

Caracterizaciones bivariantes en órdenes estocásticos y aplicaciones



Julia Alsina Bagüeste
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directora del trabajo: Carmen Sangüesa Lafuente
5 de julio de 2023

Summary

Stochastic orderings are a very useful tool in probability theory to compare different random phenomena according to certain properties.

This dissertation aims to describe the different classes of stochastic orderings and to apply this knowledge to the economic field, more specifically, to portfolio selection problems.

The dissertation is divided into 4 chapters. Each of them is described in detail below.

In the first chapter, some basic concepts about probability will be defined as well as some results necessary to understand the rest of the paper. In addition, some definitions and results on concavity and convexity will be presented.

The second chapter deals with univariate stochastic orders, based on the material studied in the book by Müller. A. and Stoyan. D. (2002) [9]. This chapter consists of 5 sections. The first one is introductory. The second section will detail the characteristics of the usual stochastic order (\leq_{st}) that pointwise compares the distribution functions of random variables. The third and fourth sections will present the stochastic order relationships generated from conditional distributions: the order of the hazard rate (\leq_{hr}), the order of the inverse hazard rate (\leq_{rh}), and the order of the likelihood ratio (\leq_{lr}). In the last section of this chapter, we will present the convex stochastic order (\leq_{cx}) and the increasing convex stochastic order (\leq_{icx}), which are dual to the concave stochastic order (\leq_{cv}) and the increasing concave stochastic order (\leq_{icv}) respectively.

Throughout the chapter, all the named orders will be related and in Appendix A there is a conceptual map that summarizes and clarifies these relationships.

In the third chapter, a bivariate characterization of the previously explained orders will be given, something which will be very useful in applications. As a first application, the task scheduling problem (at the end of chapter 3) will be discussed.

To conclude this dissertation, the purpose of the last chapter is to present some results of stochastic ordering relationships that are useful for many portfolio selection problems.

The problem of selecting an investment portfolio aims to determine how much to invest in each asset in a satisfactory way for the investor, taking into account the uncertainty associated with the behavior of financial markets. In particular, this chapter will focus on demonstrating that bivariate characterizations of stochastic relationships (introduced in Chapter 3) are a powerful tool for demand and shift effect problems in optimal portfolios, building on Kijima and Ohnishi (1996) [7].

Índice general

Summary	III
1. Conceptos previos	1
2. Órdenes estocásticos univariantes	3
2.1. Introducción	3
2.2. Orden estocástico usual	3
2.3. Orden de la tasa de fallo	6
2.4. Orden de la razón de verosimilitud	9
2.5. Órdenes convexos	12
3. Caracterizaciones bivariantes	17
4. Aplicaciones en problemas de selección de carteras	21
4.1. Introducción	21
4.2. Formulación del problema	22
4.3. Caracterización de las relaciones de dominancia estocástica	24
4.3.1. Algunas aplicaciones directas	25
Bibliografía	27
A. Resumen relaciones de ordenación estocástica univariantes	1

Capítulo 1

Conceptos previos

En primer lugar, vamos a recordar las definiciones básicas que necesitaremos para desarrollar los siguientes capítulos. Consideremos un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) el cual está formado por un conjunto Ω al que llamaremos espacio muestral, una σ -álgebra \mathcal{F} definida sobre Ω a cuyos elementos llamaremos sucesos y una función de probabilidad $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ que asigna a cada suceso una probabilidad.

Definición 1.1. [3] Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Una variable aleatoria es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definición 1.2. [3] Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria. Entonces:

(i) Se define la distribución de probabilidad de X como la función $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$P_X(B) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \in B)$$

(ii) Llamaremos función de distribución de X a la función $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$F_X(t) = P(\omega : X(\omega) \leq t) = P_X((-\infty, t]) = P(X \leq t).$$

(iii) Llamaremos función de supervivencia de X a la función \bar{F}_X definida por

$$\bar{F}_X(t) = P(X > t) = 1 - F_X(t).$$

(iv) Diremos que X es absolutamente continua si existe una función integrable $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

La función f se llama función de densidad de X .

Definición 1.3. [13] Sea X una v.a. cualquiera con función de distribución $F_X(x)$.

Si $\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_X(x) < \infty$, se dice que la esperanza de X o el valor esperado de X existe (denotado por $E(X)$ o $E[X]$) y se define como:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) < \infty$$

Si no se cumple que $\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_X(x) < \infty$, se dice que la esperanza de X no existe.

En este trabajo se utilizará una fórmula muy útil para el cálculo de la esperanza de una variable aleatoria, que se puede encontrar en el libro de Billingsley [2] (página 275) :

$$E[X] = \int_0^{\infty} [1 - F_X(t)] dt - \int_{-\infty}^0 F_X(t) dt \quad (1.1)$$

En segundo lugar, vamos a recordar el concepto de convergencia débil o convergencia en distribución [3] que se utiliza para describir la convergencia de sucesiones de variables aleatorias hacia una distribución límite.

Definición 1.4. Sea X_n con $n \in \mathbb{N}$ una sucesión de v.a. y $F_n(x)$, con $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, su correspondiente sucesión de funciones de distribución. Entonces, X_n converge a X en distribución ($X_n \xrightarrow{d} X$) si $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ en los puntos de continuidad de $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, donde F es la función de distribución de X .

Observación 1.1. Para que se verifique la convergencia en distribución de variables discretas sobre el mismo soporte, basta con comprobar que sus funciones de masa de probabilidad convergen.

En tercer lugar, vamos a recordar el Teorema de la Convergencia Monótona [1]. Por simplicidad, lo enunciamos solo para medidas de probabilidad.

Teorema 1.1. Sea un espacio probabilístico (Ω, \mathcal{F}, P) . Sea $E \in \mathcal{F}$ y sean $f_n : E \rightarrow [0, +\infty]$ funciones medibles ($n \in \mathbb{N}$) de manera que para todo $x \in E$

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots \leq +\infty$$

(es decir, que (f_n) sea una sucesión monótona no decreciente). Entonces, si $f(x) = \lim_n f_n(x)$ para cada $x \in E$, se tiene que f es una función medible no negativa cuya integral verifica

$$\int_E f dP = \lim_n \int_E f_n dP$$

Observación 1.2. Si tomamos $\Omega = E = \mathbb{R}$ y $P = P_X$ la medida asociada a una variable aleatoria X , podemos reexpresar el resultado como $Ef(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} Ef_n(X)$. Por otra parte, el resultado sería también cierto para funciones monótonas reales (bajo existencia de las integrales), bastaría con separar parte positiva y negativa.

Por último, vamos a estudiar algunos conceptos y resultados sobre concavidad y convexidad que utilizaremos durante el desarrollo de este trabajo, basándonos en el libro de Marshall y Olkin. [8]

Definición 1.5. Un subconjunto \mathcal{A} de \mathbb{R}^n se dice que es convexo si $x, y \in \mathcal{A}$ implica $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \mathcal{A}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Definición 1.6. Una función de valor real ϕ definida en un subconjunto convexo \mathcal{A} de \mathbb{R}^n se dice que es convexa si

$$\phi(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha \phi(x) + (1 - \alpha)\phi(y) \quad (1.2)$$

para todo $x, y \in \mathcal{A}$ y todo $\alpha \in [0, 1]$. Si la desigualdad anterior se invierte, entonces se dice que ϕ es cóncava.

En otras palabras, una función ϕ es cóncava si y sólo si $-\phi$ es convexa. En lo que sigue, las condiciones se dan sólo para la convexidad porque las condiciones correspondientes para la concavidad se pueden obtener con un cambio de signo.

Proposición 1.2. (i) En el caso $n = 1$ y $\mathcal{A} = I$, donde I es un intervalo de \mathbb{R} , ϕ es convexa si y sólo si

$$\frac{\phi(y_1) - \phi(x_1)}{y_1 - x_1} \leq \frac{\phi(y_2) - \phi(x_2)}{y_2 - x_2} \quad \text{siempre que } x_1 < y_1 \leq y_2, \quad x_1 \leq x_2 < y_2.$$

(ii) En el caso de que $n = 1$ y $\mathcal{A} = I$, donde I es un intervalo de \mathbb{R} , ϕ es convexo si y sólo si $\phi(x + \Delta) - \phi(x)$ es creciente en x para todo $\Delta > 0$; $x, x + \Delta \in I$.

Si ϕ fuese diferenciable, (ii) implicaría que ϕ' es creciente. La siguiente proposición (que podemos verla como una generalización de (ii)), de hecho, nos asegura la existencia de la derivada.

Proposición 1.3. Sea ϕ una función convexa finita definida en un intervalo abierto I de la recta real. Entonces, ϕ es diferenciable excepto posiblemente en un subconjunto contable de I . Además, ϕ' es continua y creciente relativa al subconjunto denso D de I donde ϕ es diferenciable.

Capítulo 2

Órdenes estocásticos univariantes

2.1. Introducción

Las relaciones de orden estocástico son casos particulares de relaciones de orden parcial. Luego, es importante conocer la definición de orden parcial.

Definición 2.1. Se llama orden parcial a una relación binaria \preceq en un conjunto arbitrario S que satisface las siguientes condiciones:

1. Reflexividad: $x \preceq x \forall x \in S$.
2. Transitividad: si $x \preceq y$ e $y \preceq z$ entonces $x \preceq z$.
3. Antisimetría: si $x \preceq y$ e $y \preceq x$ entonces $x = y$.

Una vez introducido el orden parcial, seguimos con la definición de un caso particular de este, el orden estocástico.

Definición 2.2. Sea S el conjunto (o un subconjunto adecuado) de todas las funciones de distribución de variables aleatorias con valores reales. Un orden estocástico es un orden parcial en S .

Convenio. Si las variables aleatorias X e Y tienen distribuciones P_X y P_Y y funciones de distribución F_X y F_Y con $F_X \preceq F_Y$, entonces la notación $P_X \preceq P_Y$ y $X \preceq Y$ se utilizará cuando sea conveniente. Notar que puede haber diferentes variables aleatorias con la misma distribución, de modo que la relación \preceq es de orden parcial como una relación entre distribuciones pero puede no ser una relación de orden parcial para variables aleatorias.

Ejemplo 2.1. Sean X e Y dos variables aleatorias tales que $X = U$ e $Y = 1 - U$ donde U es una variable uniforme en el intervalo $(0,1)$. En este caso, X e Y son estocásticamente iguales, ya que tienen la misma distribución. Sin embargo, X e Y no están ordenadas como variables aleatorias ya que para diferentes valores de U , la relación entre X y Y cambia: Si $U \leq \frac{1}{2}$, entonces $X \leq \frac{1}{2}$ e $Y = 1 - U \geq \frac{1}{2}$, por lo tanto $X \leq Y$. Pero si $U > \frac{1}{2}$, entonces $X > \frac{1}{2}$ e $Y = 1 - U < \frac{1}{2}$, por lo tanto, $Y < X$.

2.2. Orden estocástico usual

El candidato natural para un orden estocástico es la comparación puntual de las funciones de distribución. Si $F_X(t) \geq F_Y(t)$ para todo t real, entonces X toma valores pequeños con mayor probabilidad que Y y, por tanto, X toma valores grandes con menor probabilidad que Y . Esto nos lleva a la siguiente definición para una relación de orden que compara la distribución de las variables aleatorias.

Definición 2.3. Se dice que la variable aleatoria X es menor o igual que la variable aleatoria Y con respecto al orden estocástico usual (escrito como $X \leq_{st} Y$), si $F_X(t) \geq F_Y(t)$ para todo t real, o equivalentemente, si $\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t)$ para todo t real, donde $\bar{F}_X(t)$ es la función de supervivencia, definida en el capítulo 1.

Observación 2.1. Esta relación suele llamarse simplemente orden estocástico. Para distinguirlo de los demás órdenes estocásticos que se utilizan en este trabajo utilizaremos el nombre de orden estocástico usual, como hacen también Shaked y Shanthikumar (1994) [14].

Observación 2.2. A primera vista parece contradictorio decir que $F_X \leq_{st} F_Y$ si $F_X(t) \geq F_Y(t)$ para todo t real. Pero es claro que Y es más grande estocásticamente que X si esta toma valores más grandes con mayor probabilidad, sin embargo, la función de distribución describe la probabilidad de tomar valores pequeños. De ahí, la inversión del signo de la desigualdad.

En la forma dada, \leq_{st} puede considerarse como una generalización del orden \leq en el eje real, ya que para los números reales a y b , $a \leq b$ implica $a \leq_{st} b$ donde en la última desigualdad a y b se consideran variables aleatorias degeneradas. En otras palabras, $a \leq b$ se da si y solo si $\delta_a \leq_{st} \delta_b$ para sus correspondientes funciones de distribución.

El siguiente teorema muestra que \leq_{st} está muy relacionado con la comparación puntual de variables aleatorias.

Teorema 2.1. Para variables aleatorias X e Y , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $X \leq_{st} Y$;

(ii) Existe un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y variables aleatorias \hat{X} e \hat{Y} en él con funciones de distribución F_X y F_Y tales que $\hat{X}(\omega) \leq \hat{Y}(\omega)$ para casi todo $\omega \in \Omega$.

Demostración. (i) \implies (ii): Denotamos por

$$F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\} \quad \text{para } 0 < u < 1$$

a la función de distribución inversa (también llamada función cuantil) correspondiente a la función de distribución F . Sea U una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$, y definimos $\hat{X} = F_X^{-1}(U)$ e $\hat{Y} = F_Y^{-1}(U)$. Entonces \hat{X} tiene función de distribución F_X e \hat{Y} tiene función de distribución F_Y . De acuerdo con (i), $F_X \geq F_Y$ y por lo tanto $F_X^{-1} \leq F_Y^{-1}$. Así, $\hat{X} \leq \hat{Y}$.

(ii) \implies (i): Supongamos ahora dos v.a. \hat{X} e \hat{Y} tales que $F_{\hat{X}} = F_X$ y $F_{\hat{Y}} = F_Y$ con $\hat{X}(\omega) \leq \hat{Y}(\omega)$ para casi todo $\omega \in \Omega$. Si $\omega \in \{\omega : \hat{Y}(\omega) \leq t\}$ entonces $\hat{Y}(\omega) \leq t$. Como $\hat{X}(\omega) \leq \hat{Y}(\omega)$ e $\hat{Y}(\omega) \leq t$, por transitividad tenemos que $\hat{X}(\omega) \leq t$ y así $\omega \in \{\omega : \hat{X}(\omega) \leq t\}$. Por tanto, $\{\omega : \hat{Y}(\omega) \leq t\} \subset \{\omega : \hat{X}(\omega) \leq t\}$ para el subconjunto de Ω donde se da $\hat{X} \leq \hat{Y}$. Como la probabilidad es monótona, de la expresión anterior obtenemos que $P(\omega : \hat{Y}(\omega) \leq t) \leq P(\omega : \hat{X}(\omega) \leq t)$, es decir, $F_{\hat{Y}} \leq F_{\hat{X}}$, que por la hipótesis equivale a $F_X \geq F_Y$ y, por definición esto equivale a $X \leq_{st} Y$. □

Observación 2.3. Un candidato natural para un orden parcial que compara el tamaño de dos variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) es la relación $X \preceq_{c.s.} Y$, que se cumple si y solo si $X(\omega) \leq Y(\omega)$ para casi todo ω . Esta relación de orden, sin embargo no solo depende de las distribuciones. Esto se puede ver fácilmente a partir de la observación de que $X \preceq_{c.s.} X$ siempre se cumple, pero $X \preceq_{c.s.} Y$ no se cumple si X e Y son independientes y se distribuyen idénticamente con la misma distribución no degenerada, ya que, si tomamos un número a , tal que $0 < P(X \leq a) < 1$, si $X \preceq_{c.s.} Y$ tendríamos que $P(X \leq a, Y \leq a) = P(Y \leq a)$, lo que es incompatible con el hecho de que sean independientes.

Por lo tanto, la definición de \leq_{st} utilizada aquí es mucho más útil, y como revela el Teorema anterior, este es el orden más fuerte \preceq para distribuciones con la propiedad de que $X \preceq_{c.s.} Y$ implica $F_X \preceq F_Y$.

El siguiente resultado nos da una caracterización muy útil del orden estocástico usual.

Teorema 2.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $X \leq_{st} Y$;

(ii) *la desigualdad*

$$Ef(X) \leq Ef(Y) \tag{2.1}$$

se cumple para todas las funciones f crecientes, para las que existen ambas esperanzas.

Además, si para una f dada la desigualdad (2.1) se cumple para todo X e Y con $X \leq_{st} Y$, entonces f debe ser creciente.

Demostración. (i) \implies (ii): De acuerdo con el Teorema 2.1. se puede suponer sin pérdida de generalidad que $X \leq Y$ casi seguro. Así, si f es creciente, entonces $f(X) \leq_{c.s.} f(Y)$ también y, por lo tanto, $Ef(X) \leq Ef(Y)$ se sigue de la monotonía de la esperanza.

(ii) \implies (i): Esto se deduce inmediatamente observando que $P(X > t) = Ef_t(X)$ para la función indicadora (función indicatriz o función característica)

$$f_t(x) = \mathbf{1}_{(t, \infty)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x > t \\ 0 & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

que, por supuesto, es creciente.

Para demostrar la última afirmación, procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que f no es creciente, por tanto tenemos $x \leq y$ con $f(x) > f(y)$, y tomemos X e Y de forma que $P(X = x) = P(Y = y) = 1$. Entonces $X \leq_{st} Y$, pero $Ef(X) > Ef(Y)$, lo que contradice la afirmación. \square

El orden estocástico \leq_{st} tiene muchas propiedades interesantes. En primer lugar, en el siguiente teorema se demostrará que \leq_{st} implica la ordenación de las esperanzas y que diferentes distribuciones con la misma esperanza no pueden ordenarse con respecto de \leq_{st} .

Teorema 2.3. *Sean X e Y variables aleatorias con esperanzas finitas.*

(a) *Si $X \leq_{st} Y$ entonces $EX \leq EY$;*

(b) *Si $X \leq_{st} Y$ y $EX = EY$ entonces X e Y tienen la misma distribución.*

Demostración. (a) Se deduce del Teorema 2.2. utilizando $f(x) = x$.

(b) Con la siguiente representación de la esperanzas indicada en el capítulo 1, tenemos

$$EX = \int_0^\infty [1 - F_X(t)] dt - \int_{-\infty}^0 F_X(t) dt \quad \text{y} \quad EY = \int_0^\infty [1 - F_Y(t)] dt - \int_{-\infty}^0 F_Y(t) dt$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} EY - EX &= \int_0^\infty [1 - F_Y(t)] dt - \int_{-\infty}^0 F_Y(t) dt - \left(\int_0^\infty [1 - F_X(t)] dt - \int_{-\infty}^0 F_X(t) dt \right) \\ &= \int_0^\infty [F_X(t) - F_Y(t)] dt + \int_{-\infty}^0 [F_X(t) - F_Y(t)] dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty [F_X(t) - F_Y(t)] dt \end{aligned}$$

Resumiendo:

$$EY - EX = \int_{-\infty}^\infty [F_X(t) - F_Y(t)] dt \tag{2.2}$$

Si $X \leq_{st} Y$ y $EX = EY$, entonces la parte izquierda de la igualdad (2.2) es 0 y la parte derecha es la integral de una función no negativa, ya que, como $X \leq_{st} Y$ entonces $F_X(t) - F_Y(t) \geq 0$ para todo t . Que tal integral sea igual a 0 solo es posible si la función del integrando también se anula casi seguramente. Como las funciones de distribución son continuas a derecha, tenemos que $F_X = F_Y$. \square

Observación 2.4. Para las personas con menos conocimientos matemáticos existe un orden más natural que el orden estocástico usual llamado el *orden del ingeniero* que se basa simplemente en la comparación de medias. Se dice que la variable aleatoria X es menor o igual que Y en media (escrito $X \leq_{\mu} Y$) si $EX \leq EY$.

El Teorema 2.3. establece que el orden estocástico usual implica el orden de la media. Es claro que el orden de la media no implica el orden estocástico usual. Por ejemplo, una distribución uniforme en $(0,2)$ tiene la misma media que una distribución degenerada en 1, pero estas variables no están ordenadas estocásticamente.

A continuación enunciamos un resultado importante, la clausura del orden estocástico bajo la convergencia débil, cuya definición se ha recordado en el capítulo 1.

Teorema 2.4. *La relación de orden estocástico \leq_{st} es cerrada con respecto a la convergencia débil, es decir, si (F_n) y (G_n) son sucesiones de funciones de distribución de modo que $F_n \leq_{st} G_n$ se cumple para todo n y las sucesiones (F_n) y (G_n) convergen débilmente a F y G entonces $F \leq_{st} G$.*

Demostración. Puesto que $F_n(t) \geq G_n(t)$ para todo t real, la convergencia débil implica $F(t) \geq G(t)$, si t es un punto de continuidad tanto de F como de G . Dado que el conjunto de puntos de discontinuidad de F y G es a lo sumo contable, los puntos de continuidad son densos en \mathbb{R} . Por lo tanto $F(t) \geq G(t)$ debe cumplirse para todo t real, ya que las funciones de distribución son continuas por la derecha. \square

2.3. Orden de la tasa de fallo

Hay muchas situaciones en las que necesitamos utilizar un orden más fuerte que el orden estocástico usual. Consideremos la situación en la que una persona quiere comprar un móvil y puede elegir entre dos modelos de móviles con diferentes vidas útiles aleatorias X e Y . Por supuesto, si el precio de ambos modelos es el mismo y $X \leq_{st} Y$ (es más probable que Y funcione durante más tiempo que X), entonces elegirá el segundo modelo. Pero ahora supongamos que quiere comprar un móvil de segunda mano que tenga un año de antigüedad, por tanto los tiempos de vida útil restantes son X' e Y' donde $P(X' > t) = P(X > 1+t|X > 1)$ y análogo para el modelo Y' , $P(Y' > t) = P(Y > 1+t|Y > 1)$. En este caso, ¿podríamos afirmar que el segundo modelo sigue siendo el mejor?, es decir, ¿ $X' \leq_{st} Y'$? El siguiente ejemplo muestra que esto no es necesariamente así.

Ejemplo 2.2. $X \leq_{st} Y$ no se conserva bajo envejecimiento.

Supongamos que X tiene distribución uniforme en el intervalo $(0,3)$, así, su función de densidad $f_X(t)$ y su función de distribución $F_X(t)$ son:

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 0 < t < 3 \\ 0 & \text{si } t \geq 3 \end{cases} \quad F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t}{3} & \text{si } 0 < t < 3 \\ 1 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

Supongamos también que Y tiene la siguiente función de densidad $f_Y(t)$, y a partir de ella calculamos su función de distribución $F_Y(t)$:

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{6} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 2 < t < 3 \\ 0 & \text{si } t \geq 3 \end{cases} \quad F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t}{6} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ \frac{t}{2} - \frac{1}{3} & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ \frac{t}{3} & \text{si } 2 < t < 3 \\ 1 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

Observamos que $F_X(t) \geq F_Y(t)$ para todo t real, por tanto se cumple $X \leq_{st} Y$.

Ahora, calculemos la función de supervivencia de X' y de Y' . Recordemos que para cualesquiera sucesos A y B, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ si $P(B) > 0$. Por tanto

$$P(X' > t) = P(X > 1+t | X > 1) = \frac{P(X > 1+t)}{P(X > 1)} = 1 - \frac{t}{2}, \quad \text{si } 0 < t < 2. \quad (2.3)$$

Por tanto, X' sería uniforme en el intervalo (0,2), y su función de supervivencia sería

$$\bar{F}_{X'}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - \frac{t}{2} & \text{si } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

Análogamente a (2.3) se calcularía la función de supervivencia de Y' , quedando esta como

$$\bar{F}_{Y'}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - \frac{3t}{5} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ \frac{4}{5} - \frac{2t}{5} & \text{si } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

Observamos que $\bar{F}_{Y'}(t) \leq \bar{F}_{X'}(t)$ para todo t real, por lo tanto $X' \geq_{st} Y'$.

Así, surge la siguiente pregunta: ¿qué condiciones son necesarias para garantizar que el orden estocástico usual se cumple para todos los móviles de segunda mano de cualquier antigüedad t ?, es decir, ¿cuándo $[X|X > t] \leq_{st} [Y|Y > t]$ para todo t ?

Usando la definición de \leq_{st} , esta desigualdad se puede reescribir como

$$P(X > s+t | X > t) \leq P(Y > s+t | Y > t) \quad (2.4)$$

para todo $s \geq 0$ y todo t donde los condicionantes tengan sentido (esto es que tanto $P(X > t)$ como $P(Y > t)$ sean estrictamente mayores que 0).

Luego, si X e Y tienen funciones de distribución F_X y F_Y respectivamente, lo anterior corresponde a la afirmación

$$\frac{\bar{F}_X(s+t)}{\bar{F}_X(t)} \leq \frac{\bar{F}_Y(s+t)}{\bar{F}_Y(t)} \quad \text{para todo } s \geq 0 \text{ y todo t donde ninguna de las funciones de supervivencia se anula en } t.$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)} \leq \frac{\bar{F}_Y(s+t)}{\bar{F}_X(s+t)} \quad \text{para todo } s \geq 0 \text{ y todo t donde los denominadores no se anulan.}$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.4. Dadas dos variables aleatorias X e Y, se dice que X es menor o igual que Y con respecto al orden de la tasa de fallo (escrito como $X \leq_{hr} Y$), si la función

$$t \mapsto \frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)}$$

es creciente (utilizando la convención $\frac{0}{0} = \infty$).

El nombre de este orden se debe al hecho de que, suponiendo la existencia de funciones de densidad continuas y, por lo tanto, la existencia de tasas de fallo, existe una caracterización equivalente en términos de comparación puntual de las llamadas tasas de fallo.

Recordemos que la tasa de fallo (también llamada tasa de riesgo) $r_X(t)$ es la tasa infinitesimal de fallo en el tiempo t , es decir, si X tiene densidad f ,

$$r_X(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P(X \leq t + \varepsilon | X > t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P(t < X \leq t + \varepsilon)}{\varepsilon \cdot P(X > t)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_X(t) \cdot \varepsilon}{\varepsilon \cdot P(X > t)} = \frac{f_X(t)}{\bar{F}_X(t)} = -\frac{d}{dt} \ln(\bar{F}_X(t))$$

donde $\bar{F}_X(t) > 0$.

Teorema 2.5. Si X e Y son variables aleatorias absolutamente continuas, entonces $X \leq_{hr} Y$ es equivalente a $r_X(t) \geq r_Y(t)$ para todo t real.

Demostración. $\frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)}$ es creciente si y solo si

$$\ln\left(\frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)}\right) = \ln(\bar{F}_Y(t)) - \ln(\bar{F}_X(t)) \quad \text{es creciente.}$$

Como $r_X(t) = -\frac{d}{dt} \ln(\bar{F}_X(t))$, el resultado se sigue del hecho de que una función diferenciable es creciente si y solo si su derivada es no negativa. \square

El siguiente resultado nos muestra la clausura del orden de la tasa de fallo bajo la convergencia débil.

Teorema 2.6. El orden de tasa de fallo es cerrado con respecto a la convergencia débil.

Demostración. Sean (F_n) y (G_n) sucesiones de funciones de distribución que convergen débilmente a las funciones de distribución F y G respectivamente. Además, supongamos que $F_n \leq_{hr} G_n$ para todo n . Entonces, las h_n dadas por $h_n(t) = \frac{\bar{G}_n(t)}{\bar{F}_n(t)}$ forman una sucesión de funciones crecientes y continuas por la derecha que convergen a la función $h(t) = \frac{\bar{G}(t)}{\bar{F}(t)}$ para todo t donde tanto F como G son continuas. Dado que estos puntos son densos en \mathbb{R} (ya que el número de discontinuidades de una función de distribución es numerable) y h es continua a la derecha, h también debe ser creciente. \square

El orden \leq_{hr} es una condición más fuerte que el orden \leq_{st} , como muestra el siguiente teorema:

Teorema 2.7. $X \leq_{hr} Y$ implica $X \leq_{st} Y$.

Demostración. Como $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)} = 1$, $X \leq_{hr} Y$ implica que $\frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)} \geq 1$ y, por lo tanto, $\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t)$ para todo t real, luego $X \leq_{st} Y$. \square

Ya demostramos con el Ejemplo 2.2. que $X \leq_{st} Y$ no se conserva bajo el envejecimiento, y por tanto, la implicación del teorema anterior es estricta.

En ocasiones es útil considerar el orden estocástico que se obtiene cuando la función de supervivencia se reemplaza por la función de distribución en la definición del orden de la tasa de fallo. Esto da lugar a la definición del orden dual al hr (orden de la tasa de fallo inversa).

Definición 2.5. Se dice que la variable aleatoria X es menor o igual que la variable aleatoria Y con respecto al orden de la tasa de fallo inversa (escrito $X \leq_{rh} Y$) si la función $t \mapsto \frac{F_Y(t)}{F_X(t)}$ es creciente (con la convención $\frac{0}{0} = 0$).

Observación 2.5. Utilizando un razonamiento análogo al de la definición de tasa de fallo, tenemos que $X \leq_{rh} Y$ si y solo si

$$P(X \leq s+t | X \leq t) \leq P(Y \leq s+t | Y \leq t)$$

para todo $s \geq 0$ y todo t donde los dos condicionantes tengan sentido.

Por tanto, el orden de la tasa de fallo inversa $X \leq_{rh} Y$ se cumple si y solo si $[X | X \leq t] \leq_{st} [Y | Y \leq t]$ en las condiciones anteriores.

El orden de la tasa de fallo inversa comparte muchas propiedades con el orden usual de la tasa de fallo. De hecho, existe una fuerte dualidad entre \leq_{hr} y \leq_{rh} . Esto se debe al siguiente resultado que fue demostrado por Nanda y Shaked (2002) [10].

Teorema 2.8. *Sea g una función continua estrictamente decreciente. Entonces $X \leq_{hr} Y$ si y solo si $g(X) \geq_{rh} g(Y)$.*

Demostración. Si g es continua y estrictamente decreciente entonces g^{-1} también lo es. La afirmación se sigue así de la identidad

$$F_{g(X)}(t) = P(g(X) \leq t) = P(X \geq g^{-1}(t)) = \bar{F}_X(g^{-1}(t)).$$

□

La consecuencia más importante de este teorema es la siguiente.

Teorema 2.9. *$X \leq_{rh} Y$ implica que $X \leq_{st} Y$.*

Demostración. Se deduce del teorema anterior (Teorema 2.8.) tomando $g(x)=-x$, que es continua y estrictamente decreciente. Así, $X \leq_{rh} Y$ implica $-X \geq_{hr} -Y$.

Luego, por el Teorema 2.7., $-X \geq_{st} -Y \Rightarrow X \leq_{st} Y$ (esta última implicación es trivial por la definición de orden estocástico). □

2.4. Orden de la razón de verosimilitud

Una característica interesante del orden de la tasa de fallo es que $X \leq_{hr} Y$ se cumple si y solo si

$$[X|X > t] \leq_{st} [Y|Y > t] \quad \text{para todo } t \text{ donde los condicionantes tengan sentido.} \quad (2.5)$$

Esto es importante para analizar las distribuciones de tiempos de vida útil. Sin embargo, hay otras situaciones en las que nos gustaría tener $[X|X \in A] \leq_{st} [Y|Y \in A]$ para todo boreliano A donde los condicionantes tengan sentido. Resulta que este requisito conduce al llamado orden de la razón de verosimilitud. Para la siguiente definición, recordamos que una variable aleatoria X se dice que tiene función de densidad $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ con respecto a una medida dominante μ definida en los reales si para todo x real se verifica $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) d\mu(t)$.

Definición 2.6. Se dice que la variable aleatoria X es menor o igual que Y respecto al orden de razón de verosimilitud (escrito $X \leq_{lr} Y$) si X e Y tienen funciones de densidad f_X y f_Y con respecto a alguna medida dominante μ tales que:

$$f_X(t)f_Y(s) \leq f_X(s)f_Y(t) \quad \text{para todo } s \leq t. \quad (2.6)$$

Observación 2.6. (a) Hemos elegido una definición con una medida dominante arbitraria μ , de modo que la definición incluye el caso de densidades de distribuciones continuas (donde μ es la medida de Lebesgue), el caso de distribuciones discretas (donde μ es la medida de contar), así como otros casos más generales como mezclas de estos dos casos.

(b) La ecuación (2.6) simplemente establece que el ratio $\frac{f_Y}{f_X}$ es creciente pero está escrita de una forma que evita la dificultad de declarar por separado qué hacer si el numerador o el denominador o ambos desaparecen.

(c) Alternativamente, la definición se puede establecer de la siguiente manera: para todas las medidas dominantes μ y todas las funciones de densidad correspondientes f_X e f_Y

$$f_X(t)f_Y(s) \leq f_X(s)f_Y(t) \quad \text{para todo } s \leq t.$$

μ -c.s. sobre la unión de los soportes de X e Y .

El orden de la razón de verosimilitud es más fuerte que el orden estocástico usual.

Teorema 2.10. $X \leq_{lr} Y$ implica $X \leq_{st} Y$.

Demostración. Supongamos que $X \leq_{lr} Y$, es decir, $\frac{f_Y(t)}{f_X(t)}$ es creciente. Así, podemos encontrar un punto t_0 tal que $\frac{f_Y(t)}{f_X(t)} \leq 1$ para $t < t_0$ y $\frac{f_Y(t)}{f_X(t)} \geq 1$ para $t > t_0$, esto se debe a que las densidades deben integrar 1 y no pueden ser siempre superiores entre sí. Por tanto, $f_Y(t) \leq f_X(t)$ para $t < t_0$ y $f_Y(t) \geq f_X(t)$ para $t > t_0$. Así, $F_Y(t) - F_X(t)$ es decreciente para $t < t_0$ y creciente para $t > t_0$. Dado que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (F_Y(t) - F_X(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (F_Y(t) - F_X(t)) = 0$$

esto implica que $F_Y(t) \leq F_X(t)$ para todo t , es decir, $X \leq_{st} Y$. \square

El siguiente resultado caracteriza el orden de la razón de verosimilitud en términos de distribuciones condicionales.

Teorema 2.11. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $X \leq_{lr} Y$;

(ii) para todos los intervalos $U = [a, b]$ y $V = [c, d]$ con $a < b < c < d$

$$P(X \in V)P(Y \in U) \leq P(X \in U)P(Y \in V) \quad (2.7)$$

(iii) $[X|a \leq X \leq b] \leq_{st} [Y|a \leq Y \leq b]$ para todo $a < b$ con $P(a \leq X \leq b) > 0$ y $P(a \leq Y \leq b) > 0$;

(iv) $[X|X \in A] \leq_{st} [Y|Y \in A]$ para todo boreliano A con $P(X \in A) > 0$ y $P(Y \in A) > 0$;

(v) $[X|X \in A] \leq_{lr} [Y|Y \in A]$ para todo boreliano A con $P(X \in A) > 0$ y $P(Y \in A) > 0$;

Demostración. (i) \implies (v): La función de densidad de $[X|X \in A]$ está dada por:

$$f_{[X|X \in A]}(t) = \begin{cases} \frac{f_X(t)}{P(X \in A)} & \text{para todo } t \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto la afirmación se sigue inmediatamente de la definición de orden de la razón de verosimilitud.

(v) \implies (iv): Es una consecuencia inmediata de $X \leq_{lr} Y \implies X \leq_{st} Y$ (Teorema 2.10.).

(iv) \implies (iii): Es trivial.

(iii) \implies (ii): Tomando c tal que $a < b < c$, si (iii) se cumple entonces:

$$P(b \leq X \leq c | a \leq X \leq c) \leq P(b \leq Y \leq c | a \leq Y \leq c)$$

y, por tanto,

$$\frac{P(b \leq X \leq c)}{P(a \leq X \leq c)} \leq \frac{P(b \leq Y \leq c)}{P(a \leq Y \leq c)} \quad \text{para } a < b < c.$$

Así, tenemos que,

$$\frac{P(b \leq X \leq c)}{P(a \leq X \leq b) + P(b \leq X \leq c)} \leq \frac{P(b \leq Y \leq c)}{P(a \leq Y \leq b) + P(b \leq Y \leq c)}$$

Dividiendo entre $P(b \leq X \leq c)$, obtenemos:

$$\frac{1}{\frac{P(a \leq X \leq b)}{P(b \leq X \leq c)} + 1} \leq \frac{1}{\frac{P(a \leq Y \leq b)}{P(b \leq Y \leq c)} + 1}$$

Esto solo puede ser cierto si

$$\frac{P(a \leq X \leq b)}{P(b \leq X \leq c)} \geq \frac{P(a \leq Y \leq b)}{P(b \leq Y \leq c)} \quad \text{para } a < b < c,$$

o equivalentemente, si

$$\frac{P(a \leq X \leq b)}{P(a \leq Y \leq b)} \geq \frac{P(b \leq X \leq c)}{P(b \leq Y \leq c)} \quad \text{para } a < b < c.$$

De manera análoga a lo anterior, si tomamos d tal que $b < c < d$ y (iii) se cumple, entonces:

$$\frac{P(b \leq X \leq c)}{P(b \leq Y \leq c)} \geq \frac{P(c \leq X \leq d)}{P(c \leq Y \leq d)} \quad \text{para } b < c < d,$$

y, por lo tanto

$$\frac{P(a \leq X \leq b)}{P(a \leq Y \leq b)} \geq \frac{P(c \leq X \leq d)}{P(c \leq Y \leq d)} \quad \text{siempre que } a < b < c < d.$$

Ahora, si consideramos los intervalos $U = [a, b]$ y $V = [c, d]$ con $a < b < c < d$, la expresión anterior es equivalente a

$$\frac{P(X \in U)}{P(Y \in U)} \geq \frac{P(X \in V)}{P(Y \in V)},$$

es decir,

$$P(X \in V)P(Y \in U) \leq P(X \in U)P(Y \in V),$$

como queríamos demostrar.

(ii) \implies (i) : Sea μ la medida dominante en la definición del orden lr. La desigualdad (2.7) implica

$$\frac{P(X \in V)}{\mu(V)} \frac{P(Y \in U)}{\mu(U)} \leq \frac{P(X \in U)}{\mu(U)} \frac{P(Y \in V)}{\mu(V)}.$$

Ahora, elegimos $U = [s - \varepsilon, s + \varepsilon]$ y $V = [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$ donde $s < t$ y $0 < \varepsilon < \frac{(t-s)}{2}$. Tomando el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ en la desigualdad anterior tenemos que (vease Billingsley [2], página 419, fórmula (31.36))

$$f_X(t)f_Y(s) \leq f_X(s)f_Y(t) \quad \mu - c.s.$$

Y, por lo tanto, $X \leq_{lr} Y$. □

El orden de la razón de verosimilitud es aún más fuerte que el orden de la tasa de fallo.

Teorema 2.12. $X \leq_{lr} Y$ implica $X \leq_{hr} Y$ y $X \leq_{rh} Y$.

Demostración. En primer lugar, supongamos que $X \leq_{lr} Y$, por el Teorema 2.11. (iv) tenemos que $[X|X \in A] \leq_{st} [Y|Y \in A]$. Tomamos $A=(t, \infty)$ y así, $[X|X > t] \leq_{st} [Y|Y > t]$. Sabemos que esto implica $X \leq_{hr} Y$ (recordemos (2.4)). Por tanto, $X \leq_{lr} Y$ implica $X \leq_{hr} Y$.

Seguimos con la segunda parte de la demostración, supongamos que $X \leq_{lr} Y$, por el Teorema 2.11. (iv) tenemos que $[X|X \in A] \leq_{st} [Y|Y \in A]$. Tomamos $A=(-\infty, t]$ y así, $[X|X \leq t] \leq_{st} [Y|Y \leq t]$. Sabemos que esto implica $X \leq_{rh} Y$ (recordar Observación 2.5.). Por tanto, $X \leq_{lr} Y$ implica $X \leq_{rh} Y$. □

Ejemplo 2.3. Recordar que una variable aleatoria $\Gamma(\alpha, \lambda)$ tiene función de densidad $f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$ con $x \geq 0$. Sean ahora X e Y dos variables aleatorias con respectivas distribuciones gamma $\Gamma(\alpha_1, 2)$ y $\Gamma(\alpha_2, 2)$ con $\alpha_1 < \alpha_2$, esto es

$$f_X(x) = \frac{2^{\alpha_1} x^{\alpha_1-1} e^{-2x}}{\Gamma(\alpha_1)} \quad f_Y(x) = \frac{2^{\alpha_2} x^{\alpha_2-1} e^{-2x}}{\Gamma(\alpha_2)}$$

Ahora, calculemos el cociente de las densidades para ver que se verifica el orden lr:

$$\frac{f_Y(x)}{f_X(x)} = \frac{\frac{2^{\alpha_2} x^{\alpha_2-1} e^{-2x}}{\Gamma(\alpha_2)}}{\frac{2^{\alpha_1} x^{\alpha_1-1} e^{-2x}}{\Gamma(\alpha_1)}} = \frac{2^{\alpha_2-\alpha_1} x^{\alpha_2-\alpha_1} \Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_2)}$$

que es creciente en x , luego se verifica $X \leq_{lr} Y$. Esto implica, por el Teorema 2.12., que se verifican también los órdenes hr, rh y por el Teorema 2.10. que se verifica el orden st. Si el parámetro de forma (α) no fuese entero, estos últimos órdenes serían muy difíciles de comprobar, puesto que la función de distribución no tendría forma explícita. Es decir, el orden lr, aun siendo más fuerte que el resto, en ocasiones es el más fácil de comprobar.

2.5. Órdenes convexos

Las secciones previas han tratado sobre los órdenes estocásticos que comparan probabilísticamente las magnitudes de las variables aleatorias. Sin embargo, muy a menudo también interesa la variabilidad de una variable aleatoria, ya que describe el riesgo de un resultado incierto. Los órdenes previamente definidos implican la ordenación de las medias, pero no de las variabilidades. Pensemos en X uniforme en $[0, 1]$, e Y uniforme en $[2, 2+z]$, con $z > 0$ arbitrario. Dichas variables están ordenadas en cualquiera de los órdenes descritos anteriormente. Sin embargo, según la elección de z tendríamos $Var[X] \leq Var[Y]$ (si $z \leq 1$) o a la inversa.

Si dos variables aleatorias X e Y con la misma media describen la rentabilidad de dos inversiones de riesgo, todo inversor con aversión al riesgo elegirá la que tenga menor variabilidad ya que aunque opte a menos ganancias, también tiene menor riesgo de pérdidas de dinero. Por lo tanto, las ordenaciones de variabilidad son de especial interés en el contexto de la toma de decisiones de bajo riesgo, y nuestro objetivo ahora será introducir órdenes estocásticos que nos garanticen el orden de las variabilidades. Resulta que existe una conexión natural entre la variabilidad de las variables aleatorias y los órdenes estocásticos basados en funciones convexas. Recordemos que la definición de función cóncava y convexa ha sido introducida en el capítulo 1.

Definición 2.7. Sean X e Y variables aleatorias con medias finitas. Entonces, decimos que

- (i) X es menor o igual que Y respecto al orden estocástico convexo, escrito $X \leq_{cx} Y$, si $Ef(X) \leq Ef(Y)$ para todas las funciones reales convexas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que las esperanzas existen.
- (ii) X es menor o igual que Y respecto al orden estocástico convexo creciente, escrito $X \leq_{icx} Y$, si $Ef(X) \leq Ef(Y)$ para todas las funciones crecientes convexas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que las esperanzas existen.
- (iii) X es menor o igual que Y respecto al orden estocástico cóncavo, escrito $X \leq_{cv} Y$, si $Ef(X) \leq Ef(Y)$ para todas las funciones cóncavas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que las esperanzas existen.
- (iv) X es menor o igual que Y respecto al orden estocástico cóncavo creciente, escrito $X \leq_{icv} Y$, si $Ef(X) \leq Ef(Y)$ para todas las funciones crecientes cóncavas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que las esperanzas existen.

A lo largo de esta sección supondremos que todas las variables que se consideren tienen esperanza finita. De hecho, cualquier intento de generar la idea de un orden de variabilidad con variables aleatorias con medias inexistentes conduce a serias dificultades.

Del hecho de que f es convexa creciente si y sólo si $g(x) = -f(-x)$ es cóncava creciente se deduce que $X \leq_{icx} Y$ si y sólo si $-Y \leq_{icv} -X$, luego, es suficiente con estudiar solo uno de estos dos conceptos duales. Por tanto, el orden \leq_{icx} se considerará aquí y los resultados correspondientes a \leq_{icv} serán omitidos.

Además, el orden convexo y el orden convexo creciente están estrechamente relacionados como muestra el siguiente resultado.

Teorema 2.13. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) $X \leq_{cx} Y$;
- (ii) $X \leq_{icx} Y$ y $EX = EY$.

Demostración. (i) \implies (ii): Es obvio que $X \leq_{cx} Y$ implica $X \leq_{icx} Y$, pues si $Ef(X) \leq Ef(Y)$ para toda función real f convexa, también es cierto en particular para funciones convexas crecientes.

Para ver que $EX = EY$ consideramos las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = -x$ que son ambas convexas. Por tanto, $X \leq_{cx} Y$ implica $EX \leq EY$ (utilizando f) y $-EX \leq -EY$ (utilizando g), y así $EX = EY$.

(ii) \implies (i): Sea f una función convexa arbitraria.

Supongamos por el momento que existe algún α finito tal que

$$x \mapsto f(x) + \alpha x \quad \text{es creciente.} \tag{2.8}$$

Entonces $Ef(X) + \alpha E(X) \leq Ef(Y) + \alpha E(Y)$ y por tanto $Ef(X) \leq Ef(Y)$, ya que $EX = EY$. Si tal α no existe, entonces aproximamos f de forma monótona por

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{para } x \geq -n \\ f(-n) + f'_+(-n)(x+n), & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde f'_+ denota la derivada por la derecha que siempre existe debido a la convexidad. Notemos que la aproximación es monótona porque en el intervalo $(-\infty, -n)$ reemplazamos una función con derivada creciente por una línea recta que coincide con f en el punto $-n$.

Todas estas funciones son convexas y satisfacen (2.8) con $\alpha = -f'_+(-n)$ (al derivar a trozos (2.8) tenemos $f'(x) - f'_+(-n)$ que es ≥ 0 para $x \geq -n$ por la propiedad de crecimiento de la derivada). Por lo que la afirmación se deduce del Teorema de Convergencia Monótona (que ha sido introducido en el capítulo 1) y $Ef(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} Ef_n(X) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} Ef_n(Y) = Ef(Y)$. \square

El teorema anterior evidencia que en el caso de que las esperanzas sean iguales los órdenes \leq_{cx} y \leq_{icx} son equivalentes. Como una consecuencia inmediata de este teorema (Teorema 2.13.) y de la definición de estos órdenes obtenemos el siguiente resultado relativo a la comparación de momentos.

Corolario 2.14. *Si $X \leq_{cx} Y$, entonces:*

- (a) $EX^n \leq EY^n$ y $E(X - EX)^n \leq E(Y - EY)^n$ para $n = 2, 4, 6, \dots$
- (b) $Var(X) \leq Var(Y)$.
- (c) Si, además, X e Y son variables aleatorias no negativas tales que $X \leq_{cx} Y$, entonces $EX^n \leq EY^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que $X \leq_{cx} Y$:

- (a) Por la definición de orden convexo tenemos que $Ef(X) \leq Ef(Y)$ para toda función f convexa. Si tomamos $f(x) = (x - a)^n$ (que es convexa en $x \in \mathbb{R}$ si n es par para todo a real, pues la derivada es creciente) obtenemos $EX^n \leq EY^n$ (tomando $a = 0$) para $n = 2, 4, 6, \dots$
La segunda desigualdad se deduce tomando $a = EX = EY$.
- (b) Es inmediato tomando $n = 2$ en la parte (a).
- (c) Procedemos igual que en (a): para n impar, que $f(x) = x^n$ sea convexa solo sucede si $x \geq 0$. Para n par ya lo hemos estudiado en (a).

\square

A continuación se mostrará que el orden convexo y el orden convexo creciente son cerrados con respecto a las convoluciones (suma de una variable independiente a las variables originales).

Teorema 2.15. (a) Si $X \leq_{cx} Y$ y Z es independiente de X e Y , entonces $X + Z \leq_{cx} Y + Z$.

(b) Si $X \leq_{icx} Y$ y Z es independiente de X e Y , entonces $X + Z \leq_{icx} Y + Z$.

Demostración. (a) Sea f una función convexa. Definimos $g(z) = Ef(X + z)$ y $h(z) = Ef(Y + z)$.

Como $x \mapsto f(x + z)$ es convexo para todas las z reales, $X \leq_{cx} Y$ implica $g(z) \leq h(z)$ para todo $z \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$Ef(X + Z) = Eg(Z) \leq Eh(Z) = Ef(Y + Z)$$

La demostración de (b) es análoga. □

Es muy difícil verificar directamente la desigualdad $Ef(X) \leq Ef(Y)$ para todas las funciones convexas o todas las funciones convexas crecientes. Por tanto, se necesitan caracterizaciones más sencillas de estos órdenes para que podamos comprobarlas más fácilmente. Los siguientes resultados muestran que es suficiente con considerar solo una pequeña subclase del conjunto de todas las funciones convexas, las llamadas funciones cuña $\phi_t(x) = (x - t)_+ = \max\{x - t, 0\}$. Es decir, la función cuña es una función que vale 0 si $x \leq t$ y vale $x - t > 0$ si $x > t$.

Teorema 2.16. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $X \leq_{icx} Y$;

(ii) $E(X - t)_+ \leq E(Y - t)_+$ para todo t real.

Demostración. (i) \implies (ii) es trivial, puesto que las funciones $\phi_t(x)$ son crecientes y convexas para cualquier valor t fijado.

(ii) \implies (i) Vamos a ver que toda función creciente y convexa f se puede escribir como límite de una combinación lineal de funciones positivas $\phi_t(x)$.

Supongamos que $E(X - t)_+ \leq E(Y - t)_+$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y sea f una función convexa creciente arbitraria. Tenemos que considerar tres casos:

1. Si $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$, por ser f creciente y convexa entonces también es no negativa. Entonces f es el máximo de un conjunto numerable $\{\ell_1, \ell_2, \dots\}$ de funciones lineales crecientes (basta con considerar todas las rectas tangentes a f sobre un conjunto denso numerable, la existencia de la derivada en un conjunto denso nos permite definir esas rectas). Definamos ahora

$$f_n(t) = \max\{0, \ell_1(t), \dots, \ell_n(t)\}.$$

Entonces f_n converge a f , donde cada f_n es una función lineal a trozos. Por lo tanto f_n puede escribirse como

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^n a_{in} (x - b_{in})_+$$

para algunas constantes $a_{in} \geq 0$ y $b_{in} \in \mathbb{R}$, y por tanto, tomando esperanzas y utilizando la hipótesis,

$$Ef_n(X) = \sum_{i=1}^n a_{in} E(X - b_{in})_+ \leq \sum_{i=1}^n a_{in} E(Y - b_{in})_+ = Ef_n(Y).$$

Aplicando el teorema de convergencia monótona se tiene que $Ef(X) \leq Ef(Y)$.

2. Si $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \alpha \in \mathbb{R}$, entonces el problema puede reducirse al caso 1 considerando la función $f - \alpha$.
3. Si $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\infty$, entonces pueden considerarse las funciones $f_n(x) = \max\{f(x), -n\}$ que verifican el caso 2 para todo n , y f_n converge a f de forma monótona. Por tanto, la afirmación se deduce del teorema de convergencia monótona.

□

El teorema anterior muestra que el orden convexo creciente puede caracterizarse con la ayuda de la función $\pi_X(t) = E(X - t)_+$, $t \in \mathbb{R}$. Por tanto, no es sorprendente que esta función desempeñe un papel importante en la investigación de los órdenes convexos. La fórmula (1.1) muestra que

$$\begin{aligned} \pi_X(t) = E(X - t)_+ &= \int_0^\infty P((X - t)_+ > u) du = \int_0^\infty P((X - t) > u) du = \int_0^\infty P(X > t + u) du = \\ &= \int_t^\infty P(X > z) dz = \int_t^\infty \bar{F}_X(z) dz \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde al final hemos aplicado el cambio de variable $t + u = z$. Por la expresión anterior, la función π_X se denomina a veces función de supervivencia integrada. En ciencias actuariales, esta función es conocida como orden de paro de pérdidas (stop-loss transform), ya que $\pi_X(t)$ puede ser considerada como la prima neta de un contrato de reaseguro stop-loss. A continuación, se explica este concepto con mayor claridad. Un riesgo asumido por una compañía de seguros se describe mediante una variable aleatoria X . Si la compañía de seguros no quiere asumir todo el riesgo, cederá una parte a una compañía de reaseguros. La parte que queda en manos de la primera compañía suele denominarse retención. Si el contrato tiene una retención fija de t , se denomina contrato stop-loss. Esto significa que la primera compañía asume todo el riesgo siempre que X sea igual o inferior a t . Si, por el contrario, $X > t$, la compañía de reaseguros asumirá el importe de $X - t$, de modo que solo el importe de t quedará a cargo de la primera compañía. Por tanto, el coste esperado para la compañía de reaseguros, denominado prima neta, es $\pi_X(t) = E(X - t)_+$.

Al contrario de lo que sucede con el orden estocástico usual o el orden de tasa de fallo, este orden no es cerrado con respecto a la convergencia débil, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4. (\leq_{icx} no es cerrado con respecto a la convergencia débil.)

Sea $P(X_n = 1) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $P(Y_n = n) = 1/n = 1 - P(Y_n = 0)$. Entonces, las sucesiones (X_n) y (Y_n) convergen en distribución a X e Y respectivamente, donde $P(X = 1) = P(Y = 0) = 1$. Además, por la definición de función convexa, es fácil ver que $X_n \leq_{cx} Y_n$ y por tanto $X_n \leq_{icx} Y_n$ para todo n , pero $X \not\leq_{icx} Y$. De hecho, obviamente $X \geq_{icx} Y$.

Por último, el orden \leq_{st} es una condición más fuerte que el orden \leq_{icx} , como muestra la siguiente proposición:

Proposición 2.17. $X \leq_{st} Y \implies X \leq_{icx} Y$.

Demostración. Veamos que $X \leq_{st} Y \implies X \leq_{icx} Y$: Si $X \leq_{st} Y$ por el Teorema 2.2. tenemos que $Ef(X) \leq Ef(Y)$ para todas las funciones f crecientes tales que las esperanzas existan, luego $Ef(X) \leq Ef(Y)$ se cumple para todas las funciones f crecientes convexas tales que las esperanzas existan y por tanto, por la definición de orden estocástico convexo creciente, $X \leq_{icx} Y$. □

La Figura A.1 del Apéndice A resume todas las implicaciones de las relaciones de ordenación estocástica definidas en este capítulo.

Capítulo 3

Caracterizaciones bivariantes

Se dice que una relación de orden estocástico \preceq admite una caracterización bivalente si existe una clase \mathcal{G} de funciones bivalentes $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $X \preceq Y$ se cumple si y solo si

$$Eg(X^*, Y^*) \leq Eg(Y^*, X^*) \quad \text{para todo } g \in \mathcal{G} \quad (3.1)$$

donde X^* e Y^* son independientes y tienen la misma distribución que X e Y .

Utilizando la abreviatura $\Delta g(x, y) = g(x, y) - g(y, x)$ la condición (3.1) puede reescribirse de forma más concisa como

$$E\Delta g(X^*, Y^*) \leq 0 \quad \text{para todo } g \in \mathcal{G}.$$

Nótese que la relación $X \preceq Y$ solo depende de las distribuciones marginales de X e Y ; es irrelevante si X e Y son o no estocásticamente independientes. Para la desigualdad (3.1), sin embargo, el supuesto de independencia de X^* e Y^* es crucial.

Estas caracterizaciones bivalentes son muy importantes especialmente para los problemas de programación de tareas y los problemas de optimización de carteras de valores.

Como ejemplo sencillo, supongamos que X e Y son los tiempos de procesamiento (estocásticamente independientes) de dos trabajos, y que hay un único procesador. Si se procesan en orden alfabético de sus tiempos, el tiempo de flujo total (suma de los tiempos de ejecución) es de $2X + Y$; mientras que si se procesan a la inversa el tiempo total es $X + 2Y$. Por tanto el segundo método domina al primero con respecto a \leq_{st} (\leq_{icx}) si puede demostrarse que

$$Ef(2X + Y) \leq Ef(X + 2Y) \quad \text{para todas las funciones } f \text{ crecientes (convexas crecientes).}$$

La solución a estas cuestiones fue la motivación de caracterizaciones bivalentes de órdenes estocásticos.

Algunos de los órdenes estocásticos considerados hasta ahora tienen una caracterización como orden estocástico integral con un generador \mathcal{F} , es decir, existe una clase \mathcal{F} de funciones reales f tales que $X \preceq Y$ se cumple si y solo si $Ef(X) \leq Ef(Y)$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Kijima and Ohnishi (1996) [7] demostraron el siguiente resultado indicando que todo orden estocástico integral tiene una caracterización bivalente.

Teorema 3.1. *Sea $\leq_{\mathcal{F}}$ un orden estocástico integral con generador \mathcal{F} . Entonces $X \leq_{\mathcal{F}} Y$ se cumple si y solo si*

$$E\Delta g(X^*, Y^*) \leq 0 \quad \text{para todo } g \in \mathcal{G}_{\mathcal{F}},$$

donde

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}} = \{g : \Delta g(\cdot, y) \in \mathcal{F} \text{ para todo } y\}$$

y X^* e Y^* son independientes con $X^* =_{st} X$ e $Y^* =_{st} Y$ donde $=_{st}$ significa igualdad en distribución.

Demostración. Como $Ef(X) \leq Ef(Y)$ se cumple para cualquier f si y solo si $Ef(X) + c \leq Ef(Y) + c$ para cualquier c real podemos ampliar el generador y suponer sin pérdida de generalidad que $f \in \mathcal{F}$ implica $f(\cdot) + c \in \mathcal{F}$ para cualquier c real. Para demostrar la parte \implies , tomamos alguna $f \in \mathcal{F}$ y definimos $g_f(x, y) = f(x)$ para todo y . Entonces $\Delta g_f(x, y) = f(x) - f(y)$ que está en \mathcal{F} y por tanto $g_f \in \mathcal{G}_{\mathcal{F}}$.

Así

$$Eg_f(X^*, Y^*) \leq Eg_f(Y^*, X^*)$$

implica $Ef(X) \leq Ef(Y)$ para todo $f \in \mathcal{F}$.

Para la otra parte (\impliedby), sea \tilde{Y} una variable aleatoria con la misma distribución que Y , independiente de X^* e Y^* y que obviamente verifica $X^* \leq_{\mathcal{F}} \tilde{Y}$. Por lo tanto para cualquier $g \in \mathcal{G}_{\mathcal{F}}$

$$E\Delta g(X^*, y) \leq E\Delta g(\tilde{Y}, y) \text{ para todo } y.$$

Esto implica

$$E\Delta g(X^*, Y^*) = E(E[\Delta g(X^*, Y^*) | Y^*]) \leq E(E[\Delta g(\tilde{Y}, Y^*) | Y^*]) = E\Delta g(\tilde{Y}, Y^*) = 0 \quad (3.1.2.)$$

La última igualdad se cumple ya que, por hipótesis, $\tilde{Y} =_{st} Y^*$ e \tilde{Y} es independiente de Y^* , por tanto, tenemos que $E[g(\tilde{Y}, Y^*)] = E[g(Y^*, Y^*)]$, así, es claro que $E\Delta g(\tilde{Y}, Y^*) = 0$. \square

Observación 3.1. (1) El orden estocástico usual es un orden estocástico integral (Teorema 2.2.: $X \leq_{st} Y$ si $Ef(X) \leq Ef(Y) \forall f$ creciente). Así, por el Teorema 3.1., tenemos que

$$\mathcal{G}_{st} = \{g : \Delta g(\cdot, y) \text{ creciente para todo } y\}.$$

(2) El orden estocástico convexo por definición es un orden estocástico integral, luego, por el Teorema 3.1., tenemos que

$$\mathcal{G}_{cx} = \{g : \Delta g(\cdot, y) \text{ convexa para todo } y\}.$$

(3) El orden estocástico cóncavo por definición es un orden estocástico integral, luego, por el Teorema 3.1., tenemos que

$$\mathcal{G}_{cv} = \{g : \Delta g(\cdot, y) \text{ cóncava para todo } y\}.$$

Los órdenes estocásticos que son más fuertes que \leq_{st} como el orden de la razón de verosimilitud y el orden de la tasa de fallo no tienen una representación como orden integral, y por lo tanto el Teorema 3.1. no es aplicable para ellos. No obstante, estos también admiten caracterizaciones bivariantes.

Teorema 3.2. $X \leq_{lr} Y$ si y solo si

$$Eg(X^*, Y^*) \leq Eg(Y^*, X^*) \quad \text{para todo } g \in \mathcal{G}_{lr}$$

donde

$$\mathcal{G}_{lr} = \{g : \Delta g(x, y) \geq 0 \text{ para todo } x \geq y\}$$

y X^* e Y^* son independientes con $X^* =_{st} X$ y $Y^* =_{st} Y$.

Demostración. Supongamos que $X \leq_{lr} Y$, es decir, X e Y tienen densidades con respecto a alguna medida dominante μ tal que

$$f_X(t)f_Y(s) \leq f_X(s)f_Y(t) \quad \text{para todo } s \leq t.$$

De $\Delta g(x, y) = -\Delta g(y, x)$ y $\Delta g(x, x) = 0$ deducimos que para cualquier $g \in \mathcal{G}_r$

$$\begin{aligned}
 E\Delta g(X^*, Y^*) &= \int_y \int_x \Delta g(x, y) f_X(x) f_Y(y) \mu(dx) \mu(dy) = \\
 &= \int_y \int_{x \geq y} \Delta g(x, y) f_X(x) f_Y(y) \mu(dx) \mu(dy) + \int_y \int_{x < y} \Delta g(x, y) f_X(x) f_Y(y) \mu(dx) \mu(dy) = \\
 &= \int_y \int_{x \geq y} \Delta g(x, y) f_X(x) f_Y(y) \mu(dx) \mu(dy) - \int_y \int_{x < y} \Delta g(y, x) f_X(x) f_Y(y) \mu(dx) \mu(dy) = \\
 &= \int_y \int_{x \geq y} \Delta g(x, y) f_X(x) f_Y(y) \mu(dx) \mu(dy) - \int_x \left(\int_{y > x} \Delta g(y, x) f_X(x) f_Y(y) \mu(dy) \right) \mu(dx) = \\
 &= \int_y \int_{x \geq y} \Delta g(x, y) f_X(x) f_Y(y) \mu(dx) \mu(dy) - \int_y \int_{x > y} \Delta g(x, y) f_X(y) f_Y(x) \mu(dx) \mu(dy) = \\
 &= \int_y \int_{x \geq y} \Delta g(x, y) (f_X(x) f_Y(y) - f_X(y) f_Y(x)) \mu(dx) \mu(dy) \leq 0
 \end{aligned}$$

ya que $\Delta g(x, y) \geq 0$ para todo $x \geq y$ y $(f_X(x) f_Y(y) - f_X(y) f_Y(x)) \leq 0$ para todo $x \geq y$.

Para demostrar la otra implicación, elegimos

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{para } c \leq x \leq d, a \leq y \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para $a < b < c < d$. Luego $g(x, y) = 0$ para $x \leq y$ y por tanto $g \in \mathcal{G}_r$. Como

$$E\Delta g(X^*, Y^*) = P(c \leq X \leq d)P(a \leq Y \leq b) - P(a \leq X \leq b)P(c \leq Y \leq d),$$

la afirmación se sigue de la caracterización (ii) del Teorema 2.11. del capítulo 2. \square

El teorema siguiente muestra que un resultado similar al anterior es válido para el orden de la tasa de fallo.

Teorema 3.3. a) $X \leq_{hr} Y$ si y solo si

$$Eg(X^*, Y^*) \leq Eg(Y^*, X^*) \quad \text{para todo } g \in \mathcal{G}_{hr}$$

donde $\mathcal{G}_{hr} = \{g : \Delta g(x, y) \text{ es creciente en } x \text{ para todo } x \geq y\}$ y X^* e Y^* son independientes con $X^* =_{st} X$ y $Y^* =_{st} Y$.

b) $X \leq_{rh} Y$ si y solo si

$$Eg(X^*, Y^*) \leq Eg(Y^*, X^*) \quad \text{para todo } g \in \mathcal{G}_{rh}$$

donde $\mathcal{G}_{rh} = \{g : \Delta g(x, y) \text{ es creciente en } x \text{ para todo } x \leq y\}$ y X^* e Y^* son independientes con $X^* =_{st} X$ y $Y^* =_{st} Y$.

Demostración. (a) Sea $X \leq_{hr} Y$ y asumimos que $g \in \mathcal{G}_{hr}$. Por el Teorema 2.6. podemos suponer sin pérdida de generalidad que X y Y tienen densidades f_X y f_Y . Como en la demostración del Teorema anterior (Teorema 3.2.) y utilizando el Teorema de Fubini obtenemos:

$$\begin{aligned}
 E\Delta g(X^*, Y^*) &= \int_y \int_{x \geq y} \Delta g(x, y) (f_X(x) f_Y(y) - f_X(y) f_Y(x)) dx dy = \\
 &= \int_y \int_{x \geq y} (\bar{F}_X(x) f_Y(y) - f_X(y) \bar{F}_Y(x)) \Delta g(dx, y) dy \leq 0
 \end{aligned}$$

La última desigualdad es por el Teorema 2.5., que justifica que la función que se está integrando es no negativa.

Usando un procedimiento de aproximación y el teorema que se ha especificado al principio, se puede extender el resultado a variables generales pero por motivos de extensión no se dan detalles.

La demostración de la otra implicación es análoga a la del Teorema 3.2. tomando $a < b$ y $g(x, y) = 1$ si $x > b$ e $y > a$ (0 en otro caso).

La prueba de (b) es similar y por lo tanto se omite. \square

Notar que $\Delta g(x, x) = 0$ para todo x y por lo tanto $\mathcal{G}_{lr} \supset \mathcal{G}_{hr} \supset \mathcal{G}_{st}$, y análogamente $\mathcal{G}_{lr} \supset \mathcal{G}_{rh} \supset \mathcal{G}_{st}$. Así, tenemos otra posibilidad de demostrar los Teoremas 2.7. y 2.12. del capítulo 2.

En el siguiente teorema vamos a usar la notación

$$\mathcal{G}_{hr}^1 = \{g : g(x, y) \text{ y } \Delta g(x, y) \text{ son crecientes en } x \text{ para todo } x \leq y\}.$$

Teorema 3.4. Sean X e Y variables aleatorias independientes.

(a) Si $X \leq_{lr} Y$ entonces $g(X, Y) \leq_{st} g(Y, X)$ para todo $g \in \mathcal{G}_{lr}$.

(b) Si $X \leq_{hr} Y$ entonces $g(X, Y) \leq_{icx} g(Y, X)$ para todo $g \in \mathcal{G}_{hr}^1$.

Demostración. (a) Supongamos que $g \in \mathcal{G}_{lr}$ y sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ creciente. Tenemos que demostrar que la composición $f \circ g$ está también en \mathcal{G}_{lr} . Ahora $g \in \mathcal{G}_{lr}$ se cumple si y solo si $g(x, y) \geq g(y, x)$ para todo $x \geq y$. Por tanto $f(g(x, y)) \geq f(g(y, x))$ para todo $x \geq y$, y así $f \circ g \in \mathcal{G}_{lr}$. Entonces, por el Teorema 3.2., para toda f creciente se verifica $Ef(g(X, Y)) \leq Ef(g(Y, X))$, y por el Teorema 2.2., tenemos el resultado.

(b) Tenemos que demostrar que $g \in \mathcal{G}_{hr}^1$ y que f sea creciente convexa implican $f \circ g \in \mathcal{G}_{hr}$. Para ello, fijamos $x' \geq x \geq y$, y sea $\delta = g(x, y) - g(y, x)$. Para $g \in \mathcal{G}_{hr}^1$ tenemos $g(x', y) \geq g(x, y)$ y $\Delta g(x', y) \geq \Delta g(x, y)$, o equivalentemente

$$g(x', y) - \delta \geq g(y, x'). \quad (3.2)$$

Para f creciente convexa esto implica

$$\begin{aligned} \Delta f(g(x, y)) &= f(g(x, y)) - f(g(x, y) - \delta) \\ &\leq f(g(x', y)) - f(g(x', y) - \delta) \\ &\leq f(g(x', y)) - f(g(y, x')) \\ &= \Delta f(g(x', y)) \end{aligned}$$

y por tanto $f \circ g \in \mathcal{G}_{hr}$. Entonces, por el Teorema 3.3.(a), para toda f creciente convexa se verifica $Ef(g(X, Y)) \leq Ef(g(Y, X))$ y por la definición de orden convexo creciente, tenemos el resultado. \square

Volvamos al problema sencillo de programación propuesto al principio de este capítulo, es decir, ¿bajo qué condiciones podemos demostrar que $2X + Y \preceq X + 2Y$ para una relación de orden estocástico apropiada \preceq ? Por el teorema anterior (Teorema 3.4.) podemos deducir inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 3.5. Sean X e Y variables aleatorias independientes.

a) Si $X \leq_{lr} Y$ entonces $2X + Y \leq_{st} X + 2Y$.

b) Si $X \leq_{hr} Y$ entonces $2X + Y \leq_{icx} X + 2Y$.

Demostración. (a) Supongamos que $X \leq_{lr} Y$. Tomamos $g(x, y) = 2x + y$, veamos si $g \in \mathcal{G}_{lr}$, es decir, veamos si $\Delta g(x, y) \geq 0$ para todo $x \geq y$: $\Delta g(x, y) = g(x, y) - g(y, x) = 2x + y - (2y + x) = x - y$ que efectivamente es ≥ 0 si $x \geq y$. Luego por el Teorema 3.4.(a) tenemos que $2X + Y \leq_{st} X + 2Y$.

(b) Supongamos que $X \leq_{hr} Y$. Tenemos que ver que $g(x, y) = 2x + y \in \mathcal{G}_{hr}^1$. Como $\Delta g(x, y) = x - y$, se tiene que tanto $g(x, y)$ como $\Delta g(x, y)$ son crecientes en x , y se verifica la propiedad. Luego por el Teorema 3.4.(b) tenemos que $2X + Y \leq_{icx} X + 2Y$. \square

Capítulo 4

Aplicaciones en problemas de selección de carteras

La dominancia estocástica (SD) o, en la terminología de este trabajo, la ordenación estocástica, es una herramienta muy útil en diversas áreas de la economía y las finanzas. El propósito de este capítulo es presentar algunos resultados de las relaciones de ordenación estocástica que son útiles para muchos problemas de selección de carteras. El problema de seleccionar una cartera de inversión tiene como objetivo determinar qué cantidad hemos de invertir en cada activo de manera satisfactoria para el inversor, teniendo en cuenta la incertidumbre asociada al comportamiento de los mercados financieros. En particular, las caracterizaciones bivariantes de las relaciones de ordenación estocástica introducidas en el capítulo anterior son una poderosa herramienta para problemas de demanda y de efecto de desplazamiento de carteras óptimas, estos problemas serán introducidos más adelante en la sección 4.2.

4.1. Introducción

En primer lugar, vamos a introducir algunos conceptos que aparecen a lo largo del capítulo. La función de utilidad en términos económicos es una función matemática que representa el grado de satisfacción que obtiene un consumidor cuando disfruta de una determinada cantidad de bienes o servicios. Suelen ser funciones cóncavas (según nuestra definición) y las denotamos como $u(x)$. La esperanza de una función de utilidad desempeña un papel crucial en el análisis de riesgo, ya que proporciona una medida cuantitativa del valor promedio de la utilidad de una inversión. Esto ayuda a los individuos y las empresas a tomar decisiones considerando el riesgo asociado a diferentes opciones. Además, recordamos que un inversor con aversión al riesgo es una persona que prefiere inversiones que tengan una menor variabilidad.

Supongamos ahora que un inversor tiene posibilidad de invertir en dos activos financieros diferentes. X e Y representan las ganancias (aleatorias) obtenidas por unidad monetaria en cada activo. Todo inversor con aversión al riesgo prefiere X a Y cuando $E[u(X)] \geq E[u(Y)]$ para cualquier función de utilidad cóncava $u(x)$. ($X \geq_{cv} Y$, X es mayor o igual que Y en orden cóncavo (recuérdese que entonces $X \leq_{cx} Y$ y por el Corolario 2.14. (b), $Var(X) \leq Var(Y)$)).

Supongamos ahora que tenemos oportunidad de invertir en dos activos. X e Y son las ganancias aleatorias en cada uno y k es la proporción a invertir en el primer activo. El problema de selección de carteras (portfolio selection problem) para una función de utilidad cóncava es el siguiente:

$$(PS) \quad \max_{k \in [0,1]} E[u(kX + (1-k)Y)],$$

Obsérvese que lo que se trata en la expresión anterior es de buscar k , la proporción a invertir en el primer activo para optimizar la utilidad esperada de la inversión.

Rothschild y Stiglitz (1971) [12] demostraron que, si X e Y son independientes y $X =_{st} Y$, entonces la proporción óptima k^* es $\frac{1}{2}$ para cualquier función de utilidad cóncava $u(x)$. Observar que por ser $u(x)$ cóncava:

$$E[u(kX + (1-k)Y)] \geq E[ku(X) + (1-k)u(Y)] = kE[u(X)] + (1-k)E[u(Y)].$$

Teniendo en cuenta este resultado, es natural esperar que si $X \geq_{cv} Y$ y X e Y son independientes, entonces la proporción óptima debería ser igual o superior a $\frac{1}{2}$, puesto que $Eu(X) \geq Eu(Y)$. Sin embargo, el resultado no es cierto y se han hecho varios intentos para obtener condiciones suficientes para este resultado. Por ejemplo, Hadar y Seo (1988) [4] acotaron la clase de funciones de utilidad para dar una condición necesaria y suficiente para $k^* \geq \frac{1}{2}$.

Shanthikumar y Yao (1991) [15] desarrollaron la caracterización bivalente de algunas relaciones de ordenación estocástica. Debido al carácter bivalente del problema de selección de carteras (PS), la caracterización bivalente de las relaciones de ordenación estocástica parece bastante útil para este tipo de problemas. De hecho, podemos demostrar (véase el Teorema 3.1.) la siguiente afirmación:

Para variables aleatorias independientes X e Y , $X \geq_{cv} Y$ si y solo si $E[\Delta g(X, Y)] \geq 0$ para todo $g(x, y)$ tal que $\Delta g(x, y)$ es cóncava en x para cada y , donde $\Delta g(x, y) = g(x, y) - g(y, x)$ con $x, y \in \mathbb{R}$, que es otra caracterización de $X \geq_{cv} Y$.

4.2. Formulación del problema

En esta sección vamos a formular explícitamente los problemas de interés en este capítulo utilizando algunas funciones bivariantes. Asumimos que las v.a. consideradas tienen esperanzas finitas. Además, $u(x)$ (función de utilidad) es dos veces diferenciable. Para simplificar la notación, a partir de este momento fijaremos una variable aleatoria Z definida en la recta real \mathbb{R} . Para la variable aleatoria X , que puede depender de Z , denotaremos

$$\phi_X = E[u(kX + (1-k)Z)], \quad k \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Supongamos que el inversor se enfrenta al problema de maximización

$$(GPS) \quad \max_{k \in S} \phi_X(k),$$

donde $S \subset \mathbb{R}$ denota alguna restricción. Normalmente, si no se permiten las ventas en corto (venta de una acción que no es propiedad del vendedor), entonces $S = [0, 1]$ de modo que el problema (GPS) se reduce al problema (PS) propuesto anteriormente, o $S = \mathbb{R}$ si no se impone ninguna restricción. Denotamos por k_X a la solución óptima del problema (GPS).

Los problemas que se consideran frecuentemente son los siguientes:

(P1) ¿Bajo qué condiciones se cumple $k_X \geq \frac{1}{2}$?

(P2) ¿Bajo qué condiciones para las variables X e Y se cumple $k_X \geq k_Y$?

El problema (P1) se denomina problema de demanda y $k_X \geq \frac{1}{2}$ significa que X es más demandado que Z . El problema (P2) se denomina problema de efecto de desplazamiento y $k_X \geq k_Y$ significa que el desplazamiento de Y a X , manteniendo Z fijo, disminuye la demanda de Z .

En el problema de selección de cartera (GPS), la diferenciación de (4.1) con respecto a k da como resultado

$$\phi'_X(k) = E[(X - Z)u'(kX + (1-k)Z)] \quad (4.2)$$

y

$$\phi''_X(k) = E[(X - Z)^2 u''(kX + (1-k)Z)] \quad (4.3)$$

Si la función de utilidad $u(x)$ es cóncava, es decir, $u''(x) \leq 0$, se deduce de (4.3) que ϕ_X es cóncava en k . Por lo tanto, si este es el caso, la proporción óptima k_X se alcanza en algún k para el que $\phi'_X(k) = 0$. (En todo momento elegimos k_X como el máximo de $\phi_X(k)$). Esto significa que, para estudiar los problemas (P1) y (P2), la función definida por

$$f(x; z, k) = (x - z)u'(kx + (1 - k)z) \tag{4.4}$$

desempeña un papel esencial.

Ahora, para dos v.a. X y Y que pueden ser dependientes entre sí y para una función bivalente $g(x, y)$, consideremos si

$$E[\Delta g(X, Y)] \geq 0. \tag{4.5}$$

Veamos que los problemas enunciados al principio de la sección pueden reducirse a problemas de la forma de (4.5). Por ejemplo, para el problema de demanda (P1), definimos

$$g(x, y) = xu' \left(\frac{x+y}{2} \right), \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{4.6}$$

y así,

$$\Delta g(x, y) = g(x, y) - g(y, x) = xu' \left(\frac{x+y}{2} \right) - yu' \left(\frac{x+y}{2} \right) = (x - y)u' \left(\frac{x+y}{2} \right), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

de forma que, usando (4.2) obtenemos:

$$\phi'_X \left(\frac{1}{2} \right) = E \left[(X - Z)u' \left(\frac{X+Z}{2} \right) \right] = E[\Delta g(X, Z)].$$

Si (4.5) se cumple sustituyendo Y por Z , entonces $\phi'_X \left(\frac{1}{2} \right) \geq 0$. Por lo tanto, si $u(x)$ es cóncava, entonces la proporción óptima k_X no puede ser inferior a $\frac{1}{2}$.

La reducción de (P2) a la forma (4.5) es más complicada y la estudiamos en el siguiente teorema. Notar que, en este teorema, la concavidad de $u(x)$ no se supone.

Teorema 4.1. *Supongamos que*

$$E[u(kX + (1 - k)Z) \mid X = x] = E[u(kY + (1 - k)Z) \mid Y = x] := v(k, x), \quad k, x \in \mathbb{R}. \tag{4.7}$$

Para $k_1 < k_2$ definimos

$$g(x, y) = v(k_2, x) + v(k_1, y) \tag{4.8}$$

Si (4.5) se cumple para dicha g y todo $k_1 < k_2$, entonces la proporción óptima k_X de X no puede ser inferior a la de Y .

Demostración. Para que se cumpla $k_X \geq k_Y$ es suficiente que

$$E[v(k_2, Y)] \geq E[v(k_1, Y)] \quad \text{implique} \quad E[v(k_2, X)] \geq E[v(k_1, X)]. \tag{4.9}$$

Para comprobar esto, supongamos que $k_X < k_Y$ y que (4.9) se cumple. Notemos que $E[v(k_Y, Y)] \geq E[v(k_X, Y)]$, ya que k_Y es óptimo para Y y por (4.9) $E[v(k_Y, X)] \geq E[v(k_X, X)]$. Pero como k_X es óptimo para X , se tiene $k_X \geq k_Y$ por la definición de proporción óptima, lo que contradice la suposición de que $k_X < k_Y$, lo que comprueba que (4.9) es condición suficiente. Ahora bien, para que (4.9) sea cierta, basta con que

$$E[v(k_2, X)] - E[v(k_1, X)] \geq E[v(k_2, Y)] - E[v(k_1, Y)]$$

o, equivalentemente,

$$E[g(X, Y)] \geq E[g(Y, X)],$$

que demuestra el teorema. □

Corolario 4.2. Si X e Y son independientes de Z , se verifica (4.7).

Demostración. Es obvio, ya que en este caso, por independencia $v(k, x) = E[u(kx + (1 - k)Z)]$. \square

Si X y Y son mutuamente independientes, utilizaremos la notación $X \perp Y$. Durante todo el capítulo, los términos creciente y decreciente se utilizan en sentido débil, es decir, para significar no decreciente y no creciente, respectivamente. Del mismo modo, los términos cóncavo y convexo se utilizan en sentido débil. Para dos v.a. X y Y que pueden ser dependientes, denotamos por X^* y Y^* las v.a. tales que $X^* \perp Y^*$, $X^* =_{st} X$, y $Y^* =_{st} Y$. La razón por la que introducimos X^* y Y^* queda clara más adelante.

4.3. Caracterización de las relaciones de dominancia estocástica

En el capítulo 2 de este trabajo han sido introducidos varios órdenes estocásticos. Cabe destacar que, en términos financieros, el orden estocástico usual se conoce como dominancia estocástica de primer orden y el orden estocástico cóncavo creciente se conoce como dominancia estocástica de segundo orden. El orden estocástico cóncavo se conoce como contracción que preserva la media. El resto de órdenes estocásticos considerados en este trabajo tienen la misma notación en terminología financiera. Además, no son tan comunes en artículos económicos pero si son importantes en los problemas de selección de carteras como veremos posteriormente.

Llegados a este punto, puede ser útil enunciar más propiedades intrínsecas de las relaciones de ordenación estocástica. Stoyan (1983) [16] propuso las siguientes propiedades que se desea que posea la ordenación estocástica \succ : Para variables aleatorias X y Y ,

(C) $X \succ Y$ implica $X + Z \succ Y + Z$ para cualquier v.a. $Z \perp X, Y$.

(R) Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \geq b$, se tiene $a \succ b$.

(M) $X \succ Y$ implica $aX \succ aY$ para cualquier $a > 0$.

(E) $X \succ Y$ implica $E[X] \geq E[Y]$.

La propiedad (C) se llama propiedad de convolución. Observamos que cualquier número real puede considerarse como una v.a. degenerada, que es independiente de cualquier otra v.a. Por lo tanto, la propiedad (C) implica que:

(C') $X \succ Y$ implica $X + c \succ Y + c$ para cualquier número real c .

La propiedad (R) se denomina propiedad de los números reales, (M) propiedad de la multiplicación, y (E) propiedad de la esperanza.

Para algunas de las relaciones de ordenación estocástica, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.3. (1) El orden estocástico usual (st) satisface todas las propiedades.

(2) El orden estocástico cóncavo (cv) satisface (C) y (M). La propiedad (E) se cumple con una igualdad.

(3) El orden estocástico cóncavo creciente (icv) satisface todas las propiedades.

Nota. Las propiedades (C) y (E) las hemos visto para el orden convexo. Para el orden cóncavo son inmediatas teniendo en cuenta que $X \leq_{cv} Y \Leftrightarrow Y \leq_{cx} X$. La propiedad (C) para el orden estocástico usual se obtendría de forma análoga a la demostración del Teorema 2.15. (a), sustituyendo la palabra convexa por creciente. La propiedad (M) se puede verificar trivialmente a partir de la definición.

En el capítulo 3 se ha definido la caracterización bivalente de estas relaciones de orden estocástico. En la siguiente subsección se presentan algunas aplicaciones directas de estos resultados.

4.3.1. Algunas aplicaciones directas

Las propiedades estudiadas en los capítulos 2 y 3 son especialmente útiles para el problema del efecto de desplazamiento (P2). Denotamos por $X_{|Z=z}$ la v.a. X condicionada a $\{Z = z\}$. Si $X \perp Z$, la v.a. condicional $X_{|Z=z}$ es igual a la propia X .

Teorema 4.4. *Sea $\geq_{\mathcal{F}}$ un orden estocástico integral con generador \mathcal{F} y supongamos que la función de utilidad u es cóncava. En (P2) con $S \subset \mathbb{R}$, si $X_{|Z=z} \geq_{\mathcal{F}} Y_{|Z=z}$ para todo z , y si $f(\cdot; z, k)$ en (4.4) pertenece a \mathcal{F} para cada z y k , entonces $k_X \geq k_Y$. Además, si la ordenación estocástica $\geq_{\mathcal{F}}$ admite las propiedades (M) y (C'), si $k_Y \geq 0$, y si $u \in \mathcal{F}$, entonces $\phi_X(k_X) \geq \phi_Y(k_Y)$.*

Demostración. Puesto que, a partir de (4.2),

$$\phi'_X(k) = E[f(X; Z, k)] = E[E[f(X; Z, k) | Z]],$$

si $X_{|Z=z} \geq_{\mathcal{F}} Y_{|Z=z}$ y $f(\cdot; z, k) \in \mathcal{F}$ para todo z y k , entonces $\phi'_X(k) \geq \phi'_Y(k)$ para todo k . Por lo tanto

$$\phi'_X(k_Y) \geq \phi'_Y(k_Y) = 0$$

de modo que $k_X \geq k_Y$ ya que $\phi'_X(k)$ es decreciente en k . Para demostrar la segunda parte del teorema, observamos que las propiedades (M) y (C') implican

$$k_Y X_{|Z=z} + (1 - k_Y)z \geq_{\mathcal{F}} k_Y Y_{|Z=z} + (1 - k_Y)z,$$

en cuyo caso $\phi_X(k_Y) \geq \phi_Y(k_Y)$ porque $u \in \mathcal{F}$. Como $\phi_X(k_X) \geq \phi_X(k_Y)$, el resultado se sigue. \square

El siguiente lema es necesario para las posteriores demostraciones. La demostración es muy sencilla y puede consultarse en Kijima and Ohnishi (1996) [7] (Lema A.1., página 272).

Lema 4.5. *Sea u una función de utilidad y sea $f(x; z, k)$ la función definida en (4.4). Si $u''(x)$ existe, lo siguiente es equivalente:*

- (a) $f(x; z, k)$ es creciente en $x \in \mathbb{R}$ para cualquier $z, k \in \mathbb{R}$.
- (b) $f(x; z, k)$ es creciente en $x \in \mathbb{R}$ para cualquier $z \in \mathbb{R}$ y algún $k \neq 0$.
- (c) $xu'(x+z)$ es creciente en $x \in \mathbb{R}$ para cualquier $z \in \mathbb{R}$.

El siguiente resultado es una generalización de los teoremas 1, 2 y 3 de Hadar and Seo (1990) [5], que se deduce fácilmente del Teorema 4.4.

Corolario 4.6. *Supongamos que la función de utilidad u es cóncava.*

- (i) *En (P2) con $S \subset \mathbb{R}$, tenemos $k_X \geq k_Y$ si $X_{|Z=z} \geq_{st} Y_{|Z=z}$ y $xu'(x+z)$ es creciente en x para todo z .*
- (ii) *En (P2) con $S \subset [0, \infty)$, tenemos $k_X \geq k_Y$ si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*
 - (a) $X_{|Z=z} \geq_{cv} Y_{|Z=z}$ y $xu'(x+z)$ es cóncava en x para todo z .
 - (b) $X_{|Z=z} \geq_{icv} Y_{|Z=z}$ y $xu'(x+z)$ es creciente y cóncava en x para todo z .

Demostración. Si $xu'(x+z)$ es creciente en x para todo z entonces por el Lema 4.5. $f(\cdot; z, k)$ es creciente para cada z y k . Por lo tanto, si además $X_{|Z=z} \geq_{st} Y_{|Z=z}$, entonces por el Teorema 4.4. tenemos que $k_X \geq k_Y$, así queda demostrada la parte (1). La parte (2a) se sigue de forma análoga y la parte (2b) es una combinación de estos dos resultados. \square

Como se demostró en la sección 4.2, el problema del efecto de desplazamiento (P2) puede abordarse mediante la caracterización bivalente.

Teorema 4.7. *Sea \mathcal{G} una clase de funciones bivalentes. Asumamos que se verifica la hipótesis del Teorema 4.1. y sea $g(x, y)$ como en (4.8), es decir, $g(x, y) = v(k_2, x) + v(k_1, y)$. En (P2) con $S \subset R$, si se verifica que $X \geq_{\mathcal{F}} Y$ para un orden estocástico \mathcal{F} que admite una caracterización bivalente mediante \mathcal{G} y $g \in \mathcal{G}$ para todo $k_1 < k_2$, entonces $k_X \geq k_Y$.*

Demostración. Como hemos visto en el Teorema 4.1., basta con probar (4.9). Por hipótesis tenemos que

$$E[g(X^*, Y^*)] \geq E[g(Y^*, X^*)].$$

Es decir, por linealidad de la esperanza tenemos que

$$E[v(k_2, X)] + E[v(k_1, Y)] \geq E[v(k_2, Y)] + E[v(k_1, X)].$$

Reordenando los términos se obtiene

$$E[v(k_2, X)] - E[v(k_1, X)] \geq E[v(k_2, Y)] - E[v(k_1, Y)],$$

que es el resultado deseado. □

Finalmente, en este resultado se caracteriza (P1) cuando $X \geq_{st} Z$.

Proposición 4.8. *Supongamos que la función de utilidad $u(x)$ es cóncava y consideremos el problema de demanda (P1) con $S \subset R$. Si X y Z son v.a. tales que $X \geq_{st} Z$, entonces $k_X \geq \frac{1}{2}$ para todo X y Z si y solo si $xu'(x+y)$ es creciente en x para todo y .*

Demostración. Sea $g(x, y)$ como en (4.6), es decir, $g(x, y) = xu'(\frac{x+y}{2})$ de modo que

$$\phi'_X\left(\frac{1}{2}\right) = E[\Delta g(X, Z)]$$

Entonces, por el Lema 4.5., $xu'(x+y)$ es creciente en x para cualquier y si

$$f(x; z, 1/2) = (x-z)u'\left(\frac{x+z}{2}\right) = \Delta g(x, z)$$

es creciente en x para cualquier $z \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, si $X \geq_{st} Z$, entonces como $g \in \mathcal{G}_{st}$, tenemos por el Teorema 3.1.

$$\phi'_X(1/2) = E[\Delta g(X, Z)] \geq 0$$

lo que implica $k_X \geq 1/2$ ya que u es cóncava. La inversa se deduce del Teorema 4.2. en Kijima y Onishi. □

Observación 4.1. Hadar y Seo (1988) [4] demostraron el resultado anterior en su Teorema 4 bajo la hipótesis adicional de que X y Z son v.a. no negativas.

Bibliografía

- [1] ABADÍAS, L., 2022, Apuntes de la asignatura Integral de Lebesgue.
- [2] BILLINGSLEY, P., 1995, *Probability and Measure*, John Wiley and Sons.
- [3] CEBRIÁN, A. C., LÓPEZ, F. J., 2020, Apuntes de la asignatura Cálculo de probabilidades.
- [4] HADAR, J., SEO, T. K. , 1988, Asset Proportions in Optimal Portfolios, *Rev. Econ. Stud.*
- [5] HADAR, J., SEO, T. K. , 1990, The Effects of Shifts in a Return Distribution on Optimal Portfolios, *Int. Econ. Rev.*, 31, 721-736.
- [6] INGERSOLL, J. E., JR., 1987, *Theory of Financial Decision Making*, Totowa, NJ: Rowman and Littlefield.
- [7] KIJIMA, M., OHNISHI, M., 1996, Portfolio selection problems via the bivariate characterization of stochastic dominance relations, *Mathematical Finance* 6, pg. 237-277.
- [8] MARSHALL A., OLKIN, I., 2007, *Life Distributions*, Springer.
- [9] MÜLLER. A., STOYAN. D., 2002, *Comparison methods for stochastic models and risks*, John Wiley and Sons.
- [10] NANDA, A. K., SHAKED, M., 2002, The hazard Rate and the Reversed Hazard Rate Orders, with Applications to Order Statistics, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*.
- [11] ROTHSCHILD, M., STIGLITZ, J. E. , 1970, Increasing Risk. I. A Definition, *Journal of Economic Theory*, Vol. 2, No. 3.
- [12] ROTHSCHILD, M., STIGLITZ, J. E., 1971, Increasing Risk II: Its Economic Consequences, *Journal of Economic Theory*.
- [13] SANGÜESA, C., SANZ, G., 2023, Apuntes de la asignatura Introducción a la probabilidad y la estadística.
- [14] SHAKED, M. SHANTHIKUMAR, J.G., 1994, *Stochastic Orders and their Applications*, Academic Press.
- [15] SHANTHIKUMAR, J. G., YAO, D. D., 1991, Bivariate Characterization of Some Stochastic Order Relations, *Adv. Appl. Probab.*, 23.
- [16] STOYAN, D., 1983, *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models*, John Wiley and Sons.

Apéndice A

Resumen relaciones de ordenación estocástica univariantes

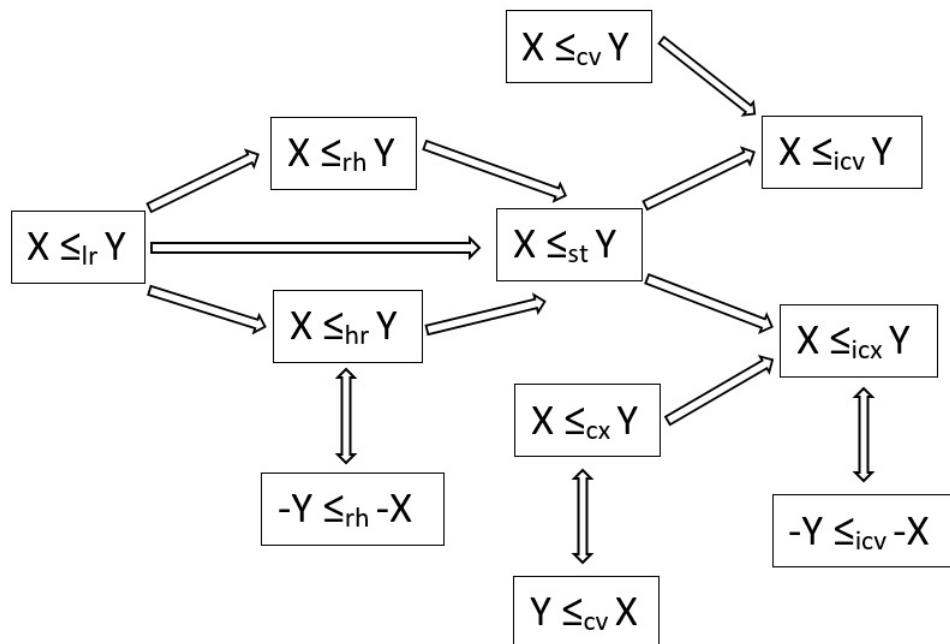


Figura A.1: Implicaciones de las relaciones de ordenación estocástica univariantes.