Sobre el movimiento relativo de dos masas puntuales en una nube esférica homogénea

Néstor Vicente Sánchez
Trabajo de Fin de Grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Luis Floría Gimeno
28 de junio de 2023

Summary

We shall consider the problem of motion (in the ordinary three-dimensional space) of two point masses within a spherical cosmic cloud of very low density.

The Soviet astronomer Vladimir V. Radzievskij proposed this problem under the hypothesis that the only forces acting on this system are the mutual gravitational interactions (according to Newton's Universal Gravitation Law) between the two point masses and between these masses and the particles of the cloud. In addition to this, he also assumed that the density of the cloud is sufficiently small so that the friction between the two masses and the particles of the cloud could be neglected.

In what follows, we shall call this problem the **Radzievskij problem**.

After formulating the problem as a particular case of the three–body problem, he recast it as a perturbed Keplerian system in which the acting force is a *conservative central force* consisting of the usual Newtonian–Keplerian term and an additional perturbing term of small magnitude as compared with the dominant Newtonian–Keplerian one.

By means of the *first integrals* of the angular momentum vector and the total mechanical energy, and using polar coordinates (r, φ) taken in the orbital plane, he reduced the corresponding problem of relative motion to *a quadrature*, thus obtaining an orbit equation in inverted form, $\varphi = \varphi\,(r; \text{constants};\ \text{parameters})$, in terms of an Abelian integral.

Later on, the Serbian researcher Mihailović also investigated this problem from different analytical approaches.

Before going into details concerning our treatment of the Radzievskij problem throughout this Memoir, we shall collect some general concepts and results of Celestial Mechanics and Astrodynamics.

Any unperturbed Keplerian conic–section orbit (that is, any non–degenerate solution to the pure Kepler problem) can be characterized by means of a (non–unique) set of *six* functionally independent constants, called **orbital elements** or **orbital parameters**, related to the *classical first integrals* of Keplerian motion, namely, the first integrals of the angular momentum vector and the Laplace vector, and the scalar first integral of the total mechanical energy.

Five of these elements are of a purely "geometric" (or "static") nature, that is, they give account of the geometry of the orbit (its shape, size, orientation in space, etc). The *sixth* one is of a "kinematic" nature, and allows us to determine at each instant of time the specific position of the moving particle along the conic–section at issue.

In certain cases, this definition of orbital elements is enlarged so that linear functions of the independent variable are also considered "orbital elements". For instance, this is the case of the *mean anomaly*, which is a linear function of physical time.

In this Undergraduate Dissertation we shall just take the mean anomaly as the kinematic element relating time to position along a Keplerian orbit.

As already stated, orbital elements are usually considered to remain constant along a pure Keplerian motion. However, they can undergo changes when additional forces (perturbations) are superimposed to a (purely) Keplerian system.

There exist certain perturbation techniques of Celestial Mechanics that give account of the variations that orbital elements experience due to the presence of additional perturbing forces. Most of such perturbation methods are concerned with disturbed *elliptic–type* orbital motion.

Amongst the diverse analytical perturbation techniques used in Celestial Mechanics and Astrodynamics, we can mention the so–called **planetary equations**, that describe the time variations of orbital elements in terms of the acting perturbing forces. That is, these equations provide us with the time derivatives of orbital parameters in terms of the perturbing forces.

When the disturbing forces derive from a scalar potential, the right–hand sides of these equations can be expressed in terms of partial derivatives of the perturbing potential with respect to the orbital elements. In this case, it is said that planetary equations are in the **form of Lagrange**.

Even if the disturbing forces do not admit a scalar potential, they can be split into their components along the *radial, transversal and normal directions*. In this way, the planetary equations can be established in the **form of Gauss**, in which the right–hand sides of the equations involve the aforementioned components of the perturbing forces.

After these general comments, we shall briefly describe the contents and approaches of our study.

In the present Undergraduate Dissertation we intend to undertake the aforementioned Radzievskij problem by means of several methods that have been expounded in the subjects *Mathematical Astronomy* and *Celestial Mechanics* pertaining to the studies in the Degree in Mathematics at the University of Zaragoza.

To start with, we shall deal with this problem following the *standard procedure* (based on the existence of the first integrals of the angular momentum and the total mechanical energy) usually applied to problems of motion within conservative central force fields in terms of polar coordinates (r, φ) in the orbital plane. Proceeding in this way, and completing the required calculation details, we shall recover Radzievskij's results giving a thorough account of his solution procedure.

In addition to this, we shall also prove that the Radzievskij system *does not admit* the Laplace vector of Keplerian motion as a first integral.

Then, we shall resort to the **Binet Method**, based on a transformation of the radial variable r to $1/r$ and a differential transformation of the independent variable t to the polar angle φ, and convert the equation of motion for the radial variable into a second–order ordinary differential equation corresponding to a *non–linearly forced harmonic oscillator* for the scalar variable $1/r$ with φ as the independent variable.

That second–order equation admits a *first integral* that can be interpreted as a first-order ordinary differential equation for the unknown function $1/r$ of the independent variable φ; from this first–order equation we can solve for the derivative of $1/r$ with respect to φ in terms of an algebraic function of r, which leads (after separation of variables) to a solution for φ in terms of an Abelian integral depending on r.

Finally, we shall perform an orbital–element treatment of the perturbed Keplerian system corresponding to the Radzievskij problem. To this end we shall establish the *Gaussian planetary equations* corresponding to the Radzievskij problem, reformulate them by means of the eccentric anomaly E of elliptic Keplerian motion as the independent variable, and rewrite their right–hand sides as explicit functions of E, which will allow us to easily integrate them over a complete revolution of the moving particle along an elliptic Keplerian reference orbit.

Accordingly, we shall obtain a *first–order analytical solution* to the Radzievskij problem by means of the variations of a set of orbital elements along a complete period of the aforesaid reference ellipse. In this way, we can identify the *secular* and *periodic* terms in the first–order changes of the orbital elements under consideration.

Índice general

Capítulo 1

Marco conceptual y contenido del Trabajo

En este Trabajo de Fin de Grado se analizará un problema de Astronomía Teórica originalmente propuesto por el astrónomo soviético Vladimir V. Radzievskij en una breve nota [9] aparecida en la publicación *"Transactions (Doklady)" de la Academia de las Ciencias de la URSS* en 1953.

En lo sucesivo, se utilizará la expresión **problema de Radzievskij** para referirse a dicho problema.

Para su tratamiento se utilizarán tres métodos analíticos estudiados en las asignaturas de *Astronomía Matemática* y *Mecánica Celeste* que forman parte del bloque *Astrodinámica* del Plan de Estudios del Grado en Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

En primer lugar, siguiendo el esquema del artículo de Radzievskij y completando los detalles de cálculo omitidos por este autor, se obtendrá por cuadratura una ecuación de las órbitas solución de acuerdo con el *tratamiento clásico* del problema del movimiento de una masa puntual en un **campo de fuerzas central conservativo** (Boccaletti y Pucacco [2, §2.1 Pág. 126–131]; Goldstein [4, §3.1–3.3, Pág. 70–82]; Scheck [8, §1.7, §§1.7.2, Pág. 12–15; §1.24, Pág.44–49]).

A continuación se aplicará un método de *linealización y regularización* de sistemas keplerianos que permite transformar la ecuación del movimiento de la variable radial del problema de Kepler en una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes que se interpreta como la ecuación de un oscilador armónico unidimensional sometido a una fuerza externa constante. En concreto, se utilizará el **Método de Binet** (Boccaletti y Pucacco [2, §2.1, Pág. 134–135]; Goldstein [4, §3.5, Pág. 85–86]), mediante el cual los sistemas keplerianos perturbados se llevan a la forma de *osciladores perturbados*.

Finalmente se utilizarán las **ecuaciones planetarias** en la forma de **Gauss** (Abad, [1, §12.3, Pág. 195–197]) para obtener las variaciones de primer orden (respecto de un pequeño parámetro de perturbación) de un conjunto de elementos orbitales de tipo elíptico debidas a la fuerza perturbadora que actúa en el problema de Radzievskij, lo cual permitirá identificar los términos *seculares* (de efecto acumulativo) y términos *periódicos* (Abad [1, §12.4, Pág. 197–198]) de las perturbaciones de dichos elementos orbitales.

En este primer capítulo se introducen algunos conceptos y resultados de Mecánica Clásica y Mecánica Celeste que han resultado útiles para la realización del trabajo presentado en esta Memoria.

En particular se efectúan unas consideraciones generales sobre el **problema de Kepler**, entendido como el problema del movimiento relativo en el caso del *problema gravitatorio de dos cuerpos*, es decir, el estudio del movimiento de un sistema de dos masas puntuales bajo el efecto de su mutua atracción gravitatoria de acuerdo con la Ley de Gravitación Universal de Newton, y en ausencia de otro tipo de fuerzas que actúen sobre dicho sistema de partículas. A continuación se considera el *movimiento kepleriano perturbado* y, finalmente, se particularizan las ideas anteriores para el caso concreto del problema de Radzievskij.

En el siguiente capítulo se presentará de una manera más rigurosa la formalización matemática de los conceptos y resultados mencionados a continuación, y cuya aplicación al problema de Radzievskij se efectuará en el tercer capítulo de la Memoria.

1.1. El problema gravitatorio de dos cuerpos y el problema de Kepler

1.1.1. Problema gravitatorio de dos cuerpos

Se considera un sistema dinámico formado por dos cuerpos puntuales (o partículas) aislados en el espacio ordinario tridimensional y, por lo tanto, sometidos tan solo a las fuerzas de su mutua interacción gravitatoria regida por la Ley de Gravitación Universal de Newton.

Tales fuerzas serán entonces fuerzas internas del sistema (Scheck [8, §1.7, Pág. 11–18]); es decir, cumplirán la Tercera Ley de Newton de la Dinámica (Principio de Acción y Reacción).

Esta situación da lugar al que se conoce como **problema gravitatorio de dos cuerpos** (ver Abad [1, §7.5, Pág. 115–116]; Scheck [8, §§1.7.2, Pág. 12–17]; Boccaletti–Pucacco [2, §2.1, Pág. 126]).

En estas condiciones, y una vez fijado en el espacio un sistema de referencia inercial, el problema del movimiento de estas partículas puede formularse matemáticamente por medio de un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias vectoriales de segundo orden en el que las funciones incógnita son los vectores de posición de las partículas (respecto del sistema de referencia considerado) y la variable independiente es el tiempo físico t.

Estas ecuaciones son no lineales y acopladas, y no es posible su resolución analítica por medio de funciones elementales explícitas del tiempo (aunque sí lo es por medio de funciones trigonométricas e hiperbólicas de otras variables independientes de tipo angular).

Descomponiendo los vectores de posición de las partículas en sus componentes escalares respecto del sistema de referencia fijado de antemano, el sistema diferencial vectorial anterior es equivalente a un sistema de seis ecuaciones diferenciales escalares de segundo orden.

De manera que el problema de partida puede considerarse como un problema diferencial vectorial de orden 4 o como un problema diferencial de orden 12 para las componentes escalares de los vectores de posición.

En consecuencia la solución general de este problema requerirá cuatro constantes vectoriales, o doce constantes escalares, arbitrarias.

Como no es posible resolver directamente este sistema diferencial, una manera de abordar su tratamiento consiste en intentar hallar *integrales primeras* del problema que proporcionen información sobre algunas propiedades de sus soluciones y permitan *reducir el orden* diferencial del sistema de partida.

Con este propósito se efectúa un cambio de variables dependientes para eliminar de la formulación del problema los vectores de posición de las partículas y reemplazarlos por las que se conocen como **coordenadas del centro de masas** y **coordenadas relativas** (de una partícula respecto de la otra).

Por medio de este cambio de funciones incógnita el sistema diferencial original se transforma en un nuevo sistema de dos ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden *desacopladas* (o *independientes*). Una de ellas describirá el **movimiento del centro de masas** y la otra el **movimiento relativo** de uno de los cuerpos respecto del otro.

Además es posible obtener fácilmente dos constantes vectoriales del movimiento (o seis constantes escalares) funcionalmente independientes, llamadas **integrales (primeras) del centro de masas** (que permiten reducir el orden diferencial escalar del problema original en seis unidades, es decir, desde orden 12 hasta orden 6), y cuyo significado geométrico y físico es que el centro de masas se desplaza en el espacio con un *movimiento rectilíneo uniforme* o permanece en *reposo* (según las condiciones iniciales consideradas). Con ello, el problema del movimiento del centro de masas queda completamente resuelto y entonces basta con centrarse en el estudio del movimiento relativo, es decir, en la resolución del **problema de Kepler** (Abad, [1, §7.6, Pág.116–117]; Scheck [8, §1.7, Pág. 11–13]; Boccaletti–Pucacco [2, §2.1, Pág. 126–128]), cuyas soluciones serán *cónicas* con el centro de fuerzas en uno de sus focos.

1.1.2. Problema de Kepler y sus integrales primeras clásicas

En formulación Newtoniana, el *problema de Kepler* consiste en el estudio del sistema dinámico caracterizado por la ecuación diferencial vectorial

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} = -\frac{\mu}{r^2}\widehat{\mathbf{r}}, \tag{1.1}$$

siendo $\mathbf{r}$ el vector de la posición relativa de una partícula respecto de la otra, r su norma euclídea, $\widehat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ el vector unitario en la dirección de tal vector en cada instante y μ una constante que representa el producto de la masa total del sistema (es decir, la suma de las dos masas) por la constante de gravitación universal $\mathscr{G}$, habiendo usado la "notación de puntos" para expresar las derivadas respecto del tiempo.

El problema diferencial formulado mediante la ecuación vectorial (1.1) es un problema de orden 2 para la función incógnita $\mathbf{r}$ (equivalente a orden escalar 6 para sus componentes escalares).

La forma funcional de la fuerza que aparece en el segundo miembro de esta ecuación obedece a la de una *fuerza central conservativa*, por lo que este problema admite la integral primera vectorial del **momento angular G** (que proporciona tres integrales primeras escalares funcionalmente independientes) y la integral primera escalar de la **energía kepleriana** $\mathscr{E}_k$, funcionalmente independiente de las anteriores (Abad, [1, §8.2, Pág. 124–125]; Boccaletti–Pucacco [2, §2.1, Pág. 128–130]; Goldstein [4, §3.2, Pág. 71–74]; Scheck [8, §§1.7.2, Pág. 12–13]).

Gracias a estas cuatro integrales primeras funcionalmente independientes el problema de Kepler puede reducirse de orden 6 a orden 2. Además la conservación del vector momento angular indica que el movimiento tiene lugar en un plano fijo, denominado **plano orbital**, lo cual permitirá un tratamiento bidimensional del movimiento en el seno de dicho plano (en lugar de en el espacio tridimensional) introduciendo adecuadamente sistemas de coordenadas (cartesianas y polares) en ese plano.

Aparte de las constantes del movimiento ya mencionadas el problema de Kepler posee otra integral primera vectorial **A** conocida como **vector de Laplace**. Se puede demostrar que de entre las tres integrales primeras escalares asociadas a esta integral vectorial y las cuatro integrales escalares anteriormente mencionadas sólo hay cinco funcionalmente independientes (Abad, [1, §8.2, Pág. 125–126]; Boccaletti–Pucacco [2, §2.1, Pág. 132–134]; Goldstein [4, §3.9, Pág. 102–105]), por lo que en última instancia la resolución completa del problema de Kepler puede reducirse a *una cuadratura* (cálculo de una primitiva).

El papel que desempeñan estas integrales primeras en el estudio del movimiento kepleriano y su interpretación geométrica pueden resumirse del siguiente modo:

- El momento angular proporciona la *orientación (posición) del plano de la órbita en el espacio tridimensional*: se trata de un plano que pasa por el origen del sistema de coordenadas relativas (el centro de fuerzas del campo central considerado) y admite al vector **G** como vector normal. Además, en el caso de que la solución del problema de Kepler sea una cónica no degenerada, la norma del vector momento angular está relacionada con la longitud del semilado recto (o parámetro) de dicha cónica.

- El valor y signo de la energía determina el *tipo de cónica* solución del problema: una elipse si su valor es negativo, una parábola si es nulo, o una hipérbola si es positivo. Además, en las órbitas elípticas e hiperbólicas, la energía está relacionada respectivamente con el semieje mayor o con el semieje real (en ambos casos denotado por a), que se pueden interpretar como un elemento geométrico relacionado con el *"tamaño"* de la órbita en cuestión.

- El vector de Laplace da la *orientación de la cónica en el plano del movimiento*, ya que su dirección será la dirección foco-pericentro (es decir, la del eje mayor en una elipse, la del eje real en una hipérbola o la del (único) eje en una parábola). Además, su norma está relacionada con la excentricidad de la cónica.

Para poder relacionar la variable independiente "tiempo" con la posición concreta que en cada instante ocupa la partícula móvil a lo largo de su órbita, se usará la **ley horaria del movimiento** (Abad, [1, §8.5, Pág. 130–139]; Boccaletti–Pucacco [2, §2.4, Pág. 147–151]; Goldstein [4, §3.8, Pág. 98–102]): la correspondiente *ecuación de Kepler* para los casos del movimiento elíptico e hiperbólico, o la *ecuación de Barker* para el movimiento parabólico. Esta ley horaria introducirá además una *sexta constante* funcionalmente independiente de las integrales primeras anteriormente mencionadas, lo cual permitirá considerar el problema de Kepler completamente resuelto (al menos desde un punto de vista formal).

1.1.3. Elementos orbitales keplerianos

A la vista de las consideraciones anteriores, la solución general del problema de Kepler queda caracterizada por un conjunto (no único) de seis constantes independientes. Es habitual referirse a tales constantes como **elementos orbitales** (o **parámetros orbitales**) **keplerianos**, que determinan completamente el movimiento (Abad, [1, §9.1–9.2, Pág. 141–145]; Boccaletti–Pucacco [2, §2.5, Pág. 156–157]; Goldstein [4, §10.7, Pág. 478–483]). Una visualización de algunos elementos orbitales se ofrece en la Figura 2.1 (Abad [1, §9.2, Figura 9.1, Pág. 144]; Boccaletti–Pucacco [2, §2.5, Figura 2.6, Pág. 157]).

Los *elementos orbitales keplerianos* usados más habitualmente y el papel que desempeñan en la descripción de la órbita son los siguientes:

- El *tamaño (o las dimensiones)* de la órbita viene determinado por a, la **magnitud del semieje** mayor (en las órbitas de tipo elíptico) o del semieje real (en las de tipo hiperbólico); o por p, el **semilado recto** o parámetro, que está definido para todos los tipos de cónicas no degeneradas; alternativamente se puede usar q, la distancia del periastro (al centro de fuerzas), que también está bien definida para todo tipo de cónicas no degeneradas.
- La *forma y el tipo* de la órbita quedan determinados por la **excentricidad numérica** e de la cónica.
- La posición y orientación del plano de la órbita en el espacio tridimensional queda definida por dos ángulos: la **inclinación** $i \in [0, \pi]$ del plano orbital respecto del plano fundamental $x_1 x_2$ del sistema inercial de referencia espacial (con coordenadas cartesianas $x_1 x_2 x_3$) o, alternativamente, el ángulo entre el eje x_3 y la dirección del vector momento angular; y el **argumento de longitud del nodo ascendente** (o ángulo del nodo) $\Omega \in [0, 2\pi]$, que es el ángulo de la recta de intersección (llamada "línea de los nodos") entre el plano orbital y el plano fundamental $x_1 x_2$, medido desde el eje x_1 en dicho plano fundamental.
- La orientación de la cónica en el seno del plano orbital queda caracterizada por el **argumento del periastro** $\omega \in [0, 2\pi]$, ángulo que da la dirección foco-pericentro (es decir, el eje mayor en las elipses, el (único) eje en las parábolas, o el eje real en las hipérbolas) medido desde la línea de los nodos; equivalentemente, ω es el ángulo entre la línea de nodos y el vector de Laplace $\mathbf{A}$.
- Finalmente, mientras que los elementos orbitales anteriores, que se pueden considerar 'estáticos', proporcionan la *geometría de la órbita* (forma, tamaño, posición en el espacio y orientación), todavía se necesita un sexto elemento, que se pueden considerar de carácter 'cinemático', relacionado con la ley horaria del movimiento, y que permitirá en cada instante localizar la posición de la partícula a lo largo de la cónica. Para ello se suele utilizar la **época de paso por el periastro**, instante en el que la partícula se encuentra a mínima distancia del centro de fuerzas (el origen de coordenadas). No hay en la literatura una notación universalmente aceptada para representar este elemento, pero es frecuente encontrar símbolos tales como t_p, T o τ, para referirse a este parámetro orbital.

Habiendo llegado a este punto cabe mencionar que los elementos orbitales de una órbita kepleriana experimentarán variaciones cuando a un sistema kepleriano como el dado por (1.1) se superpongan fuerzas adicionales (llamadas *"perturbaciones"*. Véase más adelante).

Los cambios de los elementos orbitales por efecto de fuerzas perturbadoras pueden estudiarse, entre otros métodos, por medio de las llamadas **ecuaciones planetarias** en sus formas de *Lagrange* y de *Gauss*.

1.2. Sistemas keplerianos perturbados

Se considera que un **problema de Kepler perturbado** es el problema del estudio del movimiento de una partícula sometida a una fuerza que puede descomponerse en una parte que da lugar a un movimiento kepleriano puro y otra u otras fuerzas (en general de pequeña magnitud en comparación con la anterior) cuyo efecto consiste en "distorsionar" o "deformar" la órbita kepleriana anterior (Abad, [1, §12.1, Pág. 191–192]).

Es decir, el *modelo dinámico* correspondiente a un sistema kepleriano perturbado puede formalizarse por medio de una fuerza total que puede expresarse matemáticamente en la forma

$$\mathbf{F}_{total}(t,\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{F}_{Kepler}(-,\mathbf{r},-) + \mathbf{P}(t,\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) = -\frac{\mu}{r^2}\widehat{\mathbf{r}} + \mathbf{P}(t,\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}), \quad \text{con} \quad \|\mathbf{P}(t,\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})\| \ll \frac{\mu}{r^2},$$

donde la función vectorial $\mathbf{P}(t,\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$ representa a las fuerzas adicionales (es decir, a las *fuerzas perturbadoras*) consideradas en el problema en cuestión.

En aras de la generalidad en la presentación de estos primeros conceptos sobre sistemas keplerianos perturbados se ha supuesto que la fuerza perturbadora $\mathbf{P}$ es una función vectorial que en cada instante depende de la variable independiente t, de la función incógnita $\mathbf{r}$ y de su derivada primera $\dot{\mathbf{r}}$, si bien en el sistema kepleriano perturbado que se estudia en esta Memoria la forma funcional de la fuerza perturbadora será más sencilla (solo función de la posición).

En consecuencia, la ecuación diferencial de un movimiento kepleriano perturbado se puede expresar en la forma

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{P}(t,\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}). \tag{1.2}$$

Como ya se ha mencionado anteriormente, los elementos orbitales de la órbita kepleriana pura que es solución del problema de Kepler no perturbado asociado a la ecuación (1.2) sufrirán variaciones debidas a la presencia de la fuerza perturbadora $\mathbf{P}$. En este trabajo solo se van a considerar *soluciones del problema de Kepler que sean de tipo elíptico*.

De entre la diversidad de métodos para el tratamiento de sistemas keplerianos perturbados únicamente se van a mencionar los basados en las *ecuaciones planetarias* de *Lagrange* y de *Gauss*, por medio de las cuales se establece un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden para las variaciones temporales de los elementos orbitales keplerianos (de tipo elíptico) en función de la fuerza perturbadora.

En el caso de las ecuaciones planetarias en la forma de *Lagrange* (Abad, [1, §12.2, Pág. 192–195]) la fuerza perturbadora admite un potencial escalar, y los segundos miembros de esas ecuaciones diferenciales se obtienen a partir de las derivadas parciales de dicho potencial perturbador respecto de los propios elementos orbitales.

Por el contrario la forma de *Gauss* de las ecuaciones planetarias (Abad, [1, §12.3, Pág. 195–197]) puede utilizarse para todo tipo de fuerzas perturbadoras, incluso si no derivan de un potencial escalar. En tal caso los segundos miembros de las ecuaciones diferenciales de primer orden que rigen los cambios de los elementos orbitales keplerianos se establecen a partir de las componentes *radial, transversal y normal* de la fuerza perturbadora.

Aunque el modelo dinámico correspondiente al problema de Radzievskij es el de una *fuerza central conservativa* (que por lo tanto admite un potencial escalar), no se considerarán las ecuaciones planetarias en la forma de Lagrange sino su forma de Gauss, ya que en esta última resulta más clara y sencilla su integración a lo largo de una órbita elíptica del problema de Kepler puro y la subsecuente obtención de una *solución analítica de primer orden* respecto de un pequeño parámetro que formalizará el orden de magnitud de la perturbación frente al término kepleriano dominante (Abad, [1, §12.6, Pág. 199–200]).

A la vista de la forma funcional de tal solución resultará inmediato reconocer las *partes seculares* y las *partes periódicas* (Abad, [1, §12.4, Pág. 197–198]; Goldstein [4, §11.2, Pág. 504–505]) de las perturbaciones de los elementos orbitales en cuestión.

1.3. Problema de Radzievskij. Planteamiento y antecedentes

Como ya se ha mencionado anteriormente, en este trabajo se estudia un problema de Mecánica Celeste inicialmente planteado e investigado por Radzievskij [9].

En concreto se trata del problema del movimiento en el espacio de dos cuerpos (considerados como masas puntuales) en el seno de una nube gaseosa esférica y homogénea. Se supone que estos cuerpos interactúan entre sí y con las partículas materiales que forman la nube atrayéndose de acuerdo con la Ley de Gravitación Universal de Newton. Radzievskij considera la hipótesis adicional de que la densidad de materia de la nube (δ) es lo suficientemente pequeña, $\delta \ll 1$, como para que se pueda despreciar la resistencia por fricción que dicha nube ofrece al movimiento de los cuerpos en su interior.

Con estas hipótesis este autor plantea el problema como un caso particular del problema de tres cuerpos que a continuación reformula como un *sistema kepleriano perturbado* cuya ecuación diferencial vectorial del movimiento obedece a la expresión

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{total}(t,\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{F}_{Kepler}(t,\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} - K\mathbf{r} = -\left(\frac{\mu}{r^2} + Kr\right)\widehat{\mathbf{r}} = f(r)\widehat{\mathbf{r}}, \quad K = \frac{4}{3}\pi\mathscr{G}\delta, \tag{1.3}$$

una cantidad que en lo sucesivo se considerará como un *pequeño parámetro de perturbación* $(K \ll 1)$.

A la vista de la forma funcional de la ley de fuerzas

$$f(r) = -\left(\frac{\mu}{r^2} + Kr\right) \tag{1.4}$$

que gobierna este movimiento se concluye que la fuerza total es una *fuerza central conservativa*, por lo que la ecuación (1.3) admite de manera inmediata la integral primera vectorial del *momento angular* y la integral escalar de la *energía total*.

Como consecuencia de la conservación del momento angular el movimiento deberá estar confinado a un plano fijo, y –tomando coordenadas polares planas (r,φ) en él y utilizando la integral de la energía– obtuvo una expresión para la ecuación de la órbita en forma invertida (véase fórmula (3.5) más adelante)

$$\varphi = \varphi\,(r;\text{ constantes; parámetros del problema}) \tag{1.5}$$

en la que interviene una cuadratura que Radzievskij identifica como una *integral abeliana*.

En un apartado de este TFG se aplicará, detallando los cálculos intermedios, el procedimiento para el tratamiento de problemas de fuerzas centrales ([2, §2.1, Pág. 128–131]; [4, §3.2, Pág. 71–75; §3.5 Pág. 87–90]; [8, §§1.7.2, Pág. 12–14; §1.24, Pág.44–46]) muy someramente esbozado por Radzievskij.

Posteriormente, Mihailović [5, 6, 7] abordó este mismo problema desde diversos enfoques.

En [5] efectuó un estudio de este sistema kepleriano perturbado por medio de los elementos vectoriales $\mathbf{G}$ (momento angular), $\mathbf{A}$ (vector de Laplace) y del elemento escalar T (época de paso por el periastro), tratando las ecuaciones de las variaciones temporales de los elementos en el estilo de la “escuela de Mecánica Celeste de Milanković”.

Otro tratamiento del problema de Radzievskij por medio del vector de Laplace del movimiento kepleriano y de sus variaciones temporales se presenta en [6].

Finalmente, en [7] reformuló la ecuación diferencial (1.3) como la ecuación de un oscilador armónico tridimensional con frecuencia angular $\sqrt{K}$ y forzado no linealmente por una fuerza igual a la que produce el movimiento kepleriano, y abordó formalmente la resolución de esta ecuación diferencial por medio del Método de Variación de las Constantes $\mathbf{c_1}$ y $\mathbf{c_2}$ que figuran en la solución general

$$\mathbf{r}(t;\mathbf{c_1},\mathbf{c_2}) = \mathbf{c_1}\cos(\sqrt{K}t) + \mathbf{c_2}\,\text{sen}(\sqrt{K}t)$$

del oscilador no perturbado $\ddot{\mathbf{r}} + K\mathbf{r} = \mathbf{0}$, obteniendo una cota para las derivadas de dichas constantes,

$$\|\dot{\mathbf{c}}_\mathbf{j}\| \leq \frac{1}{\sqrt{K}}\frac{\mu}{r^2}.$$

Capítulo 2

Algunos conceptos y resultados de Mecánica Celeste

En este capítulo se recogen algunos de los conceptos y resultados teóricos relevantes para el estudio general de los sistemas keplerianos (perturbados o no).

2.1. Integrales primeras del problema de Kepler

Como ya se ha indicado anteriormente, el *problema de Kepler* se puede formular mediante la ecuación diferencial vectorial de segundo orden (1.1),

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\,\mathbf{r} = -\frac{\mu}{r^2}\,\widehat{\mathbf{r}}, \tag{2.1}$$

en la que $\mathbf{r}$ representa al vector de la posición relativa de una partícula respecto de la otra, r es su norma euclídea, y $\widehat{\mathbf{r}}$ el vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$ en cada instante. La constante μ es el *parámetro gravitatorio* del sistema de dos cuerpos de masas m_1 y m_2, es decir, $\mu = \mathscr{G}\,(m_1 + m_2)$, siendo $\mathscr{G}$ la constante de gravitación universal.

A la vista del segundo miembro de la ecuación (2.1), la fuerza (por unidad de masa) que actúa en este problema es una *fuerza central conservativa* que deriva del **potencial escalar** kepleriano

$$V_k(r) = -\int \left(-\frac{\mu}{r^2}\right) dr = -\frac{\mu}{r}.$$

Descomponiendo la ecuación vectorial (2.1) en sus componentes escalares en el espacio tridimensional se tiene un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias escalares de segundo orden, cuyo orden diferencial será 6.

En cualquiera de sus formulaciones un sistema kepleriano admite las siguientes INTEGRALES PRIMERAS, conocidas como las integrales primeras CLÁSICAS del problema de Kepler, que permitirán obtener sus órbitas solución como *cónicas* no degeneradas:

- El **momento angular** (por unidad de masa), definido como

$$\mathbf{G} := \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}, \tag{2.2}$$

  que es un vector normal al plano engendrado en cada instante por los vectores de posición $\mathbf{r}$ y velocidad $\dot{\mathbf{r}}$ (llamado *plano instantáneo del movimiento* o *plano orbital instantáneo*). Como consecuencia de la constancia de este vector, el plano del movimiento es el mismo en todo instante, es decir, se trata de un *plano fijo* en el espacio.

- La **energía mecánica** o **total** (también para masa unidad) del movimiento kepleriano, definida por

$$\mathscr{E}_k := \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + V_k(r) = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - \frac{\mu}{r}, \tag{2.3}$$

proporciona información acerca de la *forma y tamaño* de la órbita kepleriana; en concreto, ésta será una elipse si $\mathscr{E} < 0$, una hipérbola si $\mathscr{E} > 0$ y una parábola si $\mathscr{E} = 0$.

- El **vector de Laplace**,

$$\mathbf{A} := \frac{1}{\mu}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G}) - \frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{2.4}$$

que da cuenta de la *orientación de la cónica* solución del problema dentro del plano orbital. Además, la *excentricidad* de las cónicas keplerianas está relacionada con la norma del vector de Laplace a través de la fórmula

$$e = \frac{\|\mathbf{A}\|}{\mu} = \frac{A}{\mu}.$$

De entre las siete constantes escalares del movimiento proporcionadas por las integrales primeras anteriores solo hay *cinco funcionalmente independientes*, gracias a las cuales la resolución completa del problema de Kepler (de orden escalar 6) se reduce formalmente a *una cuadratura* a través de la cual se introduce la sexta constante necesaria para representar la solución general de un problema diferencial de orden 6.

2.2. Coordenadas polares en el plano del movimiento

Sabiendo que el movimiento transcurre en un plano fijo, se puede reducir el estudio del problema en el espacio tridimensional a su estudio en el seno del plano orbital.

Para ello resulta conveniente introducir unas coordenadas cartesianas (x, y) en dicho plano y a partir de ellas definir unas coordenadas polares planas (r, φ) a través de las relaciones de transformación

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

cuya inversa viene dada por

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \arctan(y/x).$$

Estas coordenadas polares tienen asociadas en cada punto las direcciones **radial**, dada por el vector unitario $\mathbf{u} \equiv \widehat{\mathbf{r}} := \mathbf{r}/r$ y **transversal**, cuyo vector dirección unitario $\mathbf{v}$ se obtiene rotando $\mathbf{u}$ un ángulo de $\pi/2$ radianes en sentido positivo (antihorario); suplementando esta base $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ del plano orbital con un tercer vector unitario $\mathbf{n} := \mathbf{G}/\|\mathbf{G}\|$, que marca la dirección **normal**, se obtiene una base ortonormal directa del espacio ordinario $\mathbb{R}^3$.

El sistema de referencia espacial asociado a esta base $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$ se suele denominar **sistema de referencia orbital** (Abad, [1, §6.4, Pág. 101–103; §§9.4.5, Pág. 149–150]) o **gaussiano**.

En particular, en función de las coordenadas polares planas, el vector posición y sus derivadas se expresan de la siguiente forma,

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}; \qquad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{u} + r\dot{\varphi}\mathbf{v}; \qquad \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\mathbf{u} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,\mathbf{v}, \tag{2.5}$$

mientras que para el momento angular se tiene

$$\mathbf{G} = G\mathbf{n}, \qquad \|\mathbf{G}\| = G = r^2\,\dot{\varphi}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{G}{r^2}, \tag{2.6}$$

y para la energía kepleriana,

$$\mathscr{E}_k := \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2\right) + V_k(r) = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2\right) - \frac{\mu}{r}. \tag{2.7}$$

Eliminando $\dot{\varphi}$ en esta última ecuación de la energía por medio de la tercera relación de (2.6), se obtiene una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en forma explícita para la función incógnita r de la variable independiente t.

Esa misma tercera relación de (2.6) permite también efectuar un cambio de variable independiente para reemplazar el tiempo t por el ángulo polar φ, con lo que la ecuación de primer orden que se acaba de mencionar se convierte en una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en forma explícita para la función incógnita r de la variable independiente φ.

Al integrar esta ecuación por cuadratura se llega a una expresión de su solución de la forma

$$r\,(\varphi;\text{constantes};\text{parámetros}) = \frac{p}{1+e\,\cos(\varphi+C)}, \tag{2.8}$$

donde C es la constante de integración de esa ecuación diferencial de primer orden, p es una función de G y de parámetros del problema, mientras que e es una función de G, de $\mathscr{E}_k$ y de parámetros del problema.

La fórmula (2.8) puede interpretarse como una representación paramétrica (en coordenadas polares planas) de una **cónica** con el ángulo polar φ como parámetro de la representación, p *su semilado recto* y e su *excentricidad*.

Otras posibles representaciones paramétricas de las órbitas solución del problema de Kepler pueden expresarse por medio de otras variables auxiliares tales como la **anomalía verdadera** f (Abad, [1, §8.3, Pág. 127]; Boccaletti–Pucacco [2, §2.1, Pág. 133]; Goldstein [4, §3.8, Pág. 99]), válida para cualquier tipo de cónica , o la **anomalía excéntrica** E del movimiento elíptico (Abad, [1, §§8.5.3, Pág. 134]; Boccaletti–Pucacco [2, §2.4, Pág. 150–151]; Goldstein [4, §3.8, Pág. 99]), que en el caso hiperbólico se suele denotar como F o H (Abad, [1, §§8.5.5, Pág. 138]; Boccaletti–Pucacco [2, §2.4, Pág. 149–150]).

Este procedimiento de integración por cuadratura, que se acaba de presentar para el estudio del problema de Kepler, *se puede aplicar en general para fuerzas centrales conservativas cualesquiera*.

En particular, el problema de Radzievskij admite este tratamiento, y es de hecho el método que, de manera muy concisa, aplicó Radzievskij en su trabajo original [9, Pág. 1310], y cuyos detalles de cálculos intermedios (omitidos por este autor) se completarán en esta Memoria.

2.3. Método de Binet

El **Método de Binet** (Boccaletti-Pucacco, [2, pág. 134–135]; Goldstein [4, §3.5, Pág. 85–86]) consiste en transformar la componente radial de la ecuación diferencial vectorial del movimiento bajo una *fuerza central conservativa*, $\ddot{\mathbf{r}} = f(r)\,\widehat{\mathbf{r}}$ (siendo $f(r)$ una función escalar al menos continua en la variable r), mediante los cambios de función incógnita y de variable independiente dados por

$$r \to u: \quad r = \frac{1}{u}, \tag{2.9}$$

$$t \to \varphi: \quad \frac{d}{dt} = \frac{d}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = G\,u^2\,\frac{d}{d\varphi}. \tag{2.10}$$

En lo sucesivo, se utilizará la “notación de primas” para denotar las derivadas respecto de φ.

Como resultado se obtiene la ecuación diferencial de la órbita en la forma de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para la función incógnita u de la variable independiente φ,

$$u'' + u = -\frac{1}{G^2}\left[\frac{1}{u^2}f\left(\frac{1}{u}\right)\right], \tag{2.11}$$

conocida como **ecuación de Binet**.

Además, esta ecuación admite la integral primera

$$(u')^2 + u^2 = -\frac{2}{G^2} V\left(\frac{1}{u}\right) + \widehat{\mathscr{E}}, \tag{2.12}$$

donde $\widehat{\mathscr{E}}$ es una constante y V es el potencial escalar de la fuerza central conservativa considerada.

La ecuación (2.12) es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en la que se puede despejar la derivada u', separar variables y obtener formalmente su solución por cuadratura.

La aplicación de ésta técnica al problema de Kepler conduce a una solución análoga a la cónica (2.8).

Precisamente este modo de proceder será uno de los que se seguirán en esta Memoria para tratar el sistema kepleriano perturbado del problema de Radzievskij.

2.4. Elementos orbitales y algunas de sus relaciones

Se define una **órbita kepleriana** como una solución particular del problema de Kepler para unas condiciones iniciales dadas. Tales órbitas serán *cónicas* con el centro de fuerzas en uno de sus focos (que servirá también como origen de coordenadas), y se pueden determinar unívocamente a partir de un conjunto no único de *seis* parámetros, denominados **elementos orbitales** (Abad, [1, §9.1–9.2, Pág. 141–145]; Boccaletti–Pucacco [2, §2.5, Pág. 156–157]; Goldstein [4, §10.7, Pág. 478–483]), algunos de los cuales se describen a continuación (véase Figura 2.1):

- La *forma* (o tipo) de la órbita queda caracterizada por la **excentricidad** e, que tomará un valor igual a 1 en las órbitas parabólicas, mayor que 1 en las hiperbólicas y entre 0 y 1 en las elípticas (será 0 exactamente tan solo en las órbitas circulares, que en general se consideran como caso particular de las órbitas elípticas).

- Para órbitas *elípticas* el *tamaño* (o dimensiones) de la órbita viene determinado por el **semieje mayor** a o, alternativamente, por el **semilado recto** p o por la **distancia del periastro** (o **pericentro**) q, cuyas expresiones están relacionadas por las fórmulas $p = a(1-e^2)$ y $q = a(1-e)$. En el caso de órbitas *hiperbólicas* se utiliza el **semieje real** a, o también el semilado recto $p = a(e^2-1)$ o la distancia del periastro $q = a(e-1)$, mientras que en las *parabólicas* se usa el semilado recto p o la distancia del periastro $q = p/2$.

- Tomando un sistema de referencia espacial cartesiano $(x_1 x_2 x_3)$ con origen en el centro de fuerzas, se define la **línea de los nodos** como la recta intersección entre el plano de la órbita y el plano fundamental x_1x_2; el ángulo $\Omega \in [0, 2\pi]$ entre la línea de los nodos y el eje x_1 se denominará **argumento de longitud del nodo ascendente**. Este ángulo Ω, junto con la **inclinación** $i \in [0, \pi]$, que denota al ángulo entre x_3 y la dirección del momento angular (que será normal al plano de la órbita), determinarán completamente la *posición del plano orbital en el espacio tridimensional*.

- Se define la **línea de los ápsides** como la dirección del vector de Laplace (dirección foco-pericentro, siendo el *pericentro* el punto de la órbita a mínima distancia del foco atractor). El ángulo $\omega \in [0, 2\pi]$ entre la dirección de la línea de ápsides y la línea de los nodos, denominado **argumento del periastro**, proporciona entonces la *orientación* de la cónica kepleriana dentro de su plano.

- Finalmente, para relacionar el tiempo (que desempeña el papel de variable independiente) con la posición a lo largo de la órbita se suele definir la **época de paso** de la partícula **por el periastro** (denotada por t_p, T o τ), o alternativamente la **anomalía media** (Abad, [1, §§ 8.5.3, Pág. 134–135 y §§8.5.5, Pág.138]; Boccaletti–Pucacco [2, §2.4, Pág. 149]; Goldstein [4, §3.8, Pág. 101]) $\ell := n(t-T)$, siendo n un parámetro denominado **movimiento medio**, que para órbitas elípticas e hiperbólicas puede definirse por medio de la relación $\mu = n^2 a^3$ y en órbitas parabólicas como $\mu = n^2 p^3$.

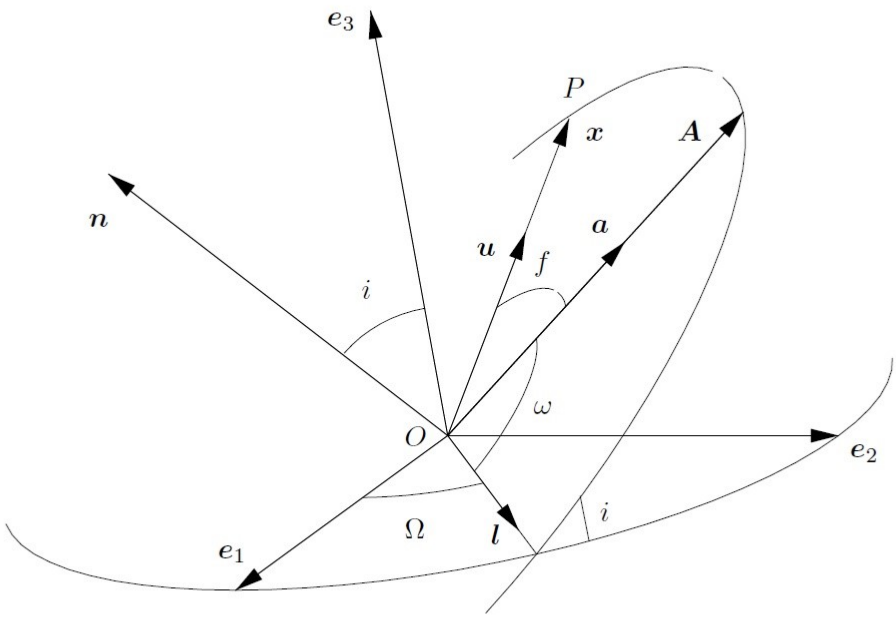

Figura 2.1: Posición y orientación de una órbita kepleriana en el espacio (Abad [1, Fig. 9.1, Pág. 144]). Sistema de referencia cartesiano con origen en O, centro de fuerzas, y base ortonormal $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$. Vector unitario $\mathbf{l}$ en la dirección del nodo ascendente. Vector unitario $\mathbf{a} = \mathbf{A}/A$ en la dirección del vector de Laplace (dirección foco-pericentro). Vector unitario $\mathbf{u} = \mathbf{x}/r = \mathbf{r}/r$ en la dirección del vector de posición en cada instante. Vector unitario $\mathbf{n} = \mathbf{G}/G$ normal al plano orbital. Anomalía verdadera f.

Los elementos orbitales keplerianos se pueden expresar en función de las integrales primeras clásicas del problema de Kepler $\mathbf{G}$, $\mathscr{E}_k$ y $\mathbf{A}$.

Excepto la anomalía media (que varía linealmente con el tiempo), todos los parámetros orbitales que se acaban de mencionar en la lista anterior se mantienen constantes en un movimiento kepleriano puro, pero en general experimentan variaciones cuando se añaden fuerzas adicionales (*perturbaciones*) a un sistema kepleriano.

En la siguiente sección se consideran algunas cuestiones relacionadas con la variación de los elementos orbitales keplerianos por efecto de una fuerza perturbadora.

2.5. Ecuaciones planetarias de Gauss en el movimiento orbital de tipo elíptico

Un movimiento orbital no perturbado coincide con un movimiento kepleriano, y en el caso de las órbitas elípticas podrá ser descrito mediante diversos conjuntos de seis elementos orbitales tales como a, e, i, Ω, ω y ℓ.

Sin embargo, si el movimiento está sometido a *pequeñas perturbaciones* (formalizadas por medio de fuerzas adicionales de pequeña magnitud en comparación con la fuerza que produce el movimiento kepleriano), representadas por una función vectorial $\mathbf{P}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, los elementos orbitales ya no serán necesariamente constantes sino que variarán a lo largo del tiempo. Por este motivo interesará establecer unas ecuaciones que describan cómo y por qué cambian los elementos keplerianos originales debido a la presencia de tales perturbaciones (véase Abad, [1, Capítulo 12, §12.1– 12.3, Pág. 191–197]); es decir, interesará obtener unas ecuaciones diferenciales de primer orden para las derivadas temporales de las funciones $a(t)$, $e(t)$, $i(t)$, $\Omega(t)$, $\omega(t)$ y $\ell(t)$.

Dichas ecuaciones diferenciales, que proporcionan las variaciones de los elementos orbitales bajo perturbaciones, suelen presentarse en la literatura con el nombre de **ecuaciones planetarias** (aunque en realidad pueden utilizarse para el estudio de movimientos orbitales perturbados de cualquier tipo de cuerpos celestes naturales o artificiales).

Estas ecuaciones planetarias se expresan de dos formas, una debida a **Lagrange** y otra a **Gauss**.

Las *ecuaciones planetarias en la forma de Lagrange* se utilizan cuando las fuerzas perturbadoras derivan de un potencia escalar, y en sus segundos miembros intervienen las *derivadas parciales del potencial perturbador* respecto de los elementos orbitales (Abad, [1, Capítulo 12, §12.2, Pág. 192–195]).

Por el contrario, las *ecuaciones planetarias en la forma de Gauss* (Abad, [1, Capítulo 12, §12.3, Pág. 195–197]) pueden utilizarse para cualquier tipo de fuerza perturbadora (admita o no potencial), y en sus segundos miembros intervienen las componentes *radial*, *transversal* y *normal* en las que se descompone la fuerza perturbadora respecto del sistema de referencia orbital (**u**, **v**, **n**). Es decir,

$$\frac{da}{dt} = \frac{2e\,\mathrm{sen}\,f}{n\eta}P_u + \frac{2a\eta}{nr}P_v; \tag{2.13}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\eta\,\mathrm{sen}\,f}{an}P_u + \left(\frac{\eta^3}{ern} - \frac{r\eta}{a^2en}\right)P_v; \tag{2.14}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r\cos(\omega+f)}{a^2n\eta}P_n; \tag{2.15}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r\,\mathrm{sen}(\omega+f)}{a^2n\eta\,\mathrm{sen}\,i}P_n; \tag{2.16}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\eta\cos f}{aen}P_u + \frac{r(2+e\cos f)\,\mathrm{sen}\,f}{a^2ne\eta}P_v + \frac{r\,\mathrm{sen}(\omega+f)\cos i}{a^2n\eta\,\mathrm{sen}\,i}P_n; \tag{2.17}$$

$$\frac{d\ell}{dt} = n + \left(-\frac{2r}{a^2n} + \frac{\eta^2\cos f}{aen}\right)P_u - \frac{r(2+e\cos f)\,\mathrm{sen}\,f}{a^2en}P_v, \tag{2.18}$$

donde $\mathbf{P}(t,\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) = (P_u, P_v, P_n)$ es la fuerza perturbadora expresada en el sistema de referencia orbital, $\eta := \sqrt{1-e^2}$ y f es la *anomalía verdadera* del movimiento kepleriano elíptico.

A la vista de estas ecuaciones se pueden deducir las siguientes propiedades:

- Las variaciones de los elementos a y e tan solo dependen de las componentes radial y transversal de la fuerza perturbadora. Es decir, si tal fuerza solo actúa en la dirección normal, la forma y el tamaño de la órbita no se verán alterados.
- Asimismo, las derivadas de i y de Ω tan solo dependen de la componente normal de la fuerza perturbadora. Así, si esta fuerza está contenida en el plano orbital (por ejemplo, en el caso de fuerzas centrales), dicho plano se mantiene constante.

Aunque en el problema de Radzievskij existe potencial escalar para la fuerza perturbadora (véase la fórmula (3.2) más adelante), y por lo tanto se podría utilizar tanto la forma de Lagrange como la forma de Gauss de las ecuaciones planetarias, para el estudio de las perturbaciones de los elementos orbitales que se efectúa en esta Memoria no se recurrirá a la forma de Lagrange y tan solo se usarán las ecuaciones planetarias de Gauss.

Más en concreto, la integración de ese sistema de ecuaciones diferenciales en la forma de Gauss a lo largo de una revolución completa (Abad, [1, §12.6, Pág. 199–200]) no se llevará a cabo en función del tiempo t como variable independiente, sino respecto de la *anomalía excéntrica* E del movimiento elíptico, en términos de la cual se obtendrán de manera sencilla las *variaciones seculares* (de carácter creciente o decreciente) y *periódicas* (Abad, [1, §12.4, Pág. 197–198]; Goldstein [4, §11.2, Pág. 504–505]) de los elementos keplerianos debidas a la fuerza perturbadora del problema de Radzievskij.

Capítulo 3

Sobre la resolución del problema de Radzievskij

En este capítulo se estudiarán las análogas de las integrales primeras clásicas del movimiento kepleriano en el caso del problema de Radzievskij y se considerará su resolución desde tres enfoques distintos.

En primer lugar, se seguirá el **procedimiento convencional** (en coordenadas polares planas tomadas en el plano orbital) para el estudio del problema del movimiento de una partícula en el seno de un campo de fuerzas central y conservativo, a través del cual (y gracias a las integrales primeras del momento angular y de la energía total) se obtiene la ecuación de la órbita **por cuadratura**. Éste es precisamente el modo de proceder que, de una manera muy concisa, adoptó Radzievskij en [9], y cuyos detalles de cálculo se completarán en la siguiente sección de esta Memoria.

A continuación, se tratará el problema de Radzievskij por medio del **Método de Binet**, estableciendo la ecuación diferencial de Binet para la órbita, considerando una integral primera de la misma y obteniendo formalmente a partir de ella la ecuación finita de la órbita por separación de variables y cuadratura.

Finalmente, se plantearán las **ecuaciones planetarias de Gauss** correspondientes al problema de Radzievskij, se efectuará un cambio de variable independiente (sustituyendo el tiempo t por la anomalía excéntrica E), y se integrará a lo largo de un período orbital el sistema de ecuaciones diferenciales resultante, lo que permitirá identificar los términos seculares y periódicos de las variaciones de los elementos.

3.1. Acerca de las integrales primeras del problema de Radzievskij

Tras algunas consideraciones preliminares, Radzievskij [9, Pág. 1309] reformuló el problema del movimiento relativo de dos masas puntuales dentro de una nube gaseosa de densidad muy pequeña como el sistema de Kepler perturbado (1.3), es decir,

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\Big(\frac{\mu}{r^2} + Kr\Big)\widehat{\mathbf{r}}, \tag{3.1}$$

que puede interpretarse como un problema de movimiento de una masa puntual (de valor unidad) en el seno de un campo de fuerzas central y conservativo, por lo que el sistema admitirá de manera inmediata las *integrales primeras* del *momento angular* $\mathbf{G}$ y de la *energía mecánica total* $\mathscr{E}$,

$$\mathbf{G} = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}), \qquad \mathscr{E} = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + V(r),$$

donde el potencial total $V(r)$ del que deriva dicha fuerza conservativa es

$$V(r) = -\int \Big(-\frac{\mu}{r^2} - Kr\Big)\,dr = \int \Big(\frac{\mu}{r^2} + Kr\Big)\,dr = -\frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}Kr^2, \tag{3.2}$$

con lo que la energía toma la forma

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}Kr^2 = \text{cte.} \tag{3.3}$$

Sin embargo, el vector de Laplace del movimiento kepleriano, (2.4), ya *no será una integral primera* del problema de Radzievskij, ya que

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G}) = \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G} = \Big(-\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} - K\mathbf{r}\Big) \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = (-\mu - Kr^3)\frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})}{r^3},$$

y aplicando las identidades vectoriales

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{b}(t)}{\|\mathbf{b}(t)\|} &= \frac{(\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{b}}) \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^3} = -\frac{\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{b}})}{\|\mathbf{b}\|^3}, \\
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{c}}) &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{c}}) - \dot{\mathbf{c}}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \\
\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} &= a^2, \quad \text{y} \quad \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{a}} = a\dot{a}, \quad \text{con} \quad a := \|\mathbf{a}\|,
\end{aligned}$$

se tendrá

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \left(-1 - \frac{K}{\mu}r^3\right)\frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})}{r^3} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) - \frac{K}{\mu}(\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = -\frac{K}{\mu}(r\dot{r}\mathbf{r} - r^2\dot{\mathbf{r}}),
\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{0} \iff r\dot{r}\mathbf{r} = r^2\dot{\mathbf{r}} \iff \dot{\mathbf{r}} = \frac{\dot{r}\mathbf{r}}{r} = \dot{r}\widehat{\mathbf{r}} \quad \text{o} \quad r = 0.$$

Estudiando por separado cada uno de los dos casos,

- $r(t) = 0 \ \forall\, t \implies \mathbf{r}(t) = \mathbf{0} \ \forall\, t \implies$ la partícula de masa unidad permanece en todo instante en reposo en una posición que coincide con el centro de fuerzas, cosa que no necesariamente sucede para todas las soluciones de (3.1);
- $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\widehat{\mathbf{r}} \implies \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = \|\dot{r}\widehat{\mathbf{r}}\|^2 = \dot{r}^2$. Pero tomando coordenadas polares planas (r, φ) en el plano de la órbita, y recordando la segunda fórmula de (2.5), $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{u} + r\dot{\varphi}\mathbf{v}$, se tiene $\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$; así pues, $\dot{r}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \implies r^2\dot{\varphi}^2 = 0$. Como ya se ha estudiado el caso $r = 0$, la relación anterior solo se cumple si $\dot{\varphi} = 0$, es decir, si $\varphi(t) = $ cte. (movimiento rectilíneo a lo largo de una recta fija), lo cual no tiene por qué ocurrir para toda solución de la ecuación (3.1).

Queda demostrado que el vector de Laplace **no** es integral primera de tal ecuación. ■

3.2. Ecuación de la órbita por cuadratura

En esta sección, aprovechando las integrales primeras del problema de Radzievskij de la sección anterior, y siguiendo el esquema de resolución del propio Radzievskij [9, Pág. 1310], se llegará a obtener una solución de este problema por medio de una integral abeliana.

Expresando la energía total (3.3) en coordenadas polares (r, φ), y eliminando $\dot{\varphi}$ por medio de la tercera fórmula de (2.6), la integral de la energía adopta la forma

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}Kr^2,$$

de donde, despejando $\dot{r}$,

$$\dot{r}^2 = \frac{2\mu}{r} - Kr^2 - \frac{G^2}{r^2} + 2\mathscr{E} \quad \Longrightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - Kr^2 - \frac{G^2}{r^2} + 2\mathscr{E}}. \tag{3.4}$$

Se ha obtenido así una expresión para $\dot{r}$ como función de r, que proporciona una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en forma explícita para la función incógnita r de la variable independiente t y que formalmente puede tratarse por separación de variables y cuadratura.

Nótese que el radicando que aparece en esa ecuación puede expresarse en función de un polinomio de grado 4 en la variable r, por lo que la primitiva con la que se resolvería la ecuación en variables separadas no podrá en general representarse por medio de funciones elementales, sino que hará intervenir funciones especiales "más complicadas" (relacionadas con integrales elípticas y/o abelianas; Byrd–Friedman [3]).

Sin embargo, siguiendo la práctica habitual para el tratamiento del movimiento por efecto de fuerzas centrales conservativas, no se integrará esa ecuación (3.4) respecto de la variable independiente t sino que se efectuará un cambio de variable independiente que transforma el tiempo físico t en el ángulo polar φ, por medio de la tercera fórmula de (2.6).

De este modo, por la regla de la cadena,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{G}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{G}{r^2} r',$$

con lo que la ecuación (3.4) se reescribe como

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{r^2}{G}\sqrt{\frac{2\mu}{r} - Kr^2 - \frac{G^2}{r^2} + 2\mathscr{E}} = \frac{r}{G}\sqrt{2\mu r - Kr^4 - G^2 + 2\mathscr{E} r^2}.$$

Tras separar variables se llega a la fórmula (1.5) anterior que, en concreto, adopta la forma

$$\int d\varphi = \varphi + c = \int \frac{(G/r)\, dr}{\sqrt{2\mu r - Kr^4 - G^2 + 2\mathscr{E} r^2}}, \tag{3.5}$$

expresión análoga a la fórmula (6) de la página 1310 de [9], que Radzievskij interpreta como una *integral abeliana* cuya *inversión* conduce a la ecuación de la órbita en forma finita

$$r = r(\varphi;\ \text{constantes};\ \text{parámetros}), \tag{3.6}$$

y que proporciona una *representación paramétrica* de las órbitas solución del problema de Radzievskij por medio de una función elíptica de φ (véase Byrd–Friedman [3]).

3.3. Aplicación del Método de Binet

Para la fuerza central conservativa que rige el movimiento en el problema de Radzievskij, con la ley de fuerzas dada en (1.4), la ecuación de Binet (2.11) toma la forma

$$u'' + u = -\frac{1}{G^2}\left[\frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right)\right] = \frac{1}{G^2}\left[\frac{1}{u^2}\left(\mu u^2 + \frac{K}{u}\right)\right] = \frac{\mu}{G^2} + \frac{K}{G^2 u^3},$$

que corresponde a un oscilador armónico unidimensional con frecuencia angular unidad no linealmente forzado por una fuerza externa constante y otra fuerza inversamente proporcional al cubo de u, y para el cual la integral primera (2.12) será ahora

$$(u')^2 + u^2 = -\frac{2}{G^2} V\left(\frac{1}{u}\right) + \widehat{\mathscr{E}} = -\frac{2}{G^2}\left(-\mu u + \frac{K}{2u^2}\right) + \widehat{\mathscr{E}}.$$

Despejando u',

$$u' = \frac{du}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2\mu u}{G^2} - \frac{K}{G^2 u^2} - u^2 + \widehat{\mathscr{E}}}.$$

Como ya se ha mencionado anteriormente, esta última expresión es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en forma explícita para la función incógnita u de la variable independiente φ, y puede resolverse formalmente por separación de variables y cálculo de una primitiva,

$$\int d\varphi = \varphi + \widehat{c} = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu u}{G^2} - \frac{K}{G^2 u^2} - u^2 + \widehat{\mathscr{E}}}} = \int \frac{G u\, du}{\sqrt{-G^2 u^4 + 2\mu u^3 - K + \widehat{\mathscr{E}} G^2 u^2}},$$

obteniéndose una representación $\varphi = \varphi(u;\ \text{constantes};\ \text{parámetros})$ de la solución "en forma invertida" en función de una integral elíptica o abeliana cuya inversión daría $u = u(\varphi;\ \text{constantes};\ \text{parámetros})$.

Finalmente, recordando el cambio de variable dependiente (2.9) del Método de Binet, se tendrá

$$r = r(\varphi;\ \text{constantes};\ \text{parámetros}),$$

expresión análoga a la (3.6) anterior, y que constituye una *representación paramétrica* de las órbitas solución del problema de Radzievskij en la que también intervendrán funciones elípticas de φ.

3.4. Ecuaciones planetarias en la forma de Gauss y su integración en la anomalía excéntrica

En esta sección, tras formular las *ecuaciones planetarias en la forma de Gauss* correspondientes a problema de Radzievskij, se obtendrán las *variaciones de primer orden* de un conjunto de elementos orbitales elípticos debidas a la fuerza perturbadora que actúa en este sistema.

En concreto, se considerarán los elementos orbitales $(a, e, i, \Omega, \omega, \ell)$ de un movimiento kepleriano de tipo elíptico y se estudiarán los cambios que experimentan por efecto de la fuerza $\mathbf{P} = -Kr\,\mathbf{u}$ de la fórmula (1.3), que es una *fuerza central*, por lo que sus componentes (P_u, P_v, P_n) en el sistema de referencia orbital son

$$P_u = -Kr, \quad P_v = 0, \quad P_n = 0.$$

De este modo, en el problema de Radzievskij el sistema diferencial de las ecuaciones planetarias de Gauss (2.13) – (2.18) se reduce a

$$\frac{da}{dt} = \frac{2e \,\text{sen} f}{n\eta}(-Kr) = -\frac{2Ke}{n\eta} r \,\text{sen} f; \tag{3.7}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\eta \,\text{sen} f}{an}(-Kr) = -\frac{K\eta}{an} r \,\text{sen} f; \tag{3.8}$$

$$\frac{di}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad i = \text{cte.}; \tag{3.9}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Omega = \text{cte.}; \tag{3.10}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\eta \cos f}{aen}(-Kr) = -\frac{K\eta}{aen} r \cos f; \tag{3.11}$$

$$\frac{d\ell}{dt} = n + \left(-\frac{2r}{a^2 n} + \frac{\eta^2 \cos f}{aen}\right)(-Kr) = n + \frac{2K}{a^2 n} r^2 - \frac{K\eta^2}{aen} r \cos f. \tag{3.12}$$

Nótese que, al ser la fuerza perturbadora una fuerza central, el plano de la órbita no varía, lo cual es consistente con el hecho de que tanto i como Ω son constantes a lo largo de este movimiento perturbado.

A continuación, para resolver este sistema diferencial, se va a efectuar un cambio de variable independiente que sustituye el tiempo t por la anomalía excéntrica E.

Esta transformación de la variable independiente se define a través de la relación diferencial

$$dt = \frac{1 - e\cos E}{n} dE = \frac{r(E)}{na} dE \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dE}{dt} = \frac{na}{r(E)},$$

deducida diferenciando en la ecuación de Kepler del movimiento elíptico y utilizando la representación paramétrica de una elipse en función de la anomalía excéntrica, es decir, usando las fórmulas

$$n(t-T) = (E - e\,\mathrm{sen}\,E), \quad r(E) = a(1 - e\cos E). \tag{3.13}$$

De este modo, si σ denota uno cualquiera de los elementos orbitales, por la regla de la cadena su derivada respecto del tiempo puede expresarse en la forma

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{dE}\frac{dE}{dt} = \frac{n}{1 - e\cos E}\frac{d\sigma}{dE} = \frac{na}{r(E)}\frac{d\sigma}{dE},$$

lo cual permite transformar los primeros miembros de las ecuaciones de Gauss anteriores.

Para expresar los segundos miembros de las ecuaciones de Gauss (3.7) – (3.12) como funciones exclusivas de E y de constantes y parámetros del sistema, se usará la segunda fórmula de (3.13) y las relaciones de $\mathrm{sen}\, f$ y $\cos f$ con funciones trigonométricas de E, a saber (Abad [1, §§8.5.3, Pág. 135]),

$$\mathrm{sen}\, f = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\mathrm{sen}\,E}{1 - e\cos E}, \qquad \cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}.$$

Con todo esto las ecuaciones (3.7) – (3.12) se convierten en

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dE} &= \frac{1 - e\cos E}{n}\left(\frac{-2Ke}{n\eta}\right)a(1 - e\cos E)\frac{\eta\,\mathrm{sen}\,E}{1 - e\cos E} = -\frac{2Kae}{n^2}(1 - e\cos E)\,\mathrm{sen}\,E;\\
\frac{de}{dE} &= \frac{1 - e\cos E}{n}\left(\frac{-K\eta}{an}\right)a(1 - e\cos E)\frac{\eta\,\mathrm{sen}\,E}{1 - e\cos E} = -\frac{K\eta^2}{n^2}(1 - e\cos E)\,\mathrm{sen}\,E;\\
\frac{d\omega}{dE} &= \frac{1 - e\cos E}{n}\left(\frac{-K\eta}{aen}\right)a(1 - e\cos E)\frac{\cos E - e}{1 - e\cos E} = -\frac{K\eta}{en^2}(1 - e\cos E)(\cos E - e);\\
\frac{d\ell}{dE} &= \frac{1 - e\cos E}{n}n + \frac{1 - e\cos E}{n}\frac{2K}{a^2 n}a^2(1 - e\cos E)^2 - \frac{1 - e\cos E}{n}\frac{K\eta^2}{aen}a(1 - e\cos E)\frac{\cos E - e}{1 - e\cos E} =\\
&= 1 - e\cos E + \frac{2K}{n^2}(1 - e\cos E)^3 - \frac{K\eta^2}{en^2}(1 - e\cos E)(\cos E - e),
\end{aligned}$$

un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en forma explícita en las derivadas de los elementos orbitales respecto de la anomalía excéntrica E como variable independiente en el que los segundos miembros son funciones explícitas de la nueva variable independiente E, por lo que su resolución puede efectuarse mediante cálculo de primitivas elementales, como se verá a continuación.

En la última sección de este capítulo se recogen algunas fórmulas auxiliares útiles para integrar el sistema diferencial anterior.

Ahora, integrando estas ecuaciones respecto de E a lo largo de una revolución completa de la partícula sobre la órbita kepleriana pura (y tratando por lo tanto a los elementos orbitales y al movimiento medio n como constantes respecto a E) se pueden hallar las perturbaciones de primer orden Δa, Δe, $\Delta\omega$ y $\Delta\ell$ de los elementos a, e, ω y ℓ a lo largo de un período de la órbita kepleriana elíptica de referencia (Abad [1, §12.6, Pág. 199–200]):

1) Para el semieje mayor se tiene

$$\int da = -\frac{2Kae}{n^2}\int (1 - e\cos E)\,\mathrm{sen}\,E\, dE,$$

y aplicando (3.19),

$$\Delta a = -\frac{2Kae}{n^2}\left(-\cos E + \frac{e}{4}\cos(2E)\right). \tag{3.14}$$

2) Para la excentricidad,

$$\int de = -\frac{K\eta^2}{n^2}\int (1-e\cos E)\operatorname{sen} E\, dE,$$

y de nuevo por (3.19),

$$\Delta e = -\frac{K\eta^2}{n^2}\left(-\cos E + \frac{e}{4}\cos(2E)\right). \tag{3.15}$$

3) En cuanto al argumento del periastro,

$$\int d\omega = -\frac{K\eta}{en^2}\int (1-e\cos E)(\cos E - e)\, dE,$$

y por (3.20),

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= -\frac{K\eta}{en^2}\left(-\frac{3e}{2}E + \left(1+e^2\right)\operatorname{sen} E - \frac{e}{4}\operatorname{sen}(2E)\right) = \\ &= \frac{K\eta}{n^2}\left[\frac{3}{2}E - \left(\frac{1}{e}+e\right)\operatorname{sen} E + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2E)\right].\end{aligned} \tag{3.16}$$

4) Finalmente, para la anomalía media se obtiene

$$\int d\ell = \int dE - e\int \cos E\, dE + \frac{2K}{n^2}\int (1-e\cos E)^3\, dE - \frac{K\eta^2}{en^2}\int (1-e\cos E)(\cos E - e)\, dE;$$

aplicando (3.20) y (3.21) e integrando dE y $\cos E$,

$$\begin{aligned}\Delta\ell &= E - e\operatorname{sen} E + \frac{2K}{n^2}\left[E - \left(3e + \frac{3e^3}{4}\right)\operatorname{sen} E + 3e^2\left(\frac{E}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2E)\right) - \frac{e^3}{12}\operatorname{sen}(3E)\right] - \\ &\quad - \frac{K\eta^2}{en^2}\left(-\frac{3e}{2}E + (1+e^2)\operatorname{sen} E - \frac{e}{4}\operatorname{sen}(2E)\right),\end{aligned}$$

y agrupando los términos,

$$\begin{aligned}\Delta\ell &= \left(1 + \frac{2K}{n^2} + \frac{3}{2}\frac{K\eta^2}{n^2} + \frac{3K}{n^2}e^2\right)E - \left[\frac{K\eta^2}{en^2} + \left(1 + \frac{6K}{n^2} + \frac{K\eta^2}{n^2}\right)e + \frac{3}{2}\frac{K}{n^2}e^3\right]\operatorname{sen} E + \\ &\quad + \left(\frac{K\eta^2}{4n^2} + \frac{3}{2}\frac{K}{n^2}e^2\right)\operatorname{sen}(2E) - \frac{K}{6n^2}e^3\operatorname{sen}(3E).\end{aligned} \tag{3.17}$$

A continuación se interpreta el significado de las expresiones anteriores.

1) En (3.14) se observa que el semieje mayor no está sujeto a perturbaciones seculares, y solo presenta perturbaciones periódicas de período 2π.

2) A la vista de (3.15), al igual que ocurre en el caso del semieje mayor, la excentricidad solo sufre perturbaciones periódicas de período 2π.

3) Por el contrario, (3.16) indica que el argumento del periastro, experimenta tanto perturbaciones seculares de carácter creciente (en este caso proporcionales a E a través del término $\frac{3\eta K}{2n^2}E$) como perturbaciones periódicas de período 2π.

4) En (3.17) se reconoce también una parte secular creciente (proporcional a E) y otra 2π–periódica.

En resumen:

- La forma y tamaño de la órbita sufrirán perturbaciones periódicas.
- La posición y orientación del plano orbital se mantendrán constantes. Es decir, el plano orbital no variará, lo que es consistente con el hecho de que la perturbación es causada por una fuerza central pura.
- La orientación de la cónica en el seno del plano orbital estará sometida a perturbaciones acumulativas a lo largo del tiempo y también a variaciones periódicas.
- Del mismo modo, la época de paso por el periastro experimentará variaciones acumulativas y variaciones periódicas.

3.5. Algunas fórmulas auxiliares

3.5.1. Identidades trigonométricas

Para su uso en el cálculo de primitivas de la siguiente subsección se tendrán en cuenta las siguientes identidades trigonométricas,

$$\begin{aligned}
\cos^2 E &= \frac{1}{2}\left[1+\cos(2E)\right], \\
\cos(3\alpha) &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \Longrightarrow \cos^3\alpha = \frac{1}{4}\left[\cos(3\alpha)+3\cos\alpha\right], \\
(1-e\cos\alpha)^3 &= 1-3e\cos\alpha+3e^2\cos^2\alpha - e^3\cos^3\alpha = \\
&= 1-3e\cos\alpha+3e^2\cos^2\alpha - \frac{e^3}{4}\left[\cos(3\alpha)+3\cos\alpha\right],
\end{aligned}$$

donde, para esta última, se ha usado la fórmula del binomio de Newton, $(1-x)^3 = 1-3x+3x^2-x^3$.

3.5.2. Cálculo de algunas primitivas

Para facilitar el cálculo de algunas primitivas que aparecen en la sección anterior de este capítulo, se presentan ahora las siguientes fórmulas:

$$\int \cos^2 E\, dE = \frac{1}{2}\int\left[1+\cos(2E)\right]dE = \frac{E}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2E), \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
\int (1-e\cos E)\operatorname{sen} E\, dE &= \int \operatorname{sen} E\, dE - e\int \operatorname{sen} E\cos E\, dE = -\cos E - \frac{e}{2}\int \operatorname{sen}(2E)dE = \\
&= -\cos E - \frac{e}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(2E)\right) = -\cos E + \frac{e}{4}\cos(2E),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
\int (1-e\cos E)(\cos E - e)dE &= \int\left(-e+(1+e^2)\cos E - e\cos^2 E\right)dE = \\
&= -e\int dE + (1+e^2)\int \cos E\, dE - e\int \cos^2 E\, dE = \\
&= -eE + (1+e^2)\operatorname{sen} E - e\left(\frac{E}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2E)\right) = \\
&= -\frac{3e}{2}E + (1+e^2)\operatorname{sen} E - \frac{e}{4}\operatorname{sen}(2E).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
\int (1-e\cos E)^3 dE &= \int dE - \left(3e+\frac{3e^3}{4}\right)\int \cos E\, dE + 3e^2\int \cos^2 E\, dE - \frac{e^3}{4}\int \cos(3E)\, dE \\
&= E - \left(3e+\frac{3e^3}{4}\right)\operatorname{sen} E + 3e^2\left(\frac{E}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2E)\right) - \frac{e^3}{12}\operatorname{sen}(3E).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Conclusiones

A lo largo de esta Memoria se han obtenido los siguientes resultados en relación con el sistema kepleriano perturbado propuesto por Radzievskij:

- Se ha demostrado que este problema no admite la integral del vector de Laplace del movimiento kepleriano.
- Se ha presentado una versión detallada del tratamiento no perturbativo efectuado por Radzievskij para obtener una ecuación de la órbita en términos finitos.
- Desde un enfoque asimismo no perturbativo se ha abordado la resolución del problema de Radzievskij por el Método de Binet, y se ha llegado a una ecuación de la órbita en forma finita muy parecida a la solución de Radzievskij, también en términos de integrales elípticas o abelianas.
- Se ha formulado y resuelto el sistema de ecuaciones planetarias en la forma de Gauss para hallar la variación de los elementos orbitales debida a la fuerza perturbadora presente en el modelo dinámico de Radzievskij, y se han calculado las perturbaciones de primer orden experimentadas por cada uno de ellos a lo largo de una órbita kepleriana elíptica considerada como órbita de referencia.
- De este modo se ha obtenido una solución analítica de primer orden (respecto del pequeño parámetro de perturbación, relacionado con la densidad de la nube) para el problema de Radzievskij.
- A la vista de los distintos términos que aparecen en las variaciones de los elementos en dicha solución se han identificado las perturbaciones seculares y / o periódicas experimentadas por cada uno de los elementos orbitales considerados:
  - la forma (determinada por la excentricidad) y el tamaño de la órbita (asociado al semieje mayor de la elipse) solamente sufrirán pequeñas perturbaciones de carácter periódico;
  - el plano orbital (localizado en el espacio por su inclinación y por el argumento del nodo ascendente) no presentará variación alguna;
  - la orientación de la órbita dentro de éste (fijada por el argumento del periastro) experimentará variaciones tanto seculares (en este caso de carácter creciente a lo largo del tiempo) como periódicas;
  - la anomalía media (y por lo tanto la época de paso por el periastro) está sometida tanto a perturbaciones seculares (también crecientes) como a periódicas.

Bibliografía

[1] A. ABAD, *Astrodinámica*, Bubok Publishing, S.L., 2012, `http://www.bubok.es//libro/detalles/219952/Astrodinamica`.

[2] D. BOCCALETTI, G. PUCACCO, *Theory of Orbits* (Vol. 1: *Integrable Systems and Non-perturbative Methods*), Astronomy and Astrophysics Library, Springer, 1996.

[3] P.F. BYRD, M.D. FRIEDMAN, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, 2ª ed. revisada, Serie: Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Vol.67, Springer, 1971.

[4] H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics*, 2ª ed., Addison-Wesley Series in Physics, Serie: World Students, Addison-Wesley, 1980.

[5] D. MIHAILOVIĆ, An Application of the Perturbation Equations to Radzievsky's Three Body Problem, *Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R.P. de Serbie*, VII (3-4), 223-228, 1955. (En serbocroata).

[6] D. MIHAILOVIĆ, Characteristics of the Time Variations of the Perihelion Vector in a Special Problem of Celestial Mechanics, *Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade*, Série: Mathématiques et Physique, (200), (1967), 1-6. (En ruso).

[7] D. MIHAILOVIĆ, Eine Methode für Lösung des Radziewsky's Dreikörperproblems, *Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade*, Seri: Mathématiques et Physique, (201), (1967), 7-9. (En alemán).

[8] F. SCHECK, *Mechanics. From Newton's Laws to Deterministic Chaos*, 2ª ed. corregida y ampliada, Springer, 1994.

[9] V.V. RADZIEVSKIJ General Solution of a Case of the Problem of Three Bodies, *Transactions (Doklady) of the USSR Academy of Sciences* (New Series), **91** (6), (1953), 1309-1311. (En ruso).