ESTUDIO DEL MODELO DE CRECIMIENTO ECONÓMICO DE SOLOW-SWAN CON EL MODELO POBLACIONAL DE ZHANG

Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

Universidad Zaragoza
1542

Adrián Aurensanz Crespo

Trabajo de Fin de Grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo: Francisco José Gaspar y Carmen Rodrigo
14 de Junio de 2023

Resumen

Tanto en el pasado como en la actualidad, el análisis del crecimiento económico ha sido una cuestión de gran importancia para la sociedad, pues el estudio del mismo para hacer propuestas de política económica es un área de gran interés para los gobiernos. La modelización matemática nos ha permitido generar nuevos conocimientos sobre los factores que causan el avance o el atraso económico de los países.
El propósito de este trabajo es revisar el modelo neoclásico de Solow-Swan, teniendo en cuenta diferentes enfoques referidos a la población y al avance tecnológico y además presentar un modelo endógeno de crecimiento de la población con la formación del hábito de tener hijos y el cambio de preferencias endógeno a la hora de tenerlos e introducirlo en un modelo de Solow simple, que no tiene en cuenta el progreso tecnológico.
Para ello, en la primera parte del estudio nos centraremos en el modelo neoclásico de Solow-Swan que presentó Robert Solow en [2], describiendo este mismo junto a algunas posibles funciones de producción clásicas y escogiendo la que mejor se ajusta a nuestro modelo. Tras esto, introduciremos el proceso tecnológico en este modelo, tanto un progreso tecnológico neutral que avanza en el tiempo con una tasa constante como un progreso tecnológico exponencial, y estudiaremos el comportamiento de la economía a largo plazo en ambos casos.
A continuación, trataremos la evolución de la población con un modelo logístico y no exponencial como en el apartado anterior y estudiaremos su dinámica de transición a largo plazo demostrando que existe un único estado estacionario, demostraremos que es globalmente estable y veremos que la solución del modelo puede expresarse mediante funciones hipergeométricas.
Finalmente, nos basaremos en el modelo poblacional presentado en [11] por Wei-Bin Zhang, lo describiremos y lo introduciremos en el marco del modelo de Solow y probaremos que el modelo completo puede expresarse en función de unas pocas variables.

Summary

Both in the past and today, the analysis of economic growth has been an issue of great importance to society. In addition, the study of economic growth is an area of great interest for governments in order to make economic policy proposals. Mathematical modelling has allowed us to obtain new insights into the factors that cause countries to advance or lag behind economically.

The purpose of this dissertation is to review the neoclassical Solow-Swan model, taking into account different approaches regarding population and technological progress and to present an endogenous model of population growth with the formation of the childbearing habit and the endogenous change in childbearing preference. This latter is also introduced into a simple Solow model, which does not take technological progress into account.

For this purpose, in the first part of the study we will focus on the Solow-Swan neoclassical model presented by Robert Solow in [2], describing the model together with some possible classical production functions and choosing the one that best fits our model. After this, we will introduce the technological process in this model, both a neutral technological progress that advances in time with a constant rate and an exponential technological progress, and we will study the behaviour of the economy in the long term in both cases.

To continue, we will deal with the population growth by means of a logistic model and not an exponential model as in the previous section. We will study its long-term transition dynamics by showing that there is a single steady state, we will demonstrate that it is globally stable and we will see that the solution of the model can be expressed by hypergeometric functions.

Finally, we will build on the population model presented in [11] by Wei-Bin Zhang, describe and introduce it into the framework of the Solow model and prove that the full model can be expressed in terms of a few variables.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

A lo largo de la historia, se han producido multitud de crecimientos económicos, así como grandes crisis en diferentes países. Por ejemplo, China entre 1980 y 2020, Corea del Sur, Taiwán, Hong Kong y Singapur, también conocidos como los cuatro dragones asiáticos entre principios de los setenta y los noventa, o el "milagro económico estadounidense" tras la Segunda Guerra Mundial, han sido grandes crecimientos. Por otro lado, Alemania tras la segunda guerra mundial o Venezuela en los últimos años, son ejemplos de recesiones económicas sin precedentes. Pero, ¿cómo podemos explicar los factores que causan estos hechos y encontrar soluciones para restaurar economías en crisis?
Para responder estas preguntas surgieron las diferentes ramas de pensamiento económico, la primera desarrollada por Adam Smith y recogida en "La riqueza de las naciones" en 1776. Los conocimientos que presentó en este trabajo fueron ampliados y mejorados. Una de las ideas con la que se extendió fue con la de que el avance tecnológico es clave para que se mantenga un desarrollo sostenido de la producción y no se estanque, lo cual es de gran importancia ya que un aumento en la producción de bienes y servicios se ve reflejado en una mejora de la calidad de vida de los ciudadanos.

Este concepto fue uno de los utilizados por Robert Solow en 1956, quien desarrolló, junto con Trevor Swan, uno de los modelos económicos más influyentes del siglo XX, el modelo neoclásico de Solow-Swan. Ambos realizaron sus contribuciones por separado y terminaron combinando sus enfoques para dar lugar a este modelo, el cual sirve para explicar los factores que impulsan el crecimiento económico y predecir cuál será la evolución de la economía a largo plazo. Es un modelo que se encuentra dentro del marco de la teoría neoclásica, la cual es un enfoque económico desarrollado en el siglo XIX y que logró consolidarse en el siglo XX y que se basa en los principios de maximización de beneficios y la optimización de los recursos. En lo referido al modelo de Solow, decimos que forma parte de la teoría neoclásica porque la función de producción utilizada es neoclásica, ya que combina los factores de producción de manera eficiente y los rendimientos son constantes a escala. El modelo neoclásico de Solow es un modelo que justifica el desarrollo de la economía mediante el ahorro, el control de la natalidad y la población y el avance tecnológico. Para modelarlos, Solow recurrió a ecuaciones diferenciales y diferentes funciones de producción que relacionan los factores de la producción que son el capital, la mano de obra y el progreso tecnológico con la producción de bienes y servicios.

Sin embargo, al ser el modelo de Solow un modelo que trata las variables que influyen en la economía de forma exógena, es decir, independientes al modelo y cuyo cambio viene dado por tasas ajenas a este, ha sido expandido por muchos economistas y matemáticos para hacer que se adapte de mejor manera a la realidad, haciendo que estas mismas variables sean resultado de las relaciones entre otros factores del modelo, de forma que su cambio estará determinado por el propio modelo. Entender como evoluciona la población es un aspecto fundamental para generalizarlo, por lo cual algo a tener en cuenta son las tasas de nacimiento y de mortalidad endógenas. Esto es debido a que el envejecimiento está estrechamente relacionado con las posibilidades económicas de la familia, ya que unos mayores ingresos favorecen el mejor cuidado de los mayores y por tanto una vida más longeva. De la misma manera,

muchos estudios empíricos demuestran que la tasa de natalidad está positivamente influenciada por los ingresos familiares, pues cuanto mayor sea el patrimonio más propensos serán unos padres a tener hijos. Sin embargo, también está probado que una mejor educación en los hijos se ve reflejado en una menor tasa de natalidad en el futuro.
Otros factores a tener en cuenta a la hora de presentar un modelo endógeno son la preferencia temporal y la formación de hábitos. Uno de los primeros en formular un modelo teniendo esto en cuenta fue Uzawa en 1968, en su trabajo "Time Preference, the Consumption Function, and Optimum Asset Holdings, in Value, Capital and Growth". A raíz de este surgieron muchos trabajos que estudiaron las implicaciones de la preferencia temporal endógena en la economía. Por otro lado, la idea de la formación de hábitos y la persistencia de estos fue introducida por Duesenberry en 1949 en su trabajo "Income, Saving, and the Theory of Consumer Behavior".
Estos factores los tuvo en cuenta Wei-Bing Zhang para formular diversos modelos poblacionales que aplicó al modelo de Solow, en particular, sobre el que nos vamos a centrar [11]. En este trabajo, Zhang combinó el desarrollo de un modelo de crecimiento con tasas de natalidad, de mortalidad y acumulación de la riqueza endógenas y distribución del tiempo entre el trabajo, el ocio y el cuidado de los hijos por género, junto con un modelo basado en la formación de hábitos y la preferencia temporal también diferenciando por género. Todos estos conceptos, los aplicó al modelo de Solow.

Como hemos podido ver, el uso de las matemáticas en el estudio del crecimiento económico ha sido un factor clave, pues es sumamente importante para el bienestar de la sociedad, por lo cual el desarrollo de modelos matemáticos que traten de explicar la realidad ha sido objeto de estudio para los economistas. Así, la modelización matemática se ha convertido en una herramienta fundamental para conseguir grandes avances económicos.
Las matemáticas permiten a los economistas representar la complejidad de la economía de manera más precisa y estricta. Sin embargo, también es importante darse cuenta de que los modelos económicos son simplificaciones de la realidad, y que las matemáticas no pueden representar todas las variables que se presentan en el mundo real. Por tanto, teniendo en cuenta los resultados sumado a un juicio objetivo de la realidad, es posible tomar las decisiones políticas pertinentes para mejorar las economías nacionales.

Capítulo 2

Modelo de Solow-Swan con crecimiento exponencial de la población

2.1. Introducción al Modelo de Solow-Swan

El modelo neoclásico de Solow-Swan, también conocido como modelo de Solow, se caracteriza por su simplicidad, pues de una forma muy sencilla es capaz de predecir el crecimiento económico. Anterior a este, el más común fue el modelo desarrollado por Roy Harrod y Evsey Domar, llamado modelo de Harrod-Domar, el cual enfatizaba en las dificultades del crecimiento económico y argumentaba que la economía estaba unida de forma inevitable con la inestabilidad. El modelo de Solow demostró que este no era un modelo atractivo para predecir el crecimiento. La principal forma en la que lo hizo fue agregando una función de producción neoclásica, que definiremos más adelante.

Presentaremos las nociones básicas que se deben cumplir para el desarrollo del modelo. En primer lugar, definimos $Y(t)$ como la producción de los bienes y servicios nacionales en un instante de tiempo t.

• Para simplificar el modelo, asumimos una economía en la cual no existen exportaciones ni importaciones del extranjero, es decir, una economía cerrada del país, además de que el gobierno nacional no realiza inversiones en bienes y servicios. Así, obtenemos una economía en la cual la producción depende del consumo de las familias y la inversión de las empresas. Por tanto tenemos:

$$Y(t) = C(t) + I_B(t), \tag{2.1}$$

donde $C(t)$ es el gasto de las familias en bienes y servicios y $I_B(t)$ es la inversión de las empresas para generar nuevos bienes y servicios.

• El ahorro de las familias es igual a la inversión de las empresas:

$$S(t) = I_B(t). \tag{2.2}$$

Por tanto la economía está únicamente formada por las familias, que ahorran lo que no consumen.

• Las familias ahorran una tasa constante de sus ingresos, de tal forma que:

$$S(t) = sY(t), \tag{2.3}$$

con s el coeficiente de ahorro cumpliendo $0 < s < 1$, de forma que la cantidad que no ahorran la dedican al consumo, así:

$$C(t) = (1-s)Y(t). \tag{2.4}$$

• Para entender mejor el modelo, podemos considerar una economía cuya producción depende únicamente de dos factores, el stock de capital (K) y la mano de obra (L). Más adelante introduciremos también el progreso tecnológico (A). Suponemos que la producción viene dada por la siguiente función:

$$Y = F(K,L), \tag{2.5}$$

donde $F(K,L)$ se conoce como función de producción y describe la relación entre el producto y los factores utilizados para la producción. Supondremos siempre que $F : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$.

• La inversión neta del capital es igual a la inversión bruta menos la depreciación:

$$I_N(t) = K'(t) = I_B(t) - \delta K(t), \tag{2.6}$$

siendo δ la tasa de depreciación del capital ($0<\delta<1$).

• Suponemos que la población crece de forma exponencial en el tiempo, con lo cual la mano de obra lo hará de la misma manera tal que:

$$\frac{L'(t)}{L(t)} = n, \tag{2.7}$$

es decir, varía en función del tiempo de la siguiente manera:

$$L(t) = L_0 e^{nt}, \tag{2.8}$$

donde L_0 es la fuerza laboral inicial y n la tasa de crecimiento de la población cumpliendo $n > 0$.

• Finalmente, la función de producción debe de ser neoclásica, pues en el modelo de Solow-Swan los factores de producción están sujetos a rendimientos decrecientes, es decir, a medida que aumenta la cantidad de estos, la producción aumenta pero a una tasa cada vez menor. Para que F sea neoclásica se deben de cumplir las siguientes características:

1. Debe ser homogénea de grado uno, lo cual justifica que los rendimientos sean constantes a escala:

$$F(\mu K, \mu L) = \mu F(K,L), \qquad \forall \mu > 0. \tag{2.9}$$

2. Si el capital o el trabajo es un factor nulo, no puede haber producción:

$$F(0,L) = F(K,0) = 0. \tag{2.10}$$

3. Debe ser una función de clase $\mathscr{C}^2$, es decir, deben existir sus derivadas parciales hasta orden 2 y deben de ser continuas.

4. Los productos marginales son positivos, por lo que si aumentamos el trabajo o el capital, aumentará la producción:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \tag{2.11}$$

además, la productividad marginal es decreciente y por tanto se verifica que el aumento prolongado del capital o el trabajo harán que la producción aumente de forma cada vez menor como hemos comentado antes:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0. \tag{2.12}$$

5. Se satisfacen las *condiciones de Inada*:

$$\begin{aligned} &\lim_{K\to\infty}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)=0, \qquad \lim_{L\to\infty}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)=0,\\ &\lim_{K\to 0}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)=\infty, \qquad \lim_{L\to 0}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)=\infty, \end{aligned} \tag{2.13}$$

lo cual indica que las primeras unidades de capital o trabajo tienen una gran productividad, sin embargo cuando estas aumentan de forma considerable, sus productos marginales se acercan a 0, es decir, su producción aumenta más lentamente.

2.2. Variables per cápita

En la práctica, usualmente se trabaja con variables referidas a la población o variables per cápita. Es decir, trabajaremos con aquellas variables que sean resultado de dividir las ya definidas entre la población total, las cuales reflejaran el promedio por persona. Así, usaremos la función de producción per cápita:

$$\frac{Y}{L}=\frac{F(K,L)}{L}=F\left(\frac{K}{L},1\right), \tag{2.14}$$

que define la producción por persona o por trabajador.

Definimos $y=\frac{Y}{L}$, $k=\frac{K}{L}$, $c=\frac{C}{L}$ como la producción per cápita, el capital per cápita y el consumo per cápita y podemos expresar (2.14) como:

$$y=f(k). \tag{2.15}$$

Varios de los supuestos anteriores los podemos expresar de forma que estén en términos per cápita, así las expresiones (2.4) y (2.10)-(2.13) las podemos escribir de la forma:

$$c=(1-s)y, \quad f(0)=0, \quad f'(k)>0, \quad f''(k)<0, \quad \lim_{k\to 0} f'(k)=\infty, \quad \lim_{k\to\infty} f'(k)=0.$$

Dadas estas circunstancias, podemos enunciar el primer resultado, el más simple con este modelo:

Teorema 2.1. *Dada una economía que cumple los supuestos* (2.1)-(2.13)*, entonces la ecuación que modela la acumulación de capital por persona, llamada ecuación fundamental de Solow es:*

$$k'(t)=sf(k(t))-(n+\delta)k(t). \tag{2.16}$$

Demostración. Como hemos definido, $k(t)=\dfrac{K(t)}{L(t)}$, por tanto derivando obtenemos

$$k'(t)=\frac{K'(t)L(t)-K(t)L'(t)}{L^2(t)}=\frac{K'(t)}{L(t)}-\frac{L'(t)}{L(t)}\frac{K(t)}{L(t)}=\frac{K'(t)}{L(t)}-\frac{L'(t)}{L(t)}k(t).$$

Aplicando (2.7) en la anterior expresión, podemos sustituir $\dfrac{L'(t)}{L(t)}$ por la tasa de crecimiento de población n y usando también (2.6) tenemos que

$$k'(t)=\frac{I_B(t)-\delta K(t)}{L(t)}-nk(t)=\frac{I_B(t)}{L(t)}-(\delta+n)k(t).$$

Por último, por (2.2) y (2.3) y teniendo en cuenta que $\dfrac{Y(t)}{L(t)}=y(t)$ llegamos a

$$k'(t)=sy(t)-(\delta+n)k(t)$$

donde $y(t)=f(k(t))$, obteniendo así el resultado. □

En (2.16), $f(k(t))$ es la función de producción y existen varios tipos de funciones de producción que podemos tomar, vamos a verlas y a elegir una de ellas.

2.3. Funciones de producción

En el modelo de Solow existen varios tipos de funciones de producción que se pueden utilizar para mostrar la relación entre el producto y los factores de producción. Robert Solow presentó tres de ellas en su artículo [2], con las cuales era posible resolver la ecuación fundamental. Estas son:

1. **Función de producción de Leontief**
   Es el caso de Harrod-Domar, donde la producción necesita una cantidad fija de capital y mano de obra en determinada proporción de la forma:

   $$Y = F(K,L) = min\left(\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right),$$

   siendo a la cantidad de capital y b la cantidad de mano de obra necesarios para obtener una unidad de producto.

   Tomando esta función de producción y sustituyendo en (2.16), obtenemos que la ecuación fundamental de Solow con la función de producción de Leontief es:

   $$k'(t) = s \cdot min\left(\frac{k(t)}{a}, \frac{1}{b}\right) - (n+\delta)k(t).$$

2. **Función de producción de Cobb-Douglas**
   Es la función de producción más utilizada en el modelo de Solow. Fue propuesta por primera vez en [3] por Paul Douglas y Charles Cobb, donde analizaron datos del sector manufacturero de Estados Unidos entre 1899 y 1922. Esta función de producción es la misma con la que trabajó Knut Wicksell en el siglo XIX, aunque no se llevó reconocimiento por ello. Viene dada por:

   $$Y = F(K,L) = K^{\alpha}L^{\beta},$$

   donde α y β representan el peso del capital y la mano de obra respecto a la producción.

   En esta función de producción α y β suman 1, lo que quiere decir que el capital y la mano de obra tienen un peso constante en la producción y así nos queda:

   $$F(K,L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha}.$$

   Si sustituimos esta función de producción en (2.16), entonces la ecuación fundamental de Solow con la función de producción de Cobb-Douglas es:

   $$k'(t) = sk^{\alpha}(t) - (n+\delta)k(t). \tag{2.17}$$

3. **Funciones de producción de rendimiento constante**
   Existe toda una familia de funciones de producción de rendimiento constante dada por:

   $$Y = F(K,L) = (\alpha K^{p} + L^{p})^{\frac{1}{p}},$$

   que se diferencia de la función de Cobb-Douglas en que la producción es posible con solo un factor. Igual que Solow, nos limitaremos al caso $0 < p < 1$, pues esto da los rendimientos marginales decrecientes habituales. La llamaremos función de producción p.

   Sustituyendo la función de producción p en (2.16), la ecuación fundamental de Solow que nos queda es:

   $$k'(t) = s(\alpha k(t)^{p} + 1)^{\frac{1}{p}} - (n+\delta)k(t).$$

Entre estas tres funciones, la que más se utiliza, pues es la que mejor se ajusta al modelo de Solow-Swan y además es la única función neoclásica, es la función de producción de Cobb-Douglas. De ahora en adelante asumiremos que esta será la función de producción que utilizaremos en todos los casos que estudiemos.

Así, la ecuación fundamental de Solow que nos importa es la correspondiente a la función de producción de Cobb-Douglas (2.17). Podemos resolverla sabiendo que es de tipo Bernoulli y utilizando el cambio de variable $u = k^{1-\alpha}$, lo cual nos lleva a una EDO lineal de primer orden. Calculando su solución y deshaciendo el cambio de variable, obtenemos que la solución analítica de (2.17) es:

$$k(t) = \left(\frac{s}{n+\delta} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{n+\delta} \right) e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{2.18}$$

donde $k(0) = k_0$ es el capital per cápita inicial.

2.4. Progreso Tecnológico Neutral

Un factor clave en la evolución de la economía para que no se estanque y alcance niveles más altos, es el progreso tecnológico, que denotaremos como A y que suponemos que crece con una tasa constante en el tiempo. Una forma muy sencilla de introducir el conocimiento tecnológico en nuestro modelo es multiplicándolo por la función de producción, de modo que

$$Y = A(t)F(K,L).$$

De esta forma, la función de producción de Cobb-Douglas varía, pues falta multiplicarle el factor de escala creciente de la tecnología, resultando la función de producción

$$Y = F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}.$$

Sustituyendo igual que hemos hecho antes en (2.16), la ecuación fundamental de Solow es

$$k'(t) = sAk^{\alpha}(t) - (n+\delta)k(t),$$

y resolviéndola de la misma forma que en (2.18) obtenemos

$$k(t) = \left(\frac{sA}{n+\delta} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{sA}{n+\delta} \right) e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Estado estacionario
Es importante mencionar el estado estacionario, un concepto muy importante en el modelo de Solow, pues es el estado al que tiende la economía a largo plazo. A lo largo del trabajo denotaremos al estado de equilibrio con el exponente *, de forma que k^* es el estado estacionario del capital per cápita. Este se da cuando $k'(t) = 0$, luego con lo hasta ahora visto tenemos que:

$$k'(t) = 0 \iff sAk(t)^{\alpha} = (n+\delta)k(t) \iff k^{1-\alpha}(t) = \frac{sA}{n+\delta},$$

por lo tanto, el estado estacionario del modelo de Solow con las condiciones vistas hasta el momento es:

$$k^* = \left(\frac{sA}{n+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Aquí podemos ver que el estado estacionario es menor cuanto mayor sean la tasa de población y la depreciación y que cuando la tasa de ahorro o el avance tecnológico aumentan, el estado estacionario aumenta.

Convergencia
A la hora de analizar la economía, no solo importa saber cuál va a ser el estado al cual va a evolucionar la economía, si no también la velocidad a la que nos vamos a acercar a este. Se llama "velocidad de convergencia" a la tasa que mide cómo de rápido nos acercamos al estado estacionario y depende de los parámetros estructurales de la economía. Para saber cuál es este valor, debemos conocer cómo evoluciona el stock de capital per cápita en función del tiempo:

$$\gamma(t) = \frac{k'(t)}{k(t)} = \frac{sf(k(t))}{k(t)} - (n+\delta).$$

Recordar que trabajamos con la función de producción de Cobb-Douglas, por tanto tomando $f(k(t)) = Ak^{\alpha}(t)$ la función de producción per cápita, se obtiene:

$$\gamma(t) = \frac{sAk^{\alpha}(t)}{k(t)} - (n+\delta) = sAk^{\alpha-1}(t) - (n+\delta).$$

En el largo plazo, la velocidad de convergencia se estabiliza y tiende a un valor constante, el cual es 0. Esto ocurre porque a largo plazo el capital per cápita tenderá a su estado estacionario y al sustituir $k(t)$ por $k^*(t)$ en la expresión anterior de $\gamma(t)$, esta se anula, lo cual es fácil de ver. Tenemos por lo tanto dos posibilidades:

- O bien $k < k^*$, entonces la economía crecerá hasta su estado estacionario, luego $\gamma(t) > 0$ e irá disminuyendo hasta llegar a 0.

- O bien $k > k^*$, entonces la economía disminuirá hasta su estado estacionario, luego $\gamma(t) < 0$ e irá aumentando hasta llegar a 0.

En la teoría, podría parecer que dos economías con el mismo estado estacionario k^* y diferentes niveles iniciales de capital per cápita k_0 tenderán a largo plazo al mismo nivel de capital pero con diferente velocidad de convergencia. La que tenga menor k_0, es decir la más pobre, tenderá a una tasa de crecimiento mayor que la más rica, de forma que los países pobres tendrán un mayor crecimiento que los ricos. Sin embargo, la realidad es que cada país tiene diferentes parámetros s, n y δ, que son los que determinan el estado estacionario, luego cada país poseerá un estado estacionario diferente y tenderá a él con velocidades distintas.

Tasas de crecimiento
Conviene saber las tasas de crecimiento conforme nos acercamos al estado estacionario de Y, K, y C.

Teorema 2.2. *Sea una economía que cumpla los supuestos* (2.1)-(2.13) *y con la función de producción de Cobb-Douglas, en el estado estacionario las variables Y, K, C crecen a la tasa de población n, pero las variables per cápita y, k, c tienen una tasa de crecimiento nula.*

2.5. Progreso Tecnológico Exponencial

Acabamos de ver que es inevitable que a largo plazo, el crecimiento económico sea nulo. Sin embargo, países industrializados han tenido tasas de crecimiento sostenibles a largo plazo, lo cual no puede explicarse con lo que hemos visto.
A esta contradicción, el mismo Solow le encontró respuesta, ya que pueden contemplarse cambios arbitrarios en la función de producción por medio de la tecnología como hemos visto, pero no es suficiente para obtener conclusiones sistemáticas y un crecimiento económico sostenido. Para obtenerlo, se debe introducir la tecnología como factor impulsor del crecimiento económico, de modo que la producción depende de tres factores, el capital (K), la mano de obra (L) y el avance tecnológico (A), pero con la diferencia de que el crecimiento tecnológico debe crecer de forma exponencial en el tiempo. Esto es debido a

que los países que experimentan un avance tecnológico sostenido en el tiempo son capaces de aumentar la producción aún manteniendo el capital y la mano de obra, pues si los trabajadores tienen acceso a maquinaria más avanzada serán capaces de generar una mayor producción, por lo que el progreso tecnológico se relaciona con la mano de obra. A medida que la tecnología avanza y la eficiencia tecnológica mejora, la economía puede producir más con la misma cantidad de insumos, lo que resulta en un aumento de la producción per cápita y un crecimiento económico sostenible. Si la eficiencia tecnológica se mantiene constante, el crecimiento económico se detendría provisionalmente en el estado estacionario. Es por esto que la introducción del avance tecnológico genera las siguientes modificaciones:

- El avance tecnológico va ligado a la mano de obra y no al capital por lo visto anteriormente, siendo la función de producción:
$$Y = F(K, AL). \tag{2.19}$$
- La tecnología tiene un crecimiento exponencial en el tiempo, es decir:
$$A(t) = A_0 e^{gt} \iff \frac{A'(t)}{A(t)} = g, \tag{2.20}$$
donde A_0 es la tecnología desde la que se parte y g es la tasa de crecimiento tecnológico, la cual será siempre positiva, ($g > 0$).
- Con este nuevo factor, la función de producción de Cobb-Douglas es:
$$Y = F(K, AL) = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}.$$

Una vez introducido el avance tecnológico, veamos que sigue cumpliendo las suposiciones que presentamos al principio del trabajo.

• Se puede comprobar de forma inmediata que la función de producción de Cobb-Douglas con avance tecnológico es neoclásica.

• Como hemos indicado, seguiremos trabajando con variables per cápita, por tanto, al ser nuestra función de producción una función neoclásica, es homogénea de grado 1, luego trabajaremos con la siguiente función de producción per cápita:

$$\frac{Y}{AL} = \frac{F(K, AL)}{AL} = F\left(\frac{K}{AL}, 1\right). \tag{2.21}$$

Definimos como $\tilde{y} = \frac{Y}{AL}$, $\tilde{k} = \frac{K}{AL}$ y $\tilde{c} = \frac{C}{AL}$ la producción, el capital y el consumo per cápita efectivos y así podemos reescribir (2.21) como:

$$\tilde{y} = f(\tilde{k}), \tag{2.22}$$

y además podemos reescribir los supuestos (2.4) y (2.10)-(2.13) como:

$$\tilde{c} = (1-s)\tilde{y}, \quad f(0) = 0, \quad f'(\tilde{k}) > 0, \quad f''(\tilde{k}) < 0, \quad \lim_{\tilde{k}\to 0} f'(\tilde{k}) = \infty, \quad \lim_{\tilde{k}\to\infty} f'(\tilde{k}) = 0.$$

Teorema 2.3. *Dada una economía que sigue los supuestos* (2.1)-(2.13) *y en la que hay un avance tecnológico cumpliendo* (2.20)*, entonces la ecuación fundamental de Solow queda:*

$$\tilde{k}'(t) = s\tilde{k}^{\alpha}(t) - (n + \delta + g)\tilde{k}(t). \tag{2.23}$$

Para hallar la solución de (2.23), procederemos de la misma manera que lo hemos hecho con (2.17) y así hallamos que su solución es:

$$\tilde{k}(t) = \left(\frac{s}{n+\delta+g} + \left(\tilde{k_0}^{1-\alpha} - \frac{s}{n+\delta+g}\right)e^{-(1-\alpha)(n+\delta+g)t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

donde $\tilde{k}(0) = \tilde{k}_0$ es el capital per cápita inicial.

Estado estacionario
Si analizamos el estado estacionario en este caso, cuando se cumple que $\tilde{k}'(t)$=0, entonces obtenemos que el único estado estacionario positivo es:

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n+\delta+g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Luego a simple vista se puede observar que cuanto mayor sea la tasa de ahorro, el estado estacionario más aumentará, sin embargo, si son la tasa de aumento de población, la tasa de depreciación del capital o la tasa de crecimiento económico los que aumentan, menor será la tendencia del estado estacionario.

Tasas de crecimiento
Igual que antes, para conocer si existirá crecimiento económico a largo plazo es importante saber a qué tasas ascienden las variables Y, K, y C, así como sus variables per cápita efectivas.

Teorema 2.4. *Dada una economía que sigue los supuestos* (2.1)-(2.13)*, con avance tecnológico cumpliendo* (2.20) *y la función de producción de Cobb-Douglas, entonces en el estado estacionario las variables Y, K, C crecen a la tasa n+g, las variables per cápita y, k, c crecen a una tasa g y por último, las variables per cápita efectivas $\tilde{y}$, $\tilde{k}$, $\tilde{c}$ tienen una tasa de crecimiento nula.*

Por lo tanto podemos deducir que a largo plazo, el crecimiento económico dependerá únicamente del avance tecnológico. Sin embargo, en el corto plazo dependerá tanto del avance tecnológico como de la acumulación de capital. Es importante saber cuál será la tasa de crecimiento de la producción respecto del tiempo para conocer cómo evolucionará nuestra economía. En nuestro caso, la tasa de crecimiento de la producción viene dada por

$$\frac{Y'(t)}{Y(t)} = \alpha\frac{K'(t)}{K(t)} + (1-\alpha)\frac{L'(t)}{L(t)} + R(t),$$

donde $R(t)$ es conocido como el residuo de Solow y verifica que $R(t) = (1-\alpha)\dfrac{A'(t)}{A(t)}$. Hemos visto que como suponíamos con la función de producción, podemos descomponer la producción en las aportaciones del capital, el trabajo y la tecnología, esta última mediante el residuo de Solow. Sin embargo, $R(t)$ no solo refleja la aportación del avance tecnológico, si no de todos los demás factores que no hemos tenido en cuenta.

Capítulo 3

Modelo de Solow-Swan con crecimiento logístico de la población

3.1. Introducción

El modelo de Solow-Swan sigue una hipótesis simple, pero con un problema evidente en los casos vistos anteriormente si nos ceñimos a la realidad, pues se supone un crecimiento exponencial de la población con una tasa $n > 0$, por tanto la población tiende a infinito a largo plazo, lo cual es claramente imposible. Para solucionar esto, lo que propuso Verhulst en 1838 fue considerar que una población estable debe tener un nivel de saturación. Así, creó el modelo de crecimiento logístico de la población, que vamos a incluir en esta sección para estudiarlo. Nos basaremos en el artículo [5] para desarrollar esta idea, introduciendo el crecimiento logístico de la población en el modelo de Solow con crecimiento tecnológico exponencial que hemos visto anteriormente. Muchos estudios apoyan esta hipótesis donde la tasa de crecimiento de la población es decreciente con tendencia a 0.

3.2. Formulación del modelo

Deben cumplirse los supuestos que hemos presentado en la introducción para que se tenga un crecimiento logístico de la población y por lo tanto, más realista. De esta forma, vamos a suponer que:

- La población es siempre positiva, estrictamente creciente y acotada superiormente por su nivel de saturación, que llamaremos L_∞. Además, supondremos que la población inicial es 1 por simplicidad:
$$L(0) = L_0 = 1, \quad L(t) > 0 \quad \forall t > 0, \quad L'(t) > 0 \quad \forall t > 0, \quad \lim_{t\to\infty}(L(t)) = L_\infty.$$

- La tasa de crecimiento de la población $\dfrac{L'(t)}{L(t)}$ decrece y tiende a 0:
$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{L'(t)}{L(t)}\right) = 0.$$

Las suposiciones que no tienen que ver con la fuerza laboral las mantenemos igual que en los apartados anteriores, sin embargo en este caso, al contrario que en el modelo de Solow-Swan estándar, la población no crece de forma constante, si no que sigue la fórmula:

$$\frac{L'(t)}{L(t)} = a - bL(t), \quad a > b > 0, \quad \forall t > 0, \tag{3.1}$$

la cual cumple las hipótesis que hemos presentado anteriormente.

Teorema 3.1. *Sea una economía que cumple los supuestos* (2.1)-(2.6)*,* (2.9)-(2.16) *y* (3.1) *entonces la ecuación fundamental de Solow es:*

$$k'(t) = sk^{\alpha}(t) - (\delta + g + a - bL(t))k(t). \tag{3.2}$$

Por tanto, incorporando el crecimiento logístico de la población, la economía sigue el sistema de dos ecuaciones no lineales que son:

$$\begin{cases} k'(t) = sk^{\alpha}(t) - (\delta + g + a - bL(t))k(t), \\ L'(t) = (a - bL(t))L(t). \end{cases} \tag{3.3}$$

En primer lugar, calcularemos la solución de (3.1). Para ello, separamos las partes dependientes de $L(t)$ a un lado e integramos, así:

$$L'(t) = (a - bL(t))L(t) \iff \frac{dL}{dt} = (a - bL)L \iff \frac{dL}{(a - bL)L} = dt \iff \int \frac{dL}{(a - bL)L} = \int dt.$$

Teniendo en cuenta que $L(0) = 1$, tenemos que las integrales están definidas en un intervalo:

$$\int_1^L \frac{dl}{(a - bl)l} = \int_0^t d\tau.$$

En la integral de la izquierda, procederemos por descomposición en fracciones simples,

$$\frac{1}{(a - bL)L} = \frac{A}{a - bL} + \frac{B}{L}.$$

Operando, obtenemos que $A = \dfrac{b}{a}$ y $B = \dfrac{1}{a}$, luego tenemos que:

$$\int_1^L \frac{dl}{(a - bl)l} = \int_0^t d\tau \iff \frac{b}{a}\int_1^L \frac{dl}{a - bl} + \frac{1}{a}\int_1^L \frac{dl}{l} = \int_0^t d\tau \iff -\frac{1}{a}\int_1^L \frac{-bdl}{a - bl} + \frac{1}{a}\int_1^L \frac{dl}{l} = \int_0^t d\tau \iff$$

$$\iff -\frac{1}{a} ln(a - bL) + \frac{1}{a} ln(a - b) + \frac{1}{a} ln(L) = t \iff ln\left(\frac{(a - b)L}{a - bL}\right) = at \iff \frac{(a - b)L}{a - bL} = e^{at} \iff$$

$$\iff (a - b)L = ae^{at} - bLe^{at} \iff (a - b + be^{at})L = ae^{at} \iff L = \frac{ae^{at}}{a - b + be^{at}}.$$

Por tanto, la solución que obtenemos para (3.1) es

$$L(t) = \frac{ae^{at}}{a - b + be^{at}}.$$

Para calcular la solución de (3.2), tenemos que tener en cuenta que es una EDO no lineal de primer orden y de tipo Bernoulli, cumpliendo $k(0) = k_0$. Por tanto realizamos el cambio de variable $u(t) = k^{1-\alpha}(t)$, llamando $u(0) = u_0$ y obtenemos:

$$u'(t) = (1 - \alpha)s - (1 - \alpha)(\delta + g + a - bL(t))u(t),$$

que es una ecuación lineal de coeficientes variables, cuya solución es

$$u(t) = e^{\int_0^t -(1-\alpha)(\delta+g+a-bL(\tau))d\tau}\left(u_0 + \int_0^t s(1 - \alpha)e^{\int_0^t (1-\alpha)(\delta+g+a-bL(\tau))d\tau} d\tau\right).$$

Teniendo en cuenta que $L'(t) = (a - bL(t))L(t)$, entonces

$$e^{\int_0^t -(1-\alpha)(\delta+g+a-bL(\tau))d\tau} = e^{-(1-\alpha)\int_0^t\left(\delta+g+\frac{L'(\tau)}{L(\tau)}\right)d\tau} = e^{-(1-\alpha)(\delta+g)t}L(t)^{-(1-\alpha)},$$

y por tanto

$$u(t) = e^{-(1-\alpha)(\delta+g)t}L(t)^{-(1-\alpha)}\left(u_0 + s(1 - \alpha)\int_0^t e^{(1-\alpha)(\delta+g)\tau}L(\tau)^{1-\alpha} d\tau\right).$$

Deshaciendo el cambio de variable, la solución de la ecuación fundamental de Solow que obtenemos es:

$$k(t) = \frac{a - b + be^{at}}{ae^{(\delta+g+a)t}}\left(k_0^{1-\alpha} + s(1 - \alpha)\int_0^t \left(\frac{ae^{(\delta+g+a)\tau}}{a - b + be^{a\tau}}\right)^{1-\alpha} d\tau\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \forall t > 0. \tag{3.4}$$

3.3. Dinámica de transición

Vamos a estudiar en primer lugar el estado estacionario, que se produce cuando $k'(t) = 0$ y $L'(t) = 0$. Ya hemos definido la notación del estado estacionario del capital k^*, pero como en este apartado introducimos un modelo de población con crecimiento logístico, nos interesa saber a que nivel tiende a largo plazo, así que denotaremos al estado estacionario de la fuerza laboral como L^*. Excluiremos las soluciones que no tengan sentido para la economía en la vida real, como por ejemplo las que tengan componentes nulas $k^* = 0$ o $L^* = 0$

Teorema 3.2. *Existe un único estado estacionario (k^*,L^*) del sistema* (3.3)*, donde*

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta+g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad L^* = \frac{a}{b}.$$

Fuera del estado estacionario el crecimiento de la economía no es constante, sino que evoluciona de acuerdo con (3.3). Vamos a determinar cómo es la trayectoria de equilibrio de la economía , para ello, estudiaremos la dinámica de transición del estado estacionario del sistema (3.3) con un $k_0 > 0$ arbitrario y veremos como se comporta a lo largo de la trayectoria de transición.

Teorema 3.3. *El estado estacionario es un nodo asintóticamente estable.*

Demostración. Para probarlo, vamos a ver el signo de los valores propios de la matriz Jacobiana asociada al sistema lineal. En nuestro caso, definimos las funciones

$$\begin{cases} k'(t) = H(k,L) = sk^{\alpha}(t) - (\delta+g+a-bL(t))k(t), \\ L'(t) = G(k,L) = (a-bL(t))L(t), \end{cases}$$

un sistema de ecuaciones no lineal, que podemos aproximar linealmente por el desarrollo de Taylor alrededor de nuestro punto crítico $\left(\left(\frac{s}{\delta+g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \frac{a}{b}\right)$. Para ello tomaremos

$$H(k,L) = H(k^*,L^*) + \left.\frac{\partial H(k,L)}{\partial k}\right|_{(k^*,L^*)} (k(t)-k^*) + \left.\frac{\partial H(k,L)}{\partial L}\right|_{(k^*,L^*)} (L(t)-L^*) + E_H(k,L),$$

$$G(k,L) = G(k^*,L^*) + \left.\frac{\partial G(k,L)}{\partial k}\right|_{(k^*,L^*)} (k(t)-k^*) + \left.\frac{\partial G(k,L)}{\partial L}\right|_{(k^*,L^*)} (L(t)-L^*) + E_G(k,L).$$

Calculando las derivadas obtenemos que

$$\left.\frac{\partial H(k,L)}{\partial k}\right|_{(k^*,L^*)} = (\alpha-1)(\delta+g), \qquad \left.\frac{\partial H(k,L)}{\partial L}\right|_{(k^*,L^*)} = bk(t)|_{(k^*,L^*)} = bk^*,$$

$$\left.\frac{\partial G(k,L)}{\partial k}\right|_{(k^*,L^*)} = 0, \qquad \left.\frac{\partial G(k,L)}{\partial L}\right|_{(k^*,L^*)} = -a,$$

y teniendo en cuenta que $H(k^*,L^*) = 0$ y $G(k^*,L^*) = 0$, nos queda

$$\begin{cases} k'(t) = H(k,L) = (\alpha-1)(\delta+g)(k(t)-k^*) + bk^*(L(t)-L^*) + E_H(k,L), \\ L'(t) = G(k,L) = -a(L(t)-L^*) + E_G(k,L). \end{cases}$$

Así, se obtiene el sistema:

$$\begin{pmatrix} k'(t) \\ L'(t) \end{pmatrix} = J^* \begin{pmatrix} k(t)-k^* \\ L(t)-L^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_H(k,L) \\ E_G(k,L) \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

donde J^* es la matriz Jacobiana asociada al sistema (3.3) linealizado, es decir,

$$J^* = \begin{pmatrix} (\alpha-1)(\delta+g) & bk^* \\ 0 & -a \end{pmatrix},$$

y los errores cumplen que

$$E_H(k,L) = sk^{\alpha} - (\delta + g + a - bL)k - (\alpha - 1)(\delta + g)(k - k^*) - bk^*(L - L^*),$$

$$E_G(k,L) = (a - bL)L + a(L - L^*).$$

Se cumple que si el estado estacionario es un nodo asintóticamente estable para el sistema (3.5), entonces también lo es para el mismo sistema sin los errores.
Así, nos centraremos en analizar el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} k'(t) \\ L'(t) \end{pmatrix} = J^* \begin{pmatrix} k(t) - k^* \\ L(t) - L^* \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

sin los errores.

De esta forma, solo nos tendremos que centrar en los valores propios de la matriz J^*, los cuales son claramente los elementos de su diagonal al ser una matriz triangular superior, es decir, $\lambda_1 = (\alpha - 1)(\delta + g)$ y $\lambda_2 = -a$, ambos reales y negativos, luego queda probado que el estado estacionario es un nodo asintóticamente estable. □

Observación 1. La forma general de la solución de (3.6) es:

- si $\lambda_1 \neq \lambda_2$,
$$\begin{cases} k(t) = k^* + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 bk^* e^{\lambda_2 t}, \\ L(t) = L^* + C_2(\lambda_1 - \lambda_2)e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$
- si $\lambda_1 = \lambda_2$,
$$\begin{cases} k(t) = k^* + (C_1 + C_2(1+t))e^{\lambda_2 t}, \\ L(t) = L^* + \left(\frac{C_2}{bk^*}\right) e^{\lambda_2 t}, \end{cases}$$

donde C_1 y C_2 son constantes determinadas por las condiciones iniciales.

Veamos ahora si el sistema (3.3) tiene órbitas periódicas. Para ello, en primer lugar introduciremos el teorema de Bendixson-Dulac, el cual es necesario para demostrar que no existen órbitas periódicas.

Teorema 3.4. *(Teorema de Bendixson-Dulac): Sea la función de Dulac $\varphi(x,y) \in \mathscr{C}^1$ en un dominio D simplemente conexo tal que se cumple que la expresión*

$$\frac{\partial(\varphi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi g)}{\partial y}$$

no cambia de signo y es siempre $\neq 0$ en casi todo punto de D, entonces el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y), \end{cases}$$

no tiene soluciones periódicas no constantes en D.

Demostración. Lo vamos a probar por reducción al absurdo. Sin pérdida de generalidad, suponemos que existe una función $\varphi(x,y)$ que cumple

$$\frac{\partial(\varphi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi g)}{\partial y} > 0,$$

en D. Suponemos también que existe una trayectoria cerrada C del sistema en D y denotamos I al interior de C. Si existiese esta trayectoria cerrada C, entonces el sistema tendría soluciones periódicas en D. Por el teorema de Green se cumple que

$$\int\int_I \left(\frac{\partial(\varphi f)}{\partial x}+\frac{\partial(\varphi g)}{\partial y}\right)dxdy=\int_C(-\varphi g dx+\varphi f dy)=\int_C \varphi(-\frac{dy}{dt}dx+\frac{dx}{dt}dy)=0.$$

Sin embargo, por hipótesis hemos supuesto que

$$\int\int_I \left(\frac{\partial(\varphi f)}{\partial x}+\frac{\partial(\varphi g)}{\partial y}\right)dxdy\neq 0,$$

por tanto tenemos una contradicción y no puede haber ninguna trayectoria cerrada C, luego no existe ninguna solución periódica en D. □

Teorema 3.5. *No existe ningún ciclo límite en este modelo.*

Demostración. El resultado se sigue de aplicar el teorema 3.4 (Teorema de Bendixon-Dulac). Por tanto, tomando $\varphi(k,L)=\frac{1}{kL}$, la cual es una función de Dulac en $\mathbb{R}^2_+$, tenemos

$$\frac{\partial(\varphi f)}{\partial k}+\frac{\partial(\varphi g)}{\partial L}=\frac{\partial\left(\frac{k'}{kL}\right)}{\partial k}+\frac{\partial\left(\frac{L'}{kL}\right)}{\partial L}=\frac{-(1-\alpha)sk^{\alpha-2}}{L}-\frac{b}{k}<0.$$

Luego se cumple la hipótesis y no existe ninguna solución periódica en $\mathbb{R}^2_+$ y por tanto ningún ciclo límite en nuestro modelo. □

Teorema 3.6. *Cualquier solución del sistema* (3.3) *es acotada, es decir, existe un conjunto compacto* $\Omega\subset\mathbb{R}^2_+$ *tal que* $(k(t),L(t))\subset\Omega\ \forall t\geq 0$.

Demostración. Se sigue directamente de las condiciones de Inada dadas en (2.13). □

Teorema 3.7. *Cualquier solución (k(t),L(t)) del sistema* (3.3) *converge al estado de equilibrio* (k^*,L^*) *cuando* $t\to\infty$.

Demostración. Por el teorema de Poincaré-Bendixson, que está enunciado en [13], cada trayectoria $(k(t),L(t))$ debe cumplir una de estas tres afirmaciones: ser ilimitada, converger a un ciclo límite o converger al estado de equilibrio.
Como en los teoremas anteriores hemos probado que no existe ningún ciclo límite y que todas las soluciones son acotadas, entonces se tiene que cumplir que todas las soluciones tienden al estado estacionario. □

3.4. Resolución del modelo a través de funciones hipergeométricas

Definición 1. Se define la función hipergeométrica de Gauss para argumentos complejos c_1, c_2, c_3 y κ como:

$$F_1(c_1,c_2,c_3;\kappa)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(c_1+m)\Gamma(c_2+m)}{\Gamma(c_3+m)}\frac{\kappa^m}{m!},$$

donde Γ es la función Gamma.

Esta serie converge para todo c_1, c_2 y c_3 si $|\kappa|<1$ y para todo c_1, c_2 y c_3 tal que $Re(c_1+c_2-c_3)<0$ si $|\kappa|=1$.
También existen fórmulas de la función Gamma hipergeométrica fuera del círculo unidad. La más práctica es la representación integral de la función Gamma geométrica, usaremos la fórmula

$$F_1(c_1,c_2,c_3;\kappa)=\frac{\Gamma(c_3)}{\Gamma(c_1)\Gamma(c_3-c_1)}\int_0^1 t^{c_1-1}(1-t)^{c_3-c_1-1}(1-\kappa t)^{-c_2}dt,$$

donde $Re(c_1)>0$ y $Re(c_3-c_1)>0$ y que se conoce como la representación integral de Euler.

Teorema 3.8. *Sea F_1 la función hipergeométrica, $\gamma = (1-\alpha)(\delta+g+a)$ y $M = \frac{b}{b-a}$. Entonces se cumple que:*

$$k(t) = \frac{1-Me^{at}}{(1-M)e^{\left(\frac{\gamma}{1-\alpha}\right)t}}\left[k_0^{1-\alpha} + \frac{s(1-\alpha)(1-M)^{1-\alpha}}{\gamma}\left(e^{\gamma t}F_1\left(\frac{\gamma}{a}, 1-\alpha, \frac{\gamma}{a}+1; Me^{at}\right) - F_1\left(\frac{\gamma}{a}, 1-\alpha, \frac{\gamma}{a}+1; M\right)\right)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Demostración. Recordemos que como hemos visto en (3.4), $k(t)$ tiene la forma

$$k(t) = \frac{a-b+be^{at}}{ae^{(\delta+g+a)t}}\left(k_0^{1-\alpha} + s(1-\alpha)\int_0^t \left(\frac{ae^{(\delta+g+a)t}}{a-b+be^{at}}\right)^{1-\alpha} dt\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Operando la función que tenemos dentro de la integral sin tener en cuenta el exponente obtenemos que

$$\frac{ae^{(\delta+g+a)t}}{a-b+be^{at}} = \frac{-ae^{(\delta+g+a)t}}{-a+b-be^{at}} = \frac{\frac{b-a-b}{b-a}e^{(\delta+g+a)t}}{\frac{-a+b-be^{at}}{b-a}} = \frac{(1-M)e^{(\delta+g+a)t}}{1-Me^{at}} = \frac{(1-M)e^{\left(\frac{\gamma}{1-\alpha}\right)t}}{1-Me^{at}}.$$

Observamos que la primera parte de (3.4) es el inverso del integrando que acabamos de operar, por tanto

$$\frac{a-b+be^{at}}{ae^{(\delta+g+a)t}} = \left(\frac{ae^{(\delta+g+a)t}}{a-b+be^{at}}\right)^{-1} = \left(\frac{(1-M)e^{\left(\frac{\gamma}{1-\alpha}\right)t}}{1-Me^{at}}\right)^{-1} = \frac{1-Me^{at}}{(1-M)e^{\left(\frac{\gamma}{1-\alpha}\right)t}},$$

obteniendo la primera parte de la expresión. Nos queda únicamente comprobar que la integral cumple la igualdad. Volviendo a esta y como hemos visto antes

$$\int_0^t \left(\frac{ae^{(\delta+g+a)\tau}}{a-b+be^{a\tau}}\right)^{1-\alpha} d\tau = \int_0^t \left(\frac{(1-M)e^{\left(\frac{\gamma}{1-\alpha}\right)\tau}}{1-Me^{a\tau}}\right)^{1-\alpha} d\tau,$$

haciendo en este paso el cambio de variable $e^{a\tau} = x$, donde se tiene que $\tau = \frac{ln(x)}{a}$, $d\tau = \frac{dx}{ax}$, si $\tau = 0$ entonces $x = 1$ y si $\tau = t$ entonces $x = e^{at}$, obtenemos

$$\int_0^t \left(\frac{(1-M)e^{\left(\frac{\gamma}{1-\alpha}\right)\tau}}{1-Me^{a\tau}}\right)^{1-\alpha} d\tau = \int_1^{e^{at}} \left(\frac{(1-M)e^{\left(\frac{\gamma}{1-\alpha}\right)\left(\frac{ln(x)}{a}\right)}}{1-Mx}\right)^{1-\alpha} \frac{1}{ax}dx = \frac{(1-M)^{1-\alpha}}{a}\int_1^{e^{at}} \left(\frac{x^{\frac{\gamma}{(1-\alpha)a}}}{1-Mx}\right)^{1-\alpha} \frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{(1-M)^{1-\alpha}}{a}\int_1^{e^{at}} x^{\frac{\gamma}{a}-1}(1-Mx)^{-(1-\alpha)}dx.$$

La integral la podemos descomponer de forma que:

$$\int_1^{e^{at}} x^{\frac{\gamma}{a}-1}(1-Mx)^{-(1-\alpha)}dx = \int_0^{e^{at}} x^{\frac{\gamma}{a}-1}(1-Mx)^{-(1-\alpha)}dx - \int_0^1 x^{\frac{\gamma}{a}-1}(1-Mx)^{-(1-\alpha)}dx.$$

Por tanto, se debe dar la igualdad

$$\int_0^{e^{at}} x^{\frac{\gamma}{a}-1}(1-Mx)^{-(1-\alpha)}dx - \int_0^1 x^{\frac{\gamma}{a}-1}(1-Mx)^{-(1-\alpha)}dx = \frac{ae^{\gamma t}}{\gamma}F_1\left(\frac{\gamma}{a}, 1-\alpha, \frac{\gamma}{a}+1; Me^{at}\right) - \frac{a}{\gamma}F_1\left(\frac{\gamma}{a}, 1-\alpha, \frac{\gamma}{a}+1; M\right),$$

para que se cumpla la hipótesis. Vamos a operar para ver que se cumple la igualdad. En primer lugar, vamos a ver que las expresiones que tenemos a la derecha de cada una de las restas son iguales. Aplicando la definición de F_1 y teniendo en cuenta que $\Gamma(1) = 1$ y $\Gamma(v+1) = v\Gamma(v) \quad \forall v > 0$ y tenemos

$$\frac{a}{\gamma}F_1\left(\frac{\gamma}{a}, 1-\alpha, \frac{\gamma}{a}+1; M\right) = \frac{a}{\gamma}\frac{\Gamma(\frac{\gamma}{a}+1)}{\Gamma(\frac{\gamma}{a})\Gamma(1)}\int_0^1 x^{\frac{\gamma}{a}-1}(1-x)^0(1-Mx)^{-(1-\alpha)}dx = \frac{a}{\gamma}\frac{\frac{\gamma}{a}\Gamma(\frac{\gamma}{a})}{\Gamma(\frac{\gamma}{a})}\int_0^1 x^{\frac{\gamma}{a}-1}(1-Mx)^{-(1-\alpha)}dx =$$

$$\int_0^1 x^{\frac{\gamma}{a}-1}(1-Mx)^{-(1-\alpha)}dx.$$

Ahora, solo nos queda probar que las funciones que tenemos a la izquierda de las restas son iguales. Aplicando la definición de F_1 y las propiedades de la función Γ igual que antes tenemos

$$\frac{ae^{\gamma t}}{\gamma}F_1\left(\frac{\gamma}{a},1-\alpha,\frac{\gamma}{a}+1;Me^{at}\right)=\frac{ae^{\gamma t}}{\gamma}\frac{\gamma}{a}\int_0^1 x^{\frac{\gamma}{a}-1}(1-Me^{at}x)^{-(1-\alpha)}dx=e^{\gamma t}\int_0^1 x^{\frac{\gamma}{a}-1}(1-Me^{at}x)^{-(1-\alpha)}dx.$$

Resolvemos la integral aplicando el cambio de variable $r=e^{at}x$, así $x=e^{-at}r$, $dx=e^{-at}dr$, si $x=0$ entonces $r=0$ y si $x=1$ entonces $r=e^{at}$, por tanto

$$e^{\gamma t}\int_0^1 x^{\frac{\gamma}{a}-1}(1-Me^{at}x)^{-(1-\alpha)}dx=e^{\gamma t}\int_0^{e^{at}}(re^{-at})^{\frac{\gamma}{a}-1}(1-Me^{at}e^{-at}r)^{-(1-\alpha)}e^{-at}dr=$$

$$=e^{\gamma t}\int_0^{e^{at}} r^{\frac{\gamma}{a}-1}e^{-\gamma t}e^{at}(1-Mr)^{-(1-\alpha)}e^{-at}dr=\int_0^{e^{at}} r^{\frac{\gamma}{a}-1}(1-Mr)^{-(1-\alpha)}dr,$$

obteniendo así la igualdad, por lo que se cumple la hipótesis. $\square$

Capítulo 4

Modelo de población de Zhang

Como hemos visto anteriormente, en el modelo de Solow se tratan las variables que afectan a la economía de forma exógena, es decir, que están fuera del modelo de forma que no son explicadas por este, sino que cuyas tasas se asumen como dadas. Este enfoque, aunque puede acercarse a la realidad si se toman valores numéricos adecuados para las tasas, siempre puede mejorarse haciendo endógenas las variables. De esta forma, se mejora la capacidad del modelo para explicar y predecir el crecimiento económico. Que las variables sean endógenas quiere decir que sus valores están determinados dentro del modelo, es decir, son el resultado de relaciones y ecuaciones específicas explicadas en el mismo.
En esta sección, trataremos la población como una variable endógena, haciendo una síntesis de los tres modelos propuestos por Zhang [8], [9], [10] e introduciéndola en el modelo de Solow-Swan. Nos basaremos en lo que Zhang propuso en [11]. Modularemos la población construyendo un modelo de interacciones dinámicas entre la tasa de natalidad, la tasa de mortalidad, la población, la acumulación de riqueza, la distribución del tiempo entre el trabajo, el ocio y el cuidado de los hijos, la formación de hábitos y el cambio de preferencias. Así conseguiremos examinar las relaciones dinámicas entre el crecimiento económico, el crecimiento demográfico y el cambio de preferencias.

4.1. El modelo básico

El sector productivo se basa en el modelo de Solow como hemos definido anteriormente verificando (2.1)-(2.6), (2.9)-(2.13). No contemplaremos el progreso tecnológico como anteriormente, sino que se verá reflejado en el parámetro B que definiremos más adelante. La función de producción se caracteriza por rendimientos constantes a escala, los hogares distribuyen sus ingresos entre el consumo, la procreación y la acumulación de riqueza. En este caso, además del capital físico y la mano de obra, añadimos el capital humano como factor impulsor de la economía. El capital humano se refiere al conjunto de habilidades, conocimientos y capacidades productivas adquiridas por los individuos a través de la educación, formación y experiencia laboral, que influye en la producción, ya que los individuos con mayores habilidades serán capaces de ser más eficientes en la utilización de los recursos, impulsar la innovación tecnológica y promover la acumulación de capital físico, en resumen, de generar un mayor crecimiento económico. La población de cada sexo es homogénea, las familias se componen por padre, madre e hijos y todas las familias son iguales. Nos referimos a los hombres con $q = 1$ y a las mujeres con $q = 2$. Usamos $L(t)$ para referirnos a la población total. Sean $T_q(t)$ y $\overline{T}_q(t)$ el tiempo dedicado al trabajo y el tiempo dedicado al cuidado de los hijos por el género q, $\overline{L}(t)$ la mano de obra disponible en el instante t y $L_q(t)$ la mano de obra cualificada del género q, tenemos:

$$L_q(t) = h_q T_q(t) L(t), \qquad \overline{L}(t) = (h_1 T_1(t) + h_2 T_2(t)) L(t) = L_1(t) + L_2(t), \tag{4.1}$$

donde h_q es el nivel de capital humano del género q.

Sector productivo:
El sector productivo utiliza el capital y la mano de obra como factores. La función de producción es:

$$Y(t) = BK^{\alpha}(t)\overline{L}^{\beta}(t), \quad \alpha, \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1, \tag{4.2}$$

donde B representa la productividad total del sector de producción, en este término entre otros factores se ve reflejado el progreso tecnológico. α y β son las elasticidades sobre la producción del capital y la mano de obra respectivamente, es decir, la sensibilidad que presenta la producción frente a las variaciones del capital y de la mano de obra. Denotamos $w(t)$ y $r(t)$ a la tasa salarial y al tipo de interés por unidad de tiempo respectivamente. Además, como hemos hecho hasta ahora, denotamos a la tasa de depreciación del capital como δ. Así, las condiciones marginales que se cumplen son:

$$r(t) + \delta = \frac{\alpha Y(t)}{K(t)}, \qquad w(t) = \frac{\beta Y(t)}{\overline{L}(t)} \qquad w_q = h_q w(t), \tag{4.3}$$

donde w_q es la tasa salarial por unidad de tiempo de trabajo por género.

Comportamiento de los consumidores:
Seguimos el enfoque utilizado en [7] para describirlo. Los hogares son los que deciden el nivel de consumo, el tiempo de ocio, el tiempo de trabajo, el número de hijos y la cantidad de ahorro. Como ya hemos hecho, definimos $\overline{k}(t) = \frac{K(t)}{\overline{L}(t)}$ como la riqueza por hogar que puede vender para comprar bienes o ahorrar. Así la renta corriente por hogar de los pagos de intereses y salarios es:

$$y(t) = r(t)\overline{k}(t) + w_1(t)T_1(t) + w_2(t)T_2(t). \tag{4.4}$$

Suponemos que la venta y compra de la riqueza pueden realizarse instantáneamente sin ningún coste de transacción. Así la renta per cápita disponible por hogar es la suma de la renta corriente y la riqueza que poseen:

$$\hat{y}(t) = y(t) + \overline{k}(t). \tag{4.5}$$

Coste del cuidado de los hijos
Llamamos $n(t)$ a la tasa de natalidad y $p_b(t)$ al coste de nacimiento en un momento dado. Suponemos que los hijos poseen el mismo nivel de riqueza que los padres. Hay muchos factores que afectan al coste de criar a los hijos, así que además del tiempo dedicado a los hijos, el coste de criarlos viene dado por

$$p_b(t) = n(t)\overline{k}(t).$$

Definimos ahora el tiempo dedicado al cuidado de los hijos. Hay que tener en cuenta que en muchas sociedades es la madre la principal encargada del cuidado de los hijos. Consideramos la siguiente relación entre la tasa de natalidad y el tiempo dedicado por los padres en la crianza de los hijos:

$$\overline{T}_q(t) = \theta_q n(t), \quad \theta_q \geq 0. \tag{4.6}$$

Por esta función, si los padres deciden tener más hijos, entonces dedicarán más tiempo a su cuidado, además el tiempo de cuidado por hijo tiende a disminuir conforme la familia tiene más hijos.

Limitaciones en el presupuesto y el tiempo
Los hogares distribuyen su presupuesto entre el ahorro $s(t)$, el consumo $c(t)$ y el coste de tener hijos $p_b(t)$, siendo la restricción presupuestaria la siguiente:

$$\hat{y}(t) = c(t) + s(t) + \overline{k}(t)n(t). \tag{4.7}$$

Consideramos que los padres reparten su tiempo entre trabajo, cuidado de los hijos y ocio, de forma que se enfrenten a la siguiente restricción temporal:

$$T_0 = T_q(t) + \overline{T}_q(t) + \widetilde{T}_q(t), \tag{4.8}$$

donde $\widetilde{T}_q$ es el tiempo que los adultos del género q dedican al ocio y T_0 es el tiempo total que poseen. Sustituyendo (4.7) y (4.4) en (4.5) obtenemos

$$c(t)+s(t)+\bar{k}(t)n(t)=(1+r(t))\bar{k}(t)+w_1(t)T_1(t)+w_2(t)T_2(t),$$

y aplicando (4.8) en esta expresión llegamos a

$$\bar{y}(t)=c(t)+s(t)+\bar{k}(t)n(t)+\overline{T}_1(t)w_1(t)+\overline{T}_2(t)w_2(t)+\widetilde{T}_1(t)w_1(t)+\widetilde{T}_2(t)w_2(t), \tag{4.9}$$

donde

$$\bar{y}(t)\equiv(1+r(t))\bar{k}(t)+(w_1(t)+w_2(t))T_0.$$

Esta última equivalencia se refiere a la renta “potencial” a la que puede aspirar una familia si invierte todo su tiempo disponible en el trabajo. La ecuación (4.9) es la suma del coste del consumo, el ahorro, el coste de la posibilidad de tener hijos y el coste de la posibilidad de invertir el tiempo en ocio. Insertando (4.6) en (4.9) obtenemos

$$\bar{y}(t)=c(t)+s(t)+\widetilde{w}(t)n(t)+\widetilde{T}_1(t)w_1(t)+\widetilde{T}_2(t)w_2(t),$$

donde

$$\widetilde{w}(t)\equiv\bar{k}(t)+hw(t),\qquad h\equiv\theta_1h_1+\theta_2h_2,$$

siendo $\widetilde{w}(t)$ el coste de la posibilidad de criar hijos.

Utilidad y comportamiento óptimo

La utilidad de los padres dependerá del número de hijos que tengan y se formula en función de $c(t)$, $s(t)$, $\widetilde{T}_q(t)$, y $n(t)$ de la siguiente manera:

$$U(t)=c(t)^{\xi_0(t)}s(t)^{\lambda_0(t)}\widetilde{T}_1^{\sigma_{01}(t)}(t)\widetilde{T}_2^{\sigma_{02}(t)}(t)n(t)^{\upsilon_0(t)}, \tag{4.10}$$

donde $\xi_0(t)>0$ es la propensión al consumo, $\lambda_0(t)>0$ la propensión a poseer riqueza, $\sigma_{0q}(t)>0$ la propensión a utilizar el tiempo libre del género q y $\upsilon_0(t)>0$ la propensión a tener hijos.
La condición de primer orden de maximizar $U(t)$ sujeto a (4.10) es

$$c(t)=\xi(t)\bar{y}(t),\quad s(t)=\lambda(t)\bar{y}(t),\quad \widetilde{T}_q(t)=\frac{\sigma_q(t)\bar{y}(t)}{w_q(t)},\quad n(t)=\frac{\upsilon(t)\bar{y}(t)}{\widetilde{w}(t)}, \tag{4.11}$$

donde

$$\xi(t)\equiv\rho(t)\xi_0(t),\quad \lambda(t)\equiv\rho(t)\lambda_0(t),\quad \sigma_q(t)\equiv\rho(t)\sigma_{0q}(t),\quad \upsilon(t)\equiv\rho(t)\upsilon_0(t),$$
$$\rho(t)\equiv\frac{1}{\xi_0(t)+\lambda_0(t)+\sigma_{01}(t)+\sigma_{02}(t)+\upsilon_0(t)}.$$

Preferencia temporal y propensión a mantener la riqueza

La modelización de la preferencia se ve influenciada por los modelos de crecimiento neoclásico con formación de hábitos y cambio de preferencias. Nos basaremos en [8] y [9] para describir los cambios en las preferencias. Así, la propensión al ahorro se adapta a la riqueza y a las tasas salariales de forma que

$$\lambda_0(t)=\overline{\lambda}+\lambda_1w_1(t)+\lambda_2w_2(t),$$

donde $\overline{\lambda}>0$, λ_1 y λ_2 son parámetros. Por simplicidad supondremos que la propensión al ahorro es proporcional a la riqueza y a las tasas salariales. Si $\lambda_1=\lambda_2=0$ entonces la propensión a mantener riqueza es constante.

La formación del hábito de consumo y la propensión a consumir bienes
Modelizamos el cambio endógeno en la propensión a consumir bienes de la siguiente manera.
En primer lugar la formación del hábito de consumir bienes viene dado por

$$\overline{h}_c'(t) = \hat{\xi}(c(t) - \overline{h}_c(t)), \tag{4.12}$$

donde $\overline{h}_c(t)$ es el stock del hábito con respecto a los bienes que se consumen. $\hat{\xi}$ mide los pesos relativos del consumo en diferentes momentos. Si el consumo está por encima del nivel de stock de hábitos, este último aumenta y viceversa. La propensión a consumir es una función de los ingresos salariales y el stock de hábitos tal que

$$\xi_0(t) = \overline{\xi} + \xi_1 w_1(t) + \xi_2 w_2(t) + \xi_h \overline{h}_c(t),$$

donde $\overline{\xi} > 0$, ξ_q y $\xi_h \geq 0$ son parámetros. Pueden tenerse en cuenta también las tasas de natalidad y mortalidad en la propensión al consumo. Si $\xi_q = 0$ y $\xi_h = 0$ entonces esta propensión es constante. Por el término $\xi_q w_q$, las tasas salariales afectan, así si $\xi_q > (<)0$, entonces un aumento en las tasas salariales aumenta (reduce) la propensión al consumo. Es lógico tomar $\xi_q \geq 0$ para bienes normales. El término $\xi_h \overline{h}_c(t)$ implica que si el stock de hábitos aumenta, la propensión aumenta y viceversa.

La formación del hábito para momentos de ocio y la propensión a usar el ocio
El cambio en la propensión a utilizar el ocio es similar a la propensión a consumir bienes, por lo que de forma parecida a (4.12) tenemos que el stock del hábito para el tiempo de ocio es

$$\overline{h}_{Tq}'(t) = \hat{\sigma}_q(\widetilde{T}_q(t) - \overline{h}_{Tq}(t)), \quad q = 1,2, \tag{4.13}$$

donde $\hat{\sigma}_q \geq 0$ es un parámetro que mide los pesos relativos del tiempo de ocio en diferentes momentos. Si el actual tiempo de ocio es mayor que el nivel del stock de hábitos, el nivel del stock aumenta y viceversa. La propensión a utilizar el tiempo libre sigue

$$\sigma_{0q}(t) = \overline{\sigma}_q + \sigma_{q1}\, w_1(t) + \sigma_{q2}\, w_2(t) + \widetilde{\sigma}_{q1}\, \overline{h}_{T2}(t) + \widetilde{\sigma}_{q2}\, \overline{h}_{T1}(t), \quad q = 1,\ 2, \tag{4.14}$$

donde $\overline{\sigma}_q$, σ_{qj} y $\widetilde{\sigma}_{qj}$ son parámetros, el primero positivo y los otros dos de signo ambiguo. Por el término $\sigma_{qj}\, w_q(t)$, sabemos que la propensión a usar el tiempo de ocio es influenciado por las tasas salariales.

La formación del hábito de tener hijos y el cambio en la propensión a tenerlos
La evolución del stock del hábito de tener hijos es

$$\overline{h}_b'(t) = \hat{\sigma}_b(n(t) - \overline{h}_b(t)), \tag{4.15}$$

donde $\hat{\sigma}_b \geq 0$ es un parámetro que mide los pesos relativos de la tasa de natalidad en diferentes momentos. La propensión a tener hijos sigue que

$$\upsilon_0(t) = \hat{\upsilon} + \upsilon_1 w_1(t) + \upsilon_2 w_2(t) + \upsilon_b \overline{h}_b(t),$$

donde se cumple que el parámetro $\hat{\upsilon} > 0$ y los signos de los parámetros υ_q y υ_b son ambiguos.

Tasas de natalidad y mortalidad y dinámicas de población
Para ilustrar nuestro enfoque sobre el modelo de crecimiento de población nos basaremos en el modelo de Haavelmo [12]. Por las definiciones dadas, la evolución de la población es

$$L'(t) = (n(t) - d(t))L(t), \tag{4.16}$$

donde $n(t)$ es la tasa de natalidad que ya hemos definido anteriormente y $d(t)$ es la tasa de mortalidad. En el modelo de Haavelmo, la tasa de mortalidad está relacionada negativamente con la renta per cápita. En nuestro caso, haciendo una síntesis de diferentes modelos de crecimiento de la población, asumimos que la tasa de mortalidad está negativamente relacionada con la renta disponible de la siguiente manera

$$d(t) = \frac{\overline{\upsilon} L^b(t)}{\overline{y}^a(t)}, \tag{4.17}$$

donde $\overline{\upsilon} \geq 0$ es llamado el parámetro de la tasa de mortalidad y $a \geq 0$. En nuestro caso, igual que en el modelo de Haavelmo, una mejora en las condiciones de vida conlleva que la población viva más. El término $L^b(t)$ tiene en cuenta posibles influencias de la población en la mortalidad, por ejemplo, cuando existe sobrepoblación, el medioambiente se deteriora, por lo que en ese caso el parámetro b debería ser positivo. Sin embargo, el signo también puede ser negativo, pues estas influencias también pueden ser buenas para la longevidad de la población. Insertando (4.11) y (4.17) en (4.16) obtenemos

$$L'(t) = \left(\frac{\upsilon \overline{y}(t)}{\widetilde{w}(t)} - \frac{\overline{\upsilon} L^b(t)}{\overline{y}^a(t)} \right) L(t). \tag{4.18}$$

En esta ecuación no tenemos en cuenta la estructura por edades, que aunque es importante para describir la evolución de la población, no la tendremos en cuenta en nuestro modelo.

Dinámica de la riqueza
Por la definición del ahorro $s(t)$, la dinámica de la acumulación de riqueza en los hogares está dada por

$$\overline{k}'(t) = s(t) - \overline{k}(t) = \lambda(t)\overline{y}(t) - \overline{k}(t). \tag{4.19}$$

Demanda y oferta de bienes
El ahorro nacional es la suma del ahorro de los hogares. Tenemos que la producción del sector de bienes de capital es igual a los ahorros netos más la depreciación del stock de capital, por lo que

$$S(t) + C(t) - K(t) + \delta K(t) = Y(t),$$

donde $S(t) - K(t) + \delta K(t)$ es la suma del ahorro neto y la depreciación y se cumple que

$$S(t) = s(t)L(t), \quad C(t) = c(t)L(t), \quad K(t) = \overline{k}(t)L(t).$$

De esta forma, se ha construido un modelo del cual el modelo de Solow y el de Haavelmo son casos especiales. Vamos a examinar ahora la dinámica del modelo.

4.2. Dinámica del modelo y sus propiedades

En esta sección, vamos a analizar las dinámicas del modelo. Para ello, en primer lugar definimos $z(t) \equiv \dfrac{r(t)+\delta}{w(t)}$. Veamos que las dinámicas del modelo pueden expresarse por medio de seis ecuaciones diferenciales con $z(t)$, $L(t)$, $\overline{h}_c(t)$, $\overline{h}_{T1}(t)$, $\overline{h}_{T2}(t)$ y $\overline{h}_b(t)$ como variables.

Teorema 4.1. *Las dinámicas del sistema económico siguen las siguiente ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{cases} z'(t) = \widetilde{\Omega}_z(z(t), L(t), \overline{h}_c(t), \overline{h}_{T1}(t), \overline{h}_{T2}(t), \overline{h}_b(t)), \\ L'(t) = \widetilde{\Omega}_N(z(t), L(t), \overline{h}_c(t), \overline{h}_{T1}(t), \overline{h}_{T2}(t), \overline{h}_b(t)), \\ \overline{h}_c'(t) = \widetilde{\Omega}_c(z(t), L(t), \overline{h}_c(t), \overline{h}_{T1}(t), \overline{h}_{T2}(t), \overline{h}_b(t)), \\ \overline{h}_{Tq}'(t) = \widetilde{\Omega}_q(z(t), L(t), \overline{h}_c(t), \overline{h}_{T1}(t), \overline{h}_{T2}(t), \overline{h}_b(t)), \quad q = 1,2, \\ \overline{h}_b'(t) = \widetilde{\Omega}_b(z(t), L(t), \overline{h}_c(t), \overline{h}_{T1}(t), \overline{h}_{T2}(t), \overline{h}_b(t)), \end{cases}$$

donde $\widetilde{\Omega}_i$ son funciones dependientes de $z(t)$, $L(t)$, $\overline{h}_c(t)$, $\overline{h}_{T1}(t)$, $\overline{h}_{T2}(t)$ y $\overline{h}_b(t)$. Más aún, todas las demás variables están determinadas por funciones dependientes de $z(t)$, $L(t)$, $\overline{h}_c(t)$, $\overline{h}_{T1}(t)$, $\overline{h}_{T2}(t)$ y $\overline{h}_b(t)$.

Demostración. Veamos que todas las variables que rigen las dinámicas de la economía se pueden expresar de esta forma. Vamos a obviar la notación dependiente del tiempo (t), a excepción de en las 6 variables que rigen el sistema, para simplificar visualmente la demostración. Por (4.3) tenemos

$$z \equiv \frac{r + \delta_k}{w} = \frac{\widetilde{\alpha}\overline{L}}{K}, \tag{4.20}$$

donde $\widetilde{\alpha} \equiv \dfrac{\alpha}{\beta}$. Insertando esta expresión en (4.2) y (4.3) obtenemos

$$r = \alpha A \left(\frac{z}{\widetilde{\alpha}}\right)^{\beta} - \delta_k, \quad w = \beta A \left(\frac{\widetilde{\alpha}}{z}\right)^{\alpha}, \quad w_1 = wh_1, \quad w_2 = wh_2,$$

teniendo r, w y w_q como funciones de z.

Por la definición de $\overline{y}$ y (4.3) tenemos

$$\overline{y} = (1+r)\overline{k} + h_0 w, \tag{4.21}$$

donde $h_0 \equiv (h_1 + h_2)T_0$.

Ahora, por (4.8) y (4.11), tenemos

$$T_q = T_0 - \overline{T}_q - \widetilde{T}_q = T_0 - \left(\frac{\theta_q \upsilon}{\widetilde{w}} + \frac{\sigma_q}{w_q}\right)\overline{y}, \tag{4.22}$$

e insertando (4.21) en (4.22)

$$T_q = \chi_q - \frac{\widetilde{r}_q \overline{k} + \overline{r}_q}{\widetilde{w}} - r_q \overline{k},$$

donde $\chi_q = T_0 - \dfrac{h_0 w \sigma_q}{w_q}, \quad \widetilde{r}_q \equiv \theta_q \upsilon(1+r), \quad \overline{r}_q \equiv h_0 \theta_q \upsilon w, \quad r_q \equiv \dfrac{(1+r)\sigma_q}{w_q}.$

Insertamos ahora (4.22) en la definición de L_q obteniendo

$$\frac{\overline{L}}{L} = h_1 T_2 + h_1 T_2 = \chi - \frac{\widetilde{r}\overline{k} + \overline{h}_0}{\widetilde{w}} - \widetilde{r}_0 \overline{k}, \tag{4.23}$$

donde $\chi \equiv h_1\chi_1 + h_2\chi_2, \quad \widetilde{r} \equiv h_1\widetilde{r}_1 + h_2\widetilde{r}_2, \quad \overline{h}_0 \equiv h_1\overline{r}_1 + h_2\overline{r}_2, \quad \widetilde{r}_0 \equiv h_1 r_1 + h_2 r_2.$

De (4.14) se sigue que

$$\overline{\lambda}\overline{y} - \hat{\delta}\overline{k} = \frac{Y}{L}, \tag{4.24}$$

donde $\overline{\lambda} \equiv \lambda + \xi$ y $\hat{\delta} = 1 - \delta$. Si insertamos (4.21) y (4.3) en (4.24) entonces

$$(\overline{\lambda} + \overline{\lambda} r - \hat{\delta})\overline{k} + \overline{\lambda} h_0 w = \frac{w\overline{L}}{L\beta},$$

y tomando (4.23) y sustituyendo en esta última obtenemos

$$\left(\frac{(\overline{\lambda} + \overline{\lambda} r - \hat{\delta})\beta}{w} + \widetilde{r}_0\right)\overline{k} + \frac{\widetilde{r}\overline{k} + \overline{h}_0}{\widetilde{w}} + \beta\overline{\lambda} h_0 - \chi = 0.$$

Como se cumple que $\widetilde{w} = \overline{k} + hw$, teniendo en cuenta también la expresión anterior tenemos

$$\overline{k}^2 + \widetilde{m}_1 \overline{k} + \widetilde{m}_2 = 0, \tag{4.25}$$

donde

$$\widetilde{m}_1(z(t), L(t), \overline{h}_c(t), \overline{h}_{T1}(t), \overline{h}_{T2}(t), \overline{h}_b(t)) \equiv \frac{(\overline{\lambda} + \overline{\lambda} r - \hat{\delta})h\beta + \widetilde{r}_0 hw + \beta\overline{\lambda} h_0 - \chi + \widetilde{r}}{\widetilde{m}},$$

$$\widetilde{m}_2(z(t), L(t), \overline{h}_c(t), \overline{h}_{T1}(t), \overline{h}_{T2}(t), \overline{h}_b(t)) \equiv \frac{\overline{h}_0 + (\beta\overline{\lambda} h_0 - \chi)hw}{\widetilde{m}},$$

$$\widetilde{m}(z(t),L(t),\overline{h}_c(t),\overline{h}_{T1}(t),\overline{h}_{T2}(t),\overline{h}_b(t)) \equiv \frac{(\overline{\lambda}+\overline{\lambda}r-\hat{\delta})\beta}{w}+\widetilde{r}_0.$$

Despejando $\overline{k}$ como si fuera una variable en (4.25) tenemos

$$\overline{k} = \Omega(z(t),L(t),\overline{h}_c(t),\overline{h}_{T1}(t),\overline{h}_{T2}(t),\overline{h}_b(t)) \equiv \frac{-\widetilde{m}_1 \pm \sqrt{\widetilde{m}_1^2-4\widetilde{m}_2}}{2}. \tag{4.26}$$

Por tanto, hemos probado que $\overline{k}$ es una función dependiente de $z(t)$, $L(t)$, $\overline{h}_c(t)$, $\overline{h}_{T1}(t)$, $\overline{h}_{T2}(t)$ y $\overline{h}_b(t)$. Así, podemos ver que todas las variables son funciones dependientes de $z(t)$, $L(t)$, $\overline{h}_c(t)$, $\overline{h}_{T1}(t)$, $\overline{h}_{T2}(t)$ y $\overline{h}_b(t)$, en primer lugar $\overline{k}$, r, w y w_q como ya hemos visto, $\overline{y}$ por (4.21), c, s, $\widetilde{T}_q$ y n por (4.11), $\overline{T}_q$ por (4.6), T_q por (4.22), $\overline{L}$ por (4.1), K por (4.20) y Y por (4.2). Siguiendo este procedimiento, por (4.12), (4.13), (4.15), (4.18) y (4.19) se cumple

$$\begin{cases} \overline{k}'(t) = \widetilde{\Omega}_k(z(t),L(t),\overline{h}_c(t),\overline{h}_{T1}(t),\overline{h}_{T2}(t),\overline{h}_b(t)), \\ L'(t) = \widetilde{\Omega}_N(z(t),L(t),\overline{h}_c(t),\overline{h}_{T1}(t),\overline{h}_{T2}(t),\overline{h}_b(t)), \\ \overline{h}_c'(t) = \widetilde{\Omega}_c(z(t),L(t),\overline{h}_c(t),\overline{h}_{T1}(t),\overline{h}_{T2}(t),\overline{h}_b(t)), \\ \overline{h}_{Tq}'(t) = \widetilde{\Omega}_q(z(t),L(t),\overline{h}_c(t),\overline{h}_{T1}(t),\overline{h}_{T2}(t),\overline{h}_b(t)), \quad q=1,2, \\ \overline{h}_b'(t) = \widetilde{\Omega}_b(z(t),L(t),\overline{h}_c(t),\overline{h}_{T1}(t),\overline{h}_{T2}(t),\overline{h}_b(t)), \end{cases} \tag{4.27}$$

No vamos a proporcionar expresiones explícitas sobre las ecuaciones por la dificultad del las mismas, así que finalmente veamos que z también puede expresarse de igual manera que el resto de variables.
Por (4.26),

$$\overline{k}'(t) = \frac{\partial\Omega}{\partial z}z'(t) + \frac{\partial\Omega}{\partial\overline{h}_c}\overline{h}_c'(t) + \frac{\partial\Omega}{\partial\overline{h}_{T1}}\overline{h}_{T1}'(t) + \frac{\partial\Omega}{\partial\overline{h}_{T2}}\overline{h}_{T2}'(t) + \frac{\partial\Omega}{\partial\overline{h}_b}\overline{h}_b'(t) + \frac{\partial\Omega}{\partial L}L'(t).$$

Sustituyendo las expresiones que tenemos en (4.27) en lo anterior obtenemos

$$\overline{k}'(t) = \frac{\partial\Omega}{\partial z}z'(t) + \frac{\partial\Omega}{\partial\overline{h}_c}\widetilde{\Omega}_c + \frac{\partial\Omega}{\partial\overline{h}_{T1}}\widetilde{\Omega}_{T1} + \frac{\partial\Omega}{\partial\overline{h}_{T2}}\widetilde{\Omega}_{T2} + \frac{\partial\Omega}{\partial\overline{h}_b}\widetilde{\Omega}_b + \frac{\partial\Omega}{\partial L}\widetilde{\Omega}_L.$$

Así, igualando a la expresión de $\overline{k}'(t)$ de (4.27), se tiene

$$z'(t) = \left(\widetilde{\Omega}_k - \frac{\partial\Omega}{\partial\overline{h}_c}\widetilde{\Omega}_c - \frac{\partial\Omega}{\partial\overline{h}_{T1}}\widetilde{\Omega}_{T1} - \frac{\partial\Omega}{\partial\overline{h}_{T2}}\widetilde{\Omega}_{T2} - \frac{\partial\Omega}{\partial\overline{h}_b}\widetilde{\Omega}_b - \frac{\partial\Omega}{\partial L}\widetilde{\Omega}_L\right)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^{-1} =$$

$$= \widetilde{\Omega}_z(z(t),L(t),\overline{h}_c(t),\overline{h}_{T1}(t),\overline{h}_{T2}(t),\overline{h}_b(t)),$$

y hemos visto que las variables se pueden expresar de la forma que queríamos.

□

Como acabamos de ver, es muy complicado dar una expresión explícita de las ecuaciones que rigen la economía. por tanto, las dejaremos en función de estas 6 variables, quedando claro que pese a la complejidad del modelo expuesto, es posible expresarlo en función de únicamente unas pocas variables.

Bibliografía

[1] Lucía Mendez Gutiérrez, *Modelos matemáticos en macroeconomía*, Universidad de Cantabria.

[2] Robert M. Solow, *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, The Quarterly Journal of Economics, Vol. 70, No. 1 (Feb., 1956), pp. 65-94.

[3] Charles W. Cobb y Paul H. Douglas, *A Theory of Production*, The American Economic Review, Vol. 18, No. 1, Supplement, Papers and Proceedings of the Fortieth Annual Meeting of the American Economic Association (Mar., 1928), pp. 139-165.

[4] F. Gerard y J. F. Tablado, *“A Theory of Production": The Estimation of the Cobb-Douglas Function, a Retrospective View*, Eastern Economic Journal, Vol. 31, No. 3, 2005, pp. 427-446.

[5] M. Ferrara y L. Guerrini, *The neoclassical model of Solow and Swan with logistic population growth*, January 2008.

[6] E. M. M. Navarro, *El modelo de crecimiento económico de Solow-Swan: implicaciones y limitaciones*.

[7] Zhang, W.B., *Woman’s Labor Participation and Economic Growth - Creativity, Knowledge Utilization and Family Preference*, Economics Letters, (1993), vol. 42, pp. 105-10.

[8] Zhang, W.B., *Habits, Saving Propensity, and Economic Growth*, Scientific Bulletin - Economic Sciences, (2012), vol. 11, pp. 3-15.

[9] Zhang, W.B., *Habit Formation and Preference Change in a Two-sector Growth Model with Elastic Labor Supply*, Academica Science Journal: Economica Series, (2013) vol. 1, pp. 3-20.

[10] Zhang, W.B., *Birth and Mortality Rates, Gender Division of Labor, and Time Distribution in the Solow Growth Model*, Revista Galega de Economia, vol. 24, (Jan., 2015), 121-140

[11] Zhang, W.B., *Population growth and preference change in a generalized Solow growth model with gender time distributions*, Oradea Journal of Business and Economics, vol. 1, (Sept., 2016), 7-30

[12] Haavelmo, T., *A Study in the Theory of Economic Evolution*, North-Holland: Amsterdam, (1954).

[13] Boice, W.E., DiPrima, R., *Elementary Differential Equations and Boundary ValueProblems*, John Wiley and Sons, Fifth Ed, (1995).

[14] Miles, D. and Scott, *Macroeconomics – Understanding the Wealth of Nations*, Second edition, Chichester: John Wiley and Sons Ltd, (2005).