes N \to 0$$

es exacta.

Proposición 3.10. *Si M o N es proyectivo, entonces*

$$Tor_{\varepsilon}^{R}(M,N) = 0 = \overline{Tor}_{\eta}^{R}(M,N).$$

Teorema 3.5. *Sea M un R-módulo y sea $N' \xrightarrow{\kappa} N \xrightarrow{\nu} N''$ una sucesión exacta de R-módulos, entonces existe un homomorfismo $\omega : Tor^R(M,N'') \to M \otimes N'$ tal que la siguiente sucesión es exacta:*

$$Tor^R(M,N') \xrightarrow{\kappa_*} Tor^R(M,N) \xrightarrow{\nu_*} Tor^R(M,N'') \xrightarrow{\omega} M \otimes N' \xrightarrow{\kappa_*} M \otimes N \xrightarrow{\nu_*} M \otimes N'' \to 0.$$

Teorema 3.6. *Sea N un R-módulo y sea $M' \xrightarrow{\kappa} N \xrightarrow{\nu} M''$ una sucesión exacta de R-módulos, entonces existe un homomorfismo $\omega : Tor^R(M'',N) \to M' \otimes N$ tal que la siguiente sucesión es exacta:*

$$Tor^R(M',N) \xrightarrow{\kappa_*} Tor^R(M,N) \xrightarrow{\nu_*} Tor^R(M'',N) \xrightarrow{\omega} M' \otimes N \xrightarrow{\kappa_*} M \otimes N \xrightarrow{\nu_*} M'' \otimes N \to 0.$$

El functor Tor es lo que se conoce como el *functor derivado* del producto tensorial, así como el functor Ext es el functor derivado del functor Hom.

3.4. Módulos proyectivos

Vamos ahora a estudiar la relación entre los conceptos vistos y los módulos proyectivos, particularizando al caso de los $\mathbb{Z}$-módulos, es decir, grupos abelianos.

Teorema 3.7. *Un módulo es proyectivo si y solo si es libre.*

Demostración. *Para verlo, sea $\beta : B \to C$ un epimorfismo y F un módulo libre con $\varphi : F \to C$. Para cada x_i en un conjunto de generadores $\{x_i\}$ de F, tomamos $b_i \in B$ tal que $\beta b_i = \varphi x_i$, lo cuál es posible por ser β un epimorfismo. La correspondencia $x_i \mapsto b_i$ puede entonces ser extendida a un homomorfismo $\psi : F \to B$ que satisface $\beta\psi = \varphi$, luego F es proyectivo. Recíprocamente, sea G un módulo proyectivo y $\beta : F \to G$ un epimorfismo de un módulo libre F sobre G. Entonces existe un homomorfismo $\psi : G \to F$ tal que $\beta\psi = 1_G$. Por tanto ψ es un monomorfismo sobre un sumando directo de F, es decir, G es isomorfo a un sumando directo de F, y en consecuencia G es libre.* ■

Notar que lo anterior no es cierto en general, pero sí en el caso de los grupos abelianos finitamente generados, pues son DIPs. Lo que sí es cierto en general es que todo módulo libre es proyectivo.

Ejemplo 3.2. *Como contraejemplo en el que esto no sucede, tomando como anillo $R = \mathbb{Z}$, si β es el epimorfismo único de $B = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ a $C = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, la aplicación identidad φ de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ a C no puede ser completado por un homomorfismo $\psi : G \to B$, luego $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ no es proyectivo.*

Una relación fundamental entre módulos libres y módulos proyectivos es la siguiente:

Proposición 3.11. *Un módulo es proyectivo si y solo si es un sumando directo de un módulo libre.*

Es decir, para todo módulo proyectivo P, existe un módulo libre H tal que $P \oplus H = F$ es libre. De este hecho se infiere la caracterización vista para módulos proyectivos en relación con las resoluciones libres y proyectivas: la sucesión exacta corta

$$0 \to H \to F \to P \to 0$$

con P proyectivo siempre tiene una extensión trivial dada por $F = P \oplus H$, luego se escinde.

Proposición 3.12. *Si P es un módulo proyectivo, entonces existe un módulo libre F tal que $P \oplus F \cong F$. Esto es lo que se conoce como el truco de Eilenberg.*

3.5. Algunos problemas abiertos

Llegados a este punto, nuestro objetivo es encontrar una forma de clasificar todos los grupos abeliano, o dar un conjunto completo de invariantes para grupos abelianos, condiciones necesarias y suficientes para que dos grupos abelianos sean isomorfos.
Por el momento no hay ninguna forma de hacer algo así para grupos abelianos en general, pero podemos restringir el problema para estudiarlo más en detalle.
Hay muchas cuestiones que comprenden estos temas, como cómo saber cuándo tenemos un teorema realmente satisfactorio, pues al fin y al cabo tener un conjunto completo de invariantes puede acabar siendo tan complicado como inviable en la práctica.
Al respecto, el matemático Irving Kaplansky [6] propone tres problemas abiertos para grupos abelianos generales: Sean G, H y F tres $\mathbb{Z}$-módulos (grupos abelianos):

1. Si G es isomorfo a un sumando directo de H, y H es isomorfo a un sumando directo de G, **¿son G y H necesariamente isomorfos?**

2. Si $G \oplus G$ y $H \oplus H$ son isomorfos, **¿son G y H isomorfos?**

3. Si F es finitamente generado y $F \oplus G$ es isomorfo a $F \oplus H$, **¿son G y H isomorfos?**

Asimismo se tiene el llamado problema de Whitehead: sea A un grupo abeliano con $Ext^1(A, \mathbb{Z}) = 0$, **¿es A necesariamente libre?**

Si un grupo abeliano A es libre, es proyectivo, y se sigue que $Ext^1(A, \mathbb{Z}) = 0$ (escinde sucesiones exactas cortas), luego lo que hay que probar es el recíproco. Está demostrado que el problema de Whitehead es indecidible bajo los axiomas de Zermelo-Fraenkel y el axioma de elección.

Capítulo 4

Módulos inyectivos y divisibles

Pasamos ahora a profundizar en el concepto de módulos inyectivos, una noción dual (en sentido categórico) a la de módulos proyectivos vista en el capítulo anterior. Un mayor esfuerzo será necesario para caracterizarlos, introduciendo conceptos como el de envolvente inyectiva y terminando con su clasificación, dada por el teorema de Matlis.

4.1. Módulos divisibles

Empezamos definiendo el concepto de módulos divisibles, una noción dual a la de módulos de torsión que caracterizaban a los módulos libres en el capítulo anterior.

Definición. Un módulo D se dice *divisible* si $n|a$ para todo $a \in D$ y todo $n > 0$, es decir, si existe $x \in D$ tal que $nx = a$.

La definición anterior se puede expresar de manera equivalente usando la idea de anulador:

Definición. Sea un R-módulo M, $a \in D$, llamamos *anulador* de a en R al conjunto

$$ann_R(a) = \{r \in R | ra = 0\}.$$

De forma más general podemos hablar del *anulador* de M:

$$ann_R(M) = \{r \in R | a \in M \implies ra = 0\}.$$

De esta forma, un módulo D es divisible si para todo $u \in D$ y $a \in R$ tal que $ann_R(a) \subseteq ann_R(u)$, u es divisible por a.

Notar que si $x = b$ es solución, el coconjunto $b + D[n]$ es el conjunto de todas las soluciones. Además, si D es libre de torsión, entonces $nx = a$ tiene al menos una solución. Asimismo se tiene que D es divisible si y solo si $nD = D$ para todo $n > 0$.

Proposición 4.1. *La suma directa y el producto directo de módulos es un módulo divisible si y solo si todas las componentes son divisibles.*

En particular, en el caso de $\mathbb{Z}$-módulos, un submódulo divisible es un sumando directo.

Teorema 4.1. *Un submódulo divisible D de un módulo A es un sumando directo de A, $A = D \oplus C$ para algún submódulo C de A. Dicho C puede ser elegido de forma que contenga al submódulo B de A tal que $D \cap B = 0$.*

4.2. Módulos inyectivos

De nuevo, vamos a relacionar lo visto acerca de módulos divisibles con la noción de módulos inyectivos definida en el primer capítulo.

Teorema 4.2. *Los grupos divisibles son inyectivos.*

Demostración. *Para verlo, sea D un módulo divisible y sea el diagrama dado por:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\xi"] & B \arrow[dl, dashed, "\eta"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

en el que consideramos a A submódulo de B. Tomamos todos los módulos G entre A y B, $A \leq G \leq B$, tal que ξ tiene una extensión $\theta : G \to D$. Ordenamos parcialmente los pares (G,θ) tal que $(G,\theta) \leq (G',\theta')$ significa $G \leq G'$ y θ es la restricción de $\theta' : G' \to D$ a G. El conjunto de pares es no vacío, ya que (A,ξ) pertenece a él, y es inductivo ya que las cadenas (G_i,θ_i) tienen límite superior (G,θ) con $G = \bigcup_i G_i$ y $\theta : G \to D$. Por el lema de Zorn existe un par (G_0,θ_0) maximal en el conjunto. Si $G_0 < B$ y $b \in {}^{B}\!/_{G_0}$ satisface $nb \in G_0$ para algún $n > 0$, entonces podemos elegir el mínimo n tal que $nb = g \in G_0$. Por la divisibilidad de D, habrá algún $x \in D$ tal que $nx = \theta_0 g$. Se tiene que

$$c + rb \mapsto \theta_0 c + rx \quad (c \in G_0, 0 \leq r < n)$$

es un homomorfismo de $\langle G_0, b\rangle$ en D. Si $nb \notin G_0$ salvo si $n = 0$; entonces se tiene un homomorfismo de $\langle G_0, b\rangle$ en D donde $x \in D$ es arbitrario. Por tanto $G_0 < B$ contradice la maximalidad de (G_0,θ_0), luego $G_0 = B$ y $\theta_0 = \eta$. ■

La afirmación anterior es un si y solo si en el caso en que R sea un DIP. Se tiene, por tanto:

Corolario 4.1. *un grupo abeliano es inyectivo si y solo si es divisible.*

Proposición 4.2. *Sea R un dominio conmutativo, y M un R-módulo libre de torsión, entonces M es inyectivo si y solo si es divisible.*

Teorema 4.3 (Criterio de Baer)**.** *Un R-módulo I es inyectivo si y solo si para cualquier ideal U de R, todo R-homomorfismo $f : U \to I$ puede ser extendido a $f' : R \to I$.*

Notar que un homomorfismo $f' : R \to I$ está unívocamente determinado especificando la imagen $f'(1) \in I$, luego extender f a algún f' consiste en encontrar un elemento $x \in I$ tal que $f(r) = xr$, $\forall r \in U$.

Demostración. *Sea el siguiente diagrama donde I es un módulo inyectivo, y tomemos A como submódulo de B:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\xi"] & B \arrow[dl, dashed, "\eta"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Por el lema de Zorn, podemos encontrar un $h_0 : A_0 \to I$ donde $A \subseteq A_0 \subseteq B$, $h_0|_A = h$ tal que h_0 no puede ser extendido a ningún submódulo de B que contiene a A_0 propiamente. De esto se sigue que que $A_0 = B$ y queda demostrado. Veamos que efectivamente se cumple por reducción al absurdo:
Suponer que existe un elemento $b \in B \setminus A_0$. Entonces

$$U := \{r \in R | br \in A_0\}$$

es un ideal de R. Sea $f(r) = h_0(br)$, $\forall r \in U$, se sigue que $f \in Hom_R(U,I)$. Por asunción, se asume que existe un elemento $x \in I$ tal que $f(r) = xr$ $\forall r \in U$. Sea $A_1 = A_0 + bR$ y definimos $h_1 : A_1 \to I$ dada por $h_1(a:0+br) = h_0(a_0) + xr$, $\forall a_0 \in A_0, r \in R$.
Finalmente, para ver que h_1 está bien definida, suponer que $a_0 + br = a'_0 + br'$, luego $b(r-r') = a_0 - a'_0 \in A_0$ y $r - r' \in U$. Por tanto $f(r'-r) = x(r'-r)$. Por otro lado, $f(r-r) = h_0(b(r'-r)) = h_0(a_0 - a'_0) = h_0(a_0) - h_0(a'_0)$, luego $x(r'-r) = h_0(a_0) - h_0(a'_0)$ y por tanto $h_0(a_0) + xr = h_0(a'_0) + xr'$. Por tanto h_1 está bien definida. Esto es, $h_1 \in Hom_R(A_1, I)$ y h_1 extiende a h_0, lo cuál contradice la hipótesis. ■

El Criterio de Baer es un importante resultado del que se deriva la siguiente particularización:

Proposición 4.3. *Sea R un dominio conmutativo con cuerpo cociente K y sea I un K-espacio vectorial, entonces I_R es un R-módulo inyectivo.*

Definición. Un módulo C se dice *reducido* si no tiene submódulos divisibles aparte del 0.

Teorema 4.4. *Todo módulo A es suma directa de un módulo divisible D y un módulo reducido C:*

$$A = D \oplus C,$$

donde D está unívocamente determinado y C es único salvo isomorfismo.

El teorema estructural para $\mathbb{Z}$-módulos divisibles muestra que todos los módulos divisibles son precisamente las sumas directas de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}(p^\infty)$, denominado *p-grupo de Prüfer* (L. Fuchs [3]).

Por último, se tiene el siguiente resultado dado por la noción de módulo puro:

Definición. Un submódulo H de un $\mathbb{Z}$-módulo M se dice *puro* si $h \in H$, $h = ny$ (con $n \in \mathbb{Z}$, $y \in M$) implica $h = nh_0$, con $h_0 \in H$.

Es decir, un módulo H será puro si todo elemento de H que es divisible por n en M, es divisible por n en H.

4.3. Envolvente inyectiva

Los módulos libres son universales en el sentido en que todo módulo es la imagen epimórfica de algún módulo libre. De manera similar, se puede establecer un resultado dual para módulos divisibles.

Teorema 4.5. *Todo módulo puede ser encajado como un submódulo en un módulo divisible.*

El teorema anterior puede mejorarse introduciendo el concepto de un módulo divisible minimal que contiene a un módulo dado.

Definición. Un submódulo E de un módulo A se dice *esencial* si $E \cap B \neq 0$ con B cualquier submódulo no trivial de A. En tal caso, A se dice *extensión esencial* de E.

Lema 4.1. *Un módulo es inyectivo si y solo si no tiene ninguna extensión esencial propia.*

Definición. Sea un módulo A, un sistema independiente M de A tal que que no hay otro sistema independiente de A que contenga a M propiamente se dice *maximal*.

Con esta idea se tienen las siguientes definiciones de rango:

Definición. Llamamos *rango* de un módulo A, denotado $r(A)$, al cardinal de un sistema independiente *maximal* que contiene únicamente elementos de orden infinito y primo. Si nos restringimos a los elementos de orden infinito, entonces la cardinalidad de este sistema se llama *rango libre de torsión*, denotado $r_0(A)$. Análogamente, considerando los elementos cuyo orden es una potencia de algún primo p, se tiene el *p-rango* de A, denotado $r_p(A)$.

Se tiene la siguiente relación entre rangos:

$$r(A) = r_0(A) + \sum_p r_p(A)$$

Lema 4.2. *Un submódulo B de A es esencial si y solo si un homomorfismo $\alpha : A \to M$ con un módulo arbitrario M es necesariamente mónico siempre que $\alpha|B : B \to M$ es un monomorfismo.*

Definición. Dado A, llamamos al módulo divisible E que contiene a A un *módulo divisible minimal* si ningún submódulo divisible propio de E contiene a A.

Lema 4.3. *Un módulo divisible E que contiene a A es divisible minimal cuando A es un submódulo esencial de E.*

Teorema 4.6. *Todo módulo divisible que contiene a A contiene un módulo divisible minimal que contiene a A. Todo par de módulos divisibles minimales que contienen a A son isomorfos sobre A.*

Definición. Dicho módulo divisible minimal E que contiene a A es llamado *envolvente inyectiva* de A.

Se tiene que

$$r_0(E) = r_0(A) \quad \text{y} \quad r_p(E) = r_p(A),\ \forall p \text{ primo}$$

La estructura de la envolvente inyectiva de un módulo A está completamente determinada por los rangos de A.

Teorema 4.7. *Sea D un módulo, son equivalentes:*

1. *D es divisible.*
2. *D es inyectivo.*
3. *D es un sumando directo de cada módulo que contiene a D.*

De lo anterior se sigue el resultado visto en el segundo capítulo, teniéndose la presentación inyectiva:

$$0 \to A \to D \to D' \to 0$$

con D (y por tanto D') módulos divisibles, cuya existencia para cada A está garantizada. Esta sucesión exacta, por tanto, tiene la extensión trivial dada por $D = A \oplus D'$.

Proposición 4.4. *Si C es un submódulo de un módulo B tal que ${}^{B}\!/_{C}$ es isomorfo a un submódulo H de M, entonces existe un módulo A que contiene a B tal que ${}^{A}\!/_{C} \cong M$.*

Esto quiere decir que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] & A \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde ambas sucesiones son exactas y las aplicaciones verticales son inyecciones.

Se tiene también el siguiente resultado:

Teorema 4.8. *Sea un módulo $M \subseteq I$, son equivalentes:*

1. *I es esencial maximal sobre M.*
2. *I es inyectivo y esencial sobre M.*

3. *I es inyectivo minimal sobre M.*

Notar que dicho módulo I es precisamente una envolvente inyectiva de M.

Corolario 4.2. *Si I y I' son dos envolventes inyectivas de M, entonces son isomorfas.*

Nos referiremos a partir de ahora como $E(M)$ a "la" envolvente inyectiva de M.

Corolario 4.3. *Si I es un módulo inyectivo y M es un submódulo de I, entonces I contiene una copia de $E(M)$.*
Si $M \subseteq N$ entonces N puede ser agrandado a una copia de $E(M)$ (de hecho $E(N) = E(M)$).

Dado un módulo, se tiene un método de construcción de su envolvente inyectiva:

Proposición 4.5. *Sea M un $\mathbb{Z}$-módulo y $x \neq 0$ un elemento de m de orden n (que puede ser infinito) y sea*

$$\varphi : \langle x \rangle \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} + \mathbb{Z} & \text{if } n < \infty \\ \frac{1}{2} + \mathbb{Z} & \text{if } n = \infty \end{cases}$$

un homomorfismo, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ se extiende a un homomorfismo no nulo $\overline{\varphi} : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, luego $Hom_{\mathbb{Z}}\left(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)$ es un cogenerador inyectivo.

La noción de envolvente inyectiva de M, un módulo inyectivo I para el que existe un monomorfismo $M \to I$ cuya imagen es "grande", es precisamente dual a la noción de cubierta proyectivo de M, un módulo proyectivo P para el que existe un epimorfismo $P \to M$ cuyo núcleo es "pequeño".

Un ejemplo del concepto de envolvente inyectiva en el caso de grupos abelianos ($\mathbb{Z}$-módulos) es el siguiente:

Ejemplo 4.1. *Sea M un $\mathbb{Z}$-módulo, la envolvente inyective $E(M)$ es lo que comúnmente se llama envolvente divisible del grupo abeliano.*
Sea C_n el grupo cíclico de orden n. Para cada primo p, se tiene el p-grupo de Prüfer C_{p^∞}, la unión ascendente de grupos

$$C_p \subset C_{p^2} \subset C_{p^3} \subset \ldots.$$

Entonces C_{p^∞} es p-divisible y por tanto divisible (es isomorfo a la parte p-primaria de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$). Además, C_{p^∞} es $\mathbb{Z}$-inyectivo y esencial sobre cualquier C_{p^i} ($i \geq 1$). Por tanto,

$$E(C_{p^i}) = C_{p^\infty}, \ \forall i \geq 1.$$

4.4. Teorema de Matlis

Finalmente, nuestro objetivo es proporcionar una clasificación de los módulos inyectivos, y para ello vamos a hacer uso de la teoría desarrollada por el matemático Eben Matlis. Para una exposición en profundidad de dicha teoría puede consultarse el libro de T. Y. Lam [9], entre otros.

Definición. Sea R un anillo que satisface la condición de cadena ascendente en ideales a izquierda y derecha, entonces llamamos a R un *anillo noetheriano*. Es decir, para toda cadena ascendente de ideales $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subset \ldots$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_n = I_{n+1} = \ldots$.

Teorema 4.9. *Para cualquier anillo R, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Todo límite directo de módulos inyectivos es inyectivo.*

2. *Toda suma directa de módulos inyectivos es inyectiva.*

3. *Toda suma directa contable de módulos inyectivos es inyectiva.*

4. *R es un anillo noetheriano.*

Teorema 4.10. *Para todo anillo R, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *R es noetheriano.*

2. *Todo R-módulo inyectivo M es suma directa de submódulos (inyectivos) indescomponibles.*

3. *Existe un número cardinal α tal que todo R-módulo inyectivo M es suma directa de submódulos (inyectivos) de cardinalidad $< \alpha$.*

Corolario 4.4. *Sea N un módulo finitamente generado sobre un anillo noetheriano, entonces $E(N)$ es suma directa finita de inyectivos indescomponibles.*

Definición. Un R-módulo no nulo M se dice *uniforme* si todo par de submódulos no nulos de M intersecan de manera no trivial (equivalentemente, todo submódulo no nulo de M es indescomponible, o todo submódulo no nulo de M es esencial en M).
Un ideal $U \subset R$ se dice *inter-indescomponible* si el módulo cíclico $\left(R/U\right)_R$ es uniforme (equivalentemente, si para todo par de ideales $V, V' \supseteq U$, $V \cap V' = U$ implica $V = U$ o $V' = U$).

Ejemplo 4.2. *Para cualquier R-módulo M se tiene que simple $\Longrightarrow$ uniforme $\Longrightarrow$ indescomponible. De hecho, las tres nociones son equivalentes si R es un anillo semisimple, es decir, un anillo que es un módulo semisimple (suma directa de submódulos simples) sobre sí mismo.*
En el caso de grupos abelianos, es decir, si $R = \mathbb{Z}$, se tiene que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}_{p^n}$ ($n \geq 2$), son uniformes pero no simples.

Teorema 4.11. *Para todo módulo inyectivo M sobre un anillo R, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *M es indescomponible.*

2. *$M \neq 0$, y $M = E(M')$ para cualquier submódulo no nulo $M' \subseteq M$.*

3. *M is uniforme.*

4. *$M = E(U)$ para algún módulo uniforme U.*

5. *$M = E\left(R/U\right)$ para algún ideal inter-indescomponible $U \subset R$.*

6. *M es fuertemente indescomponible, es decir, $E = End(M_R)$ es un anillo local.*

Corolario 4.5. *Si un R-módulo inyectivo I puede expresarse como $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ donde M_i son indescomponibles, entonces n está unívocamente determinado, como también lo están (salvo permutaciones) los sumandos indescomponibles $M_1, \ldots, M_n$, salvo isomorfismo.*

Esto aplica, en particular, a la descomposición directa de $I = E(N)$ donde N es un módulo finitamente generado sobre un anillo noetheriano.

Definición. Decimos que un R-módulo N es *primo* si $N \neq 0$, y $ann(N) = ann(N')$ para cualquier submódulo no nulo $N' \subset N$. Para tal módulo primo N, $\mathfrak{p} := ann(N)$ es siempre un ideal primo en R.

Definición. Sea M un R-módulo, un ideal $\mathfrak{p}$ de R se dice un *primo asociado* de M si existe un submódulo primo $N \subseteq M$ tal que $\mathfrak{p} = ann(N)$.

El conjunto de primos asociados de M se denota $Ass(M)$. Por ejemplo, $Ass(0) = \varnothing$, y si N es un módulo primo, se tiene $Ass(N) = \{ann(N)\}$.

Lema 4.4. *Sea R un anillo conmutativo y sea M un R-módulo, entonces un ideal primo $\mathfrak{p}$ pertenece a $Ass(M)$ si y solo si $\mathfrak{p} = ann(m)$ para algún $m \in M$.*

Esto es, en el caso conmutativo, se tiene que $\mathfrak{p}$ es un primo asociado de M si y solo si podemos encontrar una copia de ${}^{R}\!/\!_{\mathfrak{p}}$ en M.

Lema 4.5. *Sea $M \neq 0$ un módulo uniforme. Si $ann(N_0)$ es un miembro maximal de la familia $\{ann(N)\}$ donde N abarca todos los submódulos no nulos de M, entonces N_0 es un submódulo primo y $ann(N_0)$ es un primo asociado de M. En particular, si R es un anillo cuyos ideales satisfacen la condición de cadena ascendente (es decir, si R es un anillo noetheriano), entonces para todo módulo no nulo M, $Ass(M) \neq \varnothing$.*

Lema 4.6. *Si M es un R-módulo uniforme, entonces*

$$|Ass(M)| \leq 1.$$

Denotaremos a partir de ahora como $\mathscr{I}(R)$ al conjunto de clases de isomorfismo de los módulos inyectivos indescomponibles sobre un anillo R. Denotaremos también como $Spec(R)$ al espectro primo de R, es decir, el conjunto de todos los ideales primos de R.

Teorema 4.12. *Sea R un anillo noetheriano, entonces existe una sobreyección natural $\alpha : \mathscr{I} \to Spec(R)$.*

En general, α no es una biyección. Esto se cumplirá en el caso en que R sea un anillo artiniano, es decir, un anillo que satisface la condición de cadena descendente (en contraposición a los anillos noetherianos):

Teorema 4.13. *Sea R un anillo artiniano, entonces $\alpha : \mathscr{I} \to Spec(R)$ es una biyección. Si $\{V_1, \ldots, V_n\}$ es un conjunto completo de R-módulos simples entonces $\{E(V_1), \ldots, E(V_n)\}$ es un conjunto completo de R-módulos inyectivos indescomponibles (salvo isomorfismo).*

Por último, vamos a ver el teorema de clasificación de módulos inyectivos. El resultado es válido para cualquier anillo noetheriano conmutativo R, pero en este caso lo particularizaremos al caso de grupos abelianos, es decir, tomando como anillo $R = \mathbb{Z}$:

Teorema 4.14 (Matlis)**.** *La aplicación*

$$\alpha : \mathscr{I}(\mathbb{Z}) \to Spec(\mathbb{Z})$$

es una biyección. Además,

$$\left\{ E\left({}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{\mathfrak{p}}\right) : \mathfrak{p} \in Spec(\mathbb{Z}) \right\}$$

proporciona una lista completa de $\mathbb{Z}$-módulos inyectivos indescomponibles, salvo isomorfismo.

Demostración. *Para $\mathfrak{p} \in Spec(\mathbb{Z})$, ${}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{\mathfrak{p}}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo uniforme, luego podemos definir $\beta : Spec(\mathbb{Z}) \to \mathscr{I}(\mathbb{Z})$ tal que*

$$\beta(\mathfrak{p}) = \left[E\left({}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{\mathfrak{p}}\right) \right] \in \mathscr{I}(\mathbb{Z}).$$

Es claro que $\alpha\beta(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.
Por último debemos probar que $\beta\alpha[M] = [M]$ para cualquier $[M] \in \mathscr{I}(\mathbb{Z})$. Sea $Ass(\mathbb{Z}) = \{\mathfrak{p}\}$, entonces $\mathfrak{p} = ann(m)$ para algún $m \in M$, y por tanto $m\mathbb{Z} \cong {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{\mathfrak{p}}$ como $\mathbb{Z}$-módulos. Por otro lado, se cumple también $M = E(m\mathbb{Z})$, luego

$$[M] = \left[E\left({}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{\mathfrak{p}}\right) \right] = \beta(\mathfrak{p}) = \beta\alpha[M].$$

■

Apéndice A

Teoría de categorías

A.1. Objetos y morfismos

Definición. una *categoría* $\mathscr{C}$ consiste en:

1. Una clase $Ob\mathscr{C}$ de *objetos*.
2. Para cada par de objetos $A,B \in Ob\mathscr{C}$, un conjunto $Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$ de *morfismos*.
3. Para cada terna de objetos $A,B,C \in Ob\mathscr{C}$ una aplicación

$$Mor_{\mathscr{C}}(B,C) \times Mor_{\mathscr{C}}(A,B) \to Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$$

   que satisface las siguientes condiciones:

   a) Si $(A,B) \neq (C,D)$, entonces

$$Mor_{\mathscr{C}}(A,B) \cap Mor_{\mathscr{C}}(C,D) = \varnothing.$$

   b) Si $f \in Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$, $g \in Mor_{\mathscr{C}}(B,C)$, $h \in Mor_{\mathscr{C}}(C,D)$, entonces

$$(fg)h = f(gh).$$

   c) Para cada objeto A, existe un morfismo único $1_A \in Mor_{\mathscr{C}}(A,A)$ de modo que

$$f1_A = f,$$

   $\forall f \in Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$ y $1_A g = g \; \forall g \in Mor_{\mathscr{C}}(B,A)$.

Definición. Si $f \in Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$, A se dice *dominio* de f, y B *codominio* de f.

Definición. Sean $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ dos categorías, $\mathscr{D}$ es una *subcategoría* de $\mathscr{C}$ si $\forall A,B \in Ob\mathscr{D}$,

$$Ob\mathscr{D} \subseteq Ob\mathscr{C} \text{ y } Mor_{\mathscr{D}}(A,B) \subseteq Mor_{\mathscr{C}}(A,B).$$

Una subcategoría $\mathscr{D}$ de $\mathscr{C}$ se dice *plena* si $\forall A,B \in Ob\mathscr{D}$,

$$Mor_{\mathscr{D}}(A,B) = Mor_{\mathscr{C}}(A,B).$$

Definición. Sean $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ dos categorías, la *categoría producto* $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ está dada por:

1. $Ob(\mathscr{C} \times \mathscr{D}) = Ob\mathscr{C} \times Ob\mathscr{D}$.

2. Si (A,B), $(A',B') \in Ob\mathscr{C} \times Ob\mathscr{D}$,
$$Mor_{\mathscr{C}\times\mathscr{D}}((A,B),(A',B')) = Mor_{\mathscr{C}}(A,A') \times Mor_{\mathscr{D}}(B,B').$$
3. Si $(f,g) \in Mor_{\mathscr{C}\times\mathscr{D}}((A,B),(A',B'))$, $(f',g') \in Mor_{\mathscr{C}\times\mathscr{D}}((A',B'),(A'',B''))$,
$$(f',g')\cdot(f,g) = (f'f, g'g).$$

Definición. Una categoría $\mathscr{C}$ se dice *pequeña* si $Ob\mathscr{C}$ es un conjunto.

Definición. Sea $\mathscr{C}$ una categoría, dos objetos $C,D \in Ob\mathscr{C}$ se dicen *isomorfos* si existen $h \in Mor_{\mathscr{C}}(C,D)$, $g \in Mor_{\mathscr{C}}(D,C)$ con
$$gh = 1_C, \quad hg = 1_D.$$
En este caso se dice que h y g son *isomorfismos*.
Si $h \in Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$, $g \in Mor_{\mathscr{C}}(B,A)$ cumple $gh = 1_A$, h se dice *sección* y g *retracción*.
Un morfismo $h \in Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$ se dice *epimorfismo* si $\forall g_1, g_2 \in Mor_{\mathscr{C}}(B,C)$ con $C \in Ob\mathscr{C}$,
$$g_1h = g_2h \implies g_1 = g_2.$$
Se dice que h es un *monomorfismo* si $\forall C \in Ob\mathscr{C}$, $f_1, f_2 \in Mor_{\mathscr{C}}(C,A)$,
$$hf_1 = hf_2 \implies f_1 = f_2.$$
Una categoría en la que cada morfismo que es epimorfismo y monomorfismo es isomorfismo se llama *equilibrada*.

Definición. Sea $\mathscr{C}$ una categoría, se llama *subobjeto* de $A \in Ob\mathscr{C}$ a un par (C,α) con $\alpha : C \to A$ un monomorfismo.
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha"] & A \\ D \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "\beta"] & \end{tikzcd}$$
Se llama *objeto cociente* de $A \in Ob\mathscr{C}$ a un par (Q,p) con $p : A \to Q$ un epimorfismo.
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "q"] & L \\ & Q \arrow[u, "h"'] \arrow[ul, "p"] \end{tikzcd}$$

Definición. Un objeto P en una categoría se dice *final* si para cada objeto A, $Mor(A,P)$ contiene un único elemento.
Un objeto Q en una categoría se dice *inicial* si para cada objeto A, $Mor(Q,A)$ contiene un único elemento.
Un objeto O en una categoría se dice *objeto cero* si es inicial y final.

Definición. Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero O y $A,B \in Ob\mathscr{C}$, un morfismo $O_{AB} : A \to B$ se dice *morfismo cero* si puede factorizarse a través del objeto cero:
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "O_{AB}"] \arrow[dr] & B \\ & O \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Definición. Sean $f,g : A \to B$ morfismos en una categoría, un par (K,τ) con K un objeto y $\tau : K \to A$ un morfismo se dice *igualador* de f y g si:

1. $f\tau = g\tau$.

2. $\forall \alpha : X \to A$ con $f\alpha = g\alpha$, existe un único $\beta : X \to K$ tal que $\alpha = \tau\beta$:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\tau"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ X \arrow[u, "\beta"] \arrow[ur, "\alpha"] & & \end{tikzcd}$$

Definición. Si $f, g; A \to B$ son morfismos en $\mathscr{C}$, un par (Q, p) con $p : B \to Q$ se dice *coigualador* de f y g si:

1. $pf = pg$.

2. $\forall q : B \to X$ con $qf = qg$, existe un único $h : Q \to X$ tal que $hp = q$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "q"] & Q \arrow[d, "h"] \\ & & X \end{tikzcd}$$

Definición. Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero, se llama *núcleo* de un morfismo $f : X \to Y$ a

$$Kerf := Ig(f, O_{XY}).$$

Se llama *conúcleo* de f al coigualador de f y O_{XY}:

$$Cokerf := Coig(f, O_{XY}).$$

Definición. Sea $\mathscr{C}$ una categoría, la *categoría opuesta* $\mathscr{C}^O$ viene dada por:

1. $Ob\mathscr{C} = Ob\mathscr{C}^O$.

2. Si $A, B \in Ob\mathscr{C}$, $Mor_{\mathscr{C}^O}(A, B) = Mor_{\mathscr{C}}(B, A)$.

3. Si $f \in Mor_{\mathscr{C}^O}(A, B)$, $g \in Mor_{\mathscr{C}^O}(B, C)$. La composición de f y g es $f \circ g = gf$.

A.2. Functores

Definición. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías, un *functor covariante* $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es:

1. Una función
$$F : Ob\mathscr{C} \to Ob\mathscr{D}$$
$$A \mapsto FA$$

2. Una función
$$F : Mor\mathscr{C} \to Mor\mathscr{D}$$
$$f \mapsto Ff$$

   cumpliendo:

   a) Si $f \in Mor_{\mathscr{C}}(A, B)$, $Ff \in Mor_{\mathscr{D}}(FA, FB)$.

   b) Si $g \in Mor_{\mathscr{C}}(B, C)$, $F(gf) = F(g)F(f)$.

c) $F(1_A) = 1_{FA}$.

Definición. Se llama *functor contravariante* de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$ a la noción dual del functor covariante, es decir, al functor $F : \mathscr{C}^O \to \mathscr{D}$. Así, F es por una parte una función $Ob\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y para cada $A, B \in Ob\mathscr{C}$ una aplicación

$$F : Mor_{\mathscr{C}}(A,B) \to Mor_{\mathscr{D}}(FB,FA)$$

cumpliendo

$$F(fg) = F(g)F(f).$$

Definición. Sean $\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_n$ con $n = r+s$ categorías, se llama *multifunctor r veces covariante y s veces contravariante* a un functor

$$F : \mathscr{C}_1 \times \cdots \times \mathscr{C}_r \times \mathscr{C}^O_{r+1} \times \ldots \mathscr{C}^O_n \to \mathscr{D}.$$

Sea $x_j \in Ob\mathscr{C}j$, se tiene el functor

$$Fx_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n : \mathscr{C}_i \to D$$

dado por $F_{x_1,\ldots,\hat{x}i,\ldots,x_n}(A) = Fx_1, \ldots, x_{i-1}, A, x_{i+1}, \ldots, x_n$ y si $f \in Mor\mathscr{C}i$, $Fx_1, \ldots, \hat{x}i, \ldots, x_n(f) = F(1x_1, \ldots, 1_{x_{i-1}}, f, 1_{x_{i+1}}, \ldots$
Si F es r veces covariante y s veces contravariante, $F_{x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n}$ es covariante o contravariante si $i \leq r$ o $i > r$ respectivamente.

Definición. Dos categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ se dicen *isomorfas* si existen functores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tales que $FG = 1_{\mathscr{D}}$ y $GF = 1_{\mathscr{C}}$. Se dice entonces que F y G son *isomorfos de categoría*.

Definición. Sean $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ dos categorías y $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un functor. Para cada par de objetos $A, B \in Ob\mathscr{C}$ se tiene la aplicación

$$Mor_{\mathscr{C}}(A,B) \to Mor_{\mathscr{D}}(FA,FB)$$

$$f \mapsto Ff$$

Un functor se dice *fiel* si esta aplicación es inyectiva para cada par de objetos $A, B \in Ob\mathscr{C}$, y se dice *pleno* si es suprayectiva.

A.3. Transformaciones naturales

Definición. Sean $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ dos categorías y $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ functores covariantes, una *transformación natural* $\eta : F \to G$ es una función $Ob\mathscr{C} \to Mor\mathscr{D}$ que a cada objeto A de $\mathscr{C}$ asocia un morfismo $\eta_A \in Mor_{\mathscr{D}}(FA, GA)$ de modo que para cada par de objetos A, B de $\mathscr{C}$ y cada morfismo $f \in Mor_{\mathscr{C}}(A,B)$, el diagrama es conmutativo ($\eta_B F(f) = G(f)\eta_A$):

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{Ff} & FB \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_A} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_B} \\ GA & \xrightarrow{Gf} & GB \end{array}$$

Si F y G son contravariantes la definición es análoga ($F, G : \mathscr{C}^O \to \mathscr{D}$).

Definición. Una transformación natural $\eta : F \to G$ se dice *equivalencia natural* si para cada objeto A, η_A es un isomorfismo. En este caso se denotará $F \cong G$ y diremos que F y G son *naturalmente equivalentes*.
Dos categorías $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ se dicen *naturalmente equivalentes* si existen functores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tales que $FG \cong 1_{\mathscr{D}}$ y $GF \cong 1_{\mathscr{C}}$.

Lema (Yoneda)**.** *Sea $F : \mathscr{C} \to Set$ un functor covariante y A un objeto de $\mathscr{C}$, pongamos $Nat(Mor_{\mathscr{C}}(A,-), F)$ para la clase de transformaciones naturales $Mor_{\mathscr{C}}(A,-) \to F$, entonces existe una biyección*

$$Y : Nat(Mor_{\mathscr{C}}(A,-), F) \to FA$$

que asocia a una transformación natural $\varphi : Mor_{\mathscr{C}}(A,-) \to F$ el elemento $y(\varphi) = \varphi_A(1_A)$.

Apéndice B

Álgebra homológica

Definición. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana, un *complejo de cadenas* en $\mathscr{A}$ es una sucesión de objetos y morfismos de $\mathscr{A}$:

$$\mathbb{C}: \cdots \to C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \to \dots$$

cumpliendo $\partial_{n-1}\partial_n = 0$.

A dicho complejo de cadenas lo denotaremos $\mathbb{C} = \{C_n, \partial_n\}$.

Definición. un *morfismo de cadenas* $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ es una colección de morfismos que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}: \dots \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & C^{n-1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "\varphi^{n-1}"] & C^n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi^n"] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n+1}"] & \dots \\
\mathbb{D}: \dots \arrow[r] & D^{n-1} \arrow[r, "\beta_{n+1}"] & D^n \arrow[r, "\beta_n"] & D^{n+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Definición. Se puede definir una *categoría de cadenas* $\mathscr{C}(\mathscr{A})$, cuyos objetos son cadenas y cuyos morfismos son morfismos de cadenas, la cuál es una categoría abeliana.

Definición. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana, un *complejo de cocadenas* en $\mathscr{A}$ es una sucesión de objetos y morfismos de $\mathscr{A}$:

$$\mathbb{C}: \cdots \to C_n \xrightarrow{\partial^n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial^{n+1}} C_{n-2} \to \dots$$

cumpliendo $\partial^{n+1}\partial^n = 0$.

A dicho complejo de cadenas lo denotaremos $\mathbb{C} = \{C_n, \partial^n\}$.

Definición. un *morfismo de cocadenas* $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ es una colección de morfismos que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}: \dots \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & C^{n-1} \arrow[r, "\partial^{n-1}"] \arrow[d, "\varphi^{n-1}"] & C^n \arrow[r, "\partial^n"] \arrow[d, "\varphi^n"] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n+1}"] & \dots \\
\mathbb{D}: \dots \arrow[r] & D^{n-1} \arrow[r, "\beta^{n-1}"] & D^n \arrow[r, "\beta^n"] & D^{n+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Definición. Se puede definir una *categoría de cocadenas* $\mathscr{C}^O(\mathscr{A})$, cuyos objetos son cocadenas y cuyos morfismos son morfismos de cocadenas, la cuál es una categoría abeliana.
Además $\mathscr{C}^O(\mathscr{A})$ y $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ son isomorfas, y $\mathscr{C}^O(\mathscr{A}) = \mathscr{C}(\mathscr{A}^{\mathscr{O}})^O$.

Definición. Si (C_n, ∂_n) es un complejo de (co)cadenas, los operadores ∂_n se llaman *operadores (co)borde*

Definición. Sea $\mathbb{C}: \cdots \to C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \to \cdots \in \mathscr{C}(\mathscr{A})$,

- se denota por $B_n(\mathbb{C})$ la imagen de ∂_{n+1}, cuyos elementos se llaman *bordes*.
- se denota por $Z_n(\mathbb{C})$ el núcleo de ∂_n, cuyos elementos se llaman *ciclos*.

Ambos son subobjetos de C_n, y la sucesión será exacta si $B_n(\mathbb{C}) = Z_n(\mathbb{C})$. Además, $\partial_{n-1}\partial_n = 0 \implies B_n(\mathbb{C}) \leq Z_n(\mathbb{C})$, luego existe un monomorfismo $B_n(\mathbb{C}) \to Z_n(\mathbb{C})$ tal que:

$$\begin{tikzcd}
C_n & \\
B_n(\mathbb{C}) \arrow[u] \arrow[r] & Z_n(\mathbb{C}) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Definición. Se llama *n-ésimo objeto de homología* de $\mathbb{C} = \{C_n, \partial_n\}$ a

$$H_n(\mathbb{C}) = Coker(Z_n(\mathbb{C})/B_n(\mathbb{C})).$$

A dicho objeto también se le conoce como *módulo de homología* de grado (o dimensión) n de C, y puede expresarse también como $H_n(\mathbb{C}) = ker(\partial_n)/im(\partial_{n+1})$. Es decir, si $\mathbb{C}$ es un sucesión semiexacta (i.e., $im(\partial_{n+1}) \subset ker(\partial_n)$), el módulo de homología de grado n, $H_n(\mathbb{C})$, mide la inexactitud de $\mathbb{C}$. Si $\mathbb{C}$ es exacta, entonces $im(\partial_{n+1}) = ker(\partial_n)$ y $H_n(\mathbb{C}) = 0$.

Definición. Diremos que dos elementos de $H_n(C)$ son *homólogos* si pertenecen a la misma clase lateral. El elemento de $H_n(\mathbb{C})$, determinado por el ciclo c de grado n, se llama *clase de homología* de c y se denota $[c]$.

Definición. Se dice que un complejo de cadenas $\mathbb{C} = \{C_n, \partial_n\}$ es *acíclico* si $H_n(C) = 0$ para $n \geq 1$ (es decir, $\mathbb{C}$ es exacta hasta C_1, y $H_0(\mathbb{C})$ puede ser diferente de 0). Equivalentemente, la sucesión

$$\cdots \to C_n \to C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} H_0(\mathbb{C}) \to 0$$

es exacta.

Definición. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, se tiene el módulo de homología $H_n(C)$. El módulo graduado $H_*(C) = \{H_n(C)\}$ se denomina *homología de la cadena* C.

Se tiene que $H_*(-)$ es un functor covariante de la categoría de complejos de cadenas en la categoría de R-módulos graduados,

$$H_*(-) : \mathscr{C}(\mathscr{A}) \to Mod_R^{\mathbb{Z}}.$$

Evidentemente, todo lo visto tiene su equivalente en la categoría dual de cocadenas.

Apéndice C

Producto tensorial

Definición. Sea M, N y P tres R-módulos y sea $f : M \times N \to P$, f se dice *R-bilineal* si para cada $x \in M$, la aplicación $y \mapsto f(x,y)$ de N en P es R-linear y para cada $y \in N$, la aplicación $x \mapsto f(x,y)$ de M en P es R-lineal.

Pasamos ahora a definir la noción de producto tensorial:

Proposición. *Sean M y N dos R-módulos, entonces existe un par (T,g) que consiste en un R-módulo T y una aplicación R-bilineal $g : M \times N \to T$, tal que dado un A-módulo P y una aplicación R-bilineal $f : M \times N \to P$, existe una única aplicación R-linear $f' : T \to P$ tal que $f = f' \circ g$.*
Además, si (T,g) y (T',g') son dos pares con dicha propiedad, existe un único isomorfismo $j : T \to T'$ tal que $j \circ g = g'$.

Definición. El módulo T construido en la proposición anterior es llamado *producto tensorial* de M y N, y se denota $M \otimes N$.

Dicho modulo es generado como un R-módulo por el producto $x \otimes y$. Si $(x_i)_{i \in I}$, $(y_j)_{j \in J}$ son familias de generadores de M y N respectivamente, entonces los elementos $x_i \otimes y_i$ generan $M \otimes N$. En particular, si M y N son finitamente generados, también lo es $M \otimes N$.

Proposición. *Sean $M_1, \dots, M_r$ R-módulos, entonces exite un par (T,g) consistente en un R-módulo T y una aplicación R-multilinear $g : M_1 \times \cdots \times M_r \to T$ tal que dado un R-módulo P y cualquier aplicación R-multilinear $f : M_1 \times \cdots \times M_r \to T$, existe un único R-homomorfismo $f' : T \to P$ tal que $f' \circ g = f$.*
Además, si (T,g) y (T',g') son dos pares con dicha propiedad, existe un único isomorfismo $j : T \to T'$ tal que $j \circ g = g'$.

El producto tensorial tiene las siguientes propiedades:

Proposición. *Sean M, N y P tres R-módulos,*

- $M \otimes N \cong N \otimes M$.
- $(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P) \cong M \otimes N \otimes P$.
- $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \oplus P) \otimes (N \oplus P)$.
- $R \otimes M \cong M \otimes R \cong M$.

Veamos también que el producto tensorial actúa, no solo sobre R-módulos, sino sobre las aplicaciones:

Proposición. *Sean $f : M \to M'$, $g : N \to N'$ dos homomorfismos de R-módulos. Sea $h : M \times N \to M' \times N'$ dada por $h(x,y) = f(x) \times g(y)$. Se tiene entonces que h es una aplicación R-bilineal e induce un homomorfismo de R-módulos:*

$$f \otimes g : M \otimes N \to M' \otimes N'$$

tal que

$$(f\otimes g)(x\otimes y)=f(x)\otimes g(y),\quad (x\in M,\ y\in N).$$

Con lo anterior, los homomorfismos $(f'\circ f)\otimes(g'\circ g)$ y $(f'\otimes g')\circ(f\otimes g)$ coinciden en todos sus elementos de la forma $x\otimes y$ en $M\otimes N$. Como dichos elementos generan $M\otimes N$, se tiene que

$$(f'\circ f)\otimes(g'\circ g)=(f'\otimes g')\circ(f\otimes g).$$

Bibliografía

[1] ATIYAH, M. F., & MACDONALD, I. G. (2018), *Introduction To Commutative Algebra* (En CRC Press eBooks), `https://doi.org/10.1201/9780429493638`.

[2] COHN, P. M. (2000), *Classic Algebra*.

[3] JOHN WILEY & SONS. FUCHS, L. (1970), *Infinite Abelian groups* (En Academic Press eBooks), `http://ci.nii.ac.jp/ncid/BA06405698`.

[4] HILTON, P. J., & STAMMBACH, U. (2012), *A Course in Homological Algebra. Springer*.

[5] JACOBSON, N. (2012), *Basic Algebra I: Second Edition* (Courier Corporation).

[6] KAPLANSKY, I. (1954), *Infinite Abelian groups*, `https://ci.nii.ac.jp/ncid/BA17182438`.

[7] LLUIS-PUEBLA, E. (1990), *Álgebra homológica, cohomología de grupos y K-Teoría algebraica clásica*.

[8] FREYD, P. (1965), *Abelian Categories. An Introduction to the Theory of Functors* (American Mathematical Monthly, 72(9), 1043), `https://doi.org/10.2307/2313375`.

[9] LAM, T. Y. (1999), *Lectures on Modules and Rings* (En Springer eBooks), `https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0525-8`.

[10] MONTANER FRUTOS, F. (2015), *Álgebra homológica*. Departamento de Álgebra, Universidad de Zaragoza.