Holomorfía en Varias Variables Complejas

Marta Recalde Villamayor
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: José Esteban Galé Gimeno
14 de junio de 2023

Introducción

Historia

En esencia, la teoría de varias variables complejas es el estudio de las funciones derivables definidas sobre el espacio de coordenadas complejas, $\mathbb{C}^n$. Funciones de este tipo aparecían ya de manera común en el siglo diecinueve, si bien durante años su teoría quedó sin desarrollar en el ámbito del análisis matemático ya que se desconocían las interesantes particularidades de esta rama de las matemáticas. No fue hasta la década de 1930 cuando comenzó a articularse la teoría por parte de matemáticos como Friedrich Hartogs, Augustin Louis Cauchy o Karl Weierstrass. Varios de sus resultados aparecerán más adelante en este texto. Entre ellos destaca el conocido como fenómeno de Hartogs: toda singularidad aislada de una función analítica en n variables es evitable si $n > 1$.

A partir de 1945, simultáneamente en Francia, en los seminarios organizados por Henri Cartan, y en Alemania con el trabajo de Hans Grauert y Reinhold Remmert se aclararon aspectos relevantes para el estudio de estas funciones, como el problema de la continuación analítica. Por otra parte, la teoría comenzó a tener un espectacular despliegue de aplicaciones, y por tanto de interés, a mediados de los años cincuenta, con el impulso de la geometría algebraica, la invención de la teoría de haces, singularidades, etc.

Motivación

Así como hay una continuación de la asignatura análisis matemático I, con una generalización al caso n-dimensional real en la asignatura análisis matemático II, no hay disponible en este grado una asignatura dedicada al caso n-dimensional de variable compleja. Se podría pensar que esto es debido a que generalizar a varias variables complejas es análogo al proceso ya realizado en análisis matemático II, o que simplemente hay que añadir multi-índices y considerar derivadas parciales. Sin embargo, este no es el caso, ya que la variable compleja tiene una extensión muy interesante y problemas importantes propios al pasar a espacios complejos de varias dimensiones.

Más allá de que el plano complejo es sólo un caso particular, se trata de la falta de *espacio* en la recta compleja para que ocurran ciertos fenómenos. Desde un punto de vista geométrico, tenemos por ejemplo que en el plano todo conjunto simplemente conexo y distinto de $\mathbb{C}$ es biholomorfo con el disco unidad (teorema de representación conforme de Riemann); sin embargo, en dimensiones superiores la clasificación de dominios biholomorfos no es tan clara, pues ya la bola unidad en $\mathbb{C}^2$ no es biholomorfa al bidisco unidad, véase [1, pág. 31]. Lo que marca la diferencia de fondo de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, es que queda *espacio* para el análisis complejo en el espacio tangente a la frontera de un dominio y esto amplía significativamente el campo de acción. (En esta memoria no vamos a entrar en detalle en estas cuestiones porque son de una dificultad superior a lo que se asume para un TFG.)

En particular, hay una diferencia en cuanto a las singularidades estudiadas en variable compleja. En $\mathbb{C}^2$ queda espacio para el análisis complejo en el conjunto de ceros de una función holomorfa, ya que éste puede tener dimensión compleja > 0. Es el caso de la función $(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2$, cuyo conjunto de ceros es una variedad de dimensión 1, mientras que para cualquier función holomorfa (no idénticamente nula) con dominio en $\mathbb{C}$, sus ceros forman un conjunto discreto de puntos, es decir, tiene dimensión 0.

En este trabajo exponemos los aspectos primordiales, básicos, de la teoría de variable compleja multidimensional, desde dos ángulos distintos pero complementarios. Comenzamos recordando las bases del análisis en una variable compleja (capítulo 1), y a continuación introducimos la teoría pluridimensional dividida en dos partes o capítulos. En la primera recogemos los resultados que son generalizaciones o extensiones del caso unidimensional, como por ejemplo, el principio del máximo o el teorema de la aplicación abierta, etc. (capítulo 2). La segunda parte (capítulo 3) se dedica a los resultados que no tienen análogo o carecen de significado en el caso puramente unidimensional, como por ejemplo, la definición de dominio de holomorfía, o el fenómeno de Hartogs.

La holomorfía es pues el concepto central con en el que enfocamos este trabajo. En una variable compleja existen varios puntos de vista que resultan ser equivalentes para el tratamiento de la holomorfía; a saber, su expresión en serie de potencias, representación integral, o soluciones de ecuaciones en derivadas parciales. En varias variables complejas también podemos adoptar estos puntos de vista, y añadimos uno nuevo, la holomorfía en cada variable por separado. Veremos que todos ellos son equivalentes y además que desde cada uno de estos puntos de vista aparecen nuevos fenómenos.

Los ejes que articulan el capítulo 3 son: el teorema de Hartogs sobre equivalencia de las funciones holomorfas y las funciones holomorfas en cada variable, el teorema de Hartogs sobre continuación analítica en complementarios de compactos, y algunas caracterizaciones de los dominios propios de las series de potencias.

Abstract

The aim of this work is to present some elementary results regarding holomorphic functions of several complex variables, where some aspects are analogous to the case of a single complex variable, but others bring up completely new phenomena.

The content of this work has three main parts:

The first chapter, considered as a preamble, is partly a compilation of one complex variable results that have already been proved during the degree. We also add some new results that will come in handy for the proofs and generalisations on several complex variables. A remarkable result on this chapter would be the generalised Cauchy's integral formula, which has the Cauchy's integral formula for holomorfic functions as a particular case.

Right after that, we get into the several complex variable chapters.

Firstly, we define the complex differential and the complex conjugate differential in several variables, as it is done for the unidimensional case on the preamble, to have the tools to extend the theory of single variable to the several case. Then, we prove that we have four equivalent characterisations of holomorphic functions, as well as another noteworthy result, that is the Cauchy integral formula in polydiscs. Subsequently, we show a few interesting properties of holomorphic functions, and extend some of the single variable results from two different perspectives: integral Cauchy representations and analyticity.

Lastly, the third chapter consists of aspects that differ from the single variable situation:

- **The Hartogs theorem**, which states that a $\mathbb{C}$-valued function f defined in an open set $U \subset \mathbb{C}^n$ is analytic in each variable z_j when the other coordinates z_k for $k \neq j$ are fixed implies that f is analytic as a function of all n coordinates.

  Clearly, this result is pointless on single variable.

- **Hartogs extension theorem**: also known as Hartogs phenomenon, it states that every singularity of a holomorphic function of several variables contained on a compact set is removable. This means that if f is a holomorphic function on a set $U \setminus K$, where U is an open subset of $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) and K is a compact subset of U such that $U \setminus K$ is connected, then f can be extended to a function F holomorphic on U.

  In particular, for an isolated singularity a inside an open set U, on the single variable case we had a classification into removable, pole or essential, but Hartogs phenomenon states that in several variables it always exists an analytic continuation, and therefore the point a is always a removable singularity.

- Then, we partly discuss **domains of holomorphy**, which are the domains where there exists an holomorphic function that can not be extended holomorphically to a bigger domain. We also note the reason why domains of holomorphy are not introduced on single variable: in the complex plane every open subset is a domain of holomorphy.

- Lastly, we display some disquisitions on **Reinhardt domains** and their relation with the domain of convergence of power series.

  The main theorem on this section is the following equivalence about an open set $U \subset \mathbb{C}^n$:

  - U is the domain of convergence of a power series centred at 0.
  - U is a Reinhardt domain containing 0 and a domain of holomorphy.
  - U contains 0, is modularly decreasing and log-convex.

Índice general

Capítulo 1

Preámbulo: una variable

En esta sección recordamos algunos resultados centrales de una variable compleja, que admiten generalización al caso de varias variables.

Notaciones y conceptos básicos

Asumimos conocida la teoría fundamental de diferenciación e integración de varias variables reales. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ (o equivalentemente de $\mathbb{C}$ siendo $z = x + iy$), y sea $f : U \to \mathbb{C}$ con componentes $u, v : U \to \mathbb{R}$, es decir, $f = u + iv \equiv (u, v)$. Supongamos que f es de clase C^1 en U. Entonces la diferencial real de f es

$$df = du + idv = u_x dx + u_y dy + i(v_x dx + v_y dy) = (u_x + iv_x)dx + (u_y + iv_y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Teniendo en cuenta que $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ e $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$, podemos reescribir dx y dy como

$$dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2}, \quad dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i}$$

y de esta forma, definiendo

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y} \tag{1.1}$$

tenemos

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z},$$

e introducimos la siguiente notación:

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z}dz, \quad \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

de modo que $\partial f(z)$ es aplicación $\mathbb{C}$-lineal y $\bar{\partial} f(z)$ es $\mathbb{C}$-antilineal.

A continuación describimos las funciones centrales del análisis de una variable compleja bajo varios enfoques diferentes en principio.

Definición. Decimos que $f : U \to \mathbb{C}$ es derivable compleja en U si $\forall z \in U$ existe

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - f'(z)h}{|h|} = 0.$$

Nota: La aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ h & \mapsto & f'(z)h \end{array}$$

es $\mathbb{C}$-lineal; es decir, en particular $f \in C^1(U)$ es derivable compleja si y sólo si su diferencial $df(z)$ es $\mathbb{C}$-lineal $\forall z \in U$.

Definición. Una función $f \in C^1(U)$ se dice que satisface las **ecuaciones de Cauchy-Riemann** si

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Notemos que

$$\bar{\partial} f \equiv 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Para $\lambda \in \mathbb{C}$, $R > 0$, sea $D(\lambda;R) := \{z \in \mathbb{C} : |z-\lambda| < R\}$.

Definición. Una función $f : U \to \mathbb{C}$ se dice **analítica** en U si para cada $z_0 \in U$ existe una serie de potencias centrada en z_0 con radio $R > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0;R) \cap U.$$

Definición. Decimos que $f : U \to \mathbb{C}$ es **representable mediante fórmula de Cauchy** si

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \tag{1.2}$$

siendo γ una curva de Jordan[1] de clase C^1 en U y $z \in int(\gamma)$.

Teorema 1.1. *Sea un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y sea $f \in C^1(U)$. Entonces las siguientes propiedades de f son equivalentes:*

1. *f es derivable compleja en U.*
2. *f satisface las condiciones de Cauchy-Riemann en U.*
3. *f es representable mediante fórmula de Cauchy en U.*
4. *f es analítica en U.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$ Como $df(z)$ es $\mathbb{C}$-lineal $\forall z \in U$, se sigue que $\bar{\partial} f = 0$.

$3 \Rightarrow 4$ Basta desarrollar el núcleo de Cauchy, $(w,z) \mapsto \frac{1}{w-z}$, en serie de potencias de $w-a$, con $a \in U \setminus sop\gamma$ e intercambiar serie con integral, lo cual se puede hacer ya que la serie es uniformemente convergente en γ.

$4 \Rightarrow 1$ Es consecuencia de que toda serie de potencias es (indefinidamente) derivable compleja.

$2 \Rightarrow 3$ Esta implicación la veremos con detalle a continuación.

Nota: Aunque en el caso de una variable la condición $f \in C^1(U)$ es superflua (puede demostrarse $1 \Rightarrow 3$ directamente), presentamos el teorema de esta forma para ilustrar el punto de partida que se sigue en varias variables.

Comenzamos dando la forma general de la integral de Cauchy para funciones de clase C^1.

Teorema 1.2 (Forma general de la integral de Cauchy)**.** *Sea U un abierto acotado en $\mathbb{C}$ tal que ∂U es un conjunto finito de curvas de Jordan de clase C^1 orientadas y sea $f \in C^1(V)$ con V abierto tal que $\bar{U} \subseteq V$. Entonces, si $z \in U$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(w)}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi i}\iint_U \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{w}}(w)}{w-z} dw \wedge d\bar{w} \tag{1.3}$$

[1] Una curva es de Jordan si es plana, cerrada y sin autointersecciones

Demostración. Como U es un abierto con frontera de clase C^1 formada por un conjunto finito de curvas de Jordan, si $h \in C^1(V)$ por el teorema de Stokes se tiene:

$$\iint_U dh \wedge dw = \int_{\partial U} h(w)dw$$

Aplicando que $dh = \frac{\partial h}{\partial w}dw + \frac{\partial h}{\partial \bar{w}}d\bar{w}$ y que el producto exterior es anticonmutativo y que $dw \wedge dw = 0$, tenemos que la anterior expresión es igual a

$$\iint_U \frac{\partial h}{\partial \bar{w}} d\bar{w} \wedge dw = 2i \iint_U \frac{\partial h}{\partial \bar{w}} dx \wedge dy$$

aplicando en la última igualdad que $w = x + iy$ y las propiedades del producto exterior.

En particular, para $h : w \mapsto \frac{f(w)}{w-z}$, y $U_\varepsilon := \{w \in U : |w-z| > \varepsilon\}$

$$\iint_{U_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{1}{w-z} d\bar{w} \wedge dw = \int_{\partial U_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}dw = \int_{\partial U} \frac{f(w)}{w-z}dw - \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}dw$$

teniendo en cuenta que $(z,w) \mapsto \frac{1}{w-z}$ es localmente integrable, haciendo un cambio a coordenadas polares en la integral de la derecha y haciendo $\varepsilon \to 0$ llegamos a la ecuación (1.3).

Como caso particular, cuando $0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}$, se obtiene el teorema integral de Cauchy y de esta forma se cierra el ciclo de equivalencias del teorema 1.1.

Corolario 1.3. *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$, sea D un abierto en $\mathbb{C}$ tal que $\bar{D} \subseteq U$ es compacto y ∂D está formado por un número finito de curvas de Jordan de clase C^1 y sea $f : U \to \mathbb{C}$. Entonces si f cumple $0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ en U y $z \in D$ se tiene*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}dw. \tag{1.4}$$

Llamamos función **holomorfa** en U a toda función que satisfaga alguna (y por lo tanto, todas) de las propiedades equivalentes del teorema 1.1. El enunciado de este teorema comprende los tres puntos de vista fundamentales y centrales de la teoría de variable compleja: el analítico (2), en términos de las ecuaciones de Cauchy-Riemann; el llamado holomórfico (3), vía la representación integral de Cauchy; y el aritmético (4), mediante funciones analíticas, de Weierstrass. Denotamos $\mathscr{H}(U)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas sobre U.

Corolario 1.4. *Sea U un abierto acotado en $\mathbb{C}$ tal que ∂U es un conjunto finito de curvas de Jordan de clase C^1 orientadas y sea $f \in C^1(\bar{U})$ tal que f es idénticamente nula en ∂U. Entonces, si $z \in U$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_U \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{w}}(w)}{w-z} dw \wedge d\bar{w} \tag{1.5}$$

Otra consecuencia importante del teorema 1.2 es que permite dar solución a la ecuación $\bar{\partial}$.

Proposición 1.5. *Sea $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de clase C^k, $k \geq 1$ de soporte compacto. Entonces la integral*

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(w)}{w-z} dw \wedge d\overline{w}$$

*define una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que satisface la **ecuación de Cauchy-Riemann inhomogénea** con segundo miembro φ:*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \varphi$$

Demostración. Por un lado, φ es continua y de soporte compacto. Por otro lado $\frac{1}{w-z}$ es localmente integrable en $w-z$. Luego f está definida sobre $\mathbb{C}$. Haciendo una traslación

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\varphi(z+w)}{w}dw\wedge d\overline{w}$$

y derivando bajo el signo integral tenemos que f es de clase C^k. De hecho, tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)=\frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\partial\varphi(z+w)}{\partial \overline{z}}\frac{1}{w}dw\wedge d\overline{w}=\frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\partial\varphi}{\partial \overline{w}}(w)\frac{1}{w-z}dw\wedge d\overline{w}=\varphi(z)$$

donde en la última igualdad hemos aplicado el corolario 1.4 sobre la clausura de un disco cualquiera en $\mathbb{C}$ que contenga el soporte de φ (en particular, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\equiv 0$ fuera del soporte de φ.)

1.1. Resultados básicos en una variable compleja

Damos aquí una lista de resultados fundamentales sobre las funciones holomorfas de una variable. Comenzamos con los que son consecuencia de la fórmula de Cauchy:

Teorema 1.6 (Liouville)**.** *Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}$. Si f está acotada, entonces f es constante.*

Teorema 1.7 (Principio del módulo máximo)**.** *Sea f una función holomorfa no constante en ninguna componente conexa de un abierto $U\subset\mathbb{C}$. Entonces $|f|$ no puede tener un máximo local en ningún punto de U.*

Proposición 1.8 (Desigualdades de Cauchy)**.** *Sea U un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y sea $f\in\mathscr{H}(U)$. Dados $a\in U$, $r>0\ni\overline{D(a;r)}\subseteq U$, para cada $n\in\mathbb{N}$ se tiene la acotación:*

$$\left|f^{(n)}(a)\right|\leq\frac{n!}{r^n}\sup_{|w-a|=r}|f(w)| \tag{1.6}$$

El siguiente teorema lo demostramos, a diferencia de otros, ya que habitualmente éste no se demuestra en el grado.

Teorema 1.9 (Teorema de convergencia de Weierstrass)**.** *Sea $(f_j)_{j\geq 1}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto U. Si $f_j\to f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de U, entonces la función límite f es holomorfa en U. Además $(f_j)^{(n)}\to f^{(n)}\quad\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ uniformemente en las componentes de U.*

Demostración. El límite uniforme de funciones holomorfas es una función continua, por tanto, f es continua en discos (cerrados) de U, luego f es continua en U. Para comprobar que f es holomorfa basta comprobar que f cumple la fórmula integral de Cauchy (1.4) en un disco de radio r.

Sea $z_0\in U$ y sea s tal que $r<s<dist(z_0,\partial U)$. Entonces, por holomorfía de las f_j, para cada $z\in D(z_0;r)$ se tiene:

$$f_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=s}\frac{f_j(w)}{w-z}dw$$

Así,$\forall j\geq 1$, $\forall z\in D(z_0;r)$ se tiene:

$$\left|f(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=s}\frac{f(w)}{w-z}dw\right|$$

$$\leq\left|f(z)-f_j(z)\right|+\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=s}\frac{f(w)}{w-z}dw-\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=s}\frac{f_j(w)}{w-z}dw\right|$$

$$\leq\left|f(z)-f_j(z)\right|+\frac{1}{2\pi}\left|\int_{|w-z_0|=s}\frac{f(w)-f_j(w)}{w-z}dw\right|$$

$$\leq \left|f(z) - f_j(z)\right| + \frac{s}{s-r} max\left\{\left|f(w) - f_j(w)\right| : w \in \partial D(z_0;s)\right\}$$

Y aplicando la convergencia uniforme de f_j a f sobre los compactos de la forma $K = \{z\}$ y $K = \partial D(z_0;s)$, tenemos que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=s} \frac{f(w)}{w-z}dw,\ \forall z \in D(z_0;r)$$

Así f es holomorfa en $D(z_0;r)$ para cualquier $z_0 \in U$, luego f es holomorfa en U.

Para la convergencia de las derivadas, sea de nuevo $z_0 \in U$ y sea s tal que $r < s < dist(z,\partial U)$. Utilizando las expresiones integrales de las derivadas de f_j, f que ya hemos visto que son holomorfas, haciendo la diferencia y tomando el valor absoluto se tiene que para cada $z \in D(z_0;r)$

$$\left|f'(z) - f_j'(z)\right| \leq \frac{r}{(s-r)^2} max\left\{\left|f(w) - f_j(w)\right| : w \in \partial D(z_0;s)\right\}$$

Como $f_j \to f$ uniformemente en el compacto $\partial D(z_0;s)$, se deduce que $f_j' \to f'$ uniformemente en el compacto $\partial D(z_0;s)$ que está contenido en U. Como esto ocurre para cualquier disco, se tiene que $f_j' \to f'$ uniformemente en U. Para el resto de derivadas se procede por inducción o recurrencia.

Teorema 1.10 (Montel)**.** *Sea $(f_j)_{j\geq 1}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$. Si (f_j) está uniformemente acotado sobre subconjuntos compactos de U, entonces existe una subsucesión que converge uniformemente en subconjuntos compactos de U.*

A continuación vemos algunos resultados que se siguen de la expresión en serie de potencias.

Operaciones con funciones holomorfas

- Si f, g son holomorfas, entonces $f+g$, fg son holomorfas
- Si f es holomorfa en un punto a y $f(a) \neq 0$, entonces $1/f$ es holomorfa en a.
- Si $f : U \to \mathbb{C}$, $g : V \to \mathbb{C}$ con $f(U) \subseteq V$, f holomorfa en a y g holomorfa en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es holomorfa en a.

Teorema 1.11 (Principio de continuación analítica)**.** *Sea U una región [2] de $\mathbb{C}$ y sea $f : U \to \mathbb{C}$ analítica en U. Entonces son equivalentes:*

1. *$f \equiv 0$ en U.*
2. *$\exists\, a \in U$ con $f^{(n)}(a) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*
3. *$f = 0$ en un subconjunto de U con punto de acumulación en U.*

Teorema 1.12 (Aplicación abierta)**.** *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y sea $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa en U y no constante en ninguna componente conexa de U. Entonces f es abierta, es decir, si $X \subset U$ es abierto, $f(X)$ es abierto.*

Para toda serie de potencias centrada en $a \in \mathbb{C}$ existe $R > 0$ tal que la serie converge en $D(a;R)$ y no converge en $\mathbb{C} \setminus \overline{D(a;R)}$. Así, $D(a;R)$ es el dominio de convergencia de la serie. Si además la función representada por la serie no se extiende analíticamente a través de ningún punto de la frontera del disco, entonces decimos que $\partial D(a;R)$ es la **frontera natural** de la serie.

Se dice que una función compleja f tiene una singularidad en $a \in \mathbb{C}$ si f no es derivable en a pero $\exists r > 0$ tal que f es holomorfa en $D(a;r) \setminus \{a\}$. En particular, si existe el límite de la función en ese punto,

[2] Una región es un conjunto abierto y conexo.

pero es ∞ se dice que a es un polo de f. Es el caso de la función $z \mapsto \frac{1}{z-a}$. También puede ocurrir que no exista el límite en a, en ese caso, se dice que a es una singularidad esencial. Por ejemplo, la función $f(z) = e^{1/z}$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$.

En el plano complejo, sobre cualquier subconjunto abierto, podemos definir una función holomorfa que no se puede prolongar analíticamente a través de algún punto de la frontera del abierto, es decir, es un dominio de holomorfía, noción que veremos en el capítulo 3.

Capítulo 2

Extensión pluridimensional de la teoría de una variable compleja

En principio, seguimos un orden análogo al considerado en el capítulo 1.

Sea una función $f : U \to \mathbb{C}$ con $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto. De nuevo podemos hacer una identificación entre $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{R}^{2n}$ notando que $(z_1,...,z_n) = (x_1 + iy_1,...,x_n + iy_n)$ se identifica con $(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n)$.

Si $f \in C^1(U)$ como función de $\mathbb{R}^{2n}$, la diferencial real de f es

$$df = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j) \tag{2.1}$$

Definiendo como antes los operadores

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y_j} \tag{2.2}$$

podemos reescribir

$$df = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j) \quad \forall j = 1,..,n \tag{2.3}$$

Se define la diferencial compleja y la diferencial compleja conjugada respectivamente como:

$$\partial f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j \quad \bar{\partial} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \tag{2.4}$$

Notemos que $df = \partial f + \bar{\partial} f$.

Proposición 2.1. *Los operadores $\frac{\partial}{\partial z_j}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} : C^1(U) \longrightarrow C(U)$ son lineales y cumplen la regla del producto:*

$$\frac{\partial}{\partial z_j}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial z_j} + \frac{\partial f}{\partial z_j} g \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} g \tag{2.5}$$

Demostración. La linealidad de estos operadores es clara por su definición a partir de los operadores $\frac{\partial}{\partial x_j}$ y $\frac{\partial}{\partial y_j}$. Para demostrar que se satisface la regla del producto, partimos de que $d(fg) = fdg + dfg$, y lo describimos con los nuevos operadores:

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial (fg)}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial (fg)}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j\right] = f\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial g}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j\right] + g\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j\right]$$

Como $dz_1,...,dz_n,d\bar{z}_1,...,d\bar{z}_n$ son linealmente independientes, tenemos que necesariamente, para cada $j \in 1,..,n$:

$$\frac{\partial}{\partial z_j}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial z_j} + \frac{\partial f}{\partial z_j} g \quad y \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} g$$

Definición. Se dice que f es **diferenciable compleja** en U si $\forall z \in U\ \exists\, a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$\frac{f(z_1 + h_1, ..., z_n + h_n) - f(z_1, ..., z_n) - \sum_{j=1}^{n} a_j h_j}{\|(h_1, ..., h_n)\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \tag{2.6}$$

Es decir, $df(z)$ dada por 2.1 es de la forma $(h_1, ..., h_n) \in \mathbb{C}^n \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_j h_j \in \mathbb{C}$ y por tanto, es $\mathbb{C}$-lineal. Notemos que f (con componentes $u, v : U \to \mathbb{R}^n$, es decir, $f = u + iv \equiv (u, v)$) es diferenciable compleja si y solo si

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \equiv 0 \quad \forall j = 1, ..., n \Longleftrightarrow \begin{cases} u_{x_j} = v_{y_j} \\ u_{y_j} = -v_{x_j} \end{cases} \forall j = 1, ..., n \tag{2.7}$$

Definición. Una función f se dice que satisface las **ecuaciones de Cauchy-Riemann** en $\mathbb{C}^n$ si

$$\begin{cases} u_{x_j} = v_{y_j} \\ u_{y_j} = -v_{x_j} \end{cases} \forall j = 1, ..., n \tag{2.8}$$

Introducimos algunos conceptos propios del análisis multidimensional:

- Se dice que un abierto $D_j \subset \mathbb{C}$ es un **dominio de Jordan** si su clausura es compacto y su frontera es una cantidad finita de curvas de Jordan. Un producto cartesiano de dominios de Jordan $D = D_1 \times ... \times D_n \subset \mathbb{C}^n$ se dice **polidominio de Jordan**.
- Un **polidisco** en $\mathbb{C}^n$ es un producto cartesiano de discos en $\mathbb{C}$. Sean $D(a_1; r_1), ..., D(a_n; r_n)$ discos en $\mathbb{C}$ de radio $r_1, ..., r_n$ respectivamente, entonces el **polirradio** del polidisco en $\mathbb{C}^n$ definido como $D(a; r) = D(a_1; r_1) \times ... \times D(a_n; r_n)$ es $r = (r_1, ..., r_n)$, donde $a = (a_1, ..., a_n)$.
- La **frontera distinguida** del polidominio $D = D_1 \times ... \times D_n$ es $\partial_0 D = \partial D_1 \times ... \times \partial D_n \subseteq \partial D$.
- Una **serie de potencias** en $\mathbb{C}^n$ en torno al punto $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$ es una serie de la forma:

  $$\sum_{\alpha_1, ..., \alpha_n \geq 0} c_{\alpha_1, ..., \alpha_n} (z_1 - a_1)^{\alpha_1} ... (z_n - a_n)^{\alpha_n}$$

  con $c_{\alpha_1, ..., \alpha_n} \in \mathbb{C}$.

Para simplificar la notación escribimos $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} ... z_n^{\alpha_n}$ si $z = (z_1, ..., z_n)$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ y denotamos por $\alpha \geq 0$ que $\alpha_j \geq 0\, \forall j$.

Definición. Una función $f : U \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ se dice **analítica** en U si para cada $a \in U$ existe una serie de potencias centrada en a con polirradio $r > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{\alpha \geq 0} c_\alpha (z - a)^\alpha \quad \forall z \in D(a; r) \cap U.$$

Notando que con la notación anterior $(z - a)^\alpha = (z_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdots (z_n - a_n)^{\alpha_n}$

Definición. Decimos que $f : U \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es **representable mediante fórmula de Cauchy** si f es continua en U y para cada $a \in U$ y cada polirradio $r > 0$ tal que $D(a; r) \subset U$ se cumple:

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|w_n - a_n| = r_n} \cdots \int_{|w_1 - a_1| = r_1} \frac{f(w_1, ..., w_n)}{(w_1 - z_1) ... (w_n - z_n)} dw_1 ... dw_n \qquad \forall z \in D(a; r)$$

Como en el capítulo 1, establecemos ahora la equivalencia de las cuatro definiciones anteriores. A esta equivalencia le añadiremos en la primera sección del capítulo 3 la propiedad de una función de ser continua y separadamente holomorfa, es decir, holomorfa en cada variable por separado.

Teorema 2.2. *Sea un abierto $U \subseteq \mathbb{C}^n$ y sea $f \in C^1(U)$. Entonces son equivalentes:*

1. *f es diferenciable compleja en U.*

2. *f satisface las condiciones de Cauchy-Riemann en U.*
3. *f es representable mediante fórmula de Cauchy en U.*
4. *f es analítica en U.*

Demostración. $1 \Leftrightarrow 2$ Es consecuencia de (2.7).

$2 \Rightarrow 3$ Comenzamos notando que, como en el caso n=1, $\begin{cases} u_{x_j} = v_{y_j} \\ u_{y_j} = -v_{x_j} \end{cases}$ para j=n, implica que tenemos una representación integral de Cauchy para $f(w_1,...,w_{n-1},z_n)$, es decir, para cada $a = (a_1,...,a_n) \in U$ y cada radio r_n tal que $(w_1,...,w_{n-1},z_n) \in U$, $\forall z_n \in D(a;r_n)$ y

$$f(w_1,...,w_{n-1},z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_n} \frac{f(z_1,...,z_{n-1},w_n)}{w_n - z_n} dw_n \qquad \forall z_n \in D(a_n;r_n).$$

Recurrentemente, aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann para cada j, tenemos representación integral de Cauchy (unidimensional) de $f(z_1,...,z_{n-1},w_n)$, $f(z_1,...,z_{n-2},w_{n-1},w_n)$,... Combinando estas expresiones (con la continuidad de f) llegamos a

$$f(z_1,...,z_n) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial D_n} \cdots \int_{\partial D_1} \frac{f(w_1,...,w_n)}{(w_1-z_1)\cdots(w_n-z_n)} dw_1 \cdots dw_n \qquad \forall z \in D.$$

La función $(w_1,...,w_n) \mapsto \dfrac{f(w_1,...,w_n)}{(w_1-z_1)...(w_n-z_n)}$ es continua sobre el compacto $\partial_0 D$, por lo que podemos aplicar el teorema de Fubini a la integral múltiple y llegamos a

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial_0 D} \frac{f(w_1,...,w_n)}{(w_1-z_1)\cdots(w_n-z_n)} dw_1 \cdots dw_n.$$

$3 \Rightarrow 4$ Sean $a \in U$ y $r > 0$ polirradio tal que $D(a;r) \subset U$. Sean $z \in D(a;r)$, $w \in \partial_0 D(a;r)$ entonces $|z_j - a_j| \leq r_j$ $\forall j$ y $|w_j - a_j| = r_j$ $\forall j$, luego $|z_j - a_j| \leq |w_j - a_j|$ $\forall j$.

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w_1-z_1}\cdots\frac{1}{w_n-z_n} = \frac{1}{w_1-a_1-(z_1-a_1)}\cdots\frac{1}{w_n-a_n-(z_n-a_n)}$$
$$= \frac{1}{(w_1-a_1)\left(1-\frac{z_1-a_1}{w_1-z_1}\right)}\cdots\frac{1}{(w_n-a_n)\left(1-\dfrac{z_n-a_n}{w_n-z_n}\right)} = \sum_{\alpha\geq 0}\frac{(z-a)^\alpha}{(w-a)^{\alpha+1}}$$

Entonces intercambiando integral y serie, tenemos

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial_0 D(a;r)} \frac{f(w)}{(w-z)} dw = \sum_{\alpha \geq 0}\left[\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial_0 D(a;r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{\alpha+1}} dw\right](z-a)^\alpha$$

$4 \Rightarrow 2$ Una serie es un límite uniforme sobre compactos de polinomios complejos en z. Para todo polinomio complejo se tiene $\dfrac{\partial P}{\partial \bar{z}} = 0$ y $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ es lineal, luego continua. Por tanto, $\dfrac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0$ $\forall h$ analítica.

Definición. Decimos que una función $f : U \to \mathbb{C}$ es **holomorfa** en U si satisface cualquiera de las condiciones equivalentes del teorema 2.2. Se denota $f \in \mathscr{H}(U)$.

Un ejemplo importante de función holomorfa es el que mostramos a continuación.

Teorema 2.3 (Fórmula integral de Cauchy multidimensional). *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ continua y separadamente holomorfa. Sean $D_1,...,D_n$ dominios de Jordan de clase C^1 y sea $D = D_1 \times ... \times D_n$ tales que $\bar{D} \subset U$. Entonces f es representable mediante la fórmula de Cauchy*

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial_0 D} \frac{f(w_1,...,w_n)}{(w_1-z_1)...(w_n-z_n)} dw_1...dw_n \qquad \forall z \in D. \tag{2.9}$$

Así $f \in \mathscr{C}^\infty(D)$ y f es holomorfa en D.

Demostración. Para el caso n=1 se trata de la ya conocida fórmula integral de Cauchy. Para simplificar, veamos el caso n=2; el caso $n > 2$ es análogo.
Sea $z_2 \in D_2$. Aplicando la fórmula integral de Cauchy (unidimendional) tenemos

$$f(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_2} \frac{f(z_1,w_2)}{w_2 - z_2} dw_2 \qquad \forall z_2 \in D_2.$$

Aplicando de nuevo la fórmula integral de Cauchy (unidimendional) tenemos

$$f(z_1,w_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_1} \frac{f(w_1,w_2)}{w_1 - z_1} dw_1 \qquad \forall z_1 \in D_1.$$

Donde hemos usado que $\overline{D_1 \times D_2} \subset U$. Así, combinando ambas expresiones y teniendo en cuenta la continuidad de f tenemos:

$$f(z_1,z_2) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\partial D_2}\int_{\partial D_1} \frac{\frac{f(w_1,w_2)}{w_1-z_1}}{w_2 - z_2} dw_1 dw_2 = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\partial_0 D} \frac{f(w_1,w_2)}{(w_1-z_1)(w_2-z_2)} dw_1 dw_2 \qquad \forall z \in D.$$

Mostraremos más aún que si f es separadamente holomorfa entonces f es continua, luego holomorfa. Este resultado, cuya difícil demostración veremos en el capítulo 3, es de Hartogs.

2.1. Propiedades de las funciones holomorfas

Aquí ahondamos en propiedades de las funciones holomorfas introducidas después del teorema 2.2.

Aplicaciones holomorfas. Derivación
Podemos considerar aplicaciones entre dos espacios complejos multidimensionales. Sea $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$. Entonces para cada $z \in U$ ponemos $f(z) = (f_1(z),...,f_p(z))$ donde $f_j : U \longrightarrow \mathbb{C}$.

Definición. f se dice **holomorfa** en U si $f_1,...,f_p$ son holomorfas en U.

Proposición 2.4 (Regla de la cadena)**.** *Sea $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ y sea $V \subset \mathbb{C}^p$ tal que $f(U) \subset V$. Entonces $g \circ f \in \mathscr{H}(U) \quad \forall g \in \mathscr{H}(V) \Leftrightarrow f \in \mathscr{H}(U)$. Además,*

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial z_j} = \sum_{k=1}^{p}(\frac{\partial g}{\partial w_j}\circ f)\frac{\partial f_k}{\partial z_j} \tag{2.10}$$

Demostración. Sea f holomorfa en U y sea g holomorfa en V, entonces $g, f_1,...,f_p \in C^1(U)$. Considerar las proyecciones $z_j = x_j + iy_j$ sobre $\mathbb{R}^{2n}$, $w_k = s_k + it_k$ sobre $\mathbb{R}^{2p}$ y $f_k = u_k + iv_k$. Así, por la regla de la cadena en funciones reales tenemos:

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{p}\left[(\frac{\partial g}{\partial s_k}\circ f)\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + (\frac{\partial g}{\partial t_k}\circ f)\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right]$$

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y_j} = \sum_{k=1}^{p}\left[(\frac{\partial g}{\partial s_k}\circ f)\frac{\partial u_k}{\partial y_j} + (\frac{\partial g}{\partial t_k}\circ f)\frac{\partial v_k}{\partial y_j}\right]$$

Además $f \in \mathscr{H}(U) \Rightarrow \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_k}{\partial y_j}; \quad \frac{\partial u_k}{\partial y_j} = -\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$ por lo que

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j} + \frac{1}{i}\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y_j}\right] = \sum_{k=1}^{p}(\frac{\partial g}{\partial w_k}\circ f)\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + i\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{p}(\frac{\partial g}{\partial w_k}\circ f)\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{p}(\frac{\partial g}{\partial w_k}\circ f)\left(\frac{\partial f_k}{\partial z_j}\right)$$

Donde hemos aplicado en la última igualdad la holomorfía de f.

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial \bar{z}_j}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}-\frac{1}{i}\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y_j}\right]=\sum_{k=1}^{p}(\frac{\partial g}{\partial \bar{w}_k}\circ f)\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+i\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)=0$$

Donde hemos aplicado en la última igualdad la holomorfía de g: $\frac{\partial g}{\partial \bar{w}_j}=0\ \forall j$. Así hemos demostrado la holomorfía de $g\circ f$.

Para el recíproco, basta considerar la función holomorfa $g_i(z_1,...,z_p)=z_i$ para cada $i\in 1,..,p$. Así $g_i\circ f=f_i$ es holomorfa para cada $i\in 1,..,p$, luego f es holomorfa.

Derivación de orden superior de funciones holomorfas

Definición. Dada una función $f:U\subset\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}$ con U abierto tal que $f\in C^m(U)$ y un multi-índice $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\geq 0$ con $|\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n\leq m$ se define:

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial z^\alpha}=\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{\alpha_n}f,\qquad \frac{\partial^\alpha f}{\partial \bar{z}^\alpha}=\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\right)^{\alpha_n}f \tag{2.11}$$

De forma que cuando f es holomorfa tenemos $D^\alpha f:=\frac{\partial^\alpha f}{\partial z^\alpha}=\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$.

Aplicando la regla de derivación bajo el signo integral se tiene:

Proposición 2.5. *Sea $f\in\mathscr{H}(U)$ Sean $D_1,...,D_n$ dominios de Jordan de clase C^1 y sea $D=D_1\times...\times D_n$ tales que $\bar{D}\in U$. Entonces $f\in C^\infty(U)$ y*

$$\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(z)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_{\partial_0 D}\frac{f(w_1,...,w_n)}{(w_1-z_1)^{\alpha_1+1}...(w_n-z_n)^{\alpha_n+1}}dw_1...dw_n\qquad\forall z\in D.$$

En particular $D^\alpha f(z)\in\mathscr{H}(U)\ \ \forall\alpha\geq 0$.

Con la notación $z^\alpha=z_1^{\alpha_1}...z_n^{\alpha_n}$ si $z=(z_1,...,z_n),\ \alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ la ecuación (2.5) es

$$\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(z)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_{\partial_0 D}\frac{f(w)}{(w-z)^{\alpha+1}}dw$$

Desigualdades de Cauchy

Proposición 2.6. *Sea $f:U\longrightarrow\mathbb{C}$ holomorfa, si $\overline{D_r}(z)\subset U$. Entonces*

$$\left|\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(z)\right|\leq\frac{1}{r^\alpha}\sup_{z\in\partial_0 D_r(z)}|f(z)| \tag{2.12}$$

Demostración. Tomando $D=D(z;r)$ en la proposición 2.5 tenemos:

$$\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(z)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_{r_n=|w_n-z_n|}\cdots\int_{r_1=|w_1-z_1|}\frac{f(w)}{(w-z)^{\alpha+1}}dw_1...dw_n$$

y con el cambio a coordenadas polares $w_j=z_j+r_je^{i\theta_j}$ tenemos:

$$\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(z)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_{0\leq\theta_n\leq 2\pi}\cdots\int_{0\leq\theta_1\leq 2\pi}\frac{f(z_1+r_1e^{i\theta_1},...,z_n+r_ne^{i\theta_n})}{(r_1e^{i\theta_1})^{\alpha_1+1}...(r_ne^{i\theta_n})^{\alpha_n+1}}ir_1e^{i\theta_1}...ir_ne^{i\theta_n}d\theta_1...d\theta_n$$

Acotando la integral, aplicando que $\left|e^{i\theta_j}\right|=1$ se tiene el resultado.

Damos ahora otra versión de las desigualdades de Cauchy.

Definición. Un conjunto $U \subseteq \mathbb{C}^n$ se dice **ξ-equilibrado** para $\xi \in \mathbb{C}^n$ si $(1-\lambda)\xi + \lambda z \in U$, $\forall z \in U$, $\forall |\lambda| \leq 1$. En el caso particular $\xi = 0$ se dice que U es **equilibrado**.

Definición. Sea $\xi \in U$ abierto en $\mathbb{C}^n$ y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f \in \mathscr{H}(U)$. Se define el **polinomio m-homogéneo** P_m de f para $m = 0, 1, \ldots$, como

$$P_m(z) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!} z^\alpha.$$

Proposición 2.7. *Sean $\xi \in U$ abierto en $\mathbb{C}^n$ y $f \in \mathscr{H}(U)$. Si U es ξ-equilibrado, entonces:*

$$\sup_{z \in U} |P_m(z-\xi)| \leq \sup_{z \in U} |f(z)|.$$

Demostración. Sea $z \in U$ fijo. Se define $V = \{\lambda \in \mathbb{C} : (1-\lambda)\xi + \lambda z \in U\}$ y la función holomorfa $g : V \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(\lambda) = f((1-\lambda)\xi + \lambda z)$.
Notar que $\overline{\mathbb{D}} \subseteq V$ [1] y que la serie de Taylor de g en 0 es: $\sum_{m=0}^{\infty} c_m \lambda^m$, donde $c_m = P_m(z-\xi)$. Aplicando la desigualdad de Cauchy unidimensional (1.6) tenemos:

$$|P_m(z-\xi)| = |c_m| = \left| \frac{g^{(m)}(0)}{m!} \right| \leq \sup_{|\lambda|=1} |g(\lambda)| \leq \sup_U |f|.$$

Límite de funciones holomorfas

Teorema 2.8 (Weierstrass)**.** *Sea $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto $U \subseteq \mathbb{C}^n$, tal que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de U a una función f cuando $j \to \infty$. Entonces, la función límite f es holomorfa en U y para cada multi-índice α se tiene:*

$$D^\alpha f_j \xrightarrow[j\to\infty]{} D^\alpha f$$

siendo esta convergencia uniforme sobre cada subconjunto compacto de U.

Demostración. Sea $\overline{D(a;r)}$ un polidisco cerrado en U. Por la fórmula integral de Cauchy:

$$f_j(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial D(a;r)} \frac{f_j(w)}{w-z} dw, \ \forall z \in D(a;r).$$

Para cada z fijo, cuando $j \to \infty$: $\dfrac{f_j(w)}{w-z} \to \dfrac{f(w)}{w-z}$ uniformemente para $w \in \partial D(a;r)$.
Así,

$$f_j(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial D(a;r)} \frac{f_j(w)}{w-z} dw \xrightarrow{j\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial D(a;r)} \frac{f(w)}{w-z} dw \ \ \forall z \in D(a;r)$$

Por la unicidad del límite, como $f_j \xrightarrow[j\to\infty]{} f$ tenemos que la representación integral de Cauchy es también válida para la función límite f. Así, f es holomorfa en $D(a;r)$ y desplazando $\overline{D(a;r)}$ sobre U, tenemos que f es holomorfa en U.
Ahora, aplicando la fórmula de Cauchy para las derivadas sobre un polidisco cerrado en U, $\overline{D(a;r)}$, sobre la función $f - f_j$ que sabemos holomorfa, $D^\alpha(f - f_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ uniformemente sobre $D(a; \frac{r}{2})$. Como todo compacto puede ser recubierto por una cantidad finita de polidiscos de la forma $D(a; \frac{r}{2})$ con a en el compacto y $\overline{D(a; \frac{r}{2})} \subset U$, se sigue que $D^\alpha f_j \xrightarrow[j\to\infty]{} D^\alpha f$.

[1] $\mathbb{D}$ denota el disco de centro cero y radio 1.

Incluimos sin demostración el análogo al teorema de Montel en una variable. Este resultado tiene una estrecha relación con el análisis funcional y topología de espacios de funciones. No lo demostramos porque se desvía de nuestros objetivos y por falta de espacio.

Teorema 2.9 (Montel). *Sea $\mathscr{F}$ una familia de funciones holomorfas y acotadas sobre un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$. Entonces, $\mathscr{F}$ es* ***normal****, es decir, cada sucesión infinita $\{f_k\} \subset \mathscr{F}$, contiene una subsucesión convergente en U y uniformemente convergente en cada subconjunto compacto de U.*

Como caso particular se tiene

Corolario 2.10. *Sea f_k una sucesión de funciones holomorfas en U tal que $|f_k|$ está uniformemente acotado sobre cada subconjunto compacto de U. Entonces existe una subsucesión que converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de U a una función f holomorfa en U.*

Series de potencias

Definición. Una serie dada por una sucesión de funciones continuas $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sobre un compacto E de $\mathbb{C}^n$ tiene **convergencia normal**, o **converge normalmente** en E si se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{z \in E} |f_n(z)| < \infty.$$

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge normalmente en U abierto de $\mathbb{C}^n$ si converge normalmente en cada subconjunto compacto $E \subseteq U$. La convergencia normal es por tanto una propiedad local y es uniforme y absoluta en cada punto.

Proposición 2.11 (Lema de Abel). *Si la serie $\sum_{\alpha \geq 0} c_\alpha (z-a)^\alpha$ tiene términos acotados en algún punto $z = z_0$ y $r = |z_0 - a|$, entonces la serie es normalmente convergente en $D(a;r)$.*

Demostración. Sea $0 \leq \rho_j < r_j \ \forall j$. Si $z \in \overline{D(a;\rho)}$, entonces

$$|c_\alpha (z-a)^\alpha| \leq |c_\alpha| \rho^\alpha = |c_\alpha| r^\alpha \frac{\rho^\alpha}{r^\alpha} \leq \sup_\alpha |c_\alpha (z_0 - a)^\alpha| \frac{\rho^\alpha}{r^\alpha}.$$

Como $\sum_{\alpha \geq 0} \frac{\rho^\alpha}{r^\alpha} < \infty$ (serie geométrica), tenemos:

$$\sum_{\alpha \geq 0} \sup_{z \in D(a;\rho)} |c_\alpha (z-a)^\alpha| < \infty.$$

Como todo subconjunto compacto de $D(a;r)$ está contenido en algún $\overline{D(a;\rho)}$ y la convergencia normal es una propiedad local, tenemos el resultado.

Corolario 2.12. *Si $\sum_{\alpha \geq 0} c_\alpha (z-a)^\alpha$ converge en todos los puntos de un polidisco abierto, $D(a;r)$, entonces la serie converge normalmente en dicho polidisco y además su suma, $f(z)$ es holomorfa en $D(a;r)$.*

Proposición 2.13. *Sea f holomorfa en algún abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ tal que U contiene al polidisco $D(a;r)$. Entonces*

$$f(z) = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a)(z-a)^\alpha$$

con convergencia normal en $D(a;r)$.

Demostración. Para simplificar la demostración consideramos el caso $a = 0$.
Sean $z, w \in \mathbb{C}$ con $|z| \leq |w|$. Entonces $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w(1-\frac{z}{w})} = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{z^\alpha}{w^{\alpha+1}}$ con convergencia absoluta. Así, para $z, w \in \mathbb{C}^n$ tales que $|z_j| \leq |w_j| \ \ \forall j$ tenemos:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w_1 - z_1} \cdots \frac{1}{w_n - z_n} = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{z_1^{\alpha_1}}{w_1^{\alpha_1+1}} \cdots \frac{z_n^{\alpha_n}}{w_n^{\alpha_n+1}} = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{z^{\alpha_1}}{w^{\alpha+1}}.$$

Para un z dado, esta serie tiene convergencia normal en $\{w \in \mathbb{C}^n : |w_j| \geq |z_j| \;\; j = 1, ..., n\}$. Luego, si $z \in D_r(\eta = 0)$ y $|z_j| < \rho_j < r_j \;\; \forall j$, para cada $z \in D_r(0)$ tenemos:

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial_0 D_\rho(0)} \frac{f(w)}{(w-z)} dw = \sum_{\alpha \geq 0} \left[\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial_0 D_\rho(0)} \frac{f(w)}{(w-z)^{\alpha+1}} dw\right] z^\alpha = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0) z^\alpha.$$

La convergencia normal se sigue del corolario 2.12.

Definición. La serie $\sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\eta)(z-\eta)^\alpha$ se llama **serie de Taylor** de f en η.

Teorema 2.14 (Liouville)**.** *Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}^n)$. Si f es acotada, entonces f es constante.*

Demostración. Sea $M \ni |f(z)| \leq M \; \forall z \in \mathbb{C}^n$ y sea $\sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha z^\alpha$ su serie de Taylor en torno al punto 0. Entonces, como en la proposición 2.13 tenemos:

$$|a_\alpha| = \left|\frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0)\right| = \left|\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial_0 D(0;r)} \frac{f(w_1, ..., w_n)}{(w_1)^{\alpha_1+1} ... (w_n)^{\alpha_n+1}} dw_1 ... dw_n\right|$$
$$\leq \left|\frac{1}{2\pi i}\right|^n \int_{\partial_0 D(0;r)} \frac{|f(w_1, ..., w_n)|}{r_1^{\alpha_1+1} ... r_n^{\alpha_n+1}} dw_1 ... dw_n \leq \frac{M}{2\pi r^{\alpha+1}} \int_{\partial_0 D(0;r)} dw_1 ... dw_n = \frac{M}{2\pi r^{\alpha+1}} 2\pi r = \frac{M}{r^\alpha}$$

Para r un polirradio cualquiera, así $\forall \alpha > 0$ se tiene $a_\alpha = 0$ de donde se sigue que $f = a_0$ constante.

Continuación analítica

Teorema 2.15 (Unicidad de la continuación analítica fuerte)**.** *Sea U un abierto conexo de $\mathbb{C}^n$ y sea $f \in \mathscr{H}(U)$ tal que $\exists \eta \in U$ con $D^\alpha f(\eta) = 0 \;\; \forall \alpha \geq 0$. Entonces $f = 0$ en U.*

Demostración. Sea $A = \{z \in U : D^\alpha f(z) = 0 \;\; \forall \alpha \geq 0\}$. A es un conjunto cerrado y no vacío ya que por hipótesis $\eta \in U$. Por la proposición 2.13 A es abierto. Así, necesariamente $A = U$.

Corolario 2.16 (Unicidad de la continuación analítica débil)**.** *Sea U un abierto conexo de $\mathbb{C}^n$ y sean $f, g \in \mathscr{H}(U)$ tales que $f = g$ en algún subconjunto abierto y no vacío de U. Entonces $f = g$ en U.*

Nota: Veremos en el capítulo 3 que la continuación analítica no se da en su forma fuerte de existencia de punto de acumulación de ceros.

Corolario 2.17 (Principio del módulo máximo)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto y conexo y sea $f \in \mathscr{H}(U)$ tal que $\exists a \in U \ni |f(z)| \leq |f(a)| \quad \forall z$ en un entorno V de a. Entonces f es constante en U.*

Demostración. Considerar un polidisco $D(a;r)$ contenido en V (el máximo de $|f|$ en D se alcanza en a). Sea $j \in \{1, .., n\}$, entonces la función $f_j(z) := f(a_1, ..., a_{j-1}, z, a_{j+1}, ..., a_n$ es holomorfa en $D(a_j; r_j) \subset \mathbb{C}$ y su módulo alcanza máximo en el centro del disco. Por el principio del módulo máximo en $\mathbb{C}$ (teorema 1.7), f_j es constante en $D(a_j; r_j)$. Como esto ocurre $\forall j \in \{1, .., n\}$, f es constante en $D(a; r)$. Como U es conexo, por el corolario 2.16 necesariamente f es constante sobre U.

Teorema 2.18 (Aplicación abierta)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto y conexo y sea $f \in \mathscr{H}(U)$ no constante. Entonces $f(U)$ es un abierto de $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $z \in U$ y sea $w := f(z) \in f(U)$. Sea V un entorno convexo de z. Como f no puede ser constante en V, existe $z_0 \in V$ tal que $f(z) \neq f(z_0)$. Sean $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : z + \lambda(z_o - z) \in V\}$ y $g : D \to \mathbb{C}$ por $g(\lambda) = f(z + \lambda(z_o - z))$. Entonces D es abierto en $\mathbb{C}$, con $0, 1 \in D$ y $g(0) \neq g(1)$. Por el teorema de la aplicación abierta en $\mathbb{C}$, $g(D)$ es un abierto de $\mathbb{C}$ que contiene a w y $g(D) \subset f(U)$.

Capítulo 3

Teoría exclusiva de las varias variables complejas

3.1. Teorema de Hartogs

El objetivo de esta sección es demostrar uno de los resultados esenciales de la teoría en varias variables complejas, el teorema de Hartogs que dice que toda función separadamente holomorfa es holomorfa. Este resultado es importante y peculiar de la holomorfía, pues está muy lejos de tener análogo en funciones de varias variables reales. Por ejemplo, tomemos la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

g es de clase C^∞ para cada una de las variables por separado, pero no es ni siquiera continua en el origen.

Recordamos los siguientes resultados que necesitamos para demostrar el teorema de Hartogs.

Teorema 3.1 (Teorema de Baire)**.** *Sea E un espacio métrico completo y no vacío. Si E es la unión de una familia contable de subconjuntos cerrados $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ entonces existe al menos un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que E_{k_0} contiene un abierto no vacío.*

Véase [6, pág. 97].

Funciones subarmónicas

Definición. Una función $f : U \to \mathbb{R}$ se dice **armónica** en U si es de clase C^2 y $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Definición. Sea un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y sea una función $f : U \to [-\infty, \infty)$. Se dice que f es **subarmónica** si

1. $\{z \in U : f(z) < s\}$ es abierto para cualquier $s \in \mathbb{R}$.
2. Para todo compacto $K \subset U$ y para toda función h continua en K y armónica en $int(K)$ tal que $h \geq f$ en ∂K se tiene $f \leq h$ en K.

Teorema 3.2. *Sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones subarmónicas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ uniformemente acotadas superiormente sobre cada subconjunto compacto de U. Si $\lim_{k\to\infty} f_k(z) \leq C \ \ \forall z \in U$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ y para todo compacto $K \subset U$ existe k_0 tal que si $k > k_0$ entonces $f_k(z) \leq C + \varepsilon$ para todo $z \in K$.*

Véase [3, Capítulo 1, sección 6]

Con estos ingredientes pasamos a demostrar el teorema

Teorema 3.3 (Hartogs). *Sea $f : U \to \mathbb{C}$ con U un abierto de $\mathbb{C}^n$. Si f es separadamente holomorfa, entonces f es holomorfa en U.*

Notemos que el teorema es local, por lo que bastará demostrarlo sobre polidiscos. Lo haremos en sucesivas etapas, haciendo uso de los siguientes lemas:

Teorema 3.4 (Corolario del Lema de Schwarz). *Sea $g(z)$ una función holomorfa en $D(0;r) \subset \mathbb{C}$ con $|g(z)| \leq M$ para algún $M > 0$. Entonces $\forall z, \zeta \in D(0;r)$*

$$|g(z) - g(\zeta)| \leq 2M \left| \frac{r(z-\zeta)}{r^2 - \bar{\zeta} z} \right|$$

Proposición 3.5. *Sea $f : U \to \mathbb{C}$ con U un polidisco: $\left\{z \in \mathbb{C}^n : \left|z_j\right| < r_j, j = 1,..,n\right\}$. Si f es separadamente holomorfa, y $|f|$ es acotada en U, entonces f es holomorfa en U.*

Demostración. Por el teorema 2.3, basta probar que f es continua en U. Como $|f|$ está acotada, $\exists M > 0 \ni |f| \leq M$ en U. Entonces, si $z, \zeta \in U$ tenemos:

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq 2M \sum_{j=1}^{n} r_j \frac{\left|z_j - \zeta_j\right|}{\left|r_j^2 - z_j \bar{\zeta}_j\right|} \tag{3.1}$$

En efecto, podemos poner la diferencia como una serie telescópica:

$$f(z) - f(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} [f(\zeta_1, ..., \zeta_{j-1}, z_j, .., z_n) - f(\zeta_1, ..., \zeta_j, z_{j+1}, .., z_n)]$$

y entonces basta aplicar la estimación de (3.1) en el caso de una variable, que se tiene aplicando el corolario del lema de Schwarz 3.4. Ahora, como $z_j \to \zeta_j$ y $r^2 - z_j \zeta_j \to r_j^2 - \left|\zeta_j\right|^2 \neq 0$ cuando $z \to \zeta$, tenemos por (3.1) que $f(z) \xrightarrow[z \to \zeta]{} f(\zeta)$ como queríamos probar.

Proposición 3.6. *Sea $f : U \to \mathbb{C}$ con U un abierto de $\mathbb{C}^n$, tal que f es separadamente holomorfa. Sea $\bar{D} = \prod_{j=1}^{n} \bar{D}_j$ un polidisco cerrado, con interior no vacío y contenido en U. Entonces existen discos $D'_j \subset D_j$ de radio positivo y $D'_n = D_n$ tal que f es holomorfa en el interior de $\bar{D}' := \prod_{j=1}^{n} \bar{D}'_j$.*

Para demostrar esta proposición (y las siguientes) asumimos que el teorema de Hartogs se cumple para funciones de menos de n variables (para n=1 se cumple de forma trivial).

Demostración. Sea $M > 0$ y $E_M = \left\{z' \in \prod_{j=1}^{n-1} \bar{D}'_j : |f(z', z_n)| \leq M \ \ \forall z_n \in \bar{D}_n\right\}$. El conjunto E_M es cerrado (por la hipótesis de inducción f es holomorfa, luego continua, en z' para cada z_n fija). Además $\bigcup_{M=1}^{\infty} E_M = \prod_{j=1}^{n-1} \bar{D}_j$, puesto que $f(z', \cdot)$ es holomorfa y por tanto continua en $\bar{D}_n$. Por el teorema de Baire 3.1 y para M suficientemente grande, E_M tiene un punto interior luego escogiendo D' tal que $D' \subset E_M \times D_n$ se tiene que f es acotada en D' y se termina la demostración aplicando la proposición 3.5.

Proposición 3.7. *Sea $f : D \to \mathbb{C}$ con $D = \left\{z \in \mathbb{C}^n : \left|z_j - z_j^0\right| < R, \ j = 1,..,n\right\}$. Supongamos que*

- *f es holomorfa en $z' = (z_1, ..., z_{n-1})$ si z_n está fijo,*
- *f es holomorfa y acotada en $D' = \left\{z \in \mathbb{C}^n : \left|z_j - z_j^0\right| < r, \ j = 1,..,n-1, \ \ \left|z_n - z_n^0\right| < R\right\}$ para algún $r > 0$.*

Entonces f es holomorfa en D.

Demostración. Supongamos que $z^0 = 0$. Sean R_1, R_2 tales que $0 < R_1 < R_2 < R$. Por la proposición 2.13, tenemos que, $\forall z \in D$,

$$f(z) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(0, z_n)(z')^{\alpha}$$

donde α recorre multi-índices de n-1 coordenadas. Además $z_n \mapsto \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(0, z_n)$ es holomorfa en z_n y para cada z_n fijo con $|z_n| < R$ se tiene:

$$\left| \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(0, z_n) \right| R_2^{|\alpha|} \underset{|\alpha| \to \infty}{\to} 0. \tag{3.2}$$

La desigualdad de Cauchy 2.6 implica $\left| \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(0, z_n) \right| r^{|\alpha|} \leq M$ si M es una cota para $|f|$ en D'.
Aplicando el teorema 3.2 a las funciones subarmónicas

$$z_n \mapsto \frac{1}{|\alpha|} log \left| \frac{D^{\alpha} f(0, z_n)}{\alpha!} \right|$$

(estas funciones están acotadas uniformemente por arriba cuando $|z_n| < R$ y por (3.2) el límite superior cuando $|\alpha| \to \infty$ es menor o igual que $log(\frac{1}{R_2})$ para un z_n fijo) tenemos que para un $|\alpha|$ suficientemente grande,

$$\frac{1}{|\alpha|} log \left| \frac{D^{\alpha} f(0, z_n)}{\alpha!} \right| \leq log \frac{1}{R_1} \quad si \, |z_n| < R_1;$$

es decir,

$$\left| \frac{D^{\alpha} f(0, z_n)}{\alpha!} \right| R_1^{|\alpha|} \leq 1$$

si $|z_n| < R_1$ y $|\alpha|$ es suficientemente grande.
Con esto, queda probada la convergencia normal de la serie que representa a f en D. Como los términos son holomorfos, se sigue que f es holomorfa.

Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema 3.3

Demostración. Dado $\zeta \in U$, escogemos $R > 0$ tal que el polidisco $\left\{ z \in \mathbb{C}^n : \left| z_j - \zeta_j \right| \leq 2R, \; j = 1, .., n \right\}$ queda contenido en U. Así por la proposición 3.6, podemos encontrar z^0 con $\left| z_j^0 - \zeta_j \right| < R$ de forma que se cumplen las hipótesis de la proposición 3.7 para algún $r > 0$. Entonces, f es holomorfa en un entorno de ζ.

3.2. Singularidades y continuación analítica. Dominios de holomorfía

En el plano complejo puede ocurrir que una función f sea holomorfa en $U \setminus \{a\}$ con U un abierto que contiene al punto $\{a\}$ sin que exista continuación analítica a U. Esto lleva a la clasificación de las singularidades aisladas en evitables, polos y esenciales, como ocurre con las funciones $\frac{sen(z)}{z}$, $\frac{1}{z}$ y $e^{1/z}$ en el punto $z = 0$ respectivamente. Sin embargo, no existen polos o singularidades esenciales cuando f es una función de al menos 2 variables complejas.

Proposición 3.8. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n, n \geq 2$ abierto y sea $a = (a_1, ..., a_n) \in U$. Entonces $\forall f \in \mathscr{H}(U \setminus \{a\})$ existe una continuación analítica de f a U.*

Demostración. Sea $\rho > 0$ tal que si $|z_1 - a_1| \leq \rho, ..., |z_n - a_n| \leq \rho$ se tiene $z = (z_1, ..., z_n) \in U$. Sea $f \in \mathscr{H}(U \setminus \{a\})$.

Definimos la función g como:

$$g(z_1, z_2, ..., z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta - a_1| = \rho} \frac{f(\eta, z_2, ..., z_n)}{\eta - z_1} d\eta; \;\; si \left| z_j - a_j \right| \leq \rho \;\; \forall j.$$

Entonces g está bien definida y es holomorfa en $D(a; \rho)$. Además, por la fórmula integral de Cauchy en $\mathbb{C}$, si $(z_2, ..., z_n) \neq (a_2, ..., a_n)$ y $z = (z_1, ..., z_n) \in D(a; \rho)$, $f(z) = g(z)$. Entonces tenemos que f y g coinciden en un subconjunto denso de $D(a; \rho) \setminus \{a\}$, luego coinciden en $D(a; \rho)$ por continuidad.

Corolario 3.9. *Sea $f \in \mathscr{H}(U)$, $U \in \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Entonces el subconjunto cerrado $f^{-1}(0)$ no tiene puntos aislados.*

Demostración. Suponer que $f^{-1}(0)$ tiene un punto aislado p. Entonces la función $\frac{1}{f}$ es holomorfa en un entorno de p, $V \subseteq U \setminus \{p\}$. Por la proposición 3.8 existe una continuación analítica de $\frac{1}{f}$ a V. Luego $\frac{1}{f}$ es acotada en todo un entorno de p, lo que contradice que p sea cero de f.

Hemos visto que la proposición 3.8 es sencilla de probar usando integrales de tipo Cauchy. Por otra parte, tenemos que esa proposición es consecuencia inmediata de un teorema mucho más fuerte debido a Hartogs.

Lema 3.10. *Sea $h = \sum_{j=1}^n h_j d\bar{z}_j$ una (0,1)-forma $\bar{\partial}$-cerrada de clase C^1 en $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, y soporte compacto. Entonces la función:*

$$\mu_j(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{h_j(z_1,...,z_{j-1},\eta,z_{j+1},...,z_n)}{\eta - z_j} d\bar{\eta} \wedge d\eta; \;\; j = 1,...,n$$

es de clase C^1 en $\mathbb{C}^n$, con soporte compacto y cumple $\overline{\partial}\mu_j = h$. Además, si $h \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$, también $\mu_j \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$.

Decimos que una forma diferencial es una (0,1)-forma si se puede expresar como combinación lineal de $d\bar{z}_k$ y decimos que es cerrada si $\bar{\partial}h = 0$, que equivale a decir que

$$\frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}_j} \quad 1 \leq j,k \leq n.$$

Demostración. Para la función μ_j definida en el enunciado tenemos, $\forall k \neq j$,

$$\frac{\partial \mu_j(z)}{\partial \bar{z}_k} = -\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\int_{\mathbb{C}} \frac{h_j(z_1,...,z_{j-1},\zeta + z_j, z_{j+1}...,z_n)}{\zeta} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta =$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \left[\frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}_k}(z_1,...,z_{j-1},\zeta + z_j, z_{j+1}...,z_n)\right]\frac{d\bar{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta} =$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \left[\frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}_j}(z_1,...,z_{j-1},\zeta + z_j, z_{j+1}...,z_n)\right]\frac{d\bar{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \left[\frac{\partial h_k}{\partial \bar{\eta}}(z_1,...,z_{j-1},\eta, z_{j+1}...,z_n)\right]\frac{d\bar{\eta}\wedge d\eta}{\eta - z_j} = h_k(z).$$

La función μ_j tiene soporte compacto ya que $\mu_j = 0$ para $|z_k|$ suficientemente grande, si $k \neq j$ al tener h soporte compacto.

Teorema 3.11 (Teorema fuerte de Hartogs)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto $n \geq 2$, sea $K \subset U$ compacto y sea $f \in \mathscr{H}(U \setminus K)$. Si $U \setminus K$ es conexo, entonces f tiene una continuación holomorfa a todo U.*

Demostración. Sea $\psi \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ una función con soporte compacto contenido en U, que toma el valor 1 en un entorno del compacto K contenido en U. Tomamos la función $\phi := 1 - \psi$, y definimos la función:

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} \phi(z)f(z), & si\ z \in U - K; \\ 0, & si\ z \in K. \end{cases}$$

Entonces $\widetilde{f} \in C^\infty(U)$ y $\omega := \overline{\partial}\widetilde{f}$ es una (0,1)-forma , $\overline{\partial}$ -cerrada con soporte compacto contenido en U. Sea $\mu \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ una función cumpliendo $\overline{\partial}\mu = \omega$ con soporte contenido en U. (La existencia de está función μ la tenemos por el lema 3.10). Entonces, la función $F := \widetilde{f} - \mu$ cumple $\overline{\partial}F = \overline{\partial}\widetilde{f} - \overline{\partial}\mu = w - w = 0$, es decir F es holomorfa. Como μ es 0 en un entorno V de ∂U (por estar el soporte de μ contenido en U) tenemos que si V es suficientemente pequeño (para que ϕ valga 1):

$$F_{|V} = (\widetilde{f} - \mu)_{|V} = \widetilde{f}_{|V} = f.$$

Así, como $U \setminus K$ es conexo, por el principio de prolongación analítica 2.16 aplicado a V, que es abierto en $U \setminus K$, tenemos $F = f$ en $U \setminus K$. Así F es una extensión analítica de f a U.

Corolario 3.12. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ abierto, y sea $f \in \mathscr{H}(U)$, entonces el subconjunto cerrado $f^{-1}(0)$ no es compacto o es vacío.*

Demostración. Supongamos que $K = f^{-1}(0)$ es compacto (y no vacío) y que U es conexo (si no lo fuera, considerar cada una de sus componentes conexas por separado). K compacto implica que $\complement_{\mathbb{C}^n} K$ tiene una única componente conexa no acotada, y el resto de componentes conexas son relativamente compactas. Sea $\widetilde{K}$ la unión de K con todas las componentes relativamente compactas de $\complement_{\mathbb{C}^n} K$.Entonces $\widetilde{K}$ es compacto y $V := U \cup \widetilde{K}$ es abierto y conexo. También $W := \complement_{\mathbb{C}^n} \widetilde{K}$ es abierto y conexo. Como $V \cup W = \mathbb{C}^n$ se tiene que $V \cap W$ es conexo [Topología en $\mathbb{R}^{2n}$]. Es decir, $(U \cup \widetilde{K}) \cap \complement_{\mathbb{C}^n} \widetilde{K} = U \cap \complement_{\mathbb{C}^n} \widetilde{K}$ es conexo y no vacío.

Por el teorema de Hartogs 3.11, la función $\frac{1}{f} \in \mathscr{H}(U \cap \complement_{\mathbb{C}^n} \widetilde{K})$ tiene una extensión holomorfa a U, llamémosla g, cumpliendo $fg = 1$ en $U \cap \complement_{\mathbb{C}^n} \widetilde{K}$, y por lo tanto, en U, lo que implica que no existen puntos en U donde f valga 0, es decir, $f^{-1}(0)$ es vacío, contradiciendo la hipótesis inicial.

Hemos visto en la sección anterior, que para funciones holomorfas en $\mathbb{C}^n$, $n > 1$ no existen conjuntos compactos de singularidades. Esta propiedad está ligada naturalmente a cuestiones sobre continuidad analítica peculiares en varias variables.

Recordemos el **teorema de separación de Hanh-Banach**, que será necesario en alguna demostración: "Sea E un espacio vectorial de dimensión finita. Sea un abierto convexo $U \subset E$, y sea $\eta \in E \ni \eta \notin U$. Entonces $\exists \varphi$ una forma lineal real sobre E tal que $\varphi(\eta) > \varphi(x)\ \forall x \in U$". Véase [6, pág. 105].

Definición. Sea U un abierto en $\mathbb{C}^n$. Se dice que U es un **conjunto abierto de holomorfía** si es imposible encontrar dos subconjuntos abiertos, $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ cumpliendo simultáneamente:

1. U_1 es conexo y no está contenido en U.
2. $\emptyset \neq U_2 \subset U \cap U_1$.
3. $\forall f \in \mathscr{H}(U) \quad \exists f_1 \in \mathscr{H}(U_1)$ tal que $f = f_1$ en U_2.

Se dice que un abierto es un **dominio de holomorfía** si es un conjunto abierto de holomorfía y además es conexo.

De aquí al final vamos a estudiar dominios de holomorfía.

Proposición 3.13. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto conexo tal que $\forall \eta \in \partial U\ \ \exists V \subset \mathbb{C}^n$ abierto conexo conteniendo a U y al punto η y $\exists f \in \mathscr{H}(V)$ con $f(\eta) = 0$ y $f(z) \neq 0\ \forall z \in U$. Entonces U es un dominio de holomorfía.*

Demostración. Supongamos que $\exists U_1, U_2$ cumpliendo:

1. $\emptyset \neq U_2 \subset U \cap U_1$ y $U_1 \nsubseteq U$
2. $\forall f \in \mathscr{H}(U) \quad \exists f_1 \in \mathscr{H}(U_1)$ tal que $f = f_1$ en U_2

y sea $\widetilde{U_2}$ la componente conexa de $U \cap U_1$ que contiene a U_2. Consideramos dos puntos $a \in U_2, b \in U_1 \setminus U$ y la linea poligonal Γ que los une y está contenida en U_1. Sea η el primer punto de Γ (empezando en a y acabando en b) donde Γ corta a la frontera de U. Escogemos V, f con respecto a η. Sea $g = \frac{1}{f}_{|U}$. Así $g \in \mathscr{H}(U)$ ya que $f(z) \neq 0\ \forall z \in U$. Por la segunda condición sobre U_1, U_2, $\exists f_1 \mathscr{H}(U_1) \ni g = f_1$ en U_2, luego $\frac{1}{f} = f_1$ en U_2 y por conexión, coinciden en $\widetilde{U_2}$. Ahora, por un lado, $\lim_{z \to \eta} \frac{1}{f} = \infty$ a través de Γ, desde a. Por otro lado, $f_1 \in \mathscr{H}(U_1) \Rightarrow f_1(z) \to f_1(\eta)$ cuando $z \to \eta$. Esta contradicción implica que no existen tales U_1, U_2, luego, en efecto, U es un dominio de holomorfía.

La anterior proposición tiene una consecuencia remarcable en una variable compleja:

Corolario 3.14. *Todo subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ es un conjunto abierto de holomorfía.*

Demostración. Sea U un subconjunto conexo de $\mathbb{C}$. Si $\eta \in \partial U$, tomando $V = \mathbb{C}$, la función $f(z) = z - \eta$ es holomorfa en V y verifica que $f(\eta) = 0$ y $f(z) \neq 0\ \forall z \in U$. Basta aplicar la proposición anterior 3.13 para tener que U es dominio de holomorfía, lo cual implica que es conjunto abierto de holomorfía.

El corolario precedente es la razón por la cual no se introduce el concepto de dominio de holomorfía en el estudio de variable compleja, ya que todo abierto conexo es dominio de holomorfía, y da una razón unificada para la colección de teoremas de series de potencias no prolongables a través de abiertos de su disco de convergencia. Véase [6, 16.6].

Definición. Sea $U \subset V \subset \mathbb{C}^n$, U, V abiertos conexos. Se dice que V es una **continuación analítica** de U si y solo si toda función holomorfa en U tiene una continuación analítica a V. Además se dice que es **propia** si $V \neq U$.

Proposición 3.15. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ dominio de holomorfía, entonces U no tiene ninguna continuación analítica propia.*

Demostración. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ dominio de holomorfía. Suponer que U tiene una continuación analítica propia V. Tomando $U_1 = V$ y $U_2 = U$, $\emptyset \neq U_2 = U \subset U \cap U_1 = U$ y $\forall f \in \mathscr{H}(U) \quad \exists f_1 \in \mathscr{H}(U_1) = \mathscr{H}(V)$ por definición de continuación analítica. Lo que contradice que U sea conjunto abierto de holomorfía y por lo tanto que sea dominio de holomorfía.

En $\mathbb{C}^n$ no se cumple el corolario 3.14 pero sí existe una versión para abiertos convexos.

Proposición 3.16. *Todo subconjunto abierto y convexo $U \subset \mathbb{C}^n$ es dominio de holomorfía.*

Demostración. Aplicando el teorema de separación de Hahn-Banach al espacio vectorial $E \equiv \mathbb{C}^n$. Dado $\eta \in \mathbb{C}^n \ni \eta \notin U$, $\exists \varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ una forma lineal real tal que $\varphi(\eta) > \varphi(z)\ \forall z \in U$.
Definiendo $\psi(z) := \varphi(z) - i\varphi(iz)\ \forall z \in \mathbb{C}^n$, tenemos que $\varphi(iz) = i\varphi(z)$, luego φ es una forma lineal compleja. De hecho, $\psi(\eta) \neq \psi(z)\ \forall z \in U$ ya que $Re(\psi(\eta)) = \varphi(\eta) > \varphi(z) = Re(\psi(z))\ \forall z \in U$. Aplicando la proposición 3.13 con $V = \mathbb{C}^n$, $f(z) = \psi(z) - \psi(\eta)\ \forall z \in \mathbb{C}^n$, tenemos que U es un dominio de holomorfía.

Proposición 3.17. *Sea $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de conjuntos abiertos de holomorfía. Entonces $U := int(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda)$ es un conjunto abierto de holomorfía.*

Demostración. Sean $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ cumpliendo: $\emptyset \neq U_2 \subset U \cap U_1$ y $\forall f \in \mathscr{H}(U)\ \exists f_1 \in \mathscr{H}(U_1)$ tal que $f = f_1$ en U_2. Como $U_1 \not\subset U$, $\exists \lambda \in \Lambda \ni U_1 \not\subset U_\lambda$. Por ser U_λ conjunto abierto de holomorfía, $\exists f_\lambda \in \mathscr{H}(U_\lambda)$ tal que $\nexists f_1 \in \mathscr{H}(U_1)$ con $f_1 = f_\lambda$ en U_2. Así, U es conjunto abierto de holomorfía.

Teorema de Cartan-Tullen

Definición. Sea $X \subseteq \mathbb{C}^n$ y sea U un abierto en $\mathbb{C}^n$. La **envoltura holomórfica de** X **respecto de** U es $\widehat{X}_U := \{z \in U : |f(z)| \leqslant \sup_{w \in X} |f(w)|, \quad \forall f \in \mathscr{H}(U)\}$.

Definición. Sea U un abierto en $\mathbb{C}^n$. Se dice que U es **holomórficamente convexo** si para todo compacto K en U, la **envoltura holomórfica de** K **respecto de** U es un compacto.

Definición. Dado un subconjunto X de $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, se llama **envoltura convexa** de X respecto a $\mathscr{H}(U)$ al conjunto $\widehat{X}_U := \{z \in U : |f(z)| \leq \sup_{w \in X} |f(w)|\ \forall f \in \mathscr{H}(U)\}$.

Algunas propiedades consecuencia directa de la definición son las siguientes:

1. $X \subseteq \widehat{X}_U \subseteq U$
2. $\widehat{X}_U$ es cerrado en U

3. $\widehat{\emptyset}_U = \emptyset$ y $\widehat{U}_U = U$

4. $X_1 \subseteq X_2 \subseteq U \Rightarrow \widehat{X_1}_U \subseteq \widehat{X_2}_U$

5. $X \subseteq U \subseteq V$ (U, V abiertos) $\Rightarrow \widehat{X}_U \subseteq \widehat{X}_V$

6. $\widehat{\widehat{X}_U}_U = \widehat{X}_U$ (Es decir, la envoltura convexa de X respecto a $\mathscr{H}(U)$ es el mayor subconjunto Y de U, en el que $\sup_{w\in Y}|f| = \sup_{w\in X}|f|\ \forall f \in \mathscr{H}(U)$).

7. $\widehat{\bar{X}}_U = \widehat{X}_U$

Definición. Sea $f \in \mathscr{H}(U)$ y $\eta \in \partial U$,

- η es un **punto regular** de f si $\exists U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ abiertos y conexos cumpliendo: $\emptyset \neq U_2 \subseteq (U \cup U_1)$ y $\eta \in U_1$ y $\exists f_1 \in \mathscr{H}(U_1)$ tal que $f = f_1$ en U_2.
- η es un **punto singular** de f si $\nexists U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ abiertos y conexos cumpliendo: $\emptyset \neq U_2 \subseteq (U \cup U_1)$ y $\eta \in U_1$ y $\exists f_1 \in \mathscr{H}(U_1)$ tal que $f = f_1$ en U_2.

Se denota por S_U el conjunto de todas las funciones holomorfas en U tales que todos los puntos de ∂U son singulares.

Teorema 3.18 (Cartan - Tullen)**.** *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y conexo. Entonces son equivalentes:*

1. *U es dominio de holomorfía.*
2. *Si $K \subset U$ es compacto, entonces $dist(K, \complement U) = dist(\widehat{K}_U, \complement U)$, respecto a la norma infinito.*
3. *U es holomórficamente convexo.*
4. *$S_U \neq \emptyset$ o equivalentemente $\exists f \in \mathscr{H}(U)\ \ni f$ es singular en todo punto de ∂U.*

Por falta de espacio no hacemos la demostración, que puede encontrarse en [5, pág 49]. El teorema tiene importancia en la descripción de los abiertos de convergencia de las series de potencias.

3.3. Dominios de Reinhardt y Series de potencias

En el plano complejo el dominio de convergencia de una serie de potencias es siempre un disco, sin embargo en $\mathbb{C}^n, n > 1$, la naturaleza del dominio de convergencia de una serie de potencias es más complicada de precisar. De hecho, ni siquiera necesita ser un conjunto convexo.

Consideramos series centradas en el origen por simplicidad.

Definición. Un conjunto $X \subset \mathbb{C}^n$ se dice **modularmente decreciente** si $z \in X \Longrightarrow \eta \in X \quad \forall |\eta| \leq |z|$.

Definición. Sea $C := \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_\alpha |c_\alpha z^\alpha| < \infty\}$ (conjunto de convergencia). Entonces se dice que $int(C)$ es el **conjunto abierto de convergencia** de $\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$. Esta serie $\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ se dice que es **convergente** si $0 \in int(C)$.

Así, toda serie de potencias produce un conjunto abierto de convergencia. Consideremos el recíproco, qué condiciones son necesarias y suficientes sobre un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ para que U sea conjunto abierto de convergencia.

Definición. Un conjunto $X \subseteq \mathbb{C}^n$ se llama **conjunto de Reinhardt** (dominio de Reinhardt si X es abierto) si cumple que $z \in X \Longleftrightarrow |z| \in X$, donde $|z| = (|z_1|, \ldots, |z_n|)$ si $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

Notamos que todo conjunto modularmente decreciente es en particular un conjunto de Reinhardt.

Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es abierto, existe un **máximo abierto de Reinhardt** contenido en U, que denotamos por $U_R := \{z = (z_1, ..., z_n) \in U : (\lambda_1 z_1, ..., \lambda_n z_n) \in U \quad \forall \lambda_j \in \mathbb{C} \quad con \quad |\lambda_j| = 1 \ (j = 1, .., n)\}$.

Si $0 \in U$ podemos considerar la componente conexa de U_R que contiene al 0, a la cual denotamos por $U_R(0)$, que es el máximo conjunto de Reinhardt conteniendo el 0 y contenido en U.

Proposición 3.19. *Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es abierto, $0 \in U$ y $f \in \mathscr{H}(U)$, entonces la serie de Taylor $\sum_\alpha \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} z^\alpha$, converge en $U_R(0)$.*

Demostración. Podemos asumir que $U = U_R(0)$. Sea $\varepsilon > 0$ y definimos el abierto $A_\varepsilon = \{z \in U : dist(z, \complement U) > \varepsilon \|z\|_\infty\}$. Notar que $0 \in A_\varepsilon \subset U$, y sea $A_\varepsilon(0)$ la componente conexa de A_ε que contiene al 0. Así, $U = \bigcup_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon$, luego $U = \bigcup_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon(0)$. Para los $z \in A_\varepsilon(0)$ definimos

$$g(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial_0 T_\varepsilon} \frac{f(t_1 z_1, ..., t_n z_n)}{(t_1 - 1)...(t_n - 1)} dt_1 ... dt_n$$

donde $T_\varepsilon := \{t : |t_j| < 1 + \varepsilon, \ j = 1, .., n\} = D(0; 1 + \varepsilon)$. Veamos que esta integral tiene sentido: si $z \in A_\varepsilon(0)$ se tiene que $(1 + \varepsilon) z \in U$ ya que $dist(z, (1 + \varepsilon) z) = \varepsilon \|z\|_\infty < dist(z, \complement U)$ por definición de A_ε. Así $|tz| = (|t_1 z_1|, ..., |t_n z_n|) = ((1 + \varepsilon)|z_1|, ..., (1 + \varepsilon)|z_n|) = |(1 + \varepsilon) z|$. Como U es conjunto de Reinhardt, $(1 + \varepsilon) z \in U$ implica $|tz| = |(1 + \varepsilon) z| \in U \Leftrightarrow tz \in U$.
Diferenciando bajo el signo integral tenemos que $g \in \mathscr{H}(A_\varepsilon(0))$.

Por otro lado, por el teorema integral de Cauchy (2.3) tenemos que

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial_0 D(0;r)} \frac{f(w_1, ..., w_n)}{(w_1 - z_1)...(w_n - z_n)} dw_1 ... dw_n \quad \forall z \in D(0; r) \cap U.$$

Supongamos $z_j \neq 0 \, \forall j$. Haciendo los cambios de variable $w_j = t_j z_j$ tenemos

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|t_j| = \frac{r_j}{|z_j|}} \frac{f(t_1 z_1, ..., t_n z_n)}{(t_1 - 1)...(t_n - 1)} dt_1 ... dt_n.$$

En particular, para ε suficientemente pequeño,

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial_0 T_\varepsilon} \frac{f(t_1 z_1, ..., t_n z_n)}{(t_1 - 1)...(t_n - 1)} dt_1 ... dt_n \quad \forall t \in T_\varepsilon.$$

Puesto que $|t_j| > 1, \ j = 1, ..., n$

$$\frac{1}{(t_1 - 1)...(t_n - 1)} = \sum_\alpha \frac{1}{t_1^{\alpha_1 + 1} \cdots t_n^{\alpha_n + 1}}$$

con convergencia normal. Entonces

$$f(z) = \sum_\alpha \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial_0 T_\varepsilon} \frac{f(t_1 z_1, ..., t_n z_n)}{t_1^{\alpha_1 + 1} \cdots t_n^{\alpha_n + 1}} dt_1 ... dt_n \tag{3.3}$$

y utilizando los cambios de variable $t_j z_j = \eta_j$ llegamos a

$$f(z) = \sum_\alpha \left[\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\{|\eta_j| = (1+\varepsilon)|z_j| \, \forall j\}} \frac{f(\eta)}{\eta^{\alpha + 1}} d\eta\right] z^\alpha$$

que es la fórmula de Taylor de f en 0.

Además, si z está lo suficientemente cerca de 0, la integral de Cauchy modificada (3.3) muestra que $f(z) = g(z)$. Pero como $A_\varepsilon(0)$ es conexo, tenemos que $f = g$ en $A_\varepsilon(0)$.

Definimos

$$f_\alpha(z) := \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\partial_0 T_\varepsilon} \frac{f(t_1 z_1, \ldots, t_n z_n)}{t_1^{\alpha_1+1} \cdots t_n^{\alpha_n+1}} dt_1 \ldots dt_n \in \mathscr{H}(U_\varepsilon(0)). \tag{3.4}$$

Para z suficientemente cerca de 0 tenemos $f_\alpha(z) = \dfrac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} z^\alpha$, y por conexión tenemos la igualdad en $A_\varepsilon(0)$. Así, $g(z) = f(z) = \sum_\alpha f_\alpha(z)$ con convergencia normal en $A_\varepsilon(0)$. Finalmente, haciendo $\varepsilon \to 0$ tenemos la igualdad en U.

Denotamos por $\mathbb{R}_+^n$ el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas son todas positivas.

Definición. Sea X un conjunto de Reinhardt de $\mathbb{C}^n$, su **representación real** es:

$$|X| := \left\{(|z_1|, \ldots, |z_n|) \in \mathbb{R}_+^n : (z_1, \ldots, z_n) = z \in X\right\}.$$

Definición. Un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}_+^n$ se dice **logarítmicamente convexo** o **log-convexo** si $\forall r, s \in X$, $\forall \lambda, \mu > 0 \ni \lambda + \mu = 1$ se tiene $r^\lambda s^\mu \in X$.

Un conjunto de Reinhardt X se dice log-convexo si su representación real $|X|$ es un conjunto log-convexo.

Proposición 3.20. *Sea F un conjunto finito de puntos en $\mathbb{R}^n$, $r = (r_1, .., r_n)$ con $r_j > 0\, \forall j$. Consideremos la unión de polidiscos $X := \bigcup_{r \in F} \overline{D(0;r)}$ y $\eta \in \mathbb{C}^n$. Entonces, existe un monomio, $f(z) = c z_1^{\nu_1} \cdots z_n^{\nu_n}$ tal que $|f(\eta)| > 1 \geq \sup_X |f| \Leftrightarrow \eta \notin \widetilde{X}$, donde $\widetilde{X}$ denota el mínimo conjunto de Reinhardt log-convexo en $\mathbb{C}^n$ que contiene a X.*

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos que $\exists f$ como la descrita en el enunciado, entonces el conjunto $R = \{z \in \mathbb{C}^n : |f(z)| \leq 1\}$ es un conjunto de Reinhardt log-convexo que contiene a X, luego, contiene también a $\widetilde{X}$, y no contiene a η, luego $\eta \notin \widetilde{X}$.

$\Leftarrow$ Supongamos ahora que $\eta \notin \widetilde{X}$ y que $\eta_j \neq 0\ \forall j$. Sea $logF$ el conjunto (finito) $logF := \{logr = (logr_1, .., logr_n) \in \mathbb{R}^n : r \in F\}$ y sea Γ la envoltura convexa de $logF$, que es un compacto.
Tenemos que $\left\{log|\eta| + \mathbb{R}_+^n\right\} \cap \Gamma = \emptyset$: si no fuera vacío, tendríamos que $\exists y = (y_1, .., y : n) \in \Gamma$ con $log\left|\eta_j\right| \leq y_j\ j = 1, .., n$. Así. tendríamos $\left|\eta_j\right| \leq e^{y_j}$, luego $\eta \in \widetilde{X}$ ya que $e^y \in \widetilde{X}$ por convexidad, y $\widetilde{X}$ es modularmente decreciente por ser X modularmente decreciente, lo que contradice que $\eta \notin \widetilde{X}$.
Por el teorema de separación de Hahn-Banach, $\exists \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma lineal con coeficientes positivos tal que $\varphi(log|\eta|) > \sup_\Gamma \varphi$. [Se sigue de que si la intersección de un compacto convexo, K, con un cerrado convexo, F, (en $\mathbb{R}^n$) es vacía, existe una forma lineal φ tal que $\inf_F \varphi > \sup_K \varphi$, luego si $F = \xi + \mathbb{R}_+^n$, φ ha de tener coeficientes positivos y $\varphi(\xi) > \sup_K \varphi$]. Como $\mathbb{Q}_+$ es denso en $\mathbb{R}_+$, podemos asumir que los coeficientes de φ son racionales positivos, y multiplicándolos por un entero suficientemente grande, podemos asumir, que que los coeficientes de φ son enteros positivos. Es decir, $\exists \nu_1, .., \nu_n \geq 0$, $\lambda = sup\varphi \in \mathbb{R}$ tales que $\nu_1 log|\eta_1| + \ldots + \nu_n log|\eta_n| > \lambda \geq \nu_1 t_1 + \ldots + \nu_n t_n\ \forall (t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma$. Tomando $c = e^{-\lambda}$ tenemos $\left|c\eta_1^{\nu_1} \cdots \eta_n^{\nu_n}\right| > 1 \geq \left|c z_1^{\nu_1} \cdots z_n^{\nu_n}\right|\ \forall (z_1, \ldots, z_n) \in D(0;r)$ para algún $r \in R$, en particular, $\forall z \in X$. Así, basta tomar $f(z) = c z_1^{\nu_1} \cdots z_n^{\nu_n}$.
Si η tiene alguna coordenada nula, (reordenando podemos asumir que son las k primeras) basta repetir el caso anterior con $(\eta_{k+1}, \ldots, \eta_n)$, $(r_{k+1}, \ldots, r_n) \ni (r_1, \ldots, r_n) \in R$, $\mathbb{C}^{n-k}$, $\mathbb{R}^{n-k}$.

El siguiente teorema caracteriza los abiertos de convergencia de series de potencias.

Teorema 3.21. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto. Entonces son equivalentes:*

1. *U es el conjunto abierto de convergencia de alguna serie $\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ en $\mathbb{C}^n$.*
2. *U es un dominio de Reinhardt que contiene al 0 y es un dominio de holomorfía.*
3. *U contiene al 0, es modularmente decreciente y log-convexo.*

Antes de demostrar el teorema introducimos el siguiente concepto:

Definición. El **conjunto de acotadores** de $\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ es el conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}^n$ tales que

$$\sup_\alpha |c_\alpha z^\alpha| < \infty$$

y el **conjunto de convergencia** de $\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ es el conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}^n$ tales que

$$\sum_\alpha |c_\alpha z^\alpha| < \infty.$$

Así, el conjunto de convergencia de una serie, está contenido en su conjunto de acotadores. Además veamos que el interior del conjunto de acotadores coincide con el interior del conjunto de convergencia, que es lo que llamamos conjunto abierto de convergencia:

Proposición 3.22. *Considerar una serie $\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$. Su conjunto de acotadores, B, y su conjunto de convergencia, C, tienen el mismo interior, $int(B) = int(C)$. Además, la serie tiene convergencia normal en $int(B) = int(C)$.*

Demostración. Es claro que $C \subseteq B$ y por lo tanto, $int(C) \subseteq int(B)$. Sea $\eta \in int(B)$. Entonces $\exists \delta_1, ..., \delta_n > 0$ tales que $|z_j - \eta_j| < \delta_j$ $(j = 1, .., n) \Rightarrow z = (z_1, ..., z_n) \in B$. Sea $\widetilde{z} \in \mathbb{C}^n \ni |\widetilde{z}_j - \eta_j| < \delta_j$, $(j = 1, .., n)$. Escogiendo $r_j = |\widetilde{z}_j| > 0$, por el lema de Abel 2.11 $\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ tiene convergencia normal en $D(0; r)$ ya que $\widetilde{z} \in B$. Podemos escoger $\widetilde{z}$ tal que $\eta \in D(0; r) \subset C$. Luego $\eta \in int(C)$.
Hemos visto que para cada $\eta \in int(B)$ $\exists D(0; r)$ conteniendo a η donde $\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ tiene convergencia normal. Como la convergencia normal es una propiedad local, se sigue que la serie tiene convergencia normal en $int(B)$.

Ahora sí, demostramos el teorema 3.21

Demostración. 1$\Rightarrow$ 3 Basta comprobar que es log-convexo ya que por la definición de conjunto abierto de convergencia, es claro que contiene al 0 y que es modularmente decreciente. Veamos que el conjunto de acotadores, B es log-convexo, es decir, que su representación real $|B|$ es log-convexa. Sean $r = (r_1, ..., r_n)$, $s = (s_1, ..., s_n) \in |B|$ y sean $\lambda, \mu > 0 \ni \lambda + \mu = 1$. Entonces $\exists C > 0 \ni |c_\alpha| r_1^{\alpha_1} \cdots r_n^{\alpha_n} \leq C$ y $|c_\alpha| s_1^{\alpha_1} \cdots s_n^{\alpha_n} \leq C \; \forall \alpha \geq 0$. Así, elevando a λ y μ respectivamente, tenemos que:

$$|c_\alpha| (r_1^\lambda s_1^\mu)^{\alpha_1} \cdots (r_n^\lambda s_n^\mu)^{\alpha_n} = |c_\alpha|^{\lambda+\mu} r_1^{\alpha_1 \lambda} s_1^{\alpha_1 \mu} \cdots r_n^{\alpha_n \lambda} s_n^{\alpha_n \mu} =$$
$$\left(|c_\alpha| r_1^{\alpha_1} \cdots r_n^{\alpha_n}\right)^\lambda \left(|c_\alpha| s_1^{\alpha_1} \cdots s_n^{\alpha_n}\right)^\mu \leq C^\lambda C^\mu = C^{\lambda+\mu} = C$$

luego $r^\lambda s^\mu \in |B|$. Así B es log-convexo y por lo tanto $int(B)$ es log-convexo. Por la proposición anterior 3.22 tenemos que $int(B)$ coincide con el conjunto abierto de convergencia, luego ya tenemos el resultado.

3$\Rightarrow$ 2 Todo conjunto modularmente decreciente es en particular un conjunto de Reinhardt conexo, luego sólo queda comprobar que U es dominio de holomorfía. Por el teorema de Cartan-Tullen 3.18 eso es equivalente a ver que U es holomórficamente convexo:

Sea un compacto $K \subset U$. Entonces, como U es modularmente decreciente, existe un conjunto finito F de puntos $r = (r_1, .., r_n), r_j > 0 \; \forall j$, tal que $K \subset X := \bigcup_{r \in F} \overline{D(0; r)} \subset U$, ya que U es modularmente decreciente por hipótesis. Para ver que la envoltura holomórfica de K respecto de U $\widehat{K}_U$ es compacto, basta ver que $\widehat{X}_U$ es compacto, ya que $\widehat{K}_U$ es cerrado en U.

Tenemos lo siguientes contenidos: $\widehat{X}_U \subset \widehat{X}_{\mathbb{C}^n}$, $\widehat{X}_{\mathbb{C}^n} \subset \widetilde{X}$ (Suponer que $\exists \eta \in \widehat{X}_{\mathbb{C}^n} \setminus \widetilde{X}$. La existencia del monomio de la proposición 3.20 contradice que $\widehat{X}_{\mathbb{C}^n}$ sea envoltura holomórfica.) y $\widetilde{X} \subset U$ (U es log-convexo). Así $\widehat{X}_U \subset \widetilde{X} \subset U$.
Veamos ahora que $\widetilde{X}$ es compacto. Sea Y el conjunto de todas las combinaciones multiplicativas de puntos de F. Como Y es la imagen continua de un conjunto compacto, Y es compacto. Como $\widetilde{X} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leq |\eta|\}$ para algún , $\eta \in Y$ se tiene que $\widetilde{X}$ es compacto.
Como $\widehat{X}_U \subset \widetilde{X} \subset U$ y $\widehat{X}_U$ es cerrado en U, se tiene que $\widehat{X}_U$ es compacto, de donde se sigue que $\widehat{K}_U$ es compacto y por lo tanto que U es holomorficamente convexo.

2⇒ 1 Como U es dominio de holomorfía por la cuarta condición del teorema de Cartan-Tullen 3.18 $\exists f \in \mathscr{H}(U)$ que no puede ser extendida de forma analítica a través de ningún punto de la frontera de U. Como $0 \in U$ la serie de Taylor de f en 0, $\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ tiene convergencia normal en U por ser U un dominio de Reinhardt conexo que contiene al 0 (proposición 3.19).
Por otra parte, el conjunto abierto de convergencia V de $\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ es conexo y contiene a U, luego necesariamente se tiene $V = U$ pues de lo contrario, existiría algún punto en ∂U a través del cual f podría extenderse analíticamente.

Bibliografía

[1] BOAS, H.P. *Lecture notes on several complex variables*, https://haroldpboas.gitlab.io/courses/650-2013c/notes.pdf

[2] BRUNA, J. Y CUFÍ,J. , *Métodos Actuales de la Teoría de Funciones Holomorfas De Varias Variables*, Colección Publicaciones del Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura y Departamento de Matemáticas, Salamanca, 1983.

[3] HÖRMANDER, L., *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand, Princeton, 1966.

[4] LEBL, J. , *Tasty Bits of Several Complex Variables*, https://www.jirka.org/scv/scv.pdf.

[5] NACHBIN, L. , *Holomorphic Functions, Domains of Holomorphy and Local Properties*, mathematics studies, North holland, Amsterdam, 1970.

[6] RUDIN, W. , *Real and complex analysis*, mathematics series, Mac Graw-Hill, London, 1970.