

Trabajo de Fin de Grado

# Predicción del avance de coladas de lava mediante simulación numérica

*Grado en Física*

**Autor:** José Ortega Moya

**Directores:** Pilar García Navarro y Javier Fernández Pato  
Departamento de Ciencia y Tecnología de Materiales y Fluidos

# Índice

<b>1. Introducción y objetivos</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelo</b>	<b>2</b>
2.1. Ecuaciones del modelo . . . . .	2
2.2. Modelos reológicos . . . . .	4
2.2.1. Dependencia de la viscosidad y el esfuerzo umbral con la temperatura . . . . .	5
2.2.2. Relaciones de cierre para flujos promediados . . . . .	6
2.3. Modelo de transferencia de calor para el flujo promediado . . . . .	9
2.4. Perfiles de temperatura aproximados . . . . .	10
2.4.1. Perfil lineal a tramos . . . . .	10
2.4.2. Perfil calculado con difusión de temperatura . . . . .	11
<b>3. Simulación 1D</b>	<b>13</b>
3.1. Método numérico . . . . .	13
3.2. Casos test . . . . .	14
3.2.1. Test 1: Rotura de presa sobre fondo seco horizontal . . . . .	14
3.2.2. Test 2: Propagación sobre plano inclinado . . . . .	16
<b>4. Simulación 2D: Integración en PEKA2D</b>	<b>19</b>
4.1. Casos test . . . . .	19
4.1.1. Test 3: Basalto fundido sobre un plano inclinado . . . . .	19
4.1.2. Test 4: Volcán de La Palma . . . . .	20
<b>5. Conclusiones</b>	<b>23</b>
<b>6. Referencias</b>	<b>24</b>
<b>A. Derivación de las ecuaciones del flujo promediado</b>	<b>26</b>
A.1. Análisis dimensional de las ecuaciones . . . . .	26
A.2. Condiciones de contorno . . . . .	27
A.3. Ecuaciones promediadas . . . . .	28
A.3.1. Ecuación de continuidad . . . . .	28
A.3.2. Ecuaciones del momento lineal en $x$ e $y$ . . . . .	29
<b>B. Relaciones de clausura para el esfuerzo basal</b>	<b>31</b>

C. Solver de Riemann para flujos térmicos.	32
D. Más detalles del volcán de La Palma	35

# 1. Introducción y objetivos

La predicción de la extensión y alcance de flujos de lava volcánica es un problema complejo que se puede abordar con diferentes métodos, principalmente diferenciados en métodos deterministas y probabilísticos, los primeros están basados en la resolución numérica de las ecuaciones que describen los flujos de lava, mientras que los segundos emplean simulación estocástica a partir de los datos de la topografía de una región, estos son computacionalmente menos costosos, pero tienen ciertas limitaciones, como su dificultad para predecir flujos ladera arriba. En este trabajo se explorará un método determinista consistente en la simulación de lava descrita por ecuaciones promediadas en la dirección vertical, continuando un trabajo previo del Grupo de Tecnologías Fluidodinámicas (TFD) publicado en [1]. Este tipo de modelos son ampliamente empleados para la simulación numérica de flujos de agua en lámina libre bajo el nombre de ecuaciones de aguas poco profundas (*Shallow water equations*, SW) o de Saint-Venant ([2, 3, 4]). Se han realizado otros estudios dirigidos a aplicar modelos promediados a flujo de lava u otros con reología dependiente de la temperatura [5, 6, 7, 8], el modelo aquí empleado se distingue porque incorpora la transferencia de temperatura mediante la ecuación de la energía interna y la acopla con la dinámica mediante la dependencia de la densidad y la reología con esta magnitud.

En este contexto, el estudio de las propiedades reológicas es de vital importancia. En [9] se hace una revisión de las medidas publicadas en numerosos artículos para diferentes volcanes y se observa que la mayoría de las viscosidades se sitúan entre los 100 Pa·s y los  $10^5$  Pa·s, con incertidumbres altas y una alta variabilidad entre diferentes volcanes. Esto nos indica que para cada volcán, se tendrán que calibrar los parámetros con datos de erupciones anteriores. Igual relevancia tiene la transferencia de calor, para la cual se han planteado numerosos modelos, desde los más sencillos ([10]) que sólo incluyen convección natural y radiación en la superficie y conducción en el fondo hasta los más complejos ([11]) que tienen en cuenta diversos mecanismos como convección natural y forzada, radiación, lluvia, calor latente de cambio de fase... En general, la evidencia experimental [12, 13] apunta a que el mecanismo principal de transferencia de calor con el exterior es la convección, además de sugerir que en el interior de la lava se produce principalmente por conducción. En este trabajo consideraremos un modelo sencillo que no diferencia entre corteza sólida y lava líquida, pero que incluye los principales mecanismos de transferencia de calor.

El objetivo principal de este trabajo es tratar de ampliar el modelo empleado en [1] para introducir la influencia de un perfil vertical de temperatura no uniforme en fluidos no Newtonianos. Se quiere así evaluar los efectos que esto tiene en el flujo y se conseguirá mediante la modificación de los modelos reológicos, responsables del acoplamiento entre la dinámica y la temperatura. Para ello se reconstruirá la dependencia del esfuerzo en el fondo con la velocidad promedio y se plantea la tarea de implementar los métodos de simulación numérica desarrollados por el grupo TFD para la programación de un código en C que resuelva las ecuaciones en el caso unidimensional y finalmente incorporar el modelo modificado en el código para simulación en dos dimensiones desarrollado por el grupo (PEKA2D [14]). El código desarrollado para este trabajo puede encontrarse en [https://github.com/JoseOrtega51/LAVAFL0W1D\\_TFG](https://github.com/JoseOrtega51/LAVAFL0W1D_TFG).

## 2. Modelo

El modelo empleado consta de diferentes partes: las ecuaciones a resolver, los modelos reológicos y su integración en el flujo promediado, la transferencia de calor y el perfil de temperatura, que a diferencia de los trabajos previos, se supondrá no uniforme.

### 2.1. Ecuaciones del modelo

La derivación de las ecuaciones se realiza promediando las ecuaciones de Navier-Stokes en la vertical, el caso de la conservación de la masa y cantidad de movimiento se detalla en el anexo A. La ecuación de conservación de la masa resultante es:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho h U) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho h V) = 0, \quad (2.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad promedio,  $h$  es la altura del fluido respecto al fondo y  $(U(x, y), V(x, y))$  son las componentes  $x$  e  $y$  del vector velocidad promediadas en la vertical:

$$U(x, y) = \int_{z_b}^{z_s} u(z, y, z) dz \quad V(x, y) = \int_{z_b}^{z_s} v(z, y, z) dz, \quad (2.2)$$

siendo  $z_s = z_b + h$  la superficie libre. Las ecuaciones del momento en dirección  $x$  e  $y$  son:

$$\frac{\partial(\rho h U)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho h U^2 + \frac{1}{2} g \rho h^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho h UV) = -g \rho h \frac{\partial z_b}{\partial x} - \tau_{bx}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial(\rho h V)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho h UV) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho h V^2 + \frac{1}{2} g \rho h^2 \right) = -g \rho h \frac{\partial z_b}{\partial y} - \tau_{by}, \quad (2.4)$$

siendo  $z_b$  la altura del fondo y  $(\tau_{bx}, \tau_{by})$  las componentes del vector de esfuerzos de resistencia sobre este, para las cuales se debe hallar una expresión adecuada.

Estudiemos la ecuación de la energía interna, partimos de la ecuación completa:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) = -\nabla \cdot \mathbf{f}_q + \rho q - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v} : \boldsymbol{\tau}, \quad (2.5)$$

donde  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  es el campo de velocidades,  $p$  es la presión,  $\boldsymbol{\tau}$  es el tensor de esfuerzos viscosos,  $e$  es la energía interna,  $\mathbf{f}_q$  son los flujos de calor por conducción y  $q$  es el intercambio de calor volumétrico.  $\nabla \mathbf{v} : \boldsymbol{\tau}$  representa la disipación viscosa.

Aplicaremos las siguientes hipótesis: toda la transferencia de calor con el exterior se realiza a través de la superficie libre y el fondo, luego  $q = 0$ ; los efectos de la disipación viscosa en la energía se consideran despreciables, por lo que  $\nabla \mathbf{v} : \boldsymbol{\tau} \approx 0$  y, finalmente, se desprecia la difusión horizontal de calor, por lo que  $\nabla \cdot \mathbf{f}_q \approx \frac{\partial f_q^z}{\partial z} \equiv \frac{\partial f_q}{\partial z}$ , esto se justifica porque el gradiente de temperaturas en la vertical será muy superior al de la horizontal. Finalmente, de la ecuación de la conservación de la masa se deduce que  $\nabla \cdot \mathbf{v} = (1/\rho)/(D\rho/Dt)$ , gracias a los datos experimentales presentados en [15] sabemos que el orden de la variación de densidad máxima es  $\delta\rho/\rho \lesssim 10^{-2}$ , por lo que despreciaremos este término también.

Además consideraremos que la energía sigue una ecuación de estado simple de la forma  $e(T) = c_P T$ , donde  $c_P$  es el calor específico, esto es aceptable porque en los líquidos se cumple  $T\delta s \approx \delta e \approx c_P \delta T$  [16], siendo  $s$  la entropía. Aplicando esto, obtenemos

$$\frac{\partial(\rho c_P T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c_P T u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c_P T v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho c_P T w)}{\partial z} = \frac{\partial f_q}{\partial z} \quad (2.6)$$

Integrando a ambos lados entre  $z_b$  y  $z_s$  y aplicando la regla de Leibniz para derivación bajo la integral:

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\rho c_P T)}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} (\rho c_P T) dz - (\rho c_P T)|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial t} + (\rho c_P T)|_{z_b} \underbrace{\frac{\partial z_b}{\partial t}}_{=0} = \\ &= c_P \frac{\partial(\overline{h\rho T})}{\partial t} - (\rho c_P T)|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde se emplea una barra para indicar el promedio vertical:  $\overline{\rho T} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} \rho T dz$ . Por otra parte,

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\rho C_P T u)}{\partial x} dz = c_P \frac{\partial(\overline{h\rho T u})}{\partial x} - (\rho C_P T u)|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + (\rho C_P T u)|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad (2.8)$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\rho C_P T w)}{\partial z} dz = (\rho C_P T w)|_{z_s} - (\rho C_P T w)|_{z_b}, \quad (2.9)$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial f_q}{\partial z} dz = f_q|_{z_s} - f_q|_{z_b} = \dot{Q}. \quad (2.10)$$

Y se procede de manera análoga con el resto de términos, de manera que se obtiene, para el miembro de la izquierda:

$$\begin{aligned} c_P \left( \frac{\partial(\overline{h\rho T})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{h\rho T u})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{h\rho T v})}{\partial y} \right) - (c_P T \rho)|_{z=z_s} \underbrace{\left( \frac{\partial z_s}{\partial t} + u \frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{\partial z_s}{\partial y} - w \right)}_{=0} \Big|_{z=z_s} + \\ + (c_P T \rho)|_{z=z_b} \underbrace{\left( u \frac{\partial z_b}{\partial x} + v \frac{\partial z_b}{\partial y} - w \right)}_{=0} \Big|_{z=z_b}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

En cada uno de los pasos se han aplicado las condiciones de contorno habituales en SW, las cuales se pueden consultar en el anexo A. De esta manera, la ecuación completa es:

$$\frac{\partial(\overline{h\rho T})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{h\rho T u})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{h\rho T v})}{\partial y} = \frac{\dot{Q}}{c_P}. \quad (2.12)$$

Despreciaremos los términos cruzados en los promedios, de manera que aproximaremos  $\overline{\rho T} \approx \overline{\rho} \overline{T}$  y  $\overline{\rho T u} \approx \overline{\rho} \overline{T} \overline{u}$ . Con lo que se llega finalmente a la ecuación de la energía:

$$\frac{\partial(h\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(h\rho T U)}{\partial x} + \frac{\partial(h\rho T V)}{\partial y} = \frac{\dot{Q}}{c_P}, \quad (2.13)$$

donde se ha eliminado la notación con barra por simplicidad, pero se debe recordar que todas las variables son promedios  $T \equiv \overline{T}(x, y) = \int_{z_b}^{z_b+h} T(z, y, z) dz$ .

Si ahora se considera la parte homogénea de la ecuación de la energía

$$\frac{\partial(h\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(h\rho T U)}{\partial x} + \frac{\partial(h\rho T V)}{\partial y} = 0, \quad (2.14)$$

podemos escribir<sup>1</sup>

$$\frac{\partial(hT)}{\partial t} + \frac{\partial(hUT)}{\partial x} + \frac{\partial(hVT)}{\partial y} = -\frac{hT}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \approx 0. \quad (2.15)$$

---

<sup>1</sup>  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left( U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} \right)$  representa la derivada sustancial del flujo promediado.

Justificamos la aproximación final mediante un análisis de órdenes de magnitud, el término de la izquierda de esta ecuación se puede reescribir como  $\frac{D(hT)}{Dt} + hT \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)$ : Comparando el orden de las derivadas sustanciales:

$$\frac{(hT/\rho)(D\rho/Dt)}{(D(hT)/Dt)} \sim \frac{(hT/\rho)U(\partial\rho/\partial x)}{U(\partial(hT)/\partial x)} \sim \frac{(hT/\rho)(\delta\rho/L)}{hT/L} = \frac{\delta\rho}{\rho} \lesssim 10^{-2} \quad (2.16)$$

donde L es una longitud característica. De manera análoga la comparación con el término de la divergencia de  $(U, V)$  llega a lo mismo. El término no homogéneo completa la formulación.

$$\frac{\partial(\rho hT)}{\partial t} = \frac{\dot{Q}}{c_P} \quad (2.17)$$

El modelo aquí empleado [1] toma como hipótesis principal la dependencia de la densidad según un modelo lineal.

$$\rho(T) = \rho_0 + K(T - T_0) \quad (2.18)$$

De acuerdo con [1], y con el fin de simplificar la resolución numérica posterior, es conveniente definir la densidad relativa y temperatura adimensional:

$$r = \frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{K}{\rho_0}(T - T_0), \quad T^\nabla = \frac{K}{\rho_0}(T - T_0) = r - 1. \quad (2.19)$$

De esta manera el sistema hiperbólico completo en función de los parámetros adimensionales  $r$  y  $T^\nabla$  queda como:

$$\frac{\partial(rh)}{\partial t} + \frac{\partial(rhU)}{\partial x} + \frac{\partial(rhV)}{\partial y} = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial(rhU)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( rhU^2 + \frac{1}{2}grh^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho hUV) = -grh \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho_0} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial(rhV)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho hUV) + \frac{\partial}{\partial y} \left( rhV^2 + \frac{1}{2}grh^2 \right) = -grh \frac{\partial z_b}{\partial y} - \frac{\tau_{by}}{\rho_0} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial(hT^\nabla)}{\partial t} + \frac{\partial(hUT^\nabla)}{\partial x} + \frac{\partial(hVT^\nabla)}{\partial y} = 0, \quad (2.23)$$

con la ecuación adicional:

$$\frac{\partial(\rho hT)}{\partial t} = \frac{\dot{Q}}{C_P} \quad (2.24)$$

Además, de forma trivial, se cumple la igualdad

$$h = rh - T^\nabla h \quad (2.25)$$

## 2.2. Modelos reológicos

En esta sección se va a abordar el problema de los modelos constitutivos para describir la reología de los fluidos que finalmente contribuyen mediante el esfuerzo basal en las ecuaciones de cantidad de movimiento. El tensor de esfuerzos en un flujo tiene una componente de presión proporcional a la matriz identidad  $p\mathbf{I}$  y otra de esfuerzos viscosos  $\boldsymbol{\tau}$ , además, según lo expuesto en [17], lo podemos escribir como:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} + \Phi(I_{2D})\mathbf{D}, \quad (2.26)$$

donde  $\mathbf{D}$  es el tensor velocidad de deformación unitaria, dado por  $\mathbf{D} \equiv D_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$ , siendo  $u_i$  la  $i$ -ésima componente del vector velocidad. Además la función  $\Phi$  es una función escalar de  $I_{2D} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{D}^2)$ . Aplicaremos el modelo viscoplástico de Herschel-Bulkley, que afirma que

$$\Phi(I_{2D}) = \frac{\tau_0}{\sqrt{I_{2D}}} + 2K_\Phi(4I_{2D})^{\frac{m-1}{2}}, \quad (2.27)$$

donde  $\tau_0$ ,  $K_\Phi$  y  $m$  son parámetros a determinar. Asumiendo un flujo con componente de velocidad nula en dirección vertical:  $(u(x, y, z), v(x, y, z), 0) = W(z)\mathbf{n}$ , donde el vector unitario  $\mathbf{n} = (n_{ux}, n_{uy}, 0)^T$  marca la dirección y sentido de la velocidad, se puede llegar ([17]) a que el tensor de esfuerzos viscosos tiene la forma:

$$\boldsymbol{\tau} = \tau(z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_{ux} \\ 0 & 0 & n_{uy} \\ n_{ux} & n_{uy} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

donde  $\tau(z)$  es el esfuerzo de corte en la dirección del flujo.

$$\tau(z) = \Phi(I_{2D}) \frac{1}{2} \frac{dW}{dz}, \quad (2.29)$$

$$I_{2D} = \frac{1}{4} \left( \frac{dW}{dz} \right)^2. \quad (2.30)$$

Un fluido Newtoniano es el que sigue una ley reológica más sencilla. Viene determinado por el siguiente valor de los parámetros  $\tau_0 = 0$ ,  $m = 1$  y  $K_\Phi = \mu$  representa la viscosidad dinámica del fluido. De esta manera se recupera la conocida Ley de Newton:

$$\tau(z) = \mu \frac{dW}{dz}. \quad (2.31)$$

Una modificación sobre el modelo de Newton consiste en considerar un esfuerzo umbral mínimo para comenzar a deformar el fluido. Por lo tanto tendremos  $\tau_0 = \tau_y$  y el esfuerzo viscoso queda como:

$$\tau(z) = \tau_y + \mu \frac{dW}{dz}, \quad (2.32)$$

es lo que se conoce como fluido de Bingham.

### 2.2.1. Dependencia de la viscosidad y el esfuerzo umbral con la temperatura

Para modelar los efectos de la temperatura sobre la reología emplearemos la Ley de Andrade para la viscosidad [18, 19, 1]:

$$\mu(T) = A_\mu \exp(B_\mu/T) \quad (2.33)$$

y la formulación para la dependencia del esfuerzo umbral [20, 1]:

$$\tau_y(T) = A_\tau + B_\tau \exp(C_\tau T) \quad (2.34)$$

Para este trabajo necesitamos determinar unos parámetros viscosidad y esfuerzo umbral aparentes factibles y nos fijaremos en las estimaciones de [21] sobre la zona volcánica Oeste de Islandia calculados a partir de observaciones morfológicas asumiendo un modelo de Bingham.

$$\mu = (5,89 \pm 1,12) \cdot 10^3 \text{ Pa}\cdot\text{s} \quad \text{y} \quad \tau_y = (2,10 \pm 0,26) \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

En esta referencia se incluyen también otros valores de viscosidad del orden de  $10^5$  Pa, pero el modelo que se emplea en ese caso es Newtoniano, por lo que es natural que la viscosidad efectiva sea muy superior. Como sólo nos interesa, por el momento, que estos parámetros den un orden de magnitud correcto, pero que no necesariamente representen un caso real, impondremos  $\mu(T = 1500K) = 10^3$  Pa·s y  $\mu(T = 1100K) = 10^4$  Pa·s y para el esfuerzo umbral supondremos  $A_\tau = 0$  e impondremos  $\tau(T = 1500K) = 10^3$  Pa y  $\tau(T = 1100K) = 10^4$  Pa, los parámetros calculados se pueden ver en la tabla 2.1 (Fluido 2), junto con otros parámetros de un fluido arbitrario (Fluido 1), el cual tiene fines ilustrativos.

	$A_\tau$ (Pa)	$B_\tau$ (Pa)	$C_\tau$ (K <sup>-1</sup> )	$A_\mu$ (Pa·s)	$B_\mu$ (K)
Fluido 1	10	2000	-0.02	0.08	1200
Fluido 2	0	$5.6 \cdot 10^6$	$-5.8 \cdot 10^{-3}$	1.77	9500

Tabla 2.1: Parámetros estimados para un fluido arbitrario con fines ilustrativos (Fluido 1) y una posibilidad de lava líquida (Fluido 2).

### 2.2.2. Relaciones de cierre para flujos promediados

Para incorporar estos modelos a las ecuaciones SW de flujo promediado es necesario obtener el esfuerzo basal  $\tau_b$ . Para ello un posible modo de proceder, como se detalla en [17], es el siguiente:

1. Suponer un esfuerzo de corte simple, es decir, un perfil de esfuerzos lineal en  $z$ :

$$\tau(z) = \tau_b \left( 1 - \frac{z - z_b}{h} \right).$$

2. Integrar el perfil de velocidad  $W(z)$  empleando que, por las relaciones 2.30 y 2.29,  $\tau(z)$  es función de  $\frac{dW}{dz}$ .
3. Promediar  $W(z)$  en la vertical y despejar la relación  $\tau_b(\bar{W})$ :

$$\bar{W}(\tau_b, h) = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} W(z; \tau_b, h) dz \implies \tau_b = \mathcal{F}(\bar{W}, h).$$

Nótese que al resolver el sistema de nuestro interés, identificaremos  $\bar{W} = |(U, W)|$ . Si aplicamos al caso Newtoniano este procedimiento para estimar el esfuerzo basal asumiendo temperatura uniforme (ver apéndice B) se obtiene:

$$\tau_b = \frac{3\mu\bar{W}}{h}. \quad (2.35)$$

Para el caso de un fluido Bingham obtenemos una ecuación de tercer grado en  $\tau_b$  (ver apéndice B), la cual es resoluble de manera analítica.

$$\tau_y^3 - 3 \left( \tau_y + 2\frac{\mu|\bar{W}|}{h} \right) \tau_b^2 + 2\tau_b^3 = 0, \quad (2.36)$$

que se reduce al caso Newtoniano para  $\tau_y = 0$ .

Una primera aproximación para introducir las dependencias de la viscosidad y el esfuerzo umbral con la temperatura es simplemente considerar una temperatura uniforme en la columna de fluido

y aplicar las relaciones 2.35 o 2.36. Esta es la forma de proceder que se emplea en [1]. Sin embargo, aquí se propone una nueva formulación que consiste en asumir un perfil de temperatura aproximado  $T(z)$  y derivar una nueva expresión para el esfuerzo basal.

Supongamos un fluido de Bingham y un perfil de temperatura  $T(z)$ , de forma que:

$$\tau(T(z), z) = \tau_y(T(z)) + \mu(T(z)) \frac{dW}{dz}. \quad (2.37)$$

Suponiendo que  $z = 0$  coincide con el fondo, e introduciendo la hipótesis de perfil de esfuerzo lineal, tendremos:

$$\tau_b \left(1 - \frac{z}{h}\right) = (A_\tau + B_\tau \exp(C_\tau T(z))) + (A_\mu \exp(B_\mu/T(z))) \frac{dW}{dz}. \quad (2.38)$$

Por lo tanto:

$$\frac{dW(z)}{dz} = \begin{cases} \frac{\tau_b \left(1 - \frac{z}{h}\right) - (A_\tau + B_\tau \exp(C_\tau T(z)))}{A_\mu \exp(B_\mu/T(z))} & \text{si } \tau_b(z) > \tau_y(T(z)), \\ 0 & \text{si } \tau_b(z) < \tau_y(T(z)). \end{cases} \quad (2.39)$$

En general esta integral es no elemental, por lo que se hace imposible llegar a una relación analítica directamente. Además, no es posible implementar la integración numérica directamente dentro del programa que resuelva las ecuaciones pues es necesario invertir la relación, es decir, la integral necesita conocer el valor de  $\tau_b$  para obtener  $\bar{W}$ , mientras que lo que en la resolución necesitamos calcular  $\tau_b$  a partir de  $\bar{W}$ . Para abordar este problema se aplica una aproximación numérica que se resume a continuación:

1. Elegir un perfil de temperatura que se pueda describir unívocamente especificando la altura  $h$  del fluido y la temperatura media del perfil  $\bar{T}$  y seleccionar un rango de trabajo en el que se estima que se moverán los parámetros del modelo:

$$\bar{T} \in [\bar{T}_{\min}, \bar{T}_{\max}] \quad h \in (0, h_{\max}] \quad \tau_b \in [\tau_y, \tau_{b\max}]$$

y tomar un número  $N_T$ ,  $N_h$  y  $N_\tau$  de valores de cada parámetro en el intervalo.

2. Integrar numéricamente  $W(z)$  para cada combinación de parámetros, obteniendo  $N_T \times N_h \times N_\tau$  perfiles  $W(z; (\bar{T}, h, \tau_b))$ .
3. Promediar numéricamente cada perfil de velocidad para obtener  $\bar{W}(\bar{T}, h, \tau_b)$ .
4. Proponer una dependencia funcional  $\tau_b = \mathcal{F}(\bar{W}, \bar{T}, h)$  en base a lo observado en los resultados del cálculo numérico previo. (O interpolar los valores durante la simulación).

Este proceso se ha implementado en `Python`. Proponer una dependencia funcional aproximada es un proceso complejo y por ello se trata de simplificar empleando números adimensionales y el Teorema II de Vaschy-Buckingham [22]. Consideremos el caso del perfil de temperatura no constante más sencillo: un perfil lineal<sup>2</sup>.

$$T(z) = T_h - \frac{2}{h}(T_h - \bar{T})z, \quad (2.40)$$

---

<sup>2</sup>Se expresa en función de  $T_h$  y  $\bar{T}$ , siendo equivalente a  $T(z) = T_h - \Delta T z/h$ , donde  $\Delta T$  es la diferencia entre la temperatura en el fondo y la superficie.

donde  $T_h$  (constante) es la temperatura máxima de la columna en  $z = z_b$ . Como se puede ver en la figura 2.1, una elección tan simple de perfil de temperatura puede modificar fuertemente el perfil de esfuerzo umbral y velocidad para una misma temperatura promedio. En la figura cabe destacar también el efecto del del esfuerzo umbral: cuando el esfuerzo (línea negra) es menor que el esfuerzo umbral no se produce deformación del fluido, es decir, la velocidad se mantiene constante.

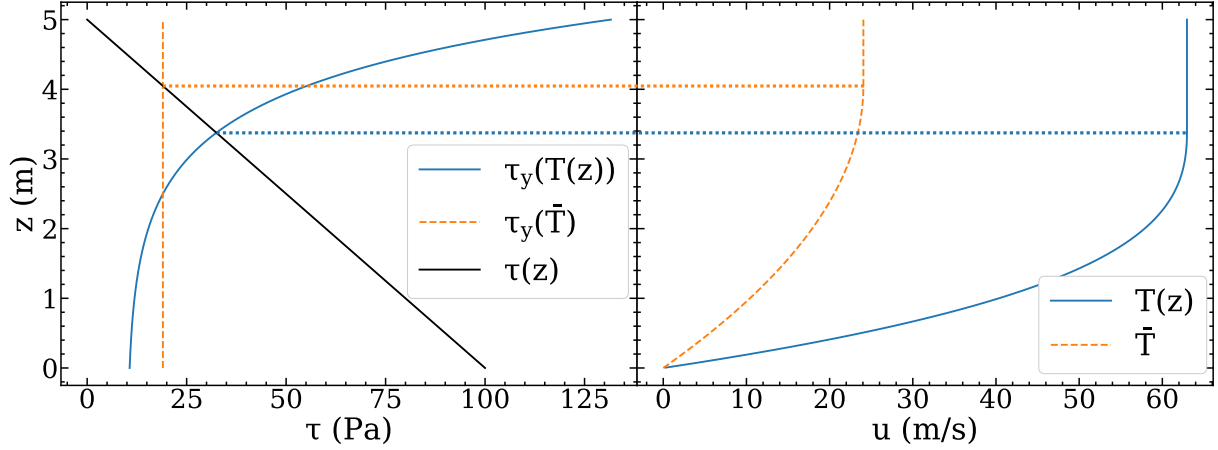


Figura 2.1: Perfiles de esfuerzo (izda.) y de velocidad (dcha.) para el Fluido 1 asumiendo temperatura uniforme o un perfil lineal con máximo de 400 °C. En ambos casos el promedio es de 270 °C.

En este caso concreto tenemos diez parámetros dimensionales:  $A_\mu$ ,  $B_\mu$ ,  $A_\tau$ ,  $B_\tau$ ,  $C_\tau$ ,  $\bar{T}$ ,  $T_h$ ,  $\bar{W}$ ,  $h$  y  $\tau_b$  y tenemos cuatro dimensiones que intervienen: longitud, tiempo, masa y temperatura. Podemos simplificar las dependencias a seis parámetros adimensionales  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_6$ . Si tomamos como base de adimensionalización  $\{A_\mu, B_\tau, T_h, h\}$  podemos encontrar los siguientes números adimensionales:

$$\Pi_1 = \frac{\tau_b}{B_\tau}, \quad \Pi_2 = \frac{\bar{W} A_\mu}{B_\tau h}, \quad \Pi_3 = \frac{\bar{T}}{T_h}, \quad \Pi_4 = C_\tau T_h, \quad \Pi_5 = \frac{A_\tau}{B_\tau}, \quad \Pi_6 = \frac{B_\mu}{T_h}.$$

De esta manera, el teorema  $\Pi$  nos asegura que existe una dependencia:

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_6) = 0. \quad (2.41)$$

Sin embargo, una vez fijadas las características reológicas de la lava y el parámetro  $T_h$ , los números  $\Pi_4$ ,  $\Pi_5$  y  $\Pi_6$  serán fijos, por lo que la dependencia se reducirá a una ecuación de la forma:

$$\tilde{f}(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0. \quad (2.42)$$

Cuando se realizan numerosas integraciones para diferentes valores de parámetros se observa que, de manera aproximada,  $\Pi_2$  depende de manera lineal con  $\Pi_1$ , siendo la pendiente de esta recta y la ordenada en el origen funciones de  $\Pi_3$ , por lo tanto:

$$\Pi_2 = \tilde{f}_1(\Pi_3)\Pi_1 + \tilde{f}_2(\Pi_3). \quad (2.43)$$

Como paso final, por simplicidad, absorberemos los parámetros fijos que forman los números adimensionales en las funciones  $\tilde{f}_1$  y  $\tilde{f}_2$ , quedando una relación dimensional:

$$\frac{\bar{W}}{h} = f_1(\bar{T})\tau_b + f_2(\bar{T}). \quad (2.44)$$

Esta dependencia se puede observar en los ejemplos mostrados en la figura 2.2 para dos conjuntos de parámetros diferentes. Para el cálculo de esta gráfica se emplearon 20 valores de  $\tau_b$  y  $h$  y 40 de  $\bar{T}$ , es decir, 16000 integrales en total. No se han representado todos los valores de temperatura puesto que las rectas no se apreciarían bien, pero sí que se han dibujado todos los valores de  $h$ , de manera que cada punto de la figura son en realidad 20 puntos superpuestos, correspondientes a los valores de  $h$  para cierto valor de esfuerzo y temperatura. Esto sirve para comprobar la conclusión derivada del Teorema II: podemos eliminar un parámetro pues  $\bar{U}$  y  $h$  no son independientes, sino que sólo es representativo su cociente.

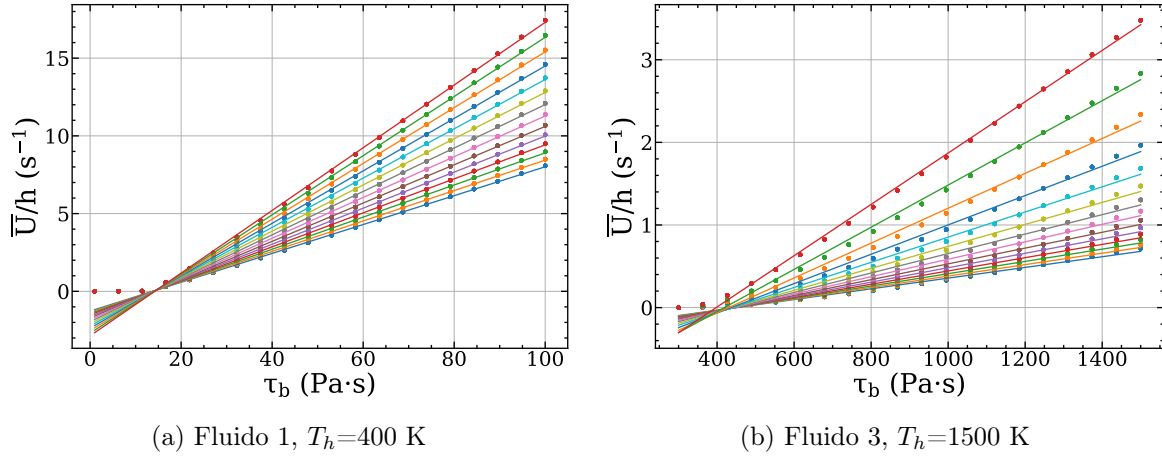


Figura 2.2: Dependencia lineal de  $\bar{U}/h$  con  $\tau_b$  como se expresa en 2.44, cada recta se corresponde con una temperatura diferente. El perfil de temperatura se asume lineal.

Hemos logrado así reducir el problema al ajuste lineal de sucesivas rectas de temperatura constante y la aproximación de dos funciones de una variable  $f_1$  y  $f_2$ . Cabe destacar que la forma de estas funciones varía según el valor de los parámetros empleados, pero es sencillo encontrar un buen ajuste. En particular, se ha observado que unas funciones que funcionan relativamente bien una gran cantidad de parámetros diferentes son:

$$f_1(\bar{T}) = A_1 + B_1\bar{T}^{n_1}, \quad (2.45)$$

$$f_2(\bar{T}) = A_2\bar{T}^3 + B_2\bar{T}^2 + C_2, \quad (2.46)$$

siendo  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $n_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  y  $C_2$  constantes de ajuste. Dos ejemplos pueden ver en la figura 2.3. La relevancia de este resultado es que, como veremos, si se prueba con otros perfiles de temperatura más complejos, las relaciones aquí obtenidas se mantienen de manera aproximada.

### 2.3. Modelo de transferencia de calor para el flujo promediado

En este trabajo consideraremos un modelo sencillo que no diferencia entre corteza y lava líquida, pero que incluye los principales mecanismos de transferencia de calor: convección y radiación en la superficie y conducción en el fondo. La convección se tomará proporcional a la diferencia entre la temperatura de la superficie de la lava y el aire:

$$\dot{Q}_{conv} = h_c(T_s - T_{air}), \quad (2.47)$$

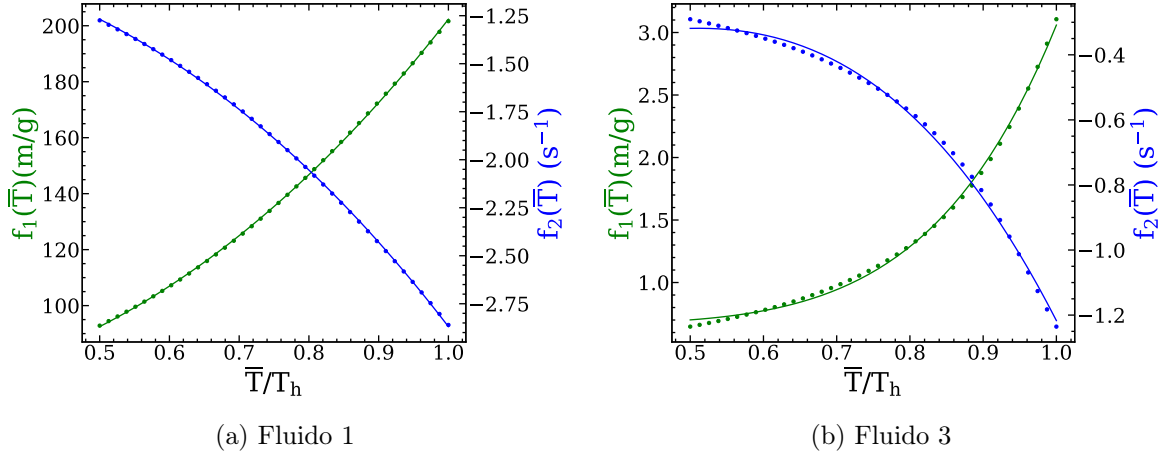


Figura 2.3: Ajuste de las pendientes y ordenadas en el origen según 2.44 para obtener las funciones  $f_1(\bar{T})$  y  $f_2(\bar{T})$ . El perfil de temperatura se asume lineal.

donde  $h_c$  es el coeficiente de transferencia de calor por convección. Para la transferencia de calor por radiación se emplea la Ley de Stefan-Boltzmann:

$$\dot{Q}_{rad} = \epsilon\sigma(\bar{T}^4 - T_{air}^4), \quad (2.48)$$

donde  $\epsilon$  es la emisividad superficial de la lava, hay cierta discusión sobre el valor adecuado, las medidas experimentales de [12] lo calculan en torno a 0,74, mientras que otras fuentes prefieren un valor más cercano a 0,90-0,95 ([11]) y  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^{-4})$  es la constante de Stefan-Boltzmann.

Para la conducción en el fondo emplearemos

$$\dot{Q}_{cond} = -\kappa \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{z=z_b}, \quad (2.49)$$

donde  $\kappa$  es la conductividad térmica. En el contexto de una simulación de flujo promediado no dispondremos directamente de los valores de  $T_s$  y  $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{z=z_b}$ , sino que tendremos que calcularlos a partir de  $\bar{T}$  y el perfil de temperatura asumido, cuando tenga sentido hacerlo.

## 2.4. Perfiles de temperatura aproximados

El perfil lineal es sencillo pero poco realista, por ello se proponen a continuación otras dos opciones.

### 2.4.1. Perfil lineal a tramos

Un avance en el perfil asumido consiste en asumir que cerca de las zonas donde hay transferencia de calor (fondo y superficie), se forma una capa límite térmica de grosor  $\delta_T = h/n$  y en el resto del fluido es constante (figura 2.4). Este modelo es similar al planteado en [5], aunque sólo consideraban este efecto en el fondo. Tomaremos  $n = 4$  según lo sugerido en [6], donde se hace una estimación suponiendo un mecanismo de transferencia de calor por conducción. De esta

manera:

$$T(z) = \begin{cases} T_b + (T_h - T_b)\frac{n}{h}z & \text{si } z < h/n \\ T_h & \text{si } h/n < z < h(1 - 1/n) \\ T_b + (T_h - T_b)\frac{n}{h}(h - z) & \text{si } z > h(1 - 1/n) \end{cases} \quad (2.50)$$

con  $T_b = n\bar{T} - T_h(n - 1)$  la temperatura en el fondo y la superficie.

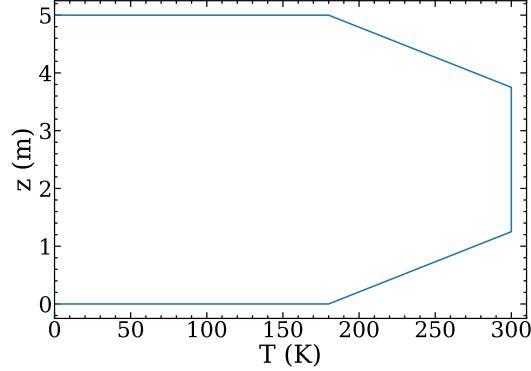


Figura 2.4: Perfil de temperatura con  $n = 4$ ,  $T_h = 300$  K y  $\bar{T} = 270$  K y  $h = 5$  m.

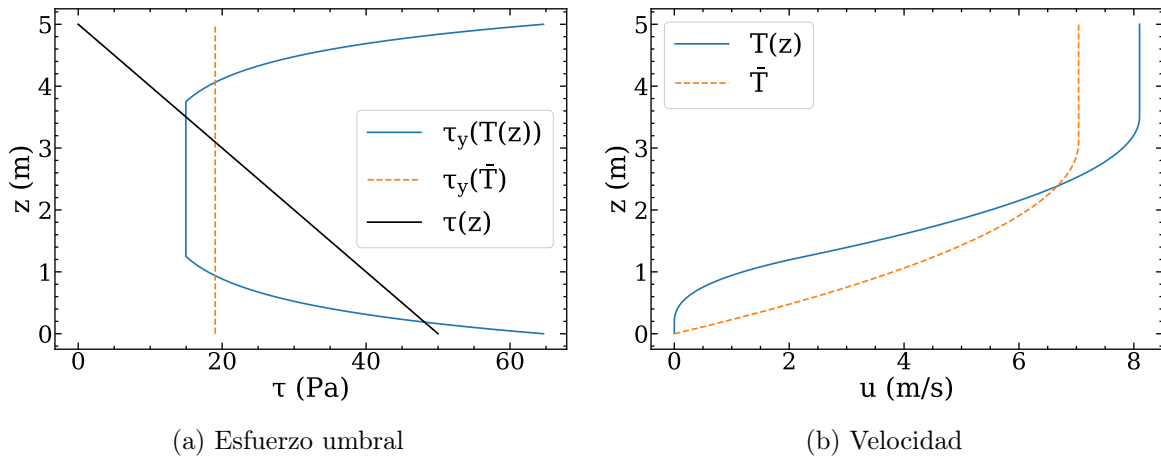


Figura 2.5: Comparación de perfiles de esfuerzo umbral y velocidad entre el caso de temperatura constante y el caso de doble capa límite térmica para el Fluido 1 con  $\tau_b = 50$  Pa. Parámetros de temperatura:  $n = 4$ ,  $T_h = 300$  K y  $\bar{T} = 270$  K y  $h = 5$  m.

Con este perfil (figura 2.5) se observa una clara diferencia respecto al perfil lineal (figura 2.1): hay dos cortes entre el perfil de esfuerzo y el de esfuerzo umbral, así por debajo del primer corte la velocidad es nula y por encima del segundo es constante. Esto es similar al efecto de las dos cortezas que se forman en la lava y se incorporará al modelo promediado mediante la dependencia del esfuerzo en la base y la velocidad promedio. Además, podremos aplicar el mismo razonamiento de números adimensionales que se aplicó al perfil lineal, ya que depende de los mismos parámetros dimensionales.

#### 2.4.2. Perfil calculado con difusión de temperatura

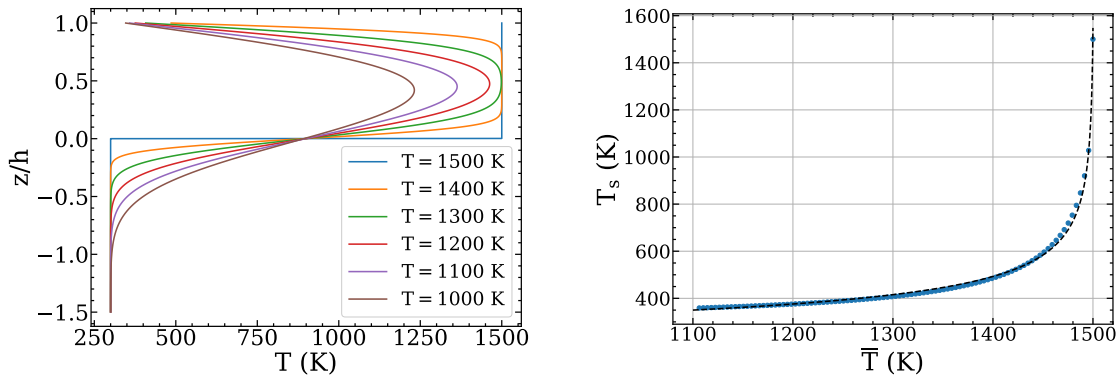
Trataremos de aproximar un perfil más realista que los anteriores mediante la aplicación del modelo térmico a un caso de lava en reposo y con simetría de traslación horizontal. Es relevante

recalcar que la intención de esta aproximación no es calcular con precisión la temperatura en la columna pues al integrar en la vertical para hallar  $\tau_b$  perdemos la información de los detalles. En su lugar estaremos interesados en relacionar la temperatura promedio  $\bar{T}$  con un perfil que se asemeje algo más a la realidad y capturar sus efectos sobre la dinámica final.

Si se asume, como es común [11, 10], que en el interior del fluido la transferencia de calor se da exclusivamente por conducción, el sistema para resolver la temperatura en el perfil queda como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad -\infty < z < h, \quad t > 0 \\ \text{Condiciones de contorno:} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h} = -\frac{1}{\kappa} (\dot{Q}_{rad} + \dot{Q}_{conv}) \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} T = T_b \\ \text{Condiciones iniciales:} \\ T(z, t = 0) = T_h \quad \text{si } h > z > 0 \\ T(z, t = 0) = T_b \quad \text{si } z < 0 \end{array} \right. \quad (2.51)$$

donde  $\kappa$  es la conductividad térmica y  $\alpha = \kappa/(C_P\rho)$  es la difusividad térmica. Además  $T_h$  es la temperatura inicial de la lava y  $T_b$  la temperatura de la roca. Este cálculo se hará con una altura de fluido  $h = 1$  m y lo escalaremos para diferentes alturas mediante la transformación  $z' \rightarrow hz$ . Con las condiciones de contorno elegidas esto no es verdad, pero esta aproximación nos permitirá mantener la dependencia unívoca del perfil de temperatura con  $\bar{T}$  y  $h$ . Se realiza a modo de ejemplo el cálculo para unos valores aproximados  $\alpha = 1,21 \cdot 10^{-8}$  m<sup>2</sup>/s constante, correspondiente a  $\rho = 3000$  kg/m<sup>3</sup>,  $\kappa = 1$  W/(m·K) y  $c_P=1100$  J/(kg·K) y se toma  $T_h = 1500$  K y  $T_b = T_{air} = 300$  K. Se emplea un método de Euler explícito, los resultados para varias temperaturas medias se pueden ver en la figura 2.6a.



(a) Perfiles de temperatura  $h = 1$  m. Por debajo de  $z = 0$  se trata de roca base

(b) Temperatura en la superficie libre.

Figura 2.6: Resultados del cálculo numérico del modelo 2.51.

Para evaluar la transferencia de calor se halla el valor de la temperatura en la superficie como función de la temperatura media (figura 2.6b) y se ajusta a una función de la forma:

$$T_s = \begin{cases} A_s(T_h - T + 1)^{-n_s} & \text{si } T < T_h \\ T_h & \text{si } T = T_h \end{cases} \quad (2.52)$$

Para los los perfiles aquí representados el ajuste da  $A_s = 1548$  y  $n_s = 0,25$ .

Conviene recalcar que cada perfil  $T(z)$  tiene un rango de temperaturas medias factible, que está comprendido entre el valor para el cual la temperatura en la superficie iguala a la temperatura en el aire ( $T_{air}$ ) y el valor máximo del perfil ( $T_h$ ). En la tabla 2.2 se especifican estos rangos de temperatura, así como el valor de la temperatura en la superficie y la transferencia de calor por conducción con el suelo según la expresión 2.49, el perfil lineal no es apto para esta transferencia porque el flujo de calor iría hacia dentro de la lava.

Perfil de temperatura	$[\bar{T}_{\min}, \bar{T}_{\max}]$	$T_s(\bar{T})$	$\dot{Q}_{cond}(\bar{T}, h)$
<b>Lineal</b> (2.40)	$\left[ \frac{1}{2}(T_{air} + T_h), T_h \right]$	$2\bar{T} - T_h$	NO
<b>Lineal a tramos</b> (2.50)	$\left[ \frac{1}{n}T_{air} + \frac{n-1}{n}T_h, T_h \right]$	$n\bar{T} - (n-1)T_h$	$-\kappa \frac{n}{h}(T_h - T_s)$
<b>Modelo de difusión</b> (2.51)	$[T_{air}, T_h]$	Ajuste/Interp.	Ajuste/Interp.

Tabla 2.2: Resumen del rango de validez de temperaturas, temperatura en la superficie ( $T_s$ ) y transferencia de calor por conducción en el suelo para los tres perfiles considerados.

### 3. Simulación 1D

#### 3.1. Método numérico

En una dimensión el sistema 2.20-2.24 se simplifica, pues desaparece la ecuación del momento en dirección  $y$ , así como la variable  $V$  y todas las dependencias con la coordenada  $y$ . Podemos emplear una notación compacta:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} rh \\ rhU \\ hT^\nabla \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} rhU \\ rhU^2 + \frac{1}{2}grh^2 \\ hUT^\nabla \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ -grh \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\tau_{bx}}{\rho_0} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{U}$  es el vector de variables conservadas,  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  el vector de flujos y  $\mathbf{S}_b$  y  $\mathbf{S}_\tau$  son términos fuente. Se puede así escribir de dos formas equivalentes:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_\tau \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_\tau \quad (3.2)$$

siendo  $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}$  el jacobiano del flujo. Se ha particularizado el método 2D explicado en [1] para este sistema 1D (ver anexo C) y se ha implementado en  $\mathcal{C}$ . Podemos escribir de manera general el método de volúmenes finitos explícito de primer orden como:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^\downarrow - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^\downarrow \right] + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{\mathbf{S}}_b + \bar{\mathbf{S}}_\tau) \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^\downarrow$  es el flujo numérico en la pared de la celda y  $\bar{\mathbf{S}}_b$  y  $\bar{\mathbf{S}}_\tau$  son las aproximaciones de los términos fuente en la celda. El esquema de Godunov consiste en en el cálculo de los flujos mediante un resolvidor de Riemann en las fronteras de celda, concretamente se usará el método de Roe, que emplea la linealización local del problema mediante jacobiano aproximado  $\tilde{\mathbf{J}}$  en las

fronteras de la celda. Además los términos fuente gravitatorios se introducen de forma *upwind* y los términos de fricción con aproximación puntual centrada en la celda. El método queda entonces como:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left( \sum_{k+} (\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k - \tilde{\beta}_k) \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i+\frac{1}{2}} + \left( \sum_{k-} (\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k - \tilde{\beta}_k) \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i-\frac{1}{2}} \right] + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{S}_\tau)_i \quad (3.4)$$

donde  $\tilde{\lambda}_k$  son los autovalores del jacobiano aproximado, de forma que existe una matriz  $\mathbf{P}$  de cambio de base tal que  $\mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{P} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3)^T$ ,  $\tilde{\alpha}_k$  son las amplitudes de las ondas propagadas:  $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3)^T = \mathbf{P}^{-1} \delta \mathbf{U}$ ,  $\tilde{\mathbf{e}}_k$  son los vectores de la base en la que al jacobiano es diagonal y  $\tilde{\beta}_k$  son las proyecciones del término fuente gravitatorio sobre los vectores de esta base. La notación  $k\pm$  indica la suma sobre los autovalores del correspondiente signo. Los detalles del cálculo de estos valores se explican en el anexo C. Para asegurar la estabilidad del método es necesario que en cada paso de tiempo las ondas sólo atraviesen una celda, de manera que en cada una de ellas se define un salto de tiempo máximo:  $\Delta t_i = \frac{\Delta x}{\max_k (\lambda_k)_i}$  y globalmente se puede controlar con una condición de CFL:

$$\Delta t = \text{CFL} \cdot \min_i \Delta t_i \quad \text{con} \quad \text{CFL} \in (0, 1]. \quad (3.5)$$

Tras la resolución del sistema anterior, se calcula una temperatura provisional en cada celda, la cual se actualiza según la ecuación 2.24:

$$\left. \begin{aligned} h_i^* &= (rh)_i^{n+1} - (hT^\nabla)_i^{n+1} \\ T_i^* &= \frac{\rho_0 (hT^\nabla)_i^{n+1} + T_0}{K (h)_i^*} \end{aligned} \right\} \implies T_i^{n+1} = T_i^* + \Delta t \frac{\dot{Q}_i}{\rho_0 (rh)_i^{n+1} c_P} \quad (3.6)$$

y finalmente se calculan las variables en el instante posterior como:

$$\rho_i^{n+1} = \rho_0 + K(T_i^{n+1} - T_0), \quad h_i^{n+1} = \frac{\rho_0 (rh)_i^{n+1}}{\rho_i^{n+1}}, \quad U_i^{n+1} = \frac{(rhU)_i^{n+1}}{(rh)_i^{n+1}}. \quad (3.7)$$

Ha sido necesario también incluir una corrección de la entropía, el método se puede consultar en el anexo C.

## 3.2. Casos test

### 3.2.1. Test 1: Rotura de presa sobre fondo seco horizontal

Se realiza una prueba de referencia para fluidos de tipo Bingham que se puede encontrar en la literatura [17, 23, 24], consiste en una rotura de presa 1D con altura  $h_0 = 30,5$  m y extensión inicial  $x_0 = 305$  m, el fluido debe tener una densidad  $\rho = 1835$  kg/m<sup>3</sup>, viscosidad  $\mu = 100$  Pa·s y esfuerzo umbral  $\tau_y = 1500$  Pa. Para este caso, se puede encontrar una solución de equilibrio analítica [24] aproximada asumiendo un perfil parabólico, de lo que se obtiene que la posición máxima alcanzada por el fluido es  $x_f = 1896$  m. Además, se realizará la prueba con parámetros dependientes de la temperatura para el modelo que sólo depende de la temperatura media y para un perfil de tipo lineal a tramos. La configuración completa de los casos se expone en las tablas 3.1 y 3.2, cabe destacar que lo que se busca con esta configuración es un rápido enfriamiento del fluido para evaluar los efectos.

	$T(z)$	$\rho_0$	K	$T_0$	$A_\tau$	$B_\tau$	$C_\tau$	$A_\mu$	$B_\mu$
T=CTE	NO	1835	Indiferente	450	1500	0	0	100	0
T. Media	$\bar{T}$	1835	-0,1	300	0	30431	-0,00602	3,16	1726,9
Perfil	Lineal a tramos	1835	-0,1	300	0	30431	-0,00602	3,16	1726,9

Tabla 3.1: Test 1. Configuración de los parámetros del fluido. (Unidades del SI).

	$c_P$ (J/(kg·K))	$T_{air}(K)$	$T_h$ (K)	$h_c$ (W/(m <sup>2</sup> ·K))	$\epsilon$
T=CTE	Indiferente	450	450	Indiferente	Indiferente
T. Media	1	450	500	100	0,74
Perfil	1	450	500	100	0,74

Tabla 3.2: Test 1. Configuración de la transferencia de calor.

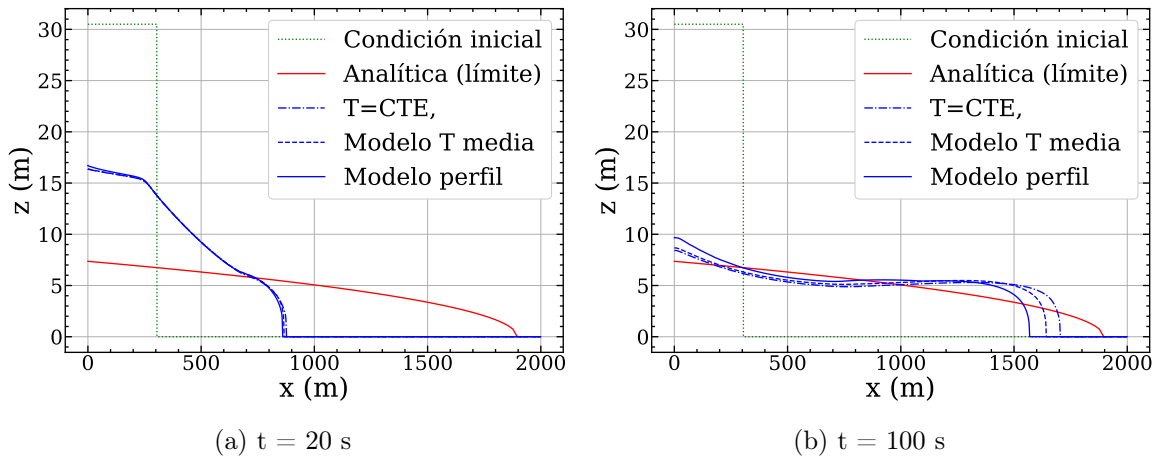


Figura 3.1: Test 1. Evolución de la superficie libre para los diferentes modelos.

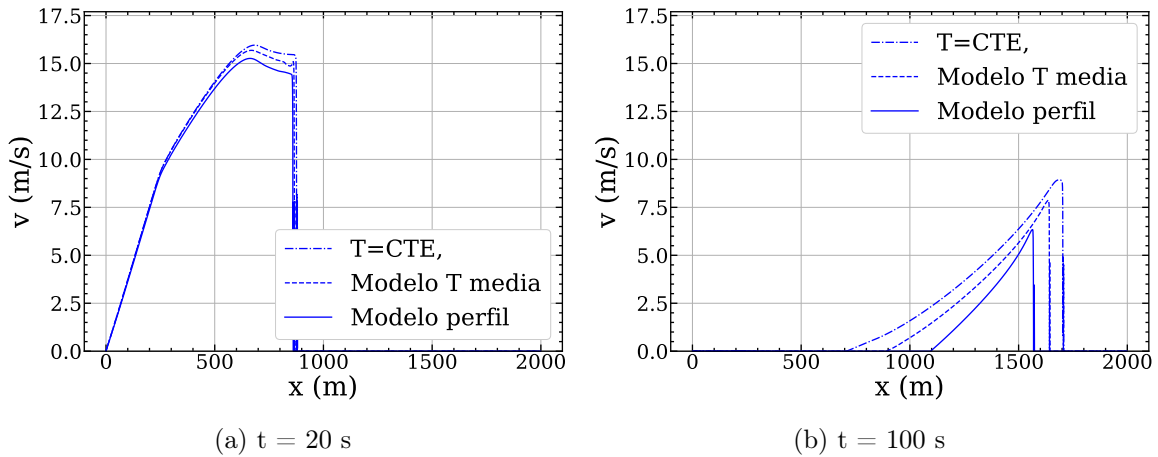


Figura 3.2: Test1. Evolución de la velocidad para los diferentes modelos.

En las figuras 3.1 y 3.2 se representan respectivamente la superficie libre y la velocidad para dos instantes de tiempo diferentes. Además, en la figura 3.3 se puede ver la evolución de la temperatura para los casos en las que hay transferencia de calor y es destacable que la zona frontal de la masa fluida se enfría de manera más rápida debido a que tiene una altura menor. Finalmente, en la figura 3.4 se tiene el caso de estático, cuando la masa se ha frenado y se ha quedado en

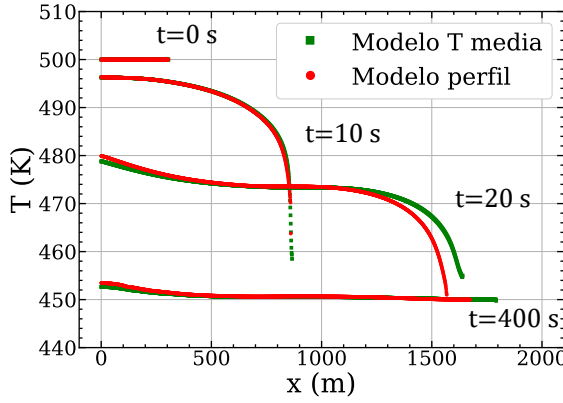


Figura 3.3: Test1. Evolución de la temperatura del fluido

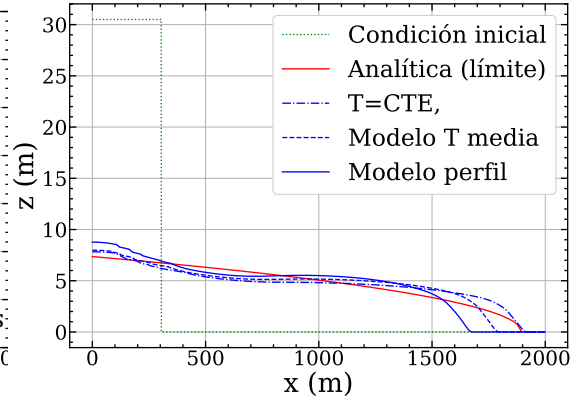


Figura 3.4: Test 1. Estado final de equilibrio para los diferentes modelos ( $T = 400$  s).

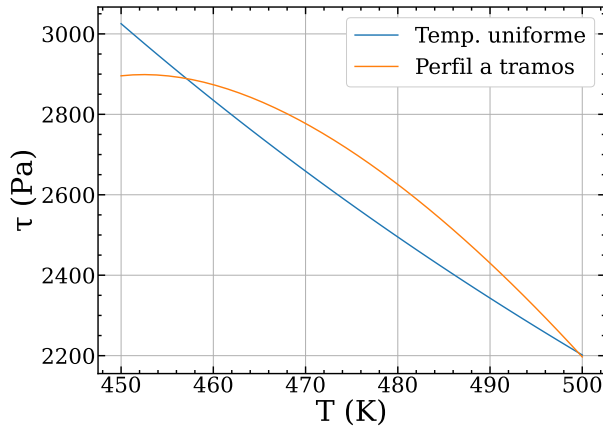


Figura 3.5: Test 1. Esfuerzo en el fondo como función de la temperatura para el caso  $W/h = 1$ .

un equilibrio determinado por el esfuerzo umbral. Se observa una buena coincidencia entre el punto de parada predicho mediante la aproximación analítica y la simulación con la temperatura constante en  $x_f \approx 1896$  m. En las simulaciones en las que hay transferencia de temperatura este perfil se frena antes ya que, debido a la dependencia que tiene  $\tau_b$  con la temperatura media (figura 3.5), según disminuye la temperatura el esfuerzo aumenta para ambos casos, en mayor medida inicialmente para el caso con un perfil a tramos.

### 3.2.2. Test 2: Propagación sobre plano inclinado

En esta sección se van a emplear los parámetros del Fluido 3 (tabla 2.1) para simular la caída de lava en un plano inclinado con un desnivel de 100 m a lo largo de 3000 m (figura 3.7). Se supone un flujo de entrada de  $2 \text{ m}^3/\text{s}$  por unidad de longitud transversal. La lava fluye inicialmente a una temperatura de 1500 K. La temperatura del aire es de 300 K, el coeficiente de convección es  $h_c = 50 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$  y la emisividad  $\epsilon = 0,74$ . Además, cuando se emplee un perfil de temperatura, se incorporará una conducción con el suelo con conductividad térmica de  $\kappa = 1 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ .

Se realizarán pruebas comparativas empleando diferentes perfiles y evaluando la diferencia entre la transferencia de calor con o sin conducción. Las configuraciones se resumen en la tabla 3.3.

En la tabla 3.4 se presentan los parámetros obtenidos al ajustar las funciones 2.45 y 2.46 con los perfiles de temperatura empleados. La bondad del ajuste se evalúa mediante la raíz del error relativo cuadrado (RRSE):

$$RRSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\hat{\tau}_i - \tau_i)^2}{\sum_{i=1}^N (\bar{\tau} - \tau_i)^2}} \quad (3.8)$$

Configuración	Perfil	Conducción
M	Uniforme	No
L1	Lineal a tramos	No
L2	Lineal a tramos	Sí
T	Modelo de difusión (2.51)	No

Tabla 3.3: Test 2. Configuración de los diferentes escenarios.

Perfil	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	n <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	B <sub>2</sub>	C <sub>2</sub>	RRSE
Lineal a tramos	1.38·10 <sup>-3</sup>	1.88·10 <sup>-3</sup>	23.1	-18.1	22.6	-6.00	0.066
Modelo de difusión	-1.42·10 <sup>-3</sup>	4.45 ·10 <sup>-3</sup>	3.03	3.61	-6.47	1.63	0.094

Tabla 3.4: Test2. Parámetros de ajuste para las funciones 2.45 y 2.46. Unidades del SI.

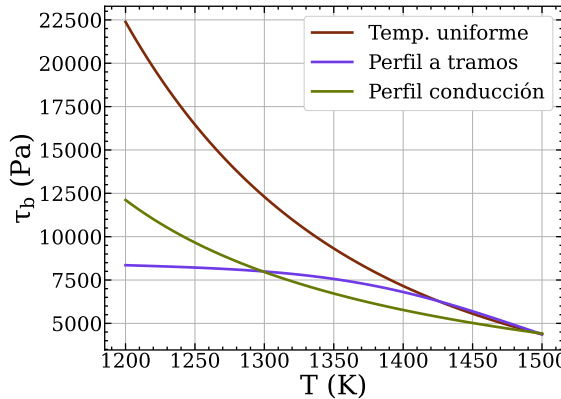


Figura 3.6: Test 2. Esfuerzo en el fondo como función de la temperatura para  $W/h = 1$ .

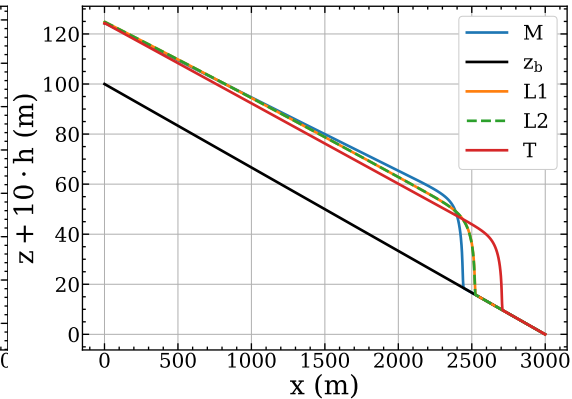


Figura 3.7: Test 2.  $z_b + 10h$  en  $t=3450$  s. Escala distorsionada para mejor visualización.

Observamos en la figura 3.9 que el frente avanza de manera más rápida en el caso en el que se emplea algún tipo de perfil (L1, L2 y T) que en el que supone una temperatura constante en la vertical (M), esto se debe a que el esfuerzo en el fondo (figura 3.6) es menor para estos perfiles, reflejando que la zona interior está más caliente y tiene una menor viscosidad y esfuerzo umbral. Cabe destacar que en el caso del perfil lineal a tramos, para las zonas de temperatura alta, el esfuerzo en la base es ligeramente superior que el caso con temperatura media, este hecho se debe a que los bordes del perfil se enfrían mucho más rápido y mientras la temperatura media es elevada, este efecto es relevante y hace que  $\tau_b$  sea mayor, lo que se refleja en la figura 3.9a, ya que este perfil (L1 y L2) comienza avanzando más más lento, para después adelantar al caso M.

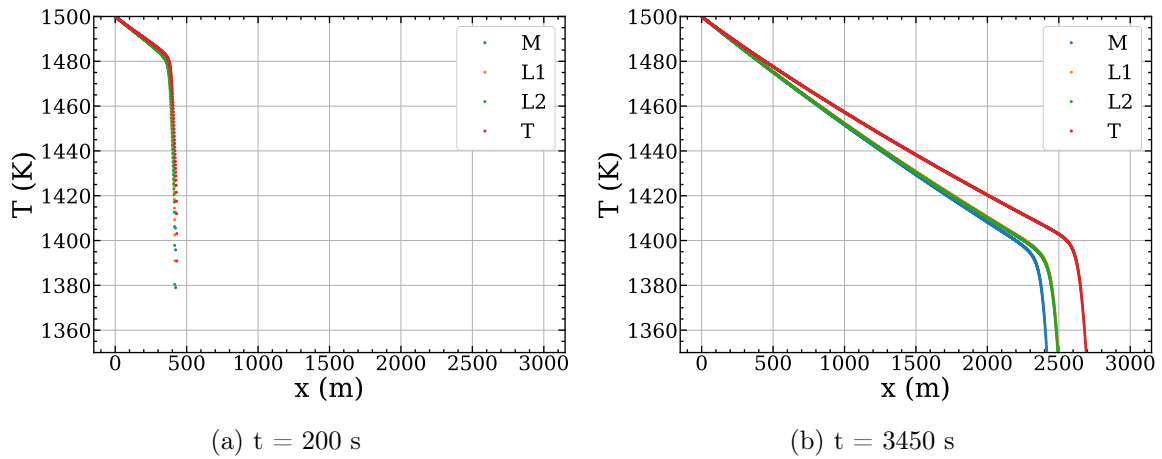


Figura 3.8: Test 2. Evolución de la temperatura.

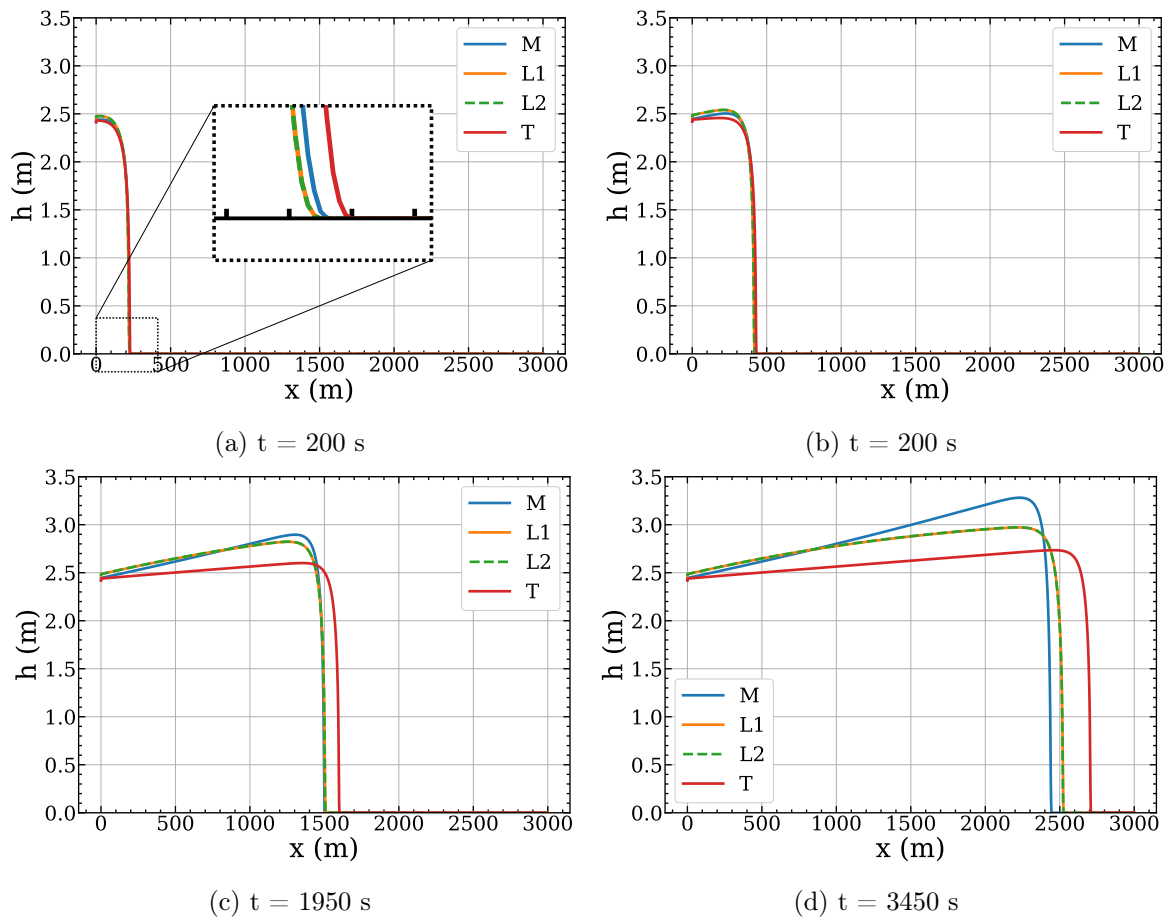


Figura 3.9: Test 2. Evolución de la altura del fluido sobre el fondo.

En la figura 3.8 se representa la temperatura del fluido en dos instantes de tiempo diferentes, destaca que la temperatura inicialmente es similar en todos los casos, pero cuando el fluido está más frío la transferencia de calor en aquellos con perfil no constante se hace menor, dado que la convección se efectúa teniendo en cuenta la temperatura en la superficie, diferenciándose de la distribución de temperaturas.

Por otra parte, es notable la poca diferencia que existe entre los casos L1 y L2, concluyéndose

que la transferencia de calor por conducción es poco relevante, lo cual es coherente pues la lava tiene una conductividad térmica pequeña, haciendo que sea despreciable frente a la convección y radiación.

## 4. Simulación 2D: Integración en PEKA2D

PEKA2D es un software de simulación de flujo promediado desarrollado por el grupo TFD, y que es la base de las herramientas RIVERFLOW2D™ y OILFLOW2D™, comercializados por la empresa Hydronia. Durante la investigación que llevó a la publicación de [1] se incorporó el modelo de transporte de la temperatura supuesta uniforme en la vertical. En este trabajo se ha generalizado asumiendo un perfil de temperatura no uniforme. Se presentan a continuación dos aplicaciones.

### 4.1. Casos test

#### 4.1.1. Test 3: Basalto fundido sobre un plano inclinado

Se analiza ahora un caso propuesto en [25] como *benchmark* para evaluar modelos de simulación de flujos de lava. Consiste en un experimento en el cual se vierte basalto fundido (220 mL/s a 1050 °C) sobre un plano inclinado 12,25°. Para su simulación se emplean los valores de emisividad y el coeficiente de convección recomendados en este artículo:  $\epsilon = 0,95$  y  $h_c = 2 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ . Además se supone que la densidad tiene un valor de  $\rho(T) = 2350 - 0,01(T - 1073 \text{ K}) \text{ kg}/\text{m}^3$ . Se compara el modelo de fricción con temperatura constante en la vertical y el que emplea un perfil lineal a tramos, los parámetros de la viscosidad y esfuerzo umbral se calibran en cada uno de ellos para ajustar los datos experimentales y se presentan en la tabla 4.1.

	$A_\tau$ (Pa)	$B_\tau$ (Pa)	$C_\tau$ ( $\text{K}^{-1}$ )	$A_\mu$ (Pa·s)	$B_\mu$ (K)
T uniforme	0	$35 \cdot 10^6$	-0.01	0.05	9500
Perfil a tramos	0	$37 \cdot 10^6$	-0.01	0.03	9500

Tabla 4.1: Parámetros de ajuste para los modelos empleados en la simulación del experimento.

En la figura 4.1 se muestra el estado de la simulación en  $t = 42 \text{ s}$  y en la 4.2b se presenta la comparación entre las medidas experimentales y simuladas del alcance de la lava en la dirección de la pendiente. Se puede observar como la coincidencia con los valores experimentales es aceptable. La discrepancia principal es que, en torno a 20 s, se aprecia como el frente acelera, lo que puede deberse a irregularidades en el vertido de basalto fundido, o a la ruptura de la capa superficial sólida que se forma sobre el fluido. Además, tras la diferente calibración de los parámetros, se obtiene que el avance de lava es muy similar en ambos modelos.

En la imagen 4.3b se muestra la medida del calado máximo en una sección transversal a la pendiente situada a 50 cm del punto de vertido. Se observa que los valores experimentales son superiores a los simulados, pero que el caso del modelo con un perfil no uniforme es mayor que aquel de temperatura uniforme en la columna, siendo más parecido a las medidas experimentales.

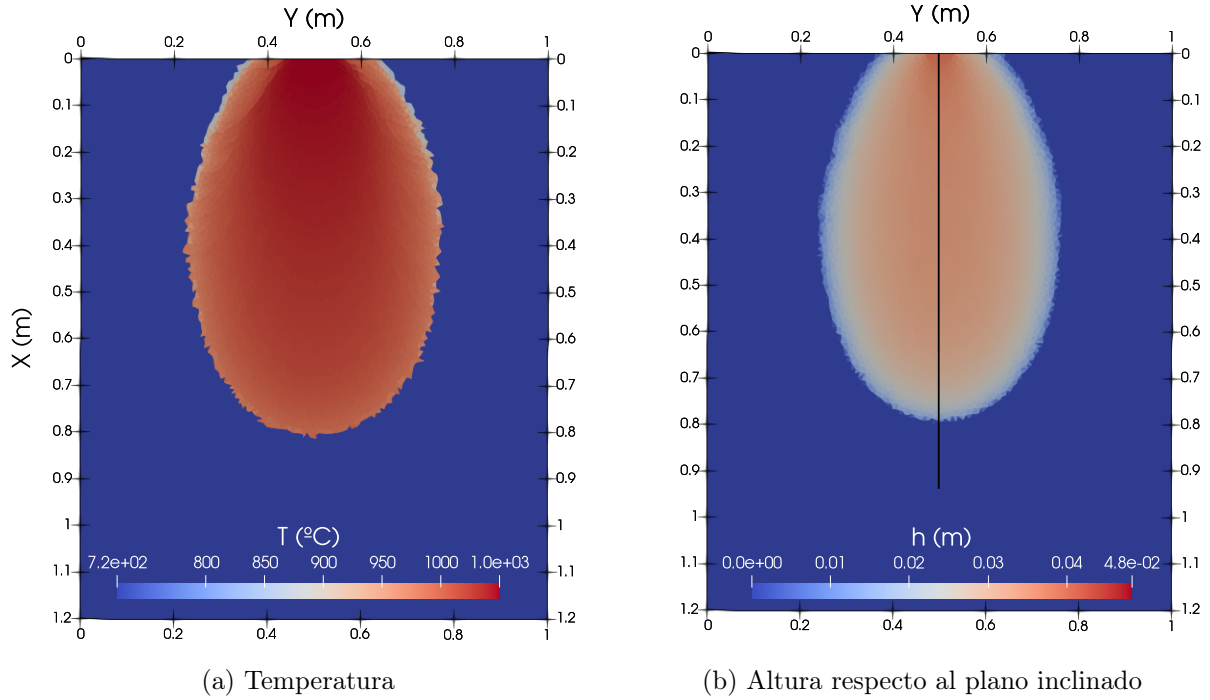
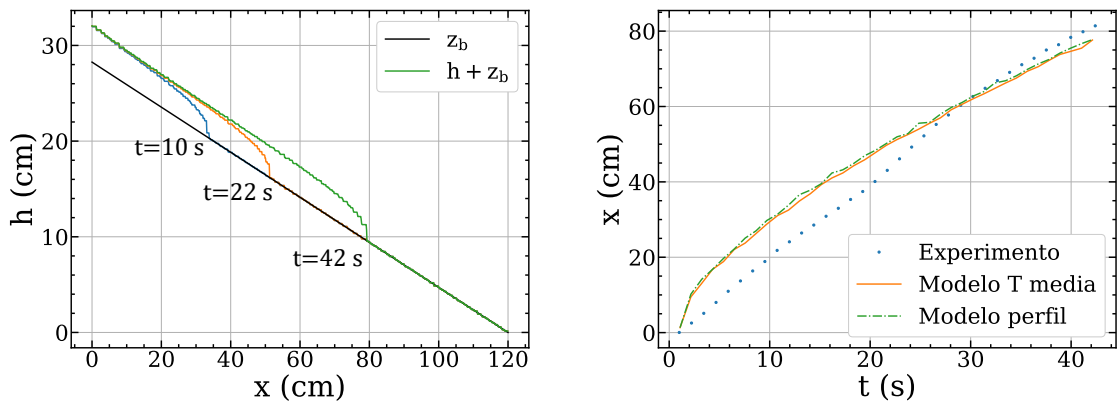


Figura 4.1: Test 3. Simulación a los 42s. Se marca la línea sobre la que se extraen los perfiles.



(a) Simulación con el modelo con perfil de temperatura      (b) Comparación de experimento y simulaciones.

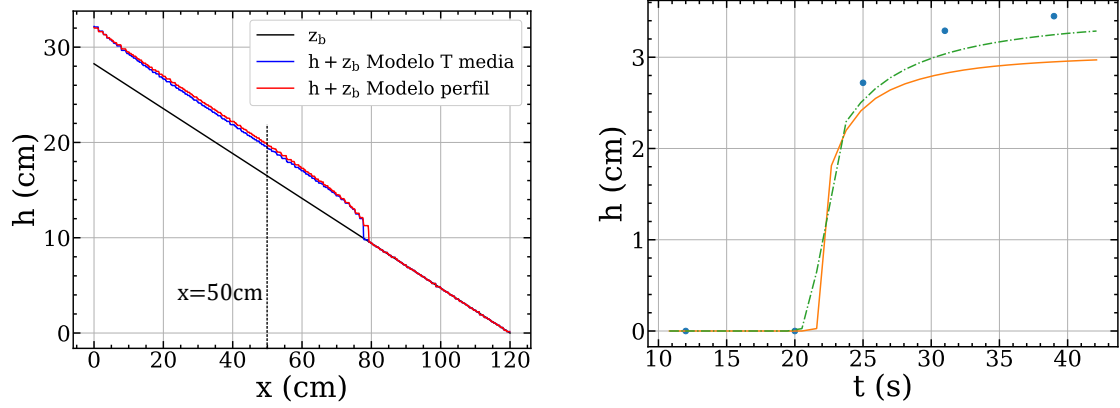
Figura 4.2: Test 3. Sección a lo largo de la recta central del plano inclinado.

#### 4.1.2. Test 4: Volcán de La Palma

Como caso final, se aplicará el modelo a la simulación de la erupción de septiembre de 2021 en La Palma, Las Islas Canarias. Para la simulación de este modelo partiremos de los resultados del artículo [1], en esta referencia la ley de viscosidad empleada es ligeramente diferente que la descrita aquí (expresión 2.33):

$$\mu(T) = \gamma \exp(-\xi T), \quad (4.1)$$

pero todo el proceso para el cálculo del esfuerzo en el fondo a partir de un perfil de temperatura es aplicable de igual manera, los parámetros que obtuvieron los autores ajustando la evolución de la colada de lava a las medidas por satélite se reflejan en la tabla 4.2. Se simulará el caso con el modelo que supone temperatura uniforme y con un perfil obtenido de la resolución numérica de



(a) Simulaciones en  $t=42$  s. La posición de la sonda se marca en línea discontinua. (b) Comparación de experimento y simulaciones.

Figura 4.3: Test 3: Calado a 50 cm de distancia de la zona de vertido.

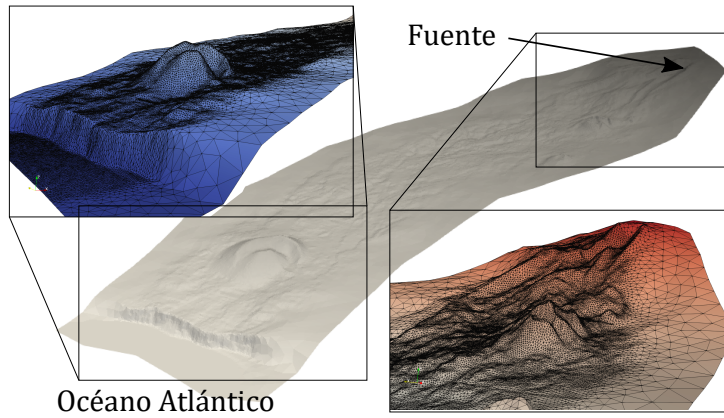


Figura 4.4: Test 4. Terreno y detalle del mallado.

la ecuación del calor (2.51), los parámetros de ajuste a este último se pueden ver en la tabla 4.3. Los datos de la topografía del terreno se han obtenido del Instituto Geográfico Nacional,. Este dominio se ha mallado con 108167 celdas y más refinada en la zona por donde previsiblemente fluiría la lava, se puede ver en la figura 4.4. El caudal de la única fuente que se considera es el descrito en [1].

$K$ (kg/(m <sup>3</sup> ·K))	$A_\tau$ (Pa)	$B_\tau$ (K <sup>-1</sup> )	$\gamma$ (Pa·s)	$\xi$ (K <sup>-1</sup> )
-0.1	$2,5 \cdot 10^6$	$4,29 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^7$	$5,02 \cdot 10^{-3}$

Tabla 4.2: Test 4. Ajuste de parámetros a las leyes 4.1 y 2.34 según [1].

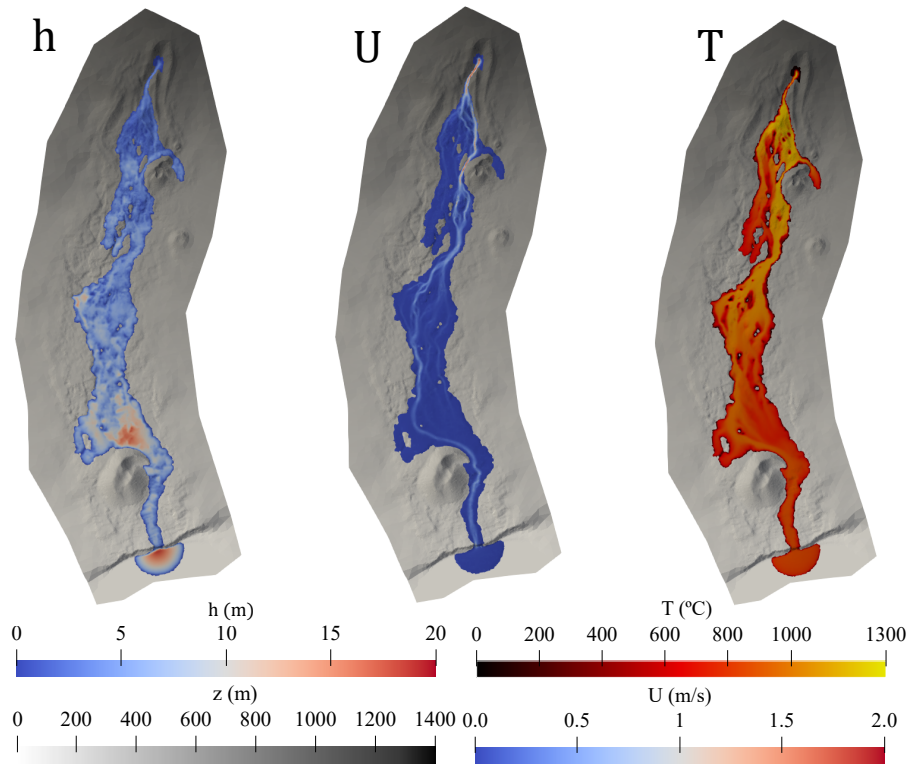


Figura 4.5: Test 4. Modelo con perfil de difusión en  $t=40h$ .

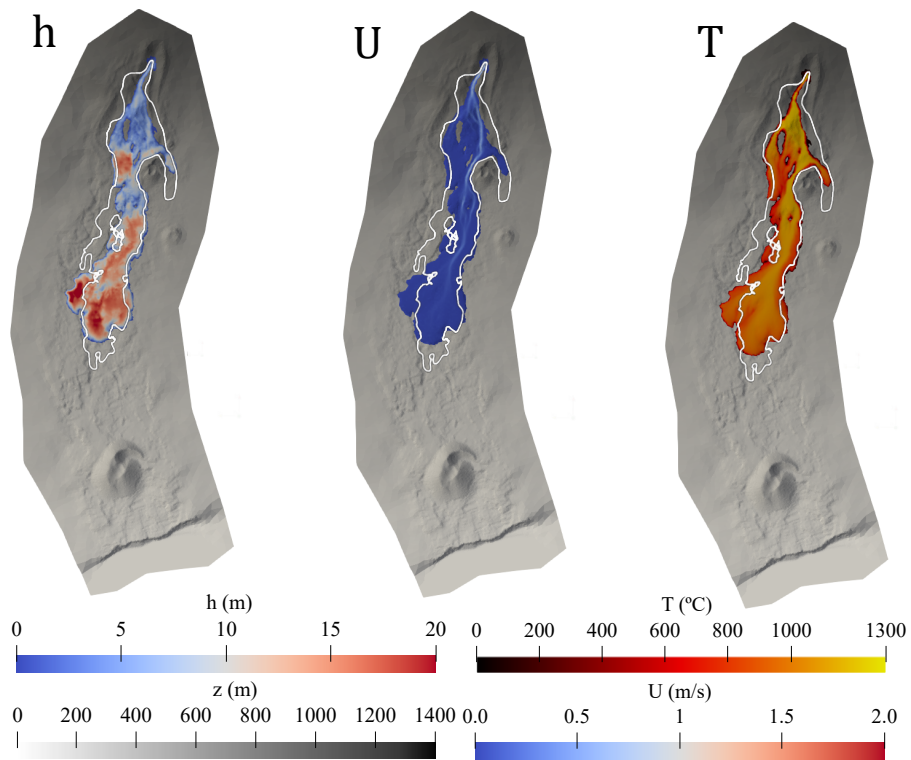


Figura 4.6: Test 4. Modelo con temperatura uniforme en  $t=40h$ . Se superpone en línea blanca la medida de satélite.

$A_1$	$B_1$	$n_1$	$A_2$	$B_2$	$C_2$	RRSE
$1,01 \cdot 10^{-7}$	$3,14 \cdot 10^{-5}$	4.56	0.20	-0.34	-0.038	0.20

Tabla 4.3: Test 4. Parámetros de ajuste para las funciones 2.45 y 2.46. Unidades del SI.

El método, aunque eficiente, sigue siendo computacionalmente costoso, es por ello que se simulan sólo las primeras 40 horas de erupción, proceso que tarda alrededor de 10 horas en completarse. Los resultados para el instante final se pueden comprobar en las figuras 4.5 y 4.6, además en el anexo D se añaden los resultados de algunos tiempos anteriores. Se concluye que la dinámica de ambos modelos es notablemente diferente, pues para el caso con un perfil no uniforme la colada de lava avanza más rápido que en el caso con temperatura uniforme, alcanzando a la costa en las 40 primeras horas. Esto refleja el mismo comportamiento que se ha visto en otros test. Es de relevancia especificar que la calibración de parámetros se realizó con el modelo de temperatura uniforme, por eso la coincidencia con los datos del satélite es mejor en este caso, no se ha realizado el mismo proceso con el nuevo modelo debido al elevado coste computacional de cada simulación.

## 5. Conclusiones

Se ha desarrollado e implementado un método para introducir los efectos que tendría sobre las ecuaciones del flujo promediado un perfil de temperatura no constante en la vertical y se ha puesto a prueba en varios casos, tanto 1D, como 2D. De estas simulaciones se concluye que esta modificación indudablemente tiene efectos que pueden llegar a ser muy relevantes en la dinámica si se emplean los mismos parámetros para la viscosidad y esfuerzo umbral. Se ha observado que para temperaturas bajas, un perfil no uniforme tiene menor fricción, efecto que se explica porque el interior de la lava está más caliente y fluido que si toda la columna estuviera a la temperatura media, para temperaturas altas, el comportamiento depende de los parámetros y perfil empleados, pudiendo tener el comportamiento inverso, la razón de este fenómeno es que los efectos asociados al rápido enfriamiento de las superficies superior e inferior de la lava pueden llegar a superar a la fricción de un fluido con temperatura uniforme muy alta.

Por otra parte, los resultados también sugieren que, mediante un proceso de calibrado de los parámetros individualizado para cada modelo, los resultados pueden ser muy similares, como es el caso de el test descrito en la sección 4.1.1. Esto podría justificar el empleo del modelo con temperatura uniforme, sujeto a una calibración particularizada para cada caso, pero es necesario realizar más pruebas para sustentar la hipótesis.

Finalmente, se ha determinado que los efectos de la transferencia de calor por conducción con son despreciables para la dinámica del fluido, siendo suficiente tener en cuenta la radiación y la convección.

De cara a futuros trabajos, el siguiente paso sería programar el método en GPU, con lo que se consiguen aceleraciones de cálculo por un factor en torno a 200. Esto haría que fuera factible el calibrado de parámetros y simulaciones más largas y facilitaría el estudio de la sensibilidad respecto a los parámetros.

## 6. Referencias

- [1] I. Echeverribar, S. Martínez-Aranda, J. Fernández-Pato, and P. García-Navarro, “A GPU-based 2D viscous flow model with variable density and heat exchange,” *Advances in Engineering Software*, vol. 175, p. 103340, Enero 2023.
- [2] P. Garcia-Navarro and M. E. Vazquez-Cendon, “On numerical treatment of the source terms in the shallow water equations,” *Computers & fluids*, vol. 29, pp. 951–979, 1999.
- [3] A. Kurganov and G. Petrova, “A second-order well-balanced positivity preserving central-upwind scheme for the Saint-Venant system,” *Communications in Mathematical Sciences*, vol. 5, pp. 133–160, 2007.
- [4] X. Ying, A. A. Khan, and S. S. Y. Wang, “Upwind conservative scheme for the Saint Venant Equations,” *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 130, pp. 977–987, Octubre 2004.
- [5] E. Biagioli, M. de’ Michieli Vitturi, and F. D. Benedetto, “Modified shallow water model for viscous fluids and positivity preserving numerical approximation,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 94, pp. 482–505, Enero 2021.
- [6] A. Costa and G. Macedonio, “Numerical simulation of lava flows based on depth-averaged equations,” *Geophysical Research Letters*, vol. 32, p. L05304, Marzo 2005.
- [7] M. D. Thanh, “The Riemann problem for the shallow water equations with horizontal temperature gradients,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 325, pp. 159–178, 2018.
- [8] M. R. Saleem, S. Zia, W. Ashraf, I. Ali, and S. Qamar, “The space–time CESE scheme for shallow water equations incorporating variable bottom topography and horizontal temperature gradients,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 75, pp. 933–956, 2018.
- [9] M. O. Chevrel, H. Pinkerton, and A. J. Harris, “Measuring the viscosity of lava in the field: A review,” *Earth-Science Reviews*, vol. 196, Septiembre 2019.
- [10] W. Wittmann, F. Sigmundsson, S. Dumont, and Y. Lavallée, “Post-emplacement cooling and contraction of lava flows: InSAR observations and a thermal model for lava fields at Hekla volcano, Iceland,” *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, vol. 122, pp. 946–965, 2 2017.
- [11] M. R. Patrick, J. Dehn, and K. Dean, “Numerical modeling of lava flow cooling applied to the 1997 Okmok eruption: Approach and analysis,” *Journal of Geophysical Research*, vol. 109, 2004.
- [12] P. Y. Burgi, M. Caillet, and S. Haefeli, “Field temperature measurements at Erta’ale lava lake, Ethiopia,” *Bulletin of Volcanology*, vol. 64, pp. 472–485, 2002.
- [13] L. Keszthelyi, A. J. Harris, and J. Dehn, “Observations of the effect of wind on the cooling of active lava flows,” *Geophysical Research Letters*, vol. 30, Octubre 2003.
- [14] A. Lacasta, C. Juez, J. Murillo, and P. García-Navarro, “An efficient solution for hazardous geophysical flows simulation using GPUs,” *Computers and Geosciences*, vol. 78, pp. 63–72, 5 2015.

- [15] C. E. Lesher and F. J. Spera, “Chapter 5 - thermodynamic and transport properties of silicate melts and magma,” in *The Encyclopedia of Volcanoes (Second Edition)* (H. Sigurdsson, ed.), pp. 113–141, Amsterdam: Academic Press, second edition ed., 2015.
- [16] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [17] S. Martínez Aranda, *Efficient Simulation Tools (EST) for sediment transport in geomorphological shallow flows*. Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza, 2021.
- [18] E. N. da Costa Andrade, “A theory of the viscosity of liquids. Part II,” *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 17, pp. 698–732, Marzo 1934.
- [19] C. V. Raman, “A theory of the viscosity of liquids,” *Nature*, vol. 111, pp. 532–533, 1923.
- [20] I. A. Abdelraziq and T. H. Nierat, “Rheology properties of castor oil: Temperature and shear rate-dependence of castor oil shear stress,” *Journal of Material Science and Engineering*, vol. 05, 2015.
- [21] M. O. Chevrel, T. Platz, E. Hauber, D. Baratoux, Y. Lavallée, and D. B. Dingwell, “Lava flow rheology: A comparison of morphological and petrological methods,” *Earth and Planetary Science Letters*, vol. 384, pp. 109–120, 12 2013.
- [22] P. Kundu, I. Cohen, and D. Dowling, *Fluid Mechanics*. Academic Press, 2015.
- [23] D. Naef D., Rickenmann, P. Rutschmann, and B. W. McArdell, “Comparison of flow resistance relations for debris flows using a one-dimensional finite element simulation model,” *Natural Hazards and Earth System Sciences*, vol. 6, no. 1, pp. 155–165, 2006.
- [24] O. Hungr, “A model for the runout analysis of rapid flow slides, debris flows, and avalanches,” *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 32, pp. 610–623, 8 1995.
- [25] H. R. Dietterich, E. Lev, J. Chen, J. A. Richardson, and K. V. Cashman, “Benchmarking computational fluid dynamics models of lava flow simulation for hazard assessment, forecasting, and risk management,” *Journal of Applied Volcanology*, vol. 6, p. 9, Diciembre 2017.
- [26] S. Martínez-Aranda, J. Pato, I. Echeverribar, A. Navas-Montilla, M. Morales-Hernández, P. Brufau, J. Murillo, and P. Garcia-Navarro, *Finite volume models and Efficient Simulation Tools (EST) for Shallow Flows*, pp. 67–137. Enero 2022.
- [27] J. Murillo, B. Latorre, and P. García-Navarro, “A Riemann solver for unsteady computation of 2D shallow flows with variable density,” *Journal of Computational Physics*, vol. 231, pp. 4775–4807, Mayo 2012.
- [28] M. Morales Hernández, *Efficient explicit finite volume schemes for the shallow water equations with solute transport*. Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza, junio 2014.

## A. Derivación de las ecuaciones del flujo promediado

Se procede a deducir las ecuaciones de los flujos poco profundos a partir del sistema de Navier-Stokes completo [22], para un fluido viscoso de densidad  $\rho$  no necesariamente constante:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) = -\nabla \cdot \mathbf{f}_q + \rho q - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v} : \boldsymbol{\tau}, \quad (\text{A.3})$$

donde  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  es el campo de velocidades,  $p$  es la presión,  $\boldsymbol{\tau}$  es el tensor de esfuerzos viscosos,  $\mathbf{g}$  es la aceleración de la gravedad,  $e$  es la energía interna,  $\mathbf{f}_q$  son los flujos de calor por conducción y  $q$  es el intercambio de calor por radiación.

La primera ecuación representa la conservación de la masa, la segunda la conservación del momento lineal y la última la conservación de la energía interna. Para flujos más extensos que profundos en los que las aceleraciones verticales son despreciables, una técnica muy común consiste en promediar las ecuaciones A.1, A.2 y A.3 en la dirección vertical aplicando las condiciones de contorno apropiadas, de manera que se pierde la información del perfil de velocidades y se pasa a trabajar con variables promediadas en la columna. A cambio de esta pérdida de información, se consiguen ecuaciones más sencillas y cuya resolución computacional es factible a escalas geográficas.

### A.1. Análisis dimensional de las ecuaciones

Es necesario comenzar realizando un análisis dimensional de los diferentes términos de que intervienen en las ecuaciones. Si comenzamos con la ecuación de continuidad (A.1):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Aplicando la regla de la cadena y reorganizando los términos se llega a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}. \quad (\text{A.5})$$

Al estar en un flujo poco profundo supondremos que las distancias en las que las velocidades en  $x$  e  $y$  cambian son del orden de  $L$ , mientras que para la velocidad vertical es  $h$ , cumpliendo  $h \ll L$ . Además sea  $V_h$  el orden de magnitud de las componentes horizontales de la velocidad y  $V_v$  en la dirección  $z$ . Supongamos que la densidad cambia  $\delta\rho$ . Para estimar el orden de magnitud del término  $\delta\rho/\rho$  recurrimos a [15], donde se puede encontrar que, para las variaciones de temperatura características de un flujo de lava,  $\delta\rho/\rho \lesssim 10^{-2} \ll 1$ . Empleando esto se puede estimar la siguiente relación de órdenes:

$$V_v \approx V_h \frac{h}{L}, \quad (\text{A.6})$$

lo cual implica que  $V_v \ll V_h$ .

Continuamos con la componente  $z$  de la ecuación del momento lineal (A.2):

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} \right) = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}. \quad (\text{A.7})$$

Aplicando la relación obtenida entre  $V_h$  y  $V_v$ , asumiendo un modelo viscoso Newtoniano o Bingham y comparando cada uno de los términos de la ecuación (salvo el de la presión) con el de la gravedad  $\rho g$  se obtiene, según [26]:

- Términos convectivos:  $\frac{V_h^2 h}{gL^2} = \text{Fr}^2 \frac{h}{L}$ .
- Aceleración local:  $\frac{V_h h}{gTL} = \text{StFr}^2 \frac{h}{L}$ .
- Mayor esfuerzo viscoso:  $\frac{\nu V_h}{gh^2} = \frac{\text{Fr}^2}{\text{Re}}$ .

Donde  $\nu$  es la viscosidad dinámica y  $\text{Fr} = \frac{V_h}{\sqrt{gh}} \approx 1$  es el número de Froude,  $\text{St} = \frac{h}{TV_h} \lesssim 1$  el número de Strouhal y  $\text{Re} = \frac{V_h h}{\nu}$  el número de Reynolds. De esta manera todos los términos se podrán considerar despreciables frente al término gravitatorio, reduciendo la ecuación del momento en dirección  $z$  a

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad (\text{A.8})$$

esto implica que el perfil de presión es aproximadamente hidrostático, lo cual es una de las hipótesis principales de los modelos SW. Cabe destacar que la aproximación más grosera que se realiza en este paso es despreciar el esfuerzo viscoso; en flujos de agua altamente turbulentos  $\text{Re} \gg 1$  y esta aproximación es perfectamente válida, sin embargo en flujos de lava se tiene una viscosidad mayor y velocidades menores, lo que implica un número de Reynolds menor. Esto nos marcará una posible limitación del modelo, aunque generalmente no tendrá grandes consecuencias.

En esta misma línea, dado que el número de Reynolds será pequeño, podremos suponer despreciables los efectos de la turbulencia. En caso contrario, se tendrían que incluir mediante un modelo de esfuerzos de Reynolds [26].

## A.2. Condiciones de contorno

Para llegar a las ecuaciones de flujo promediado se deben establecer primero las condiciones de contorno. Comenzamos con las de la superficie libre:

1. **Velocidad en la superficie libre:** Sea  $F(x, y, z, t) = z_s(x, y, t) - z = 0$  la ecuación que define la superficie libre del fluido en todo punto del plano para cualquier instante de tiempo, si aplicamos la derivada sustancial a ambos lados de la ecuación obtendremos:

$$\frac{DF}{Dt} = 0 \implies \frac{\partial z_s}{\partial t} + u \frac{\partial z_s}{\partial x} + v \frac{\partial z_s}{\partial y} - w = 0 \quad (\text{A.9})$$

donde se ha escrito  $\mathbf{v} = (u, v, w)$ . La interpretación física de esta condición es que la velocidad normal relativa a la superficie libre es nula, es decir, el fluido no se puede salir de la superficie libre.

2. **La presión atmosférica fuera del fluido es despreciable**  $P = 0$ .

3. **Esfuerzo cortante en la superficie libre:** El vector normal a la superficie es  $\hat{\mathbf{n}} = \left(-\frac{\partial S_f}{\partial x}, -\frac{\partial S_f}{\partial y}, 1\right)^T$ , por tanto el esfuerzo:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{z=S_f} = \begin{pmatrix} -\tau_{xx} \frac{\partial S_f}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial S_f}{\partial y} + \tau_{xz} \\ -\tau_{yx} \frac{\partial S_f}{\partial x} - \tau_{yy} \frac{\partial S_f}{\partial y} + \tau_{yz} \\ -\tau_{zx} \frac{\partial S_f}{\partial x} - \tau_{zy} \frac{\partial S_f}{\partial y} + \tau_{zz} \end{pmatrix} \Bigg|_{z=S_f} = \begin{pmatrix} \tau_{sx} \\ \tau_{sy} \\ \tau_{sz} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Y las condiciones sobre el fondo serán:

1. **Velocidad en el fondo:** Sea  $G(x, y, z) = z_b(x, y) - z = 0$  la ecuación que define la superficie del fondo, que supondremos constante (no erosionable), entonces análogamente al caso anterior:

$$u \frac{\partial z_b}{\partial x} + v \frac{\partial z_b}{\partial y} - w = 0 \quad (\text{A.11})$$

2. **Condición de no deslizamiento**  $u = v = w = 0$  en  $z = z_b(x, y)$ .

3. **El esfuerzo cortante:**

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{z=z_b} = \begin{pmatrix} -\tau_{xx} \frac{\partial z_b}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial z_b}{\partial y} + \tau_{xz} \\ -\tau_{yx} \frac{\partial z_b}{\partial x} - \tau_{yy} \frac{\partial z_b}{\partial y} + \tau_{yz} \\ -\tau_{zx} \frac{\partial z_b}{\partial x} - \tau_{zy} \frac{\partial z_b}{\partial y} + \tau_{zz} \end{pmatrix} \Bigg|_{z=z_b} = \begin{pmatrix} \tau_{bx} \\ \tau_{by} \\ \tau_{bz} \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

### A.3. Ecuaciones promediadas

Se procede ahora a integrar las ecuaciones en la vertical para expresarlas en función de variables promediadas en la columna. Para las velocidades se emplea la siguiente notación:

$$U = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} u dz \quad (\text{A.13})$$

de manera que la variable se podrá expresar como  $u = U + \Delta u$ , donde  $\Delta u(z)$  es una función que expresa la variación respecto de la media y cuya integral es nula. Y para el resto de variables

$$\bar{\rho} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} \rho dz. \quad (\text{A.14})$$

#### A.3.1. Ecuación de continuidad

Partiendo de la ecuación completa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (\text{A.15})$$

se integra cada uno de los términos:

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \rho}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho dz - \left( \rho \frac{\partial z_s}{\partial t} \right) \Bigg|_{z_s} + \left( \rho \frac{\partial z_b}{\partial t} \right) \Bigg|_{z_b} = \frac{\partial(h\bar{\rho})}{\partial t} - \left( \rho \frac{\partial z_s}{\partial t} \right) \Bigg|_{z_s}, \quad (\text{A.16})$$

donde se ha empleado la regla de Leibniz para derivar la integral y que la superficie del fondo es estática.

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \rho u dz - \left( \rho u \frac{\partial z_s}{\partial x} \right) \Big|_{z_s} + \left( \rho u \frac{\partial z_b}{\partial x} \right) \Big|_{z_b} = \\ &= \frac{\partial(h\bar{\rho}u)}{\partial x} - \left( \rho u \frac{\partial z_s}{\partial x} \right) \Big|_{z_s} + \left( \rho u \frac{\partial z_b}{\partial x} \right) \Big|_{z_b}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

y análogamente para la dirección  $y$ . Por otra parte,

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} dz = (\rho w) \Big|_{z_s} - (\rho w) \Big|_{z_b}. \quad (\text{A.18})$$

De manera que la ecuación completa queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{\rho})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{\rho}u)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{\rho}v)}{\partial y} + \rho \Big|_{z_s} \left( -\frac{\partial z_s}{\partial t} - u \frac{\partial z_s}{\partial x} - v \frac{\partial z_s}{\partial y} + w \right) \Big|_{z_s} + \\ + \rho \Big|_{z_b} \left( u \frac{\partial z_b}{\partial x} + v \frac{\partial z_b}{\partial y} - z \right) \Big|_{z_b} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

que aplicando las condiciones de contorno queda como:

$$\frac{\partial(h\bar{\rho})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{\rho}u)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{\rho}v)}{\partial y} = 0. \quad (\text{A.20})$$

Estudiando los términos cruzados:

$$h\bar{\rho}u = \int_{z_b}^{z_s} \rho u dz = h\bar{\rho}U + \underbrace{\int_{z_b}^{z_s} \Delta\rho\Delta u dz}_{=-hD_{sx}} + \bar{\rho} \underbrace{\int_{z_b}^{z_s} \Delta u dz}_{=0} + U \underbrace{\int_{z_b}^{z_s} \Delta\rho dz}_{=0} \quad (\text{A.21})$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial(h\bar{\rho})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{\rho}U)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{\rho}V)}{\partial y} = \frac{\partial(hD_{sx})}{\partial x} + \frac{\partial(hD_{sy})}{\partial y}, \quad (\text{A.22})$$

aunque generalmente se desprecia la contribución de los términos cruzados  $\frac{\partial(hD_{sx})}{\partial x} \approx \frac{\partial(hD_{sy})}{\partial y} \approx 0$  y se considera la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial(h\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(h\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(h\rho V)}{\partial y} = 0. \quad (\text{A.23})$$

donde se ha eliminado la notación con barra para los promedios por simplicidad, pero todas las variables son promediadas en la vertical.

### A.3.2. Ecuaciones del momento lineal en $x$ e $y$

Se realiza el desarrollo para la componente  $x$ , el de la componente  $y$  es equivalente. Se comienza con la ecuación completa:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}. \quad (\text{A.24})$$

Para el término que incluye la gravedad, empleamos que el perfil de presión es hidrostático, por lo tanto:

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial p}{\partial x} dz = g \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_z^{z_s} \rho(\zeta) d\zeta \right) dz, \quad (\text{A.25})$$

se realiza la siguiente aproximación, la cual no será cierta para una gran cantidad de perfiles de temperatura, pero sus efectos sobre la dinámica serán despreciables:

$$\int_z^{z_s} \rho(\zeta) d\zeta \approx \bar{\rho}(z_s - z), \quad (\text{A.26})$$

con lo que finalmente, aplicando la regla de Leibniz, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial p}{\partial x} dz &\approx g \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \bar{\rho}(z_s - z) dz - g(\bar{\rho}(z_s - z))|_{z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + g(\bar{\rho}(z_s - z))|_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} g \bar{\rho} h^2 \right) + g \bar{\rho} h \frac{\partial z_b}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Se analiza a continuación el efecto de los términos de fricción:

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_s} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \tau_{xy} dz + \\ &+ \underbrace{\left( -\tau_{xx} \frac{\partial z_s}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial z_s}{\partial y} + \tau_{xz} \right) \Big|_{z_b}}_{=\tau_{sx}} - \underbrace{\left( -\tau_{xx} \frac{\partial z_b}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial z_b}{\partial y} + \tau_{xz} \right) \Big|_{z_s}}_{=\tau_{bx}} = \\ &= \frac{\partial h T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial h T_{xy}}{\partial y} + \tau_{sx} - \tau_{bx}, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

donde  $T_{ij}$  representa el promedio vertical de los esfuerzos  $\tau_{ij}$ , esta contribución se despreciará en este trabajo. Además  $\tau_{sx}$ , que vendrá dado por los efectos del viento, se considera despreciable frente a  $\tau_{bx}$ .

Para los términos restantes se realiza un proceso de integración análogo al empleado en la ecuación de continuidad y se obtiene, para el miembro de la izquierda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{\rho}u)}{\partial t} + \frac{\partial(h\overline{\rho u^2})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{\rho}uv)}{\partial y} - (\rho u)|_{z_s} \underbrace{\left( \frac{\partial z_s}{\partial t} + u \frac{\partial z_s}{\partial x} + v \frac{\partial z_s}{\partial y} - w \right) \Big|_{z_s}}_{=0} + \\ + (\rho u)|_{z_b} \underbrace{\left( u \frac{\partial z_b}{\partial x} + v \frac{\partial z_b}{\partial y} - w \right) \Big|_{z_b}}_{=0}, \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

y para el miembro de la derecha:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} g \bar{\rho} h^2 \right) - g \bar{\rho} h \frac{\partial z_b}{\partial x} - \tau_{bx} \quad (\text{A.30})$$

Por lo que, aproximando el promedio de productos como el producto de promedios, se tiene la ecuación:

$$\frac{\partial(h\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( h\rho U^2 + \frac{1}{2} g \rho h^2 \right) + \frac{\partial(h\rho UV)}{\partial y} = -g\rho h \frac{\partial z_b}{\partial x} - \tau_{bx} \quad (\text{A.31})$$

Análogamente para la dirección  $y$ :

$$\frac{\partial(h\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial(h\rho VU)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( h\rho V^2 + \frac{1}{2} g \rho h^2 \right) = -g\rho h \frac{\partial z_b}{\partial y} - \tau_{by} \quad (\text{A.32})$$

## B. Relaciones de clausura para el esfuerzo basal

Se van a obtener aquí las relaciones para calcular el esfuerzo en el fondo a partir de magnitudes promediadas en la vertical para el caso de temperatura uniforme en la dirección  $z$  y para los modelos de fluido Newtoniano

$$\tau(z) = \mu \frac{dW(z)}{dz}, \quad (\text{B.1})$$

y un fluido Bingham

$$\tau(z) = \tau_y + \mu \frac{dW(z)}{dz}. \quad (\text{B.2})$$

Realizaremos el cálculo para el segundo y después particularizaremos para  $\tau_y = 0$ . Comenzamos mostrando el perfil de esfuerzo asumido:

$$\tau(z) = \tau_b \left(1 - \frac{z - z_b}{h}\right), \quad (\text{B.3})$$

de esta manera podemos igualar la expresión del perfil a la Ley de esfuerzo:

$$\tau_y + \mu \frac{dW(z)}{dz} = \tau_b \left(1 - \frac{z}{h}\right), \quad (\text{B.4})$$

y despejar la derivada de la velocidad:

$$\frac{dW(z)}{dz} = \begin{cases} \frac{1}{\mu} [\tau_b (1 - \frac{z}{h}) - \tau_y] & \text{si } 0 < z < z_0 \\ 0 & \text{si } z_0 < z < h \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

donde  $z_0 = h \left(1 - \frac{\tau_y}{\tau_b}\right)$  es la altura en la cual el esfuerzo  $\tau(z)$  se hace menor que el esfuerzo umbral  $\tau_y$  y por tanto la deformación debe ser nula. Integrando podemos hallar el perfil de temperatura: Si  $0 < z < z_0$ :

$$W(z) = \begin{cases} \int_0^z \frac{1}{\mu} [\tau_b (1 - \frac{z}{h}) - \tau_y] dz = \frac{\tau_b - \tau_y}{\mu} z - \frac{\tau_b}{2h\mu} z^2 & \text{si } 0 < z < z_0 \\ W(z_0) = \frac{\tau_b h}{2\mu} \left(1 - \frac{\tau_y}{\tau_b}\right)^2 & \text{si } z_0 < z < h \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Con este perfil ya podemos calcular la velocidad media

$$\begin{aligned} h\bar{W} &= \int_0^h U(z) dz = \int_0^{z_0} \left( \frac{\tau_b - \tau_y}{\mu} z - \frac{\tau_b}{2h\mu} z^2 \right) dz + (h - z_0) \frac{\tau_b h}{2\mu} \left(1 - \frac{\tau_y}{\tau_b}\right)^2 = \\ &= \frac{\tau_b - \tau_y}{2\mu} h^2 \left(1 - \frac{\tau_y}{\tau_b}\right)^2 - \frac{\tau_b}{6\mu} h^2 \left(1 - \frac{\tau_y}{\tau_b}\right)^3 + \frac{\tau_y}{2\mu} h^2 \left(1 - \frac{\tau_y}{\tau_b}\right)^2 = \\ &= \frac{h^2}{2\mu} \left( \frac{2}{3} \tau_b - \tau_y + \frac{\tau_y^3}{3\tau_b^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

de donde podemos finalmente obtener la relación de clausura

$$\left(\frac{\tau_y}{\tau_b}\right)^3 - 3 \left(1 + 2\frac{\mu\bar{W}}{\tau_y h}\right) \frac{\tau_y}{\tau_b} + 2 = 0. \quad (\text{B.8})$$

Poniendo  $\tau_y = 0$  para un fluido Newtoniano

$$-3\frac{\mu\bar{W}}{\tau_b h} + 1 = 0, \quad (\text{B.9})$$

de donde

$$\tau_b = \frac{3\mu\bar{W}}{h} \quad (\text{B.10})$$

## C. Solver de Riemann para flujos térmicos.

Partiendo de la forma conservativa del sistema:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_\tau \quad (\text{C.1})$$

En los métodos de volúmenes finitos, cada celda del dominio espacial se toma como un volumen de control sobre el cual se plantea la conservación de las variables  $\mathbf{U}$ . De esta manera, si integramos la ecuación 3.2 sobre la celda  $i$ -ésima, cuyas paredes de celda se denotan como  $i - \frac{1}{2}$  y  $i + \frac{1}{2}$

$$\int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dx + \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} dx = \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \mathbf{S}_b dx + \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \mathbf{S}_\tau dx, \quad (\text{C.2})$$

lo cual, aplicando el Teorema Fundamental del cálculo en el segundo término y usando las variables promediadas en cada celda, para un instante  $t^n$ :  $\mathbf{U}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \mathbf{U} dx$ ,

$$\Delta x \frac{d}{dt} \mathbf{U}_i^n + \left[ (\mathbf{F}(\mathbf{U}))_{i+\frac{1}{2}} - (\mathbf{F}(\mathbf{U}))_{i-\frac{1}{2}} \right] = \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \mathbf{S}_b dx + \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \mathbf{S}_\tau dx, \quad (\text{C.3})$$

Integrando entre los instantes  $t^n$  y  $t^{n+1}$

$$\Delta x (\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{F}(\mathbf{U}))_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}(\mathbf{U})_{i-\frac{1}{2}} dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \mathbf{S}_b dx dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \mathbf{S}_\tau dx dt, \quad (\text{C.4})$$

Si el paso de tiempo y el tamaño de celda son pequeños en comparación con las escalas de tiempo del problema, podemos aproximar la integración de los términos fuentes entre dos pasos de tiempo consecutivos como:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \mathbf{S}_b(\mathbf{U}) dx dt \approx \Delta t \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \mathbf{S}_b(\mathbf{U}_i^n) dx \equiv \Delta t \bar{\mathbf{S}}_b \quad (\text{C.5})$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \mathbf{S}_\tau(\mathbf{U}) dx dt \approx \Delta t \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \mathbf{S}_\tau(\mathbf{U}_i^n) dx \equiv \Delta t \bar{\mathbf{S}}_\tau \quad (\text{C.6})$$

Una discusión más detallada sobre la integración de los términos se puede ver en [27].

El método de Godunov consiste en sustituir las integrales de los flujos por unas cantidades adecuadamente calculadas:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{F}(\mathbf{U}))_{i+\frac{1}{2}} dt \approx \Delta t \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^\downarrow \quad (\text{C.7})$$

Y sustituyendo tendremos

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^\downarrow - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^\downarrow \right] + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{\mathbf{S}}_b + \bar{\mathbf{S}}_\tau) \quad (\text{C.8})$$

En este caso calcularemos los flujos y el término fuente  $\mathbf{S}_b$  de manera *upwind* (en la dirección de la onda propagada) con un *solver* de tipo Riemann aproximado con promedios de Roe. En cambio, el término fuente  $\mathbf{S}_\tau$  se aproximará por su valor centrado en la celda. A continuación se explica de manera más detallada en qué consisten estos métodos.

Un solucionador de Riemann se basa en la idea de plantear un problema de Riemann en cada pared de celda, es decir, un problema que presenta una discontinuidad entre dos valores constantes:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_i^n & \text{si } x < (i + \frac{1}{2}) \Delta x \\ \mathbf{U}_{i+1}^n & \text{si } x > (i + \frac{1}{2}) \Delta x \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

Aquí  $\mathbf{U}_i^n$  y  $\mathbf{U}_{i+1}^n$  representan las variables promediadas en las celdas  $i$  e  $i + 1$ .

El esquema de Roe consiste en la linealización local del problema empleando un jacobiano aproximado  $\tilde{\mathbf{J}}$  en la pared de cada celda de manera que localmente se aproxima la ecuación como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{J}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S}_b, \quad (\text{C.10})$$

donde se ha ignorado el término fuente de fricción, que se tratará con una aproximación puntual centrada en la celda.

Este jacobiano aproximado debe ser diagonalizable con autovalores reales para preservar la hiperbolicidad del sistema. Sea  $\mathbf{P}$  la matriz de cambio de base a la forma diagonal, definida por los vectores  $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3\}$  de manera que  $\mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{P} = \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ , con  $\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3)$ . Multiplicando el sistema linealizado por  $\mathbf{P}^{-1}$  a la izquierda:

$$\mathbf{P}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S}_b \quad (\text{C.11})$$

denotando  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{U}$  y  $\boldsymbol{\beta} = \Delta x \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S}_b$  esto queda como

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{\Lambda}} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \boldsymbol{\beta} \quad (\text{C.12})$$

Haciendo un tratamiento de diferencia finita:

$$\boldsymbol{\xi}^{n+1} = \boldsymbol{\xi}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\mathbf{\Lambda}} \delta \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\beta}), \quad (\text{C.13})$$

lo que nos da como cambia la variable debido a los flujos en una de las paredes de la celda, si consideramos las dos paredes, deshacemos el cambio de variable para recuperar la variable  $\mathbf{U}$  y consideramos una actualización *upwind* se obtiene

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left( \sum_{k+} (\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k - \tilde{\beta}_k) \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i+\frac{1}{2}} + \left( \sum_{k-} (\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k - \tilde{\beta}_k) \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i-\frac{1}{2}} \right], \quad (\text{C.14})$$

donde  $\tilde{\alpha}_k$  son las amplitudes de las ondas propagadas:  $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3)^T = \mathbf{P}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} \delta \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^n$ , con  $\delta \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^n = \mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n$ , siendo  $i, i + 1$  las celdas consecutivas separadas por la pared  $i + \frac{1}{2}$ .

Si denotamos  $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)^T$ , podemos escribir los flujos como:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} U_2 \\ \frac{U_2^2}{U_1} + gU_1(U_1 - U_3) \\ \frac{U_2 U_3}{U_1} \end{pmatrix} \quad (\text{C.15})$$

lo que nos lleva a un jacobiano

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -U_2^2/U_1^2 + g(2U_1 - U_3)/2 & 2U_2/U_1 & -gU_1/2 \\ -U_2 U_3/U_1^2 & U_3/U_1 & U_2/U_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.16})$$

El jacobiano aproximado queda entonces

$$\mathbf{J}_{i+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\tilde{U}^2 + g\tilde{h}(1 - \tilde{r})/2 & 2\tilde{U} & -g\tilde{r}\tilde{h}/2 \\ -\tilde{U}\tilde{T}^\nabla/\tilde{r} & \tilde{T}^\nabla/\tilde{r} & \tilde{U} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.17})$$

Para que esté correctamente definido debe cumplir que  $\mathbf{F}(\mathbf{U})_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{\mathbf{J}}_{i+\frac{1}{2}}\delta\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}$ , lo que se verifica definiendo

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \frac{r_i h_i + r_{i+1} h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \\ \tilde{h} &= \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \\ \tilde{T}^\nabla &= \tilde{r} \frac{T_i^\nabla h_i \sqrt{r_{i+1} h_{i+1}} + T_{i+1}^\nabla h_{i+1} \sqrt{r_i h_i}}{r_i h_i \sqrt{r_{i+1} h_{i+1}} + r_{i+1} h_{i+1} \sqrt{r_i h_i}} \\ \tilde{U} &= \frac{U_i \sqrt{r_i h_i} + U_{i+1} \sqrt{r_{i+1} h_{i+1}}}{\sqrt{r_i h_i} + \sqrt{r_{i+1} h_{i+1}}} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

La diagonalización nos lleva a unas velocidades de onda:

$$\tilde{\lambda}_1 = (\tilde{u} - \tilde{c}), \quad \tilde{\lambda}_2 = (\tilde{u} + \tilde{c}), \quad \tilde{\lambda}_3 = \tilde{u}, \quad (\text{C.19})$$

donde  $c = \sqrt{g\tilde{h}(1 + \tilde{r} - \tilde{T}^\nabla)/2} = \sqrt{g\tilde{h}\tilde{m}/2}$  y la matriz de cambio de base:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \tilde{r} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \tilde{r}\tilde{u} \\ \tilde{T}^\nabla/\tilde{r} & \tilde{T}^\nabla/\tilde{r} & 1 + \tilde{r} \end{pmatrix} \quad (\text{C.20})$$

de donde se pueden calcular las amplitudes de onda:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= \frac{1}{2\tilde{c}\tilde{m}} [\delta(rh)((1 + \tilde{r})\tilde{c} + \tilde{m}\tilde{u}) - \tilde{m}\delta(rhu) - \tilde{r}\tilde{c}\delta(hT^\nabla)], \\ \tilde{\alpha}_2 &= \frac{1}{2\tilde{c}\tilde{m}} [\delta(rh)((1 + \tilde{r})\tilde{c} - \tilde{m}\tilde{u}) + \tilde{m}\delta(rhu) - \tilde{r}\tilde{c}\delta(hT^\nabla)], \\ \tilde{\alpha}_3 &= \frac{1}{\tilde{m}} \left[ \delta(hT^\nabla) - \frac{\tilde{T}^\nabla}{\tilde{r}}\delta(rh) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Finalmente podemos escribir  $\beta$  como

$$\beta_1 = -\frac{g\tilde{r}\Delta z_b}{2\tilde{c}}, \quad \beta_2 = \frac{g\tilde{r}\Delta z_b}{2\tilde{c}}, \quad \beta_3 = 0. \quad (\text{C.22})$$

Cuando se trabaja con leyes hiperbólicas de conservación en su formulación débil, es decir, aquella que nos permite tener soluciones con discontinuidades, por motivos de unicidad de la solución es necesario imponer unas condiciones sobre las soluciones de forma que tengan sentido físico, son las denominadas condiciones “de entropía”. En el empleo de métodos de volúmenes finitos como el aquí empleado, es necesario introducir una corrección a los métodos para evitar que ocurran efectos no deseados y sin significado físico.

En este trabajo se empleará la corrección que se explica en [28] y que afecta al caso en el que las velocidades de onda centradas en celdas consecutivas tienen signos opuestos. Sean estas velocidades:  $\lambda_i^m < 0 < \lambda_j^m$ , entonces se podría dar el caso en que al calcular la velocidad de onda

aproximada  $\tilde{\lambda}_k^m$  en la pared de la celda, esta se anule o tenga un valor incorrecto. Para evitarlo dividimos la onda en dos diferentes con sentidos opuestos y velocidades

$$\bar{\lambda}_k^m = \lambda_i^m \frac{\lambda_j^m - \tilde{\lambda}_k^m}{\lambda_j^m - \lambda_i^m} < 0 \quad \text{y} \quad \hat{\lambda}_k^m = \lambda_j^m \frac{\tilde{\lambda}_k^m - \lambda_i^m}{\lambda_j^m - \lambda_i^m} > 0 \quad (\text{C.23})$$

las cuales cumplen que  $\bar{\lambda}_k^m + \hat{\lambda}_k^m = \tilde{\lambda}_k^m$ , de manera que efectivamente hemos dividido el flujo en la pared de la celda en dos.

## D. Más detalles del volcán de La Palma

Se muestra a continuación un desglose de la figura 4.4 en mayor tamaño, es destacable el refinamiento de la malla en las zonas de flujo de lava. Además, se muestran imágenes del flujo 20 horas después del inicio de la erupción.

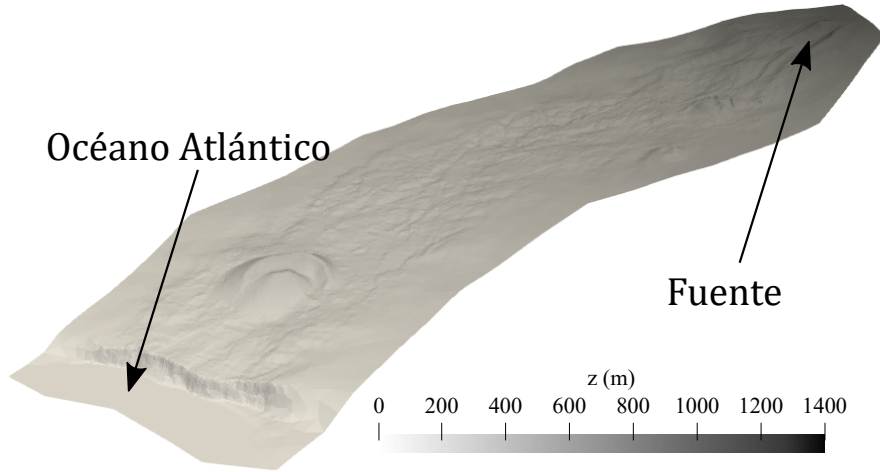


Figura D.1: Terreno sobre el que se realiza la simulación.

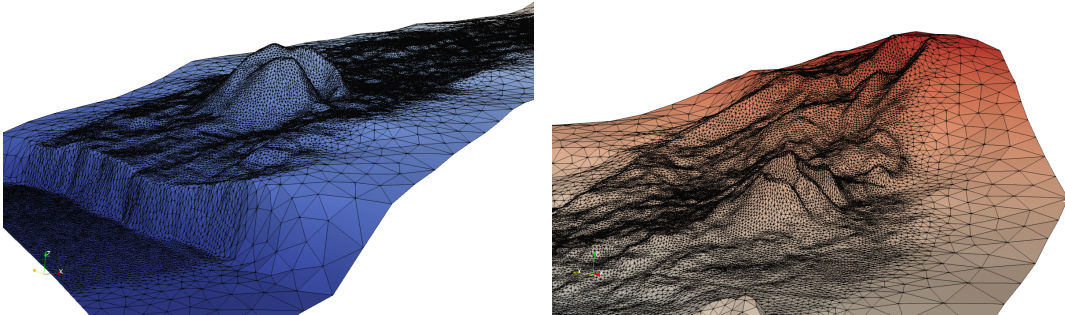


Figura D.2: Detalle del mallado.

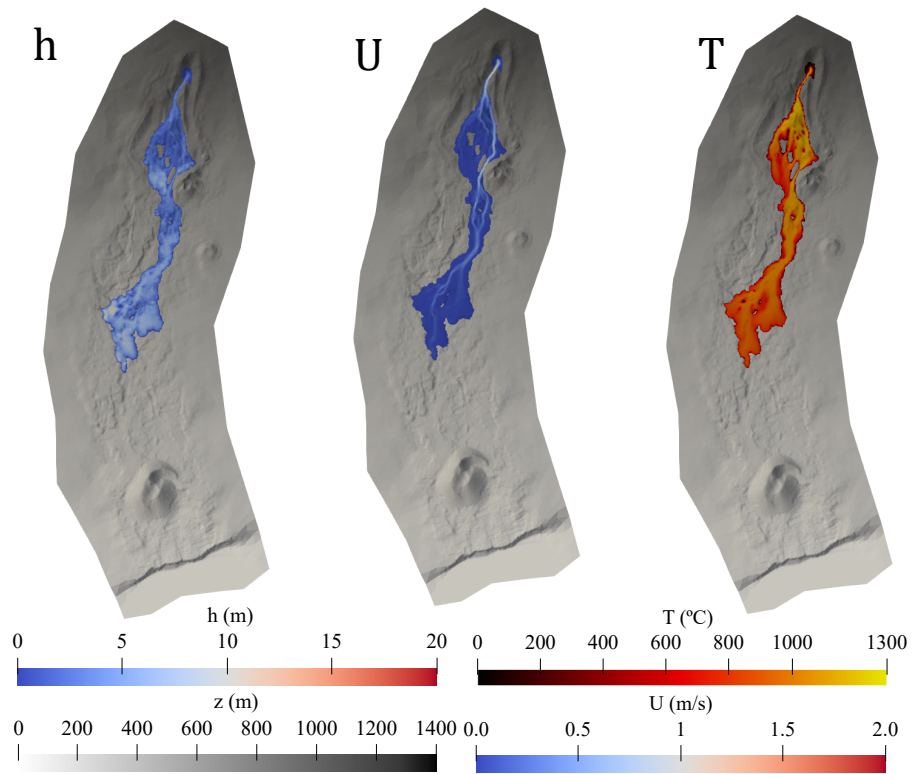


Figura D.3: Test 4. Modelo con perfil de difusión en  $t=20$  h.

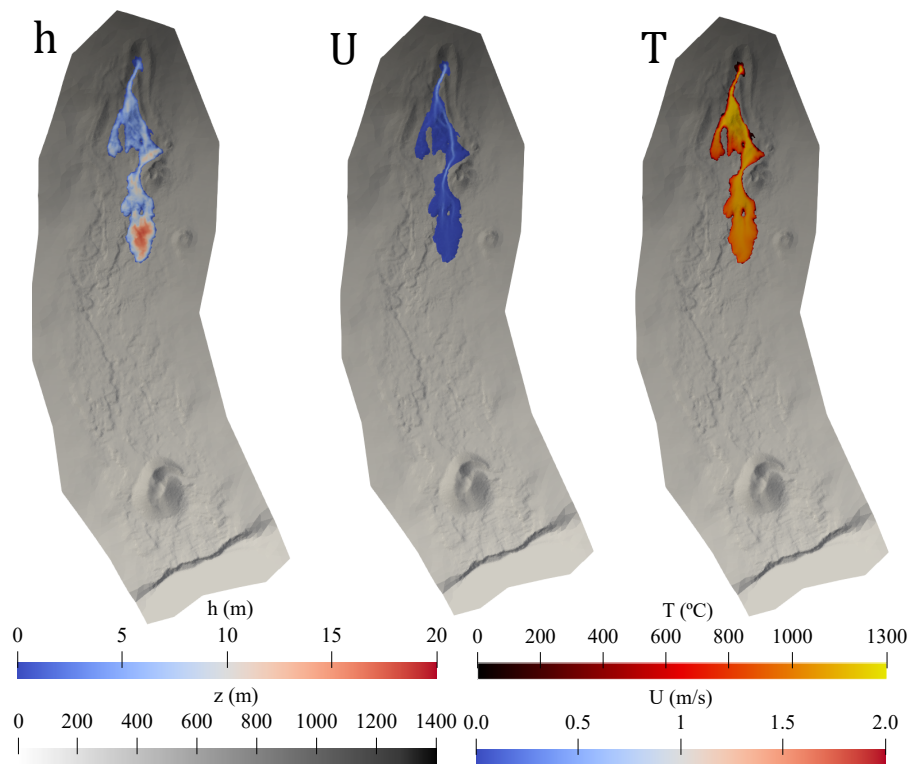


Figura D.4: Test 4. Modelo con perfil uniforme en  $t=20$  h.