Trabajo Fin de Grado

Propuesta didáctica para trabajar el sentido espacial de Matemáticas en Educación Primaria a través de la integración del juego educativo "Batalla de Genios"

Didactic proposal to work on the spatial sense of Mathematics in Primary Education through the integration of the educational game "Battle of Geniuses"

Autor/es

Nerea Salvador Prades

Director/es

Nuria Begué Pedrosa

Grado en Magisterio en Educación Primaria

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Año 2022-2023

RESUMEN: Este Trabajo Fin de Grado presenta una propuesta de enseñanza para el desarrollo de competencias específicas a través del trabajo de contenidos asociados al sentido espacial para el último curso de Educación Primaria, donde se pone el valor del juego y el uso de material manipulativo. Se efectúa un acercamiento teórico sobre el concepto de juego, la clasificación de los juegos educativos según diferentes autores, así como la presencia del juego en el currículo anterior y actual, entre otros aspectos. Posteriormente, se realiza un breve análisis sobre el juego educativo, "Batalla de Genios", el cual proporciona un contexto rico para el diseño de situaciones de aprendizaje como se identifica en el diseño de la propuesta didáctica. En relación con la implementación, se describe algunas de las sesiones diseñadas realizadas con una muestra de alumnos de 6º de Primaria en el CEIP Luis García Sáinz. El análisis de los resultados pone en relieve que el uso de material manipulativo permite al alumno construir un conocimiento matemático adecuado favoreciéndole la revisión de sus concepciones previas. Además, se propone un cuestionario para analizar algunas creencias que presentan los escolares hacia las matemáticas. Finalmente, se concluye con las conclusiones y la valoración personal.

Palabras clave: juegos educativos, Geometría, policubos.

ABSTRACT: This Final Degree Project presents a teaching proposal for the development of specific competences through the work of contents associated with the spatial sense for the last year of Primary Education, where the value of the game and the use of manipulative material are put. A theoretical approach is made on the concept of play, the classification of educational games according to different authors, as well as the presence of the game in the previous and current curriculum, among other aspects. Subsequently, a brief analysis is carried out on the educational game, "Battle of Geniuses", which provides a rich context for the design of learning situations as identified in the design of the didactic proposal. In relation to the implementation, some of the designed sessions carried out with a sample of 6th grade students at CEIP Luis García Sáinz are described. The analysis of the results highlights that the use of manipulative material allows the student to build adequate mathematical knowledge, favoring the revision of their previous conceptions. In addition, a questionnaire is proposed to analyze some beliefs that schoolchildren present towards mathematics. Finally, it concludes with the conclusions and personal assessment.

Keywords: educative games, Geometry, polycubes.

ÍNDICE

Introducción

El actual Trabajo Fin de Grado se compone de diferentes apartados principales. En primer lugar, el marco teórico, basado en una revisión sobre la literatura del concepto “juego”. A su vez, este consta de tres apartados: el juego, su presencia y repercusión en la enseñanza de las Matemáticas, y la Geometría. En el primer subapartado, se hace una aproximación al término de juego, mostrando algunas de las definiciones o ideas de autores destacados. Tras ello, se expone la relación entre los juegos y el pensamiento matemático, y se realiza una clasificación de los juegos educativos. Posterior, se detalla una serie de autores quienes defienden la existencia de una reciprocidad entre el juego y la dimensión afectiva del alumnado. Finalmente, se halla una sección donde se estudia las formas de enseñanza de la Geometría en las instituciones educativas, tratando de encontrar una metodología eficaz para una adecuada instrucción. En ella, se da cabida a la investigación de materiales manipulativos como los policubos.

El segundo apartado acomete el marco legislativo, donde se busca la presencia del juego en el currículo anterior y en el actual. Asimismo, se exponen los sentidos y los saberes básicos trabajados en la propuesta didáctica diseñada, además de las competencias específicas y las orientaciones metodológicas que propone la legislación acorde al propósito del proyecto.

Seguidamente, se lleva a cabo un breve análisis de “Batalla de Genios”, el juego educativo seleccionado para la elaboración de este trabajo y de la propuesta didáctica, que tiene lugar en el apartado consecutivo, donde son detalladas las sesiones o situaciones de aprendizaje, junto con la metodología, la temporalización y, la evaluación. Anterior a la explicación de las sesiones, se realiza una contextualización del centro y del aula donde se ejecuta la implementación. Durante la puesta en práctica de las situaciones de aprendizaje, es propuesto al alumnado un cuestionario que permitirá averiguar algunas de las creencias que presentan los escolares hacia el área de Matemáticas.

A continuación, se muestra la experimentación y el análisis de los resultados de las sesiones implementadas, reflejando algún ejemplo de las respuestas de los alumnos.

Finalmente, se encuentran las conclusiones y la valoración personal sobre todo lo que se ha comentado anteriormente, llegando a una reflexión individual sobre la utilización de recursos didácticos como el juego o los policubos para trabajar la Geometría en el aula.

Justificación y objetivos

La línea de Trabajo de Fin de Grado escogida se corresponde con aquella relacionada con el juego, lo cual exige una revisión del concepto en la literatura desde una visión didáctica y, más especializada, desde el área de Didáctica de las Matemáticas. Por esta razón, el objetivo primordial del presente trabajo es:

- Objetivo 1: Revisar la literatura para caracterizar el concepto de juego en Educación Matemática.

Desde el interés de que el juego no se vea como algo anecdótico, sino como una oportunidad para diseñar situaciones de aprendizaje en torno a él, esto ha conllevado a que el trabajo se concrete en una propuesta didáctica que integra al juego de manera natural en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Además, al escoger un juego sensible de ser trabajado con los policubos, la reflexión sobre qué sentido se va a diseñar la propuesta conduce a la elección del sentido espacial. Por tanto, el objetivo que se define se describe a continuación:

- Objetivo 2: Diseñar una propuesta de enseñanza que promueva que el alumno conjeture y razone a través de la movilización de los saberes asociados al sentido espacial.
    - Objetivo 2.1: Diseñar una situación de aprendizaje en torno a la adaptación de un juego que favorezca la adquisición de las competencias fijadas.
    - Objetivo 2.2: Diseñar tareas en las que esté presente el material manipulativo, de modo que se identifique el valor del mismo como apoyo en el proceso de aprendizaje del niño o niña.

No obstante, durante el transcurso del trabajo, se tiene iniciativa sobre la creación de un cuestionario que permita averiguar las creencias y las actitudes que presentan los escolares hacia esta área curricular. Esto conlleva a determinar otro objetivo:

- Objetivo 3: Analizar las creencias y las actitudes de los alumnos de Educación Primaria hacia las Matemáticas.

Como conclusión, el presente trabajo tiene como objetivo principal el diseño de una propuesta de didáctica que permita desarrollar competencias matemáticas a través de la construcción de saberes relacionados con el sentido espacial donde el juego se presente como un entorno con posibilidades para alcanzar dichas competencias.

1. MARCO TEÓRICO

En este apartado se realiza una revisión de la literatura del concepto de "*juego*" desde diferentes perspectivas. En primer lugar, se hace una revisión histórica de corte psicológico para identificar las posibilidades del niño en el proceso cognitivo del niño, donde también se señalan aspectos asociados a la dimensión afectiva, aspecto que será tratado de manera más detallada en un apartado posterior. En segundo lugar, se hace una mirada del concepto desde la Didáctica de la Matemática, identificando las conexiones que existe con la resolución de problemas, así como una clasificación de estos.

Dado que los saberes que se pretenden movilizar se corresponden con el sentido espacial, se presenta una revisión sobre el estado de la cuestión que permita identificar cómo es el proceso de enseñanza y aprendizaje. Este análisis se completa con la revisión de investigaciones centradas en identificar herramientas para clasificar el nivel de razonamiento geométrico, así como el papel del material manipulativo en la construcción de una comprensión adecuada en torno a los saberes del sentido escogido en esta memoria, entre otras orientaciones didácticas y metodológicas adecuadas.

1.1. El juego

1.1.1. Definición de juego y revisión del concepto desde la psicología

En la Antigua Grecia, Platón y Aristóteles destacaban la relevancia de educar a través del juego, de manera que los niños ejercitasen su cerebro, considerándose el juego como base de la educación (López, 2010).

Desde una perspectiva constructivista, se pueden encontrar diversos autores que aportan una concepción y una postura hacia el juego. Por un lado, Piaget e Inhelder (1981, como se citó en Cardón, 2016), lo consideran como una instancia importante en el desarrollo general del sujeto, que permite la expresión del pensamiento infantil y la interacción con el medio. Cumple un papel fundamental en el desarrollo de la inteligencia, ya que promueve la generación de nuevas formas mentales. Estos autores proponen tres tipos de juegos: motor (el niño comprende las primeras formas lúdicas donde se prolonga la ejecución de la acción por el puro placer funcional), simbólico (la asimilación y la imitación, propio de los niños entre 2 y 7 años) y de reglas (implica una representación simultánea y compartida de los objetos y acciones por parte de todos los participantes de un juego colectivo). Según Piaget (1985), «*los juegos ayudan a construir una amplia red de dispositivos que permiten al niño la asimilación total de la* *realidad, incorporándola para revivirla, dominarla, comprenderla y compensarla*» (Muñiz-Rodríguez, 2014, p.3).

En la misma línea, Vygotsky (1979) concibe el juego como una forma de satisfacer las necesidades de los educandos, y de gestionar y superar las frustraciones que pueden sufrir en su día a día. Razona que "*el juego crea una zona de desarrollo próximo en el niño*", que es generador de nuevos aprendizajes. Este psicólogo del siglo XX destaca la función socializadora y cultural del juego, y en un segundo plano hace referencia a su función didáctica (Monroy y Sáez, 2011). Considera que el juego infantil evoluciona asumiendo nuevos formatos que evidencian, inicialmente, el predominio de lo imaginario con ciertas reglas ocultas y que son reemplazados progresivamente por otros con reglas explícitas y posiblemente convencionales en los cuales la situación imaginaria pasa a un segundo plano. Vygotsky concibe el juego como una actividad esencial para el desarrollo humano ("*es un factor básico del desarrollo*"), y, además, añade que durante la edad escolar "el juego no desaparece, sino que se introduce en la actitud que el niño adopta frente a la realidad. También distingue tres etapas: *juego con distintos objetos*, *juegos constructivos* y *juegos reglados.* Como se observa, ambos teóricos coinciden en creer que el juego es algo más que un entretenimiento reconociendo su alto potencial educativo, además de suscitar aprendizajes culturales y sociales.

Además de estos dos psicólogos de los siglos XIX y XX, se encuentra Freud, quien expone que el juego permite al niño adquirir un control del mundo en que vive, y al mismo tiempo, le permite expresarse libremente (Monroy y Sáez, 2011). Asimismo, Huizinga (1949), en su libro *Homo Ludens*, recoge la definición y la amplía, transmitiendo que, para él, jugar es una forma particular de la actividad social en la que se establecen unas reglas y en la que los participantes se convierten en jugadores que deben comportarse "normalmente", es decir, siguiendo las normas establecidas. También define el término como "una especie de subconjunto de juegos", es decir, "hay más formas de jugar que juegos". Lalande (1972) lo define como "*la organización de una actividad dentro de un sistema de reglas que definen un éxito y un fracaso*". Por otro lado, Bruner (1984), quien reconoce el juego como un escenario de aprendizaje que promueve el lenguaje y el pensamiento en niños pequeños. El niño no solo aprende el lenguaje, sino a usarlo como instrumento de pensamiento y acción. Otros autores como Brousseau (1997) indican que el "juego" puede referirse a actividades físicas o mentales que para quien las lleva a cabo no tiene otro objetivo que el placer que proveen (González et al., 2014).

1.2. El juego para la enseñanza de las Matemáticas

Aunque los alumnos necesitan jugar para aprender (Grunfeld, 1975), Molina (1992), identifica que el juego no se ha integrado como una actividad en el aula porque la mirada del adulto la identifica como una actividad que provoca la distracción, lo que conlleva a que el juego se utilice para rellenar tiempos muertos o para relajarse. Desde la psicología, el apartado anterior mostraba a través de diferentes autores que el juego permite generar aprendizajes culturales y sociales. En nuestro caso, el objetivo es identificar las oportunidades que ofrece el juego en el proceso de aprendizaje de saberes matemáticos (Edo, 1998).

Gardner (1983, citado en Corbalán y Deulofeu, 1994) quien señala que los juegos matemáticos son matemáticas, destacando su carácter lúdico. No obstante, puntualiza que esto aclara poco, pues las ideas "juego", "recreación" y "lúdico" son aproximadamente sinónimas. Por otro lado, en el Informe Cockroft de 1982 (Gairín, 1990) se establece una recomendación: *"independientemente de la edad o nivel del alumno, si se emplea cuidadosamente un juego matemático, se puede contribuir a clarificar el pensamiento lógico. Todos los juegos obligan a pensar en números y en procesos matemáticos de un modo diferente al de la metodología habitual en la asignatura".* Es decir, se debe mantener un equilibrio entre la matemática lúdica (interés) y la matemática seria (base científica del juego).

Otro autor referente es Bishop (1998), quien expone la existencia de una serie de actividades relacionadas con las matemáticas que son universales: contar, localizar, medir, diseñar, explicar y jugar. En relación con esta última actividad, expresa que el juego proporciona oportunidades para movilizar el razonamiento lógico, y la numeración y el cálculo. Expone que "los juegos son objetivos hacia los que tienden los jugadores siguiendo unas reglas en las que todos están de acuerdo. Se pueden clasificar los juegos según impliquen habilidades físicas, estrategias, suerte o combinación de ellos. En las matemáticas, excluimos aquellos que no interesan y nos quedamos solo con los que implican suerte o en los que las estrategias dependen de la lógica" (Bishop, 1991, p.15).

Oldfield (1991) presenta un juego como un desafío caracterizado por un conjunto de reglas. Esta tarea se puede abordar de manera cooperativa o generando una competitividad constituyendo oponentes (González et al., 2014). Edo et al. (2008) la caracterizan como una actividad colectiva basada en reglas fijas, sencillas, comprensibles y asumidas por todos los participantes. Estos autores señalan que las reglas son objetivos que definen las estrategias que tengan que diseñar los jugadores con el fin de bloquear y/o ganar al resto.

En conclusión, este apartado pone en relieve las posibilidades del juego como actividad para incluirla en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de la caracterización del concepto por los diferentes autores considerados. En particular, la literatura remarca la estrecha relación entre el juego y las matemáticas. Winter y Ziegler (1983, como se citó en Gairín, 1990) exponen las semejanzas entre el juego y el pensamiento matemático (Tabla 1):

JUEGOS	**PENSAMIENTO MATEMÁTICO**
Reglas del juego	Reglas de construcciones, reglas lógicas, instrucciones, operaciones.
Situaciones iniciales	Axiomas, definiciones, lo "dado".
Jugadas	Construcciones, deducciones.
Figuras de juego	Medios, expresiones y términos.
Estrategia de juego	Utilización hábil de las reglas, reducción de ejercicios conocidos a fórmulas.
Situaciones resultantes	Nuevos teoremas, nuevos conocimientos.

Tabla 1. Relación entre los juegos y el pensamiento matemático (Winter y Ziegler, 1983, citado en Gairín, 1990).

La relación entre los juegos y la resolución de problemas radican que ambos comparten el mismo proceso heurístico, es decir, las fases de resolución de uno y otro coinciden y que el tipo de acciones a realizar también tienen gran coincidencia. Debemos recordar a Pólya, para quien el objetivo de la heurística es *"comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso*" (Edo et al., 2008).

Edo (2002) estudia el posible paralelismo entre el proceso (fases) de resolución de un problema matemático y el descubrimiento de la estrategia ganadora de un juego, es decir, las fases de resolución (Tabla 2).

Fases de resolución de problemas en primaria (Pólya)	**Fases de resolución de un juego**
I. Comprensión del problema.	a) Comprensión de los objetivos del juego y de las normas a seguir.

II.	Diseño y ejecución de un plan general o de planes parciales sucesivos.	b) Desarrollo de la partida: experimentación, realización de conjeturas, diseño de planes parciales, planificación de una estrategia.
III.	Verificación de la solución obtenida.	c) Validación o refutación de la estrategia y análisis de lo que ha pasado.

Tabla 2. Relación entre las fases de resolución de un problema y las fases de resolución de un juego (Edo, 2002).

En la misma línea, se hallan González et al. (2014), quienes también escriben sobre la relación del juego con la matemática y la utilización de este en la enseñanza. En particular, estos autores refieren a la publicación del español Miguel de Guzmán, *Juegos matemáticos en la enseñanza* (1984), donde este escribe sobre la relación del juego con la matemática y de la utilización de juegos en la enseñanza, plasmando las similitudes que surgen entre intentar resolver un problema matemático y procurar ganar un juego.

En lo que respecta a la clasificación de los juegos, Gairín (1990), explica dos tipos de juegos en función del objetivo perseguido: juegos de conocimiento y juegos de estrategia, categorización que también es avalada por autores como Corbalán y Deulofeu (1996). Se trata de la clasificación más general y difundida en torno al ámbito escolar. En primer lugar, los juegos de conocimiento, que son aquellos que implican el uso de conceptos o algoritmos de matemáticas (suelen ser juegos numéricos, juegos de geometría, etc.). El jugador consume su turno realizando una multiplicación, o calculando el área de una figura plana. Gairín (1990) distingue tres niveles de aplicación de este tipo de juegos:

- Pre-instruccional: mediante el juego, el alumno descubre un concepto o establece la justificación de un algoritmo; el juego es el único vehículo de aprendizaje.
- Co-instruccional: el juego como una de las actividades usadas en la enseñanza de un concepto matemático.
- Post-instruccional: ya conocen el tema o han recibido una enseñanza sobre él, y hacen actividades para reforzar lo aprendido; consolida el aprendizaje.

En segundo lugar, los juegos de estrategia, donde se pone en práctica habilidades, razonamientos o destrezas relacionadas con el modo en el que habitualmente proceden las Matemáticas. Dentro de este tipo, se hace otra clasificación: personales, en los que el jugador debe encontrar la forma de resolverlo, o multipersonales, donde se debe averiguar la estrategia que permita ganar siempre a los oponentes. Desde el punto de vista de la enseñanza matemática, la búsqueda de soluciones de juegos sirve para utilizar técnicas de resolución de problemas o el desarrollo de habilidades. Además, algunos juegos refuerzan el conocimiento matemático, puesto que para resolverlos debemos acudir a diferentes ramas de las Matemáticas.

1.2.1. El juego y su relación con la dimensión afectiva

Como se ha identificado en la lectura de los apartados anteriores, existe una relación entre el juego y la dimensión afectiva. En este sentido, Ernest (1986) señala que la motivación es la principal ventaja del uso de juegos, ya que los estudiantes se sumergen en las actividades, mejorando su actitud hacia la materia; además, se deja de lado la monotonía de la práctica. y Butler (1988) informa que el uso de juegos incrementa las habilidades de resolución de problemas y motiva a los estudiantes, sin embargo, señala que la motivación puede durar solo durante la actividad y no trascender ni incrementar el interés del alumno por la materia. Además del aspecto motivacional, Oldfield (1991) destaca la emoción y las actitudes positivas (González et al., 2014). Rieber (1996) afirma que el uso de los juegos con fines educativos permite la atracción de los alumnos, como consecuencia de considerarlos más atractivos que las actividades tradicionales en el aula.

Más recientemente, Gee (2003), Shaffer (2007) y Escudero (2006) consideran que utilizar juegos para el aprendizaje va más allá de crear un ambiente de práctica "divertido", porque los juegos fomentan la participación activa de los estudiantes en prácticas discursivas relevantes que se cree que generan un aprendizaje conceptual más profundo (Delacruz, 2011).

Como conclusión, el educador debe incorporar métodos de enseñanza favorezcan la aparición de creencias positivas hacia ellas, de forma que se genere una menor ansiedad matemática y aumente la comprensión de los educandos. No se trata de que el niño se esté divirtiendo, sino de que el niño construya en sociedad. En este sentido, el juego en un buen instrumento metodológico de enseñanza (Edo, 2008), pues puede ser un entorno desde el que abordar la dimensión afectiva, mejorando la actitud, el interés y aspectos como la autoestima y la autoconfianza del alumnado. Como dijo Johnson (1960): “el desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas es una tarea prioritaria del profesor de matemáticas”, de lo que se deduce que el uso de juegos favorecerá el aprendizaje de las matemáticas (Gairín, 1990).

1.3. La Geometría

La geometría está presente en múltiples actividades que se realizan en la sociedad que explica la importancia que tiene para el desarrollo de la humanidad. Puede decirse que la geometría es “el idioma universal del ser humano, que le permite describir y construir su mundo, y transmitir la percepción que tiene de este al resto de los humanos” (Vargas y Gamboa, 2013, p. 75). Por tanto, la geometría despierta en el estudiante diferentes destrezas que le sirven para comprender otras áreas de las Matemáticas y le prepara mejor para entender el mundo que lo rodea (Vargas y Gamboa, 2013).

Desde el objetivo de diseñar una propuesta coherente en Educación Primaria, se ha realizado una revisión de aquellas investigaciones centradas en identificar cuál es la situación de la enseñanza del contenido geométrico en el aula de primaria.

Atendiendo también a las investigaciones en Didáctica de la Matemática, se describe una propuesta metodológica para estos contenidos. Además, se ha revisado la necesidad de justificar el uso del material manipulativo para la construcción de conocimiento matemático y, en particular, aquel que está relacionado con la Geometría. En específico, se hace una breve reflexión de las bondades de utilizar el material que se describe en el último apartado de esta sección, los policubos.

Esta revisión de la literatura nos proporciona una guía fundamentada para el diseño de la propuesta de enseñanza que se presenta en esta memoria.

1.3.1. ¿Cómo se enseña la Geometría en Educación Primaria?

La investigación realizada por Vargas y Gamboa (2013) señala que, en la mayoría de las instituciones educativas, la enseñanza de la geometría es impartida de manera tradicional, principalmente, por medio de clases magistrales, en las que prima el discurso del profesor como elemento didáctico. En la mayoría de los casos, no se permite al alumnado que tome un papel activo en el desarrollo de la competencia matemática, ni tampoco se fomenta la creatividad y el aprendizaje significativo de los estudiantes. De hecho, Barrantes (2002) afirma que la enseñanza de la geometría se basa en la memorización de conceptos, sin llegar a una mayor conceptualización por parte de los estudiantes. Barrantes y Blanco (2004) plantean que esto sucede en las aulas porque planean las lecciones y utilizan los recursos que ellos experimentaron siendo alumnos. Su vivencia personal les impide ejecutar experiencias de aprendizaje que permitan a los educandos descubrir la geometría como generadora de conocimiento. Otro de los motivos que subrayan es el auge de las Matemáticas modernas en la década de los setenta, que provocó que la geometría quedara en un segundo plano dentro del ámbito escolar, debido a que los docentes no habían adquirido una correcta instrucción sobre esta área matemática (Vargas y Gamboa, 2013).

Esta rama se incluye por primera vez en la escuela primaria en 1960, en el caso de América. El plan de estudios se constituía por objetivos basados en la geometría euclidiana. En contraste a este enfoque, aparecían autores como Freudenthal (1971) o Herdenson y Taimina (2005), quienes planteaban cuestiones que llevasen al alumnado a explorar. Ambos aportaban puntos de investigación que introducían conceptos como "simetría", que permitían salirse de los límites (Sinclair, 2015).

Al igual que se planteaba el cambio de enfoque educativo de las Matemáticas en apartados anteriores, debe suceder lo mismo con el campo de la Geometría. El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MENC, 2004) defiende que los docentes de Matemáticas deben explorar formas que den provecho de la riqueza que tiene la geometría en sí misma. Deben romper con las metodologías de enseñanza habituales en las aulas, tratando de buscar nuevos horizontes en la educación que permitan a los alumnos el desarrollo y el razonamiento intelectual (Vargas y Gamboa, 2013). Es decir, no limitar la enseñanza de la geometría al hecho de conceptualizar figuras estereotipadas y plasmarlas sobre el papel, que conlleva a llevar a cabo una enseñanza ostensiva.

Más recientemente, Sinclair (2015) señala que la enseñanza de la geometría puede centrarse en el papel del dibujo en la construcción de saberes geométricos en los alumnos y en el cambio de énfasis pasivo de la geometría en la escuela primaria (centrado en la clasificación de formas por propiedades) a una orientación más activa que permita dar significado a la geometría (composición y descomposición, manipulación de figuras de dos y tres dimensiones).

1.3.2. Una propuesta metodológica para su enseñanza del contenido geométrico

Una de las teorías de enseñanza y aprendizaje más utilizadas en la actualidad en la didáctica de la Geometría es el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, que fue diseñado por dos profesores holandeses de Matemáticas en la enseñanza secundaria, Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof. Conforme con Crowley (1987) y Jaime (1993), este modelo ayuda a explicar cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico en los estudiantes por medio de cinco niveles: la visualización (reconocimiento de las figuras geométricas como un todo, sin tener en cuenta sus propiedades), el análisis (el educando reconoce las propiedades de las figuras, sin establecer relaciones), la deducción informal (reconocen a las figuras por sus propiedades, construyendo interrelaciones en las mismas), la deducción formal (realiza deducciones y demostraciones lógicas y formales) y el rigor (el individuo está capacitado para analizar el grado de sistemas deductivos y compararlos entre sí. El educando se ubica en un primer nivel al inicio de su aprendizaje y, conforme va cumpliendo logros, avanza al nivel superior (Vargas y Gamboa, 2013).

Dentro de este modelo, también se expone una línea instructiva o de actuación para el docente. Mediante el establecimiento de cinco fases de aprendizaje, se proporcionan pautas que favorezcan el desarrollo de los estudiantes en cada uno de los niveles de razonamiento geométrico. El objetivo de estas es guiar al docente en el diseño y organización de las diferentes situaciones de aprendizaje que plantee. Cuando el alumno haya completado la secuencia de cinco fases, deberá haber alcanzado ese nivel de razonamiento, y por ello, pasar al siguiente. Jaime (1993) y Fouz y De Donosti (2005) (citados en Vargas y Gamboa, 2013) describen las cinco fases:

- **Fase 1. Información**: se toma contacto con el objeto de estudio. Tiene una doble finalidad. En primer lugar, el profesor debe identificar los conocimientos previos de sus alumnos y el nivel de razonamiento en el que se hallan; por otro lado, los alumnos reciben información sobre lo que se va a trabajar y sobre los materiales a utilizar.
- **Fase 2. Orientación dirigida**: el docente guía a los alumnos mediante actividades y problemas, con el fin de que estos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos por formar. Se trata de una fase fundamental en el aprendizaje.
- **Fase 3. Explicitación**: los alumnos deben intercambiar sus experiencias y expresar sus resultados, discutiéndolas con el profesor y el resto de sus compañeros mediante el dialogo. En esta fase, deben aprender y afianzar el vocabulario propio del nivel en el que se encuentran.
- **Fase 4. Orientación libre**: se debe producir la consolidación de todos los contenidos aprendidos en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores, que serán más complejos. El docente propone actividades abiertas, con varias resoluciones posibles. No deberá intervenir o hacerlo mínimamente, dejando que los educandos exploren.
- **Fase 5. Integración**: los educandos realizan una visión global de todo lo aprendido, terminando de establecer una red de relaciones entre los conocimientos adquiridos, y los

que poseían anteriormente. Debe proponerse actividades que favorezcan la integración de saberes y que permitan al profesor comprobar que se ha conseguido alcanzar el nivel.

Según los autores Braga (1991) y De La Torre (2003), el modelo de Van Hiele surge como una respuesta a los problemas que los docentes encontraban en las clases de geometría, donde trataban de ayudar a los alumnos a razonar sobre esta área matemática. Gutiérrez y Jaime (2012) afirman este modelo de razonamiento es, en la actualidad, el marco más eficaz para organizar la enseñanza de la geometría y realizar una correcta evaluación del aprendizaje complaciente de los estudiantes. Puede resultar contradictorio que, este modelo represente uno de los enfoques didácticos de la enseñanza más actuales, debido a su antigüedad, pero es capaz de crear contextos de aprendizaje interactivos en las aulas, alejados del método recurrente usado por los docentes: la definición matemática de un concepto, y la posterior memorización de este mediante ejercicios (Vargas y Gamboa, 2013).

Otro de los aspectos clave en la actividad geométrica es la construcción y/o representación, la visualización y el razonamiento de cada figura geométrica. Esto requiere, por lo general, la utilización de instrumentos didácticos que permitan la manipulación de dichas construcciones y la experimentación de las propiedades de las figuras geométricas, llegando a su comprensión. El uso de instrumentos tradicionales, como el libro de texto, limita el desarrollo matemático del alumno. Gutiérrez (2012) señala que la "percepción visual" es un elemento clave en el aprendizaje de la geometría, dado que permite desarrollar en el escolar habilidades de visualización, como la coordinación motriz de los ojos o el reconocimiento de las relaciones espaciales.

Aclara Villella (2001) (citado en Fabres, 2016), que un aspecto importante que debe considerar el docente en la elección de la metodología para la enseñanza del contenido, es pensar que su alumnado debe lograr el desarrollo de ciertas habilidades que les permita: analizar características y propiedades de las figuras geométricas en tres, dos y una dimensión, y desarrollar argumentos y conjeturas para relacionarlas; usar sistemas de representación para lograr la visión espacial; aplicar transformaciones para analizar situaciones matemáticas; usar la visualización y el razonamiento espacial para la construcción de modelos geométricos, etc.

1.3.3. El material manipulativo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de Geometría

El interés y la necesidad de encontrar el modo de cambiar la percepción que los alumnos tienen de las matemáticas lleva a los docentes a buscar alternativas en las metodologías utilizadas habitualmente. Esta metodología debe colocar al alumno como protagonista, participe de su proceso de aprendizaje. Para ello, el docente debe concienciarse de que la enseñanza está constituida por otros recursos, como los materiales manipulativos, que permitirán al educando un correcto desarrollo en la competencia matemática. Sánchez Huete (1998) (citado en Prieto, 2014) expresaba: "*las matemáticas no se aprenden, sino que se hacen*".

Los materiales manipulativos cumplen con el propósito señalado. Este recurso no es reciente, sino que se remonta a tiempo antiguos, donde se utilizaban objetos como piedras para la realización de cálculos. Se destacan a autores como Pitágoras y Boethius, quienes en el siglo VI antes de Cristo, discutían sobre el uso del ábaco y de los algoritmos. El filósofo Comenius (1592-1670) propuso utilizar objetos de la vida real en la clase. María Montessori (1914) fue otra de las precursoras de los materiales manipulativos. Aseguró que "*el niño tiene la inteligencia en la mano*". El aprendizaje de un concepto se desarrolla mediante los recursos manipulativos y la experimentación de estos. Y, Zoltan Dienes (1970) creador de los bloques lógicos, demostró que se pueden enseñar las estructuras matemáticas a través de materiales desde la infancia (Prieto, 2014).

Autores más actuales como Alsina y Planas (2008), señalan que la manipulación de materiales no solo permite a los alumnos adquirir de manera interesante el conocimiento, sino que aprenden más eficazmente. Uno de estos autores, Alsina, publicó en 2004 una obra titulada "*Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos*", donde afirmaba que:

1. Las actividades lúdicas crean en el alumnado una motivación, lo que provoca que se impliquen mucho más y las tomen más en serio que en las actividades tradicionales.
2. Este tipo de metodología permite que el alumnado aprenda de sus propios errores y del resto de compañeros y compañeras.
3. Respeta la heterogeneidad del alumnado.
4. Favorece y desarrolla el aprendizaje significativo.

El currículum de Matemáticas de Educación Primaria en Aragón concibe por material manipulativo "cualquier objeto que pueda ayudar al alumnado a percibir y abstraer algún concepto matemático mediante la manipulación". Clasifica entre materiales estructurados, que son aquellos que están organizados en torno a determinadas configuraciones (dedos de la mano, dados, ábacos, bloques multibase, etc.); y no estructurados, que no presentan esa organización (policubos, fichas, contadores, papel para hacer papiroflexia, etc.). Esta clasificación en función de la estructuración también es propuesta por Cascallana (2002), quien establece que el material no estructurado refiere a cualquier objeto del entorno del niño, y no tiene por qué estar relacionado directamente con las Matemáticas, aspecto que sí que cumplen los materiales estructurados.

Flores et al. (2010) clasifican los materiales atiendo al criterio de la utilidad y el formato, que, en este caso, se centra en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. Por otro lado, según el fin perseguido (mostrar-observar, proponer-manipular, plantear-resolver problemas y desarrollar estrategias) o el tipo de aprendizaje buscado (memorizar, comprender, resolver problemas, ejercitarse o aplicar algoritmos). Corbalán y Deulofeu (1994), al igual que en los juegos, diferencian tres momentos para el uso de este recurso: pre-instruccional (introducción de un concepto), co-instruccional (para trabajar el concepto) y post-instruccional (como repaso del concepto trabajado).

Aunque depende del saber en cuestión, puede decirse que el trabajo con manipulativos sigue una serie de etapas: manipulación libre con el material, manipulación guiada, expresión oral intuitiva, representación gráfica, etc. (Orden ECD/1112/2022, p. 26130). La manipulación libre otorga al educando interpretar las propiedades físicas del objeto. Al contrario, la manipulación dirigida o guiada por el maestro, debe tener un objetivo concreto y disponer de una serie de actividades correctamente programadas.

1.3.4. ¿Por qué los policubos pueden ser un buen material para trabajar la Geometría en el aula?

Como muestra Alsina (2004) en su decálogo, para la enseñanza de la Geometría pueden utilizarse distintos materiales: regletas, geoplano, tangram, etc., los cuales permiten al alumno conocer y comprender las nociones estudiadas. Señala Área et al. (2010), que, "*por medio de las sensaciones como el tacto, la vista y el oído, las personas adquirimos el conocimiento*", lo cual permite el material que se presenta a continuación.

En este Trabajo Fin de Grado, se propone el uso de un material manipulativo especifico, que recibe el nombre de **policubos**. Se trata de pequeñas piezas, "*cuerpos geométricos formados por cubos iguales unidos, de formas diferentes (se ensartan unos con otros), por sus caras*" (Antón et al., 1994; como se citó en Santacreu et al., 2015). Suelen usarse desde la Educación Infantil hasta Secundaria como material de apoyo en el área de Matemáticas. Puede utilizarse para potenciar muchos contenidos matemáticos, por ejemplo, para el desarrollo del pensamiento espacial y la relación entre figuras representadas en dos y tres dimensiones.

La manipulación de los policubos permite que el educando construya una figura geométrica, y al mismo tiempo experimente la propia figura y alcance el desarrollo de su comprensión y visión espacial. Esa visualización, proporcionará al alumno la capacidad de apreciar las diferentes unidades que conforman una figura y proveer información para examinar las propiedades que se pueden obtener de ella misma: área, perímetro, etc. Asimismo, puede constituir la base de conceptos como el giro y la simetría.

En relación con este material, aparecerá el concepto de **poliminós**. Este material viene de la mano del matemático norteamericano Solomon W. Golomb, en su artículo "CheckerBoard and Polyominoes" (Tablero de Damas y Poliminós). Definió los poliminós como "*las configuraciones que recubren cuadros adyacentes de un tablero de ajedrez"*. Es decir, un grupo de cuadrados unidos por los lados, de tal forma que cada dos de ellos tiene al menos un lado común". Estos se clasifican según el número de cuadrados que lo componen.

Se percibe por tanto que, el material genera una serie de ventajas en el aula, tales como: motivar y estimular a los estudiantes, permitir una familiarización rápida, generar ambientes donde se propicia la discusión e interacción entre educandos, facilitar la comprensión de nociones que se movilizan a través de las construcciones, fomentar el aprendizaje significativo y por descubrimiento, etcétera.

Es decir, como el material manipulativo ha sido declarado un recurso didáctico óptimo para la Geometría, la propuesta didáctica que es planteada seguidamente está fundamentada en base a él. Como de todos los materiales, se ha observado que el policubo proporciona apoyos para la construcción de saberes relacionados con el sentido espacial, será el elemento principal de las situaciones de aprendizaje elaboradas.

2. MARCO LEGISLATIVO Y CURRICULAR

Esta sección muestra, en primer lugar, una breve exploración de la aparición del juego en las dos leyes vigentes en Educación Primaria de Aragón. En segundo lugar, expone también la presencia de la Geometría en el currículo actual, hallándose en el sentido espacial, donde son recogidos aquellos saberes trabajados en la propuesta didáctica diseñada, que incluye a su vez al sentido socioafectivo. Finalmente, se estudian las orientaciones metodológicas del currículo.

2.1. El juego en el currículo de Matemáticas en Educación Primaria

Bajo este apartado se hace una revisión de los documentos curriculares correspondientes a las dos leyes educativas que actualmente están organizando el marco curricular de los centros educativos de Primaria en la Comunidad Autónoma de Aragón durante el curso académico 2022-2023. Su análisis se centra en identificar el papel del juego en las Matemáticas durante proceso de enseñanza del alumnado durante esta etapa educativa por parte de ambos documentos.

2.1.1. LOMCE

Basándome en el documento oficial del Boletín Oficial de Aragón (BOA), *Orden de 16 de junio de 2014 por la que se aprueba y regula el currículo de Ed. Primaria*, se ejecuta una búsqueda de los términos "juego" o "juegos", apareciendo únicamente tres resultados.

En primer lugar, se observa en el apartado de orientaciones metodológicas. La metodología que debe usarse en la materia de Matemáticas es el descubrimiento, donde los alumnos desarrollen el trabajo en equipo, compartiendo, cooperando y estableciendo normas para conseguir los objetivos propuestos. Se debe intentar que todos los educandos sean participes de su proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ello, tal y como se plasma en una de las habilidades intelectuales a través de la cual el alumno va a construir su pensamiento lógico que le permitirá a su vez conseguir los objetivos del área de estudio, denominada *generalización*, los niños y las niñas de Educación Primaria extienden las relaciones matemáticas y las estrategias de resolución de problemas a otros bloques y áreas de conocimiento independientes de la experiencia. A esta habilidad se llega después de un proceso que se inicia con la comprensión desde la realidad y su evidencia y finaliza con la abstracción mediante **juegos** y ejercicios de aplicación.

Otro apartado del área de las matemáticas en la cual el currículo de Primaria hace hincapié al uso de juegos en la enseñanza, es el Bloque 5. Estadística y probabilidad (5º EP), donde se observa como uno de los estándares de aprendizaje: *Est.MAT.5.4.2. Hace estimaciones sobre la probabilidad de obtener un resultado en una situación real o simulada de* ***juego*** *habitual del alumnado en el que interviene el azar*; y, en el Bloque 5. Estadística y probabilidad (6º EP), como estándar de aprendizaje: *Est.MAT.5.4.2. Realiza conjeturas y estimaciones sobre algunos* ***juegos*** *(monedas, dados, cartas, lotería ...).* En este caso, son de gran utilidad los juegos de azar.

Desde la primera página hasta la séptima, incluida, se exponen en diferentes apartados una introducción sobre las Matemáticas en Educación Primaria, cómo contribuye al desarrollo de las Competencias Clave, los objetivos del área, las orientaciones metodológicas entre las que se desarrollan habilidades intelectuales como la generalización, etc.

Como elementos motivadores para la adquisición de los contenidos, se encuentran los desafíos matemáticos y la pregunta, además del trabajo en equipo y la manipulación de objetos y materiales para generalizar las ideas matemáticas.

Por último, en el resto de las páginas que componen el documento, se recogen por curso y bloque, los diferentes contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje que el alumnado debe alcanzar para poder superar la materia (Orden EDC/850/2016, pp. 20713-20884).

2.1.2. LOMLOE

El cambio de la *Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa* (LOMCE) a la *Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación* (LOMLOE) ha supuesto un cambio en el currículo de Educación Primaria. Se pasa de organizar el currículo en cinco bloques de contenidos *Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas, Números, Medida, Geometría, Estadística y probabilidad*, a estructurar los saberes básicos en torno a seis sentidos en relación al «*sentido matemático*» e integran un conjunto de conocimientos, destrezas y actitudes diseñados de acuerdo con el desarrollo evolutivo del alumnado (*sentido numérico, sentido de la medida, sentido espacial, sentido algebraico y pensamiento computacional, sentido estocástico* y *sentido socioafectivo*).

El objetivo esencial del área es la adquisición de las competencias específicas, que se valorará a través de los criterios de evaluación. No existe una vinculación unívoca y directa entre criterios de evaluación y saberes básicos, las competencias específicas se evaluarán a través de la puesta en acción de diferentes saberes, proporcionando la flexibilidad necesaria para establecer conexiones entre ellos.

Desde esta perspectiva educativa, el área de Matemáticas debe abordarse de forma experiencial, concediendo especial relevancia a la manipulación (a la reflexión compartida sobre las acciones que se realizan con ella) e impulsando progresivamente la utilización continua de recursos digitales, proponiendo al alumnado situaciones de aprendizaje que propicien la reflexión, el razonamiento, el establecimiento de conexiones, la comunicación y la representación.

Del mismo modo, se recomienda combinar diferentes metodologías didácticas, que favorezcan la motivación por aprender y generen en el alumnado la curiosidad y la necesidad por adquirir los conocimientos, destrezas y actitudes para el desarrollo de las competencias. Las metodologías activas son especialmente adecuadas en un enfoque competencial, ya que permiten construir el conocimiento y dinamizar la actividad de aula mediante el intercambio de ideas.

Dejar a un lado la habitualidad de las clases expositivas donde se desarrolla la concepción de las matemáticas, dando cabida a otros métodos y/o recursos didácticos que permitan establecer una conexión de saberes y un desarrollo de competencias.

Proponen el uso de materiales manipulativos y el uso de juegos. En primer lugar, la utilización de materiales da la posibilidad de generar ambientes vinculados con la resolución de problemas. Puede introducirse en el aula cualquier objeto que ayude al alumnado a percibir y abstraer algún concepto matemático mediante la manipulación. Se establecen dos grupos para clasificar a los materiales manipulativos: estructurados (aquellos que están organizados en torno a determinadas configuraciones como los dados o los bloques multibase) y no estructurados (no presentan esa organización, como los policubos). Hay que considerar que, para poder trabajar con ellos en el aula, se requiere de una cuidadosa planificación. En segundo lugar, jugar, que es una de las seis actividades matemáticas esenciales (Bishop, 1998). Como se ha aclarado anteriormente, el juego tiene evidentes efectos positivos en el desarrollo afectivo del alumnado, además de que estimula el interés y favorece el desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas por parte del alumnado. Así pues, resulta natural incluir la sugerencia del uso del juego –matemático– en la enseñanza de las Matemáticas (Orden ECD/1112/2022, p. 26129-26133).

En resumen, el análisis de estas dos leyes permite observar el cambio en las metodologías de enseñanza. La primera muestra un enfoque menos activo, considerando el juego como un elemento de ayuda en el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado. Sin embargo, en la segunda se aprecia un avance instruccional, apreciando el juego como una herramienta metodológica esencial en la enseñanza de Matemáticas.

2.2. La presencia de la Geometría en el currículo actual: Sentido espacial

Para la elaboración de la propuesta didáctica se han tenido en consideración los documentos legislativos de la comunidad autónoma de Aragón, relacionados con la etapa educativa de Educación Primaria.

En primer lugar, la *Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*., y la *Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa*, pues van a nombrarse ambos currículos de Educación Primaria.

En la *Orden ECD/1112/2022, de 18 de julio, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón*, es introducido el *sentido espacial*, a través del cual los alumnos comprenden los aspectos geométricos del mundo, aprendiendo a identificarlos, representar y clasificar formas, describir sus propiedades y establecer relaciones, entre otros. Dentro del propio *sentido espacial*, se encuentran contenidos como la geometría, donde autores como Chamorro (2003) comentan que se produce una "aritmetización" de la misma, al ser recuda a la aplicación trivial de fórmulas en situaciones prefijadas. No se debe enseñar la Geometría mediante el aprendizaje memorístico de definiciones, sino que debe enseñarse razonando y estableciendo relaciones de conceptos, por el medio de la exploración y el descubrimiento sobre tareas planteadas a partir del uso de manipulativos (físicos y virtuales). Asimismo, el currículo propone el modelo de Dina y Pierre van Hiele (1986) para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, como marco muy útil en el diseño de secuencias didácticas, y para la gestión de actividades en el aula.

Por otra parte, se halla el *sentido socioafectivo*, que integra conocimientos y destrezas que permitan a los educandos desarrollar actitudes y creencias positivas hacia las Matemáticas y su aprendizaje. Para ello, se deben crear situaciones emocionalmente adecuadas, en las que el alumnado acabe con las actitudes negativas y se sienta motivado. Es imprescindible la interacción y el trabajo en grupo.

En relación con los saberes básicos para el tercer ciclo de Educación Primaria (en el cual se desarrolla la propuesta que se expone a continuación) vinculados a esta temática, los conocimientos, destrezas y actitudes que son incluidos en el marco curricular son los mostrados en las Tablas 3 y 4 (Orden ECD/1112/2022, pp. 26059-26125):

Saberes básicos (Orden ECD/1112/2022, pp.26122-26125).
Tercer ciclo de Educación Primaria
Sentido espacial
El aprendizaje de los saberes propios del sentido espacial requiere hacer y pensar sobre lo que se hace. La manipulación de materiales físicos o virtuales, así como el uso de otros recursos didácticos, se hacen imprescindibles y establecen conexiones profundas con el resto de los sentidos, permitiendo así al alumno aprender a definir en geometría.
Conocimientos, destrezas y actitudes
C.1. Formas geométricas de dos o tres dimensiones: **C.1.1.** Formas geométricas en objetos de la vida cotidiana: identificación y clasificación atendiendo a sus elementos y a las relaciones entre ellos. **C.1.2.** Técnicas de construcción de formas geométricas por composición y descomposición, mediante materiales manipulables, instrumentos de dibujo y aplicaciones informáticas. **C.1.3.** Vocabulario geométrico: descripción verbal de los elementos y las propiedades de formas geométricas. **C.1.4.** Propiedades de formas geométricas: exploración mediante materiales manipulables (cuadrículas, geoplanos, policubos, etc.).
C.2. Localización y sistemas de representación: **C.2.1.** Localización y desplazamientos en planos y mapas a partir de puntos de referencia (incluidos los puntos cardinales), direcciones y cálculo de distancias (escalas): descripción e interpretación con el vocabulario adecuado en soportes físicos y virtuales. **C.2.2.** Descripción de posiciones y movimientos en el primer cuadrante del sistema de coordenadas cartesiano.
C.3. Movimientos y transformaciones: **C.3.1.** Transformaciones mediante giros, traslaciones y simetrías en situaciones de la vida cotidiana: identificación de figuras transformadas, generación a partir de patrones iniciales y predicción del resultado.
C.4. Visualización, razonamiento y modelización geométrica: **C.4.1.** Estrategias para el cálculo de áreas y perímetros de figuras planas en situaciones de la vida cotidiana.

Tabla 3. Saberes del sentido espacial del tercer ciclo de Educación Primaria en Matemáticas trabajados en la propuesta didáctica (Orden ECD/1112/2022, pp.26122-26125).

Saberes básicos (Orden ECD/1112/2022, p.26128).
Tercer ciclo de Educación Primaria
Sentido socioafectivo / socioemocional
Plantear situaciones para que el alumnado reflexione sobre sí mismo y sobre cómo se enfrenta al aprendizaje de las matemáticas, originando un autoconcepto positivo como aprendiz de matemáticas; colaborar con otros de forma constructiva por medio de trabajo en diferentes agrupamientos, en especial, pequeño grupo y grupo/clase, dependiendo de la tarea que se plantee; situaciones que supongan un reto y en las que se entrene en perseverancia; valorar los errores como fuente de aprendizaje, reflexionando sobre ellos; etc. . En este sentido, actividades de suelo bajo y techo alto que pueden ser abordadas por todo el alumnado. El «suelo», «piso» o «umbral» es el arranque de la actividad y conecta con conocimientos previos muy básicos). El «techo» da oportunidades de bloqueo (reto y superación) también a todo el alumnado, permitiendo diferentes niveles de profundización.
Conocimientos, destrezas y actitudes
F.1. Creencias, actitudes y emociones propias: **F.1.2.** Flexibilidad cognitiva, adaptación y cambio de estrategia en caso necesario. Valoración del error como oportunidad de aprendizaje. **F.2. Trabajo en equipo, inclusión, respeto y diversidad:** **F.2.1.** Respeto por las emociones y experiencias de los demás ante las matemáticas. **F.2.2.** Aplicación de técnicas cooperativas simples para el trabajo en equipo en matemáticas y estrategias para la gestión de conflictos, promoción de conductas empáticas e inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad.

Tabla 4. Saberes del sentido socioafectivo del tercer ciclo de Educación Primaria en Matemáticas trabajados en la propuesta didáctica (Orden ECD/1112/2022, p.26128).

2.3. Orientaciones didácticas y metodológicas del currículo de la LOMLOE

La *Orden ECD/1112/2022, de 18 de julio, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón* incluye un apartado en el área de Matemáticas en el que se presentan diferentes sugerencias didácticas y metodológicas para un correcto proceso de enseñanza-aprendizaje de los educandos. Por esa razón, se tienen en cuenta para la propuesta didáctica.

Primeramente, señalo la insistencia del currículo por el uso de diversas metodologías didácticas en el grupo-clase, de manera que se favorezca la motivación del alumnado y se genere un ambiente de curiosidad y necesidad por adquirir los conocimientos, destrezas y actitudes para el desarrollo de las competencias y el aprendizaje de los saberes básicos. Se plantea el manejo de metodologías activas, que aleje al alumnado de las clases expositivas a las que acostumbra gran parte del profesorado.

En segundo lugar, la utilización de materiales manipulativos como papel básico en la actividad cotidiana en el aula de matemáticas de Educación Primaria. Deben estar acompañados de tareas ricas y buenas preguntas del docente o de la docente que inviten al alumnado a la representación y abstracción de los conceptos o saberes matemáticos relacionados. Asimismo, se requiere una correcta planificación del material, que permita una adecuada comprensión del saber matemático por parte de los educandos. En relación el sentido matemático al que más hincapié se le proporciona con la propuesta didáctica, el currículo expone que "*la manipulación de materiales es imprescindible en los saberes propios del sentido espacia*l*".*

En tercer lugar, la LOMLOE manifiesta la atención a la diversidad, no como ofreciendo unas fichas sencillas al alumnado con dificultades de aprendizaje en matemáticas, distintas a las que están viendo el resto de sus compañeros o compañeras, ni tampoco dando otros materiales con matemáticas «elevadas» a algunos alumnos o alumnas mientras los demás están con algo diferente. La perspectiva que se plantea acepta que en el aula conviven diferentes ritmos de aprendizaje, y por ello, se elaboran situaciones de aprendizaje que tengan como objetivo el progreso en el aprendizaje de todo el alumnado. Es decir, tareas de suelo bajo y techo alto, que permitan diferentes niveles de profundización dentro del aula, y posibiliten que todo el alumnado progrese en el aprendizaje.

En cuarto lugar, el trabajo en equipo. La colaboración entre el alumnado es un aspecto importante de la práctica en el aula, debido a que si funciona correctamente genera un impacto poderoso en el aprendizaje. De ahí a que la formación de los pequeños grupos de trabajo en el aula sea un aspecto clave a tener en cuenta. Para su creación, debe tratarse de agrupaciones heterogéneas, puesto que, cuando se divide al alumnado en grupos homogéneos, se frena el aprendizaje de aquellos con un ritmo más lento y, al mismo tiempo, se limita el de los que tienen un ritmo mayor. Estos grupos deben ser construidos por el o la docente, debido a que, si se deja en manos del alumnado, se ven reproducidas las agrupaciones que tienen lugar fuera del aula. Deben ser equipos de trabajo claramente aleatorios, donde se debe procurar siempre la creación de un clima de trabajo participativo e inclusivo. Como el resto de los aspectos, este también se ha tenido en consideración, y se describirá detalladamente junto a la metodología en su apartado correspondiente.

Finalmente, el juego, que, mediante las aclaraciones dadas en apartados anteriores, se aprecia como un recurso elemental en la formación del alumnado de Educación Primaria, aportando evidentes efectos positivos en los educandos. Dentro del aula, permiten a los niños el desarrollo conceptos matemáticos, la práctica de algoritmos, el progreso de habilidades de razonamiento y la creación de entornos en los que resulte útil el uso del pensamiento lógico y el empleo de técnicas heurísticas apropiadas para la resolución de problemas (Gairín, 1990).

3. ANÁLISIS DEL JUEGO EDUCATIVO MATEMÁTICO "Batalla de Genios"

Hasta el momento, se ha ido razonando sobre diferentes ideas acerca del juego y del material manipulativo en la enseñanza de las matemáticas y de la Geometría. También se ha especificado la creación de una propuesta en la que se trabajan saberes relacionados con el sentido espacial. Es por ello, la necesidad de escoger un juego que permita el diseño de las situaciones de aprendizaje, y que, al mismo tiempo, establezca un vínculo con el material didáctico principal en dicha instrucción, los policubos.

Así pues, anterior a la explicación de la propuesta didáctica, es oportuno ejecutar un análisis del juego educativo seleccionado, *"Batalla de Genios*" (Editorial Lúdilo) (ver *Anexo 1*), creado por Salim Berghiche, el cual va a ser el protagonista del presente Trabajo Fin de Grado.

Mediante este juego educativo matemático se van a trabajar saberes básicos o contenidos como la geometría o los movimientos y transformaciones, los cuales se llevan al aula antes de que el alumnado del grupo-clase en la asignatura de Matemáticas dichos conceptos, debido a que los últimos temas del área corresponden con ello (Figuras planas; Cuerpos Geométricos). Esto quiere decir que nos encontramos antes un juego de conocimiento pre-instruccional, porque mediante el juego, el alumno descubre un concepto. Al mismo tiempo, el alumnado debe utilizar diferentes estrategias favorecedoras para conseguir ganar.

"*Batalla de Genios*" es un rompecabezas dinámico que puede jugarse en solitario o compitiendo contra otro jugador. En él, existen 62.208 combinaciones posibles y siempre hay al menos una solución.

Para jugar, cada persona coge un tablero, formado por varias casillas en formato 7x7. En la columna de la izquierda, aparecen las seis primeras letras del abecedario (A, B, C, D, E y F), y en la fila superior los números del 1 al 6, ambos inclusive. Antes de comenzar a jugar, un miembro de la pareja lanza los siete dados que forman parte del juego, en cuyas caras aparecen una letra y un número. Una vez que los dados han sido lanzados, y se han tomado siete valores (por ejemplo: A2, C3, B4, B5, D1, E6 y F2), se toman los otros componentes del juego, pequeños cilindros de madera que reciben el nombre de bloqueadores, y se colocan en cada uno de los dos tableros, en la posición indicada por los dados. El objetivo del juego es ser el primer jugador/a en completar el tablero con las nueve figuras o piezas de colores, evitando siempre los bloqueadores.

Por otro lado, puede implementarse en cualquiera de los tres ciclos de Educación Primaria, tanto para trabajar contenidos matemáticos, como para adquirir y trabajar habilidades como la atención, la planificación, la velocidad y la visión espacial.

Objetivos didácticos. Desarrollar la lógica y orientación espacial. Conocer formas geométricas de dos o tres dimensiones como el cuadrado, el rectángulo y el cubo. Localizar, desplazar y describir puntos o coordenadas cartesianas sobre el plano. Aprender diferentes movimientos y transformaciones en situaciones (giros, simetrías, etc.). Favorecer estrategias para el cálculo de áreas y perímetros en figuras planas.

Estrategias favorecedoras. Colocar las piezas con menor número de cubos (monocubo y bicubo) al final, tratando de cubrir los pequeños huecos.

Orientaciones metodológicas. Este juego ofrece múltiples opciones y presenta una gran versatilidad para trabajar en el aula cualquier saber básico o contenido del sentido espacial.

Juegos semejantes: Buildzi, Kataminó y Coïnx.

Variantes: dada una parte del tablero completa, tengan que decidir cuáles son las opciones de completarlo con una serie de fichas dadas.

Clasificación del juego educativo: según la clasificación realizada por Gairín (1990), este juego puede incluirse en las dos tipologías. En primer lugar, se puede afirmar que es un juego de conocimiento, porque mediante su uso, los alumnos pueden practicar y aprender conceptos matemáticos como el giro o las simetrías (podría ceñirse en cualquiera de los tres niveles). Sin embargo, también puede clasificarse como un juego de estrategia, dado que se ponen en práctica estrategias para la resolución de problemas, y en él no hay azar; ganar depende de cada una de las decisiones del jugador.

4. PROPUESTA DIDÁCTICA

Una vez analizados los aspectos teóricos, se pretende realizar una experimentación real en el aula y posteriormente, valorar lo que ha pasado. Por esta razón, este apartado trata sobre la preparación y el diseño de siete situaciones de aprendizaje, así como la presentación de un cuestionario mediante el cual se estudiarán las creencias de los alumnos frente a la matemática. Seguidamente, se expone la metodología, la temporalización y una posible evaluación.

4.1. Competencias especificas

Con la presente propuesta didáctica, se pretende que el alumnado de Primaria adquiera determinadas competencias del área de Matemáticas. Las competencias específicas pueden encontrarse en cada una de las áreas de conocimiento del currículo expuesto por la *Orden ECD/1112/2022, de 18 de julio, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón,* y relevan a los anteriores objetivos didácticos que mostraba la LOMCE. Son un elemento de conexión entre, por una parte, las competencias clave, y por otra, los saberes básicos y los criterios de evaluación de cada área de conocimiento, sin olvidar el perfil de salida (Orden ECD/1112/2022, p. 25618). Concretamente, el área de Matemáticas presenta ocho competencias específicas, y se espera que, por medio de las situaciones de aprendizaje programadas, el alumnado adquiera las siguientes:

- **CE.M.2.** *Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder, obtener soluciones, reflexionar sobre estas y el proceso seguido para incorporar nuevos saberes a la red de conocimientos y competencias del alumnado, y asegurar su validez e implicaciones desde un punto de vista formal y en relación con el contexto planteado*.

La resolución de problemas ha de ser el medio principal sobre el que se construyen y aprenden las matemáticas. En este caso no se trata de problemas de enunciado verbal, sino de situaciones en las que el alumno tendrá que poner en práctica estrategias para resolver determinados problemas, por medio de la manipulación de materiales y juegos. Además, al mismo tiempo, reflexionarán sobre sus acciones y su aprendizaje, cuestionándose en todo momento: ¿Qué estoy haciendo exactamente? ¿Por qué lo hago? ¿Para qué?

- **CE.M.3.** *Explorar, formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de tipo matemático en situaciones cercanas y significativas para el alumnado, reconociendo* *el valor del razonamiento y la argumentación para contrastar su validez, integrar y comprender nuevo conocimiento*.

El razonamiento y la argumentación (que es como se inicia el alumnado de Educación Primaria a la idea de prueba en matemáticas) es inherente a la construcción de los saberes matemáticos y, por tanto, debe estar presente de forma continua en el aprendizaje de las matemáticas. De este modo, se plantean situaciones de aprendizaje donde el alumnado tenga que formular preguntas, reflexionar sobre lo que ha hecho, identificar regularidades, admitir que la solución de un problema quizás no existe o que no es única, admitir que el error forma parte del proceso, etc.

- **CE.M.6.** *Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos utilizando el lenguaje oral, escrito, gráfico, multimodal y la terminología matemática apropiada, para dar significado y permanencia a las ideas matemáticas*.

Mediante las situaciones de aprendizaje elaboradas, el alumnado representa conceptos matemáticos con el apoyo de materiales manipulativos, por ejemplo, construyendo todas las figuras posibles con un determinado número de policubos. En la misma línea, se extraen saberes matemáticos como los movimientos y las simetrías, sin necesidad de referirse a ello. Por otro lado, los educandos comunican sus resultados ante el resto de los compañeros, aumentando su compresión matemática.

- **CE.M.7.** *Desarrollar destrezas personales que ayuden a identificar y gestionar emociones al enfrentarse a retos matemáticos, fomentando la confianza en las propias posibilidades, apreciando el error y aceptando el bloqueo como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para desarrollar actitudes como la perseverancia y disfrutar en el aprendizaje de las matemáticas*.

Generalmente, las aulas están llenas de alumnos con creencias y actitudes negativas hacia las matemáticas, lo que conllevan una experimentación negativa de las sesiones de dicha materia. Se pretende que el uso de materiales didácticos manipulativos y juegos en el aula suponga un reto para los niños, y al mismo tiempo, desarrolla en ellos determinadas habilidades personales, que les permitirán superar aquellas situaciones de error y bloqueo propias del aprendizaje, así como favorecer la formación de expresiones positivas hacia el área. Esto deberá tener lugar en un ambiente adecuado, de confianza, respeto mutuo y cuidando las interacciones.

- **CE.M.8.** *Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones, las experiencias de los demás y el valor de la diversidad, participando activamente en equipos de trabajo heterogéneos que promuevan la interacción y la implicación de todos para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables*.

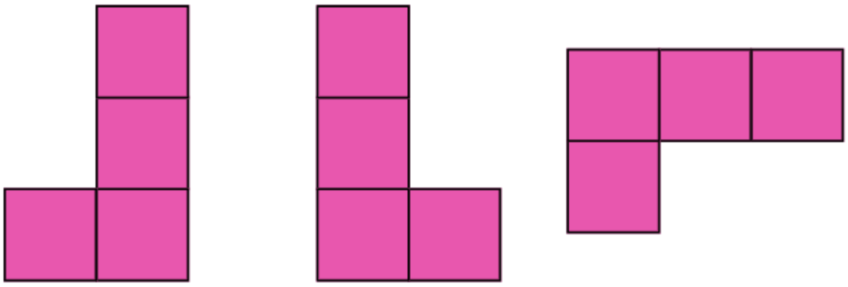
La consecución y el desarrollo de la propuesta se basa en la formación de pequeños grupos de trabajo, los cuales fomentarán el desarrollo social del alumnado, la escucha activa y la comunicación asertiva, llegando a construir un ambiente de aprendizaje y de aula pertinente.

4.2. Diseño de las sesiones o situaciones de aprendizaje

Como se ha afirmado en el primer apartado, la Geometría, al igual que las otras áreas de las matemáticas, se aprende observando, tocando y experimentando. Por tanto, se propone el uso de juegos y materiales manipulativos que permitan al alumnado aprender de otras formas, y al mismo tiempo, aumente su motivación y su gusto por las matemáticas. Por un lado, el juego se ha descrito de manera detallada en el apartado anterior, aunque en el desarrollo de las sesiones se identifica de qué manera se integra el juego en la propuesta. Por otro lado, los materiales manipulativos que se van a utilizar se corresponden con los policubos, que se trata de un material manipulativo no estructurado, donde la justificación de uso se puede deducir de lo indicado en la primera sección de la presente memoria.

A continuación, se van a detallar las distintas sesiones con sus correspondientes objetivos, materiales, saberes y actividades a realizar:

SESIÓN	**1. INTRODUCCIÓN A LOS POLICUBOS – Simetría especular y giros.**
Objetivos	• Ser capaz de construir diferentes figuras con un determinado número de policubos. • Desarrollar la percepción y la orientación espacial, comprendiendo la igualdad entre figuras. • Representar en papel trama cuadrada los policubos construidos.
Materiales	Ficha del alumno con trama cuadrada, lápiz, goma y policubos.
Saberes	C.1.2. – C.1.4. – C.3.1. – F.1.1. – F.2.1. – F.2.2. (Orden ECD/1112/2022, pp. 26122-16128).
Desarrollo	Durante la primera sesión, se realiza una breve introducción sobre los policubos, aunque también entran en juego los poliminós. Los poliminós y los policubos, al igual que el tangram, son recursos para la didáctica de la Geometría. Los poliminós son agrupaciones de cuadrados planos unidos por al menos un lado. Según el número de cuadrados utilizados para realizar cada forma geométrica, los denominaremos de una forma u otra: monominós, dominós… Por medio de la experimentación y la exploración, se les entregará a los alumnos, distribuidos por grupos, decenas de policubos de diferentes colores, para que construyan todas las combinaciones que crean posibles de dominós, triminós y tetraminós. Al mismo tiempo, dispondrán de una trama cuadrada, donde tendrán que ir representando gráficamente cada figura que vayan descubriendo. Estas tareas tendrán un determinado orden. En primer lugar, se les sugiere que construyan una sola pieza compuesta por dos piezas, es decir, el único bicubo o dominó que existe. Algunos alumnos lo dibujarán de pie, otros tumbado, y quizá también en diagonal. Después de esto, se mostrarán dos bicubos (uno en horizontal y otro en vertical), y se cuestionará acerca de su igualdad. Ese es el primer momento en el que se introduce el concepto de giro en el plano, aspecto que deben tener en consideración para las próximas tareas, ya que posteriormente, se pide a los educandos que construyan todas las figuras diferentes con tres y cuatro cubos. Se espera que los alumnos repitan algunas figuras al no tener presente la igualdad entre dos figuras que presenta un giro.



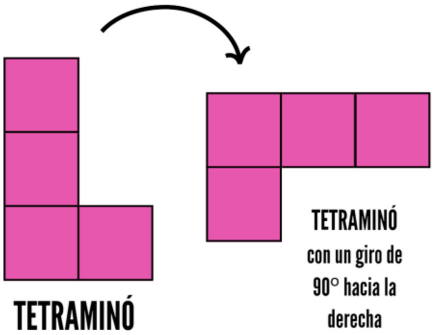
Estas tres figuras conforman un único tetraminó o tetracubo, debido a que dos de los que aparecen se forman a partir del otro por medio de giros o simetrías.

Por ello, antes de que construyan las figuras compuestas por cuatro policubos, se propone una tarea de reflexión grupal en la que deben poner en común las piezas construidas, tratando de identificar cuáles son las correctas y cuáles no.

En el *Anexo 2*, puede observarse la ficha de trabajo entregada a los alumnos, donde están los enunciados de las actividades propuestas.

Con la finalidad de que elaborasen correctamente los pentominós en la próxima sesión, se les explicaría a los alumnos los conceptos de giros y simetría especular:

- *Giros o rotaciones*: movimiento alrededor de un punto que mantiene la forma y el tamaño original de la figura.



- *Simetría especular o respecto al espejo*: transformación que hace corresponder a cada punto de una figura su simétrico respecto de un plano.

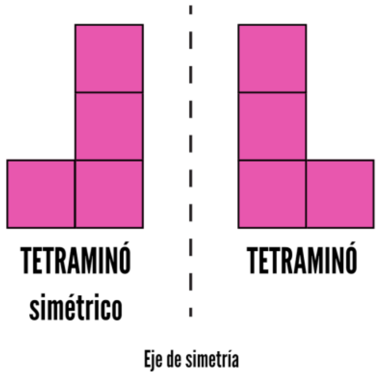
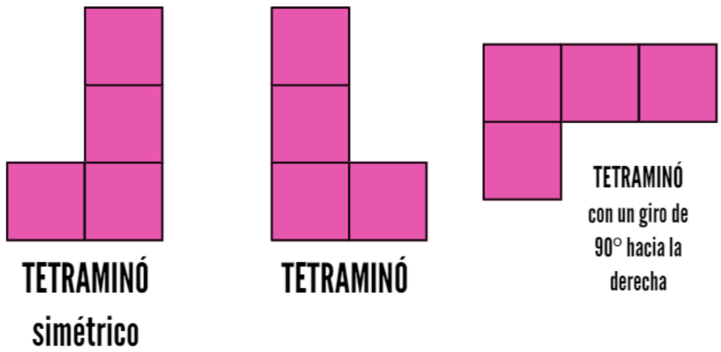
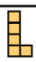
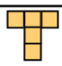
	 

Tabla 5. Desarrollo de la sesión 1 de la propuesta didáctica.

SESIÓN	2. ÁREA Y PERÍMETRO CON POLICUBOS.
Objetivos	• Ser capaz de construir las figuras de cinco policubos únicas, teniendo en cuenta los giros y las simetrías. • Desarrollar la percepción y la orientación espacial, comprendiendo la igualdad entre figuras. • Identificar el área y el perímetro de las figuras elaboradas, estableciendo relaciones entre ellas. • Representar en papel trama cuadrada los policubos construidos.
Materiales	Policubos, lápiz, goma y ficha de trabajo con trama cuadrada (*Anexo 3*).
Saberes	Comprensión de los conceptos matemáticos *área* y *perímetro*. C.1.3. – C.3.1. – C.4.1. – F.1.1. – F.2.1. – F.2.2. (Orden ECD/1112/2022, pp. 26122-16128).
Desarrollo	Esta situación de aprendizaje comienza con la construcción de los 12 pentominós existentes. Los alumnos deberán recordar los conceptos adquiridos en la anterior sesión, para intentar no repetir algunas figuras. En la primera tarea, además de esta instrucción, deben darle un nombre a cada una de las figuras obtenidas, así como calcular su área y su perímetro. En el caso de nombrar las figuras, se espera que los educandos lo relacionen con la regla nemotécnica, que está basada en la correspondencia de cada pentominó con una de las letras del abecedario, dado su parecido. Fue el matemático Solomon W. Golomb en 1954, quien identificó que cinco de los pentominós se correspondían con las letras F, I, L, P y N (similar a la palabra FILIPINO), y que los siete restantes coincidían con las últimas siete letras del alfabeto: T, U, V, W, X, Y, Z. Una de las maneras de responder la tarea es:

PENTOMINÓ	REPRESENTACIÓN	ÁREA	PERÍMETRO
F		5 u2	12 u
I		5 u2	12 u
L		5 u2	12 u
P		5 u2	10 u
N		5 u2	12 u
T		5 u2	12 u

PENTOMINÓ	REPRESENTACIÓN	ÁREA	PERÍMETRO
U		5 u2	12 u
V		5 u2	12 u
W		5 u2	12 u
X		5 u2	12 u
Y		5 u2	12 u
Z		5 u2	12 u

Cabe destacar que, los contenidos matemáticos de “área” y “perímetro” no los han visto recientemente, debido a que la unidad didáctica donde se estudian está al final del libro de texto. Por dicha razón, se dará una consigna que permitirá la resolución de la tabla.

- ÁREA (el lado de un poliminó/cubo corresponde a una unidad de medida; se mide en unidades al cuadrado).
- PERÍMETRO (el lado de un poliminó/cubo corresponde a una unidad de medida; se mide en unidades).

Como todos los pentominós están formados por cinco cuadrados, tendrán la misma área, aunque no el mismo perímetro. La segunda tarea de esta sesión hará reflexionar a los alumnos. Tendrán que decir qué observan en los resultados de la tabla, y el por qué. La tercera pregunta es la justificación de que tengan la misma área: *¿Por qué número de cuadrados están formadas?* Todas las figuras están compuestas por cinco policubos.

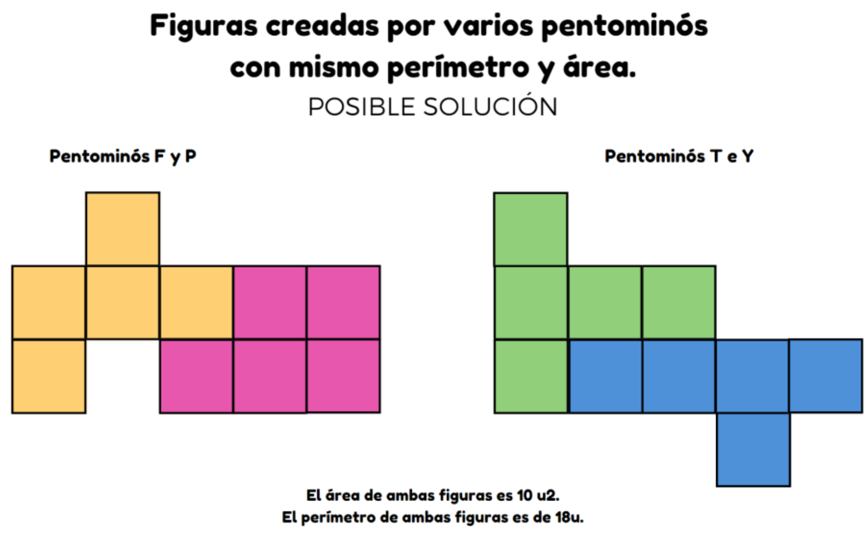
También se pretende establecer relaciones con la sesión anterior, en el sentido de que, mostrando la representación gráfica de uno de los pentominós, y pidiendo al alumnado que gire dicha figura 90º, sin especificar si es hacia la izquierda o derecha. Deben reflexionar sobre si la figura cambia y si sus características (área y perímetros) se mantienen iguales que al inicio.

Por último, se plantean las tres siguientes actividades a realizar sobre la trama cuadrada:

- *Elige los pentominós que necesites para construir dos figuras que tengan igual perímetro e igual área.*
- *Elige los pentominós que necesites para construir dos figuras que tengan diferente perímetro y misma área.*
- *Elige los pentominós que necesites para construir dos figuras que tengan mismo perímetro y diferente área.* En este caso, una de las figuras debe tener distinto número de pentominós.

También podría relacionarse con la tabla inicial, en la que se han anotado los perímetros y las áreas de cada uno de los doce pentominós, de manera que descubran que, si las dos figuras están formadas por el mismo número de pentominós, van a tener la misma área.

Todas estas actividades permiten a los educandos diferenciar los conceptos de área y perímetro, al mismo tiempo que relacionarlos. Observarán que figuras con la misma área pueden tener perímetro diferentes, o viceversa.



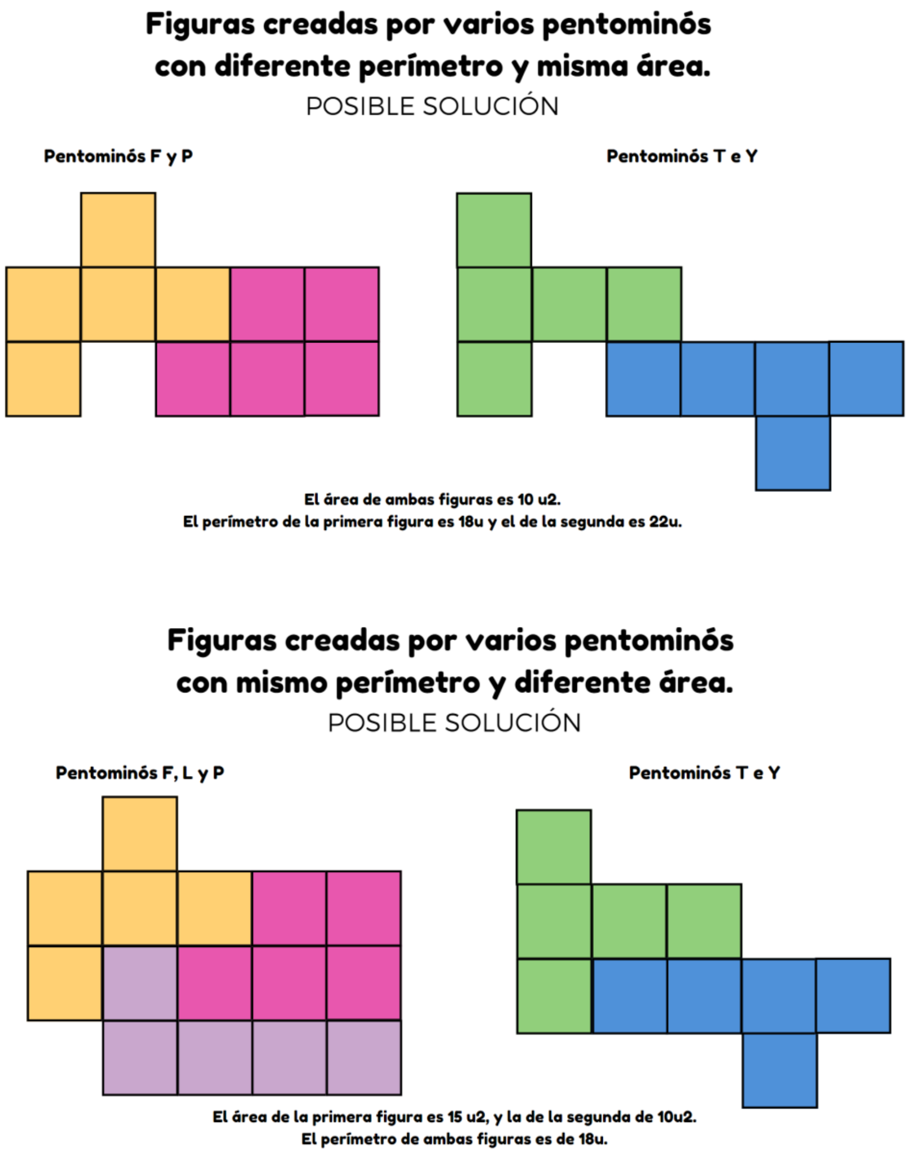


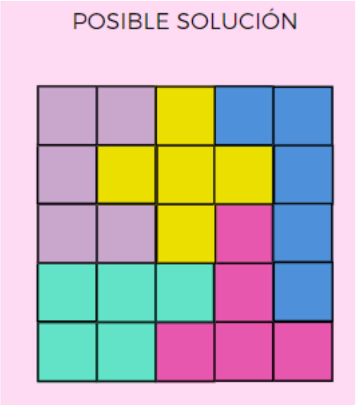
Tabla 6. Desarrollo de la sesión 2 de la propuesta didáctica.

<table>
<tr><th>SESIÓN</th><th>3. CONSTRUCCIÓN DE RECTÁNGULOS. ROMPECABEZAS</th></tr>
<tr><td>Objetivos</td><td>Desarrollar la percepción y la orientación espacial, comprendiendo la igualdad entre figuras.
Ser capaz de construir rectángulos mediante la manipulación de policubos.
Completar los rompecabezas con las figuras construidas en sesiones anteriores, teniendo en cuenta las propiedades estudiadas.</td></tr>
<tr><td>Materiales</td><td>Policubos, plantillas de los rompecabezas (Anexo 4).</td></tr>
<tr><td>Saberes</td><td>C.1.1. – C.1.2. – C.3.1. – F.1.1. – F.2.1. – F.2.2.
(Orden ECD/1112/2022, pp. 26122-16128).</td></tr>
<tr><td>Desarrollo</td><td>Siguiendo con la dinámica de la sesión anterior, los alumnos se pondrán por grupos nuevamente, y cogerán los doce pentominós construidos en actividades preliminares.

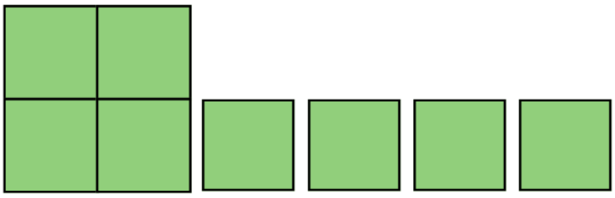
En esta sesión, se van a plantear diferentes situaciones de aprendizaje donde los alumnos construyan a partir de poliminós (con las piezas de los policubos) diferentes rectángulos.

En primer lugar, se les plantea la siguiente instrucción:

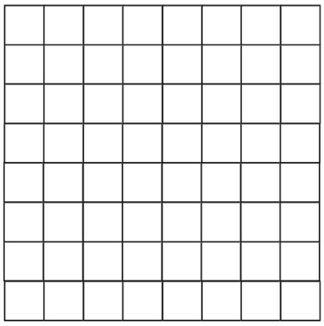
- Elige cinco pentominós y construye un cuadrado con ellos.



Después de realizar este ejercicio, se seguirá trabajando con los cuadrados, pero se hará una pequeña variación. Se introducirá un tetraminó dividido en cuatro poliminós o monominós. Por ejemplo:

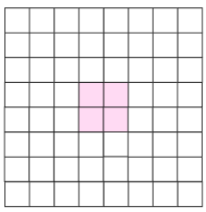
</td></tr>
</table>

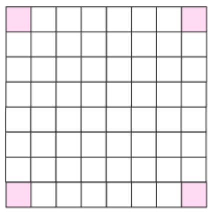
Y, junto a los doce pentominós, los alumnos deberán lograr construir un cuadrado de tamaño superior al primero. Para facilitar la resolución de la tarea, se les entregará la siguiente plantilla:



Algunas cuestiones que plantearles: *¿Con los doce pentominós es posible completar el siguiente rompecabezas? ¿Por qué?*

Cabe destacar que, a los alumnos que presenten alguna dificultad de aprendizaje o en el desarrollo de la actividad, se le entregará una plantilla donde estén colocados los cuatro cuadrados.





Y, por otro lado, se propone al alumnado la resolución de diferentes rompecabezas cuya forma es un rectángulo. Los doce pentominós suman en total 60 cuadrados, que ensamblándose entre sí pueden formar diferentes figuras. Así pues, primero, se les pide que conformen un rectángulo de 6x10 con las doce piezas, sin dejar ningún espacio entre ellas, es decir, que un lado del rectángulo tenga 6 cuadrados y el otro lado 10.

De la misma manera, que compongan un rectángulo de 5x12 con los doce pentominós.

Después, con el uso de los cinco tetraminós, deben obtener un rectángulo de 5x8. Los cinco tetraminós suman veinte cuadrados, por lo que para resolver la situación con éxito serán necesarios dos tetraminós de cada tipo.

Por último, se les pide una tarea de mayor complejidad. Deben construir un rectángulo de 4x6 a partir de un monominó, un dominó, tres triminós (dos de ellos iguales) y tres tetraminós diferentes entre sí.

	Este tipo de actividades puede generar un ambiente en el aula donde se propicie la discusión y la interacción entre los educandos. Además, no solo se trabaja la formación de rectángulos, sino que también promueve el aprendizaje de conceptos como área y perímetro, a partir de los cuales se centran otras sesiones.
	En el *Anexo 4* se muestran posibles soluciones a los rompecabezas planteados.

Tabla 7. Desarrollo de la sesión 3 de la propuesta didáctica.

<table>
<tr><th>SESIÓN</th><th>4. CONSTRUCCIÓN DEL CUBO SOMA CON POLICUBOS</th></tr>
<tr><td>Objetivos</td><td>Conocer la diferencia entre los poliminós y los policubos, especialmente, en el momento de construcción y representación sobre el papel.
Ser capaz de construir las figuras propuestas.
Representar en papel trama isométrica los policubos.
Hallar las piezas que permite la elaboración del Cubo Soma, y tratar de iniciarse en su construcción.</td></tr>
<tr><td>Materiales</td><td>Policubos, lápiz, goma, trama isométrica.</td></tr>
<tr><td>Saberes</td><td>C.1.1. – C.1.2. – C.3.1. – F.1.1. – F.2.1. – F.2.2.
(Orden ECD/1112/2022, pp. 26122-16128).</td></tr>
<tr><td>Desarrollo</td><td>En las sesiones anteriores se ha trabajado manipulando los policubos, pero en términos de poliminós (en el plano y en una sola dimensión). En esta, se pretende que el alumnado trabaje con el concepto de policubos únicamente.

Como introducción, se explicaría el concepto de policubo, insistiendo en la diferencia:
Los poliminós son agrupaciones de varios cuadrados unidos por sus lados.
Los policubos son agrupaciones de un determinado número de cubos unidos por una cara.
Los poliminós se clasifican en monominós, dominós, triminós… Sucede del mismo modo con los policubos. Se pueden encontrar: monocubos, bicubos, tricubos, etc.

La primera actividad que se plantea es cuestionarles sobre: ¿Qué será un bicubo? ¿Y un monocubo? ¿Cómo se llamará el policubo formado por cuatro cubos? ¿Y el formado por 5?

Después de sus respuestas, se mostrará cómo es un monocubo y un bicubo, aunque ya estén familiarizados con ellos (debido a que ellos los trataban como poliminós). Podrán observar que solo hay un monocubo y un bicubo (de una o dos alturas, dependiendo de cómo se interprete).

La segunda situación de aprendizaje consistirá en que a partir de la manipulación de policubos, descubran cuántos tricubos pueden formar. Es importante que aprecien la diferencia entre ambos conceptos, debido a que, aunque haya sólo cinco tetraminós únicos, puede que haya más tetracubos. Posteriormente, deberán representaros gráficamente en la trama isométrica.</td></tr>
</table>

	Una vez que comprendan cuáles son los tricubos, deberán descubrir a partir de ellos los ocho tetracubos diferentes que existen, y representarlos. Finalmente, se propone un reto para el alumnado: “La construcción del Cubo Soma”. El Cubo Soma es un cubo de dimensiones 3x3x3 que se forma con siete piezas o policubos (1 tricubo y 6 tetracubos). Así pues, los alumnos deberán descubrir qué piezas utilizar y construirlo. En el *Anexo 5*, se puede visualizar los tricubos y tetracubos posibles, así como las piezas que se necesitan para elaborar el Cubo Soma.

Tabla 8. Desarrollo de la sesión 4 de la propuesta didáctica.

SESIÓN	5. INTRODUCCIÓN AL JUEGO “BATALLA DE GENIOS”
Objetivos	• Desarrollar la percepción y la orientación espacial. • Reflejar los conocimientos adquiridos previamente en las tareas propuestas. • Localizar e interpretar puntos cardinales en un plano.
Materiales	Ficha para los alumnos (*Anexo 6*), policubos, lápiz y goma.
Saberes	C.2.1. – C.2.2. – C.3.1. – F.1.1. – F.2.1. – F.2.2. (Orden ECD/1112/2022, pp. 26122-16128).
	Con el objetivo de introducir en una sesión el juego sobre el que se basa el actual trabajo, se diseñan diferentes tareas, relacionadas también con situaciones anteriores, a partir de las cuales los alumnos deberán descubrir las piezas que componen el juego. En todas las actividades se presenta el tablero del juego, que ha sido diseñado por mí con la aplicación Canva), compuesto por 36 casillas vacías, una columna a la izquierda con las letras A a la F, y una fila arriba con los números del 1 al 6. En ocasiones, aparecerán los bloqueadores (otro componente del juego) o algunas de las piezas. Primeramente, se presenta el tablero en blanco y se cuestiona a los educandos, agrupados en equipos, si pueden usar los doce pentominós existentes para completarlo. Deben tener en cuenta que cada pentominó se compone por cinco cubos, y que el tablero solo tiene 36 casillas. En segundo lugar, se plantea un tablero con los siete bloqueadores en siete de las casillas y con cuatro de las nueve piezas que componen el juego colocadas. El objetivo de la tarea es que hallen las otras cinco figuras (tetraminós) que conforman el juego, aunque es posible que haya alumnos que usen tetraminós repetidos. En el siguiente ejercicio, formado por un tablero con siete bloqueadores, se cuestiona a los alumnos: *¿Se podría resolver el siguiente tablero con figuras formadas por tres policubos? ¿Y de cuatro? ¿O debería modificarse algún elemento del tablero?* Ninguna de las dos posibilidades es posible, así que deberán justificar qué cambios harían en el tablero para que se pudiera completar. Una opción sería: *con figuras de tres cubos, habría que añadir dos bloqueadores para que fueran 27 casillas en blanco, y poder colocar 9 piezas (3x9=27); con figuras de cuatro, habría que añadir un bloqueador para que fueran 28 casillas vacías, y poder colocar 7 piezas (4x7=28).*

	La cuarta tarea se compone por un tablero con siete bloqueadores, y cuatro piezas. Es decir, similar a la segunda. En este caso, deben averiguar si es posible completarse con tres figuras formadas por cuatro cubos y por dos figuras formadas por tres cubos, además de decir cuáles son. Asimismo, deberán reflexionar si es la única solución o puede completarse de otras formas o con otras piezas diferentes a las que han creado. Finalmente, deberán descubrir si puede completarse con figuras de cuatro y cinco piezas, mediante algún ejemplo. La última actividad es la más próxima al juego. En específico, se plantea una partida en la que los alumnos deben colocar los bloqueadores siguiendo las coordinadas propuestas. Se propone el siguiente enunciado*: El juego "Batalla de Genios" está compuesto por siete bloqueadores (cilindros de madera) y varias figuras formadas por policubos. Hay pieza/s de un policubo, de dos policubos, de tres policubos y de cuatro policubos. ¿Con qué figuras de las creadas en sesiones anteriores se puede completar el tablero teniendo en cuenta que los siete bloqueadores están en siete de las casillas?* Durante estas situaciones, y, sobre todo, en la última, se espera que los alumnos hallen las piezas originales, para así, poder jugar con ellas en la próxima sesión. En el caso de que no sean halladas, se mostrará una imagen como las que pueden verse en el *Anexo 1*. Asimismo, en el *Anexo 6* puede observarse la ficha de trabajo que se dará a los educandos. Es imprescindible diseñar situaciones más cerrada como estas, a través de las cuales, los alumnos pueden caracterizar cuáles son las reglas del juego, además de explorar.

Tabla 9. Desarrollo de la sesión 5 de la propuesta didáctica.

<table>
<tr><th>SESIÓN</th><th>6. JUGAMOS A “BATALLA DE GENIOS”</th></tr>
<tr><td>Objetivos</td><td>Desarrollar la percepción y la orientación espacial.
Reflejar los conocimientos adquiridos previamente en las tareas propuestas.
Localizar e interpretar puntos cardinales en un plano.
Ser capaz de colocar las nueve piezas en el tablero.</td></tr>
<tr><td>Materiales</td><td>Tableros del juego, policubos, rotuladores.</td></tr>
<tr><td>Saberes</td><td>C.2.1. – C.2.2. – C.3.1. – F.1.1. – F.2.1. – F.2.2.
(Orden ECD/1112/2022, pp. 26122-16128).</td></tr>
<tr><td>Desarrollo</td><td> Como se ha dicho, el juego “Batalla de Genios” es el material central del presente trabajo. Mediante este recurso, se pretende que el alumnado de 6º de Educación Primaria adquiera conocimientos sobre el sentido espacial del área de Matemáticas, tales como la geometría o las coordenadas cartesianas. Por esta razón, una de las sesiones de mi propuesta va a basarse en la experimentación del juego. En primer lugar, se expone brevemente cómo se ha de jugar: cada jugador recibe un tablero o cuadrícula, 9 piezas de madera de diferentes colores y 7 bloqueadores. Uno de los jugadores tira los dados. Cada jugador coloca los bloqueadores en su cuadrícula en las posiciones que indican los dados. tras su colocación, los jugadores, al mismo tiempo, colocan las 9 piezas en el tablero, consiguiendo ser el más rápido. Existen miles de combinaciones posibles, unas más fáciles o difíciles que las otras. El jugador que antes consiga colocar las piezas en el tablero será el ganador de la partida. La implementación en el aula de este juego no se va a realizar tal y como se ha explicado, sino que se van a hacer una serie de adaptaciones: No van a jugar dos jugadores; jugará todo el grupo-clase, agrupados de cinco en cinco.
Cada equipo dispondrá de un tablero, nueve piezas formadas a partir de policubos y un rotulador, que servirá para dibujar los bloqueadores (ver Anexo 1).
Los dados desaparecen. Las diferentes partidas habrán sido preparadas previamente, por lo que las coordenadas serán dichas oralmente y por escrito por el profesor o maestro que dirija la sesión. Así pues, a lo largo de una sesión, se pretende que los alumnos resuelvan entre tres y cinco partidas diferentes. </td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Al comienzo de la sesión (5 minutos) se harán las agrupaciones y se explicarán las reglas del juego. Posteriormente, se crearán las fichas (halladas en la sesión anterior) y cada grupo cogerá un tablero y un rotulador. Los 35 minutos restantes estarán centrados en el juego, de manera que cada cinco minutos se realice una partida, y cada vez que se cambie de bloqueadores, se comunicarán los resultados. Además, tanto la tutora del aula como yo, iremos observando cómo ejecutan el juego.
Las partidas que se van a plantear son las siguientes:

Partida 1: los bloqueadores deben colocarse en A1, C3, C5, E3, E6, F5 y F6
Partida 2: los bloqueadores deben colocarse en A1, A5, B3, B4, C5, F1 y F4
Partida 3: los bloqueadores deben colocarse en A2, B6, C1, C6, E3, F1 y F5
Partida 4: los bloqueadores deben colocarse en A6, B3, B5, D3, E2, F2 y F5
Partida 5: los bloqueadores deben colocarse en A6, B3, B5, B6, D4, E5 y F3.

Es importante recordar que dentro de este grupo-clase, se encuentran varios alumnos con necesidades educativas, por lo que a ellos se les colocará en el mismo grupo de trabajo, y se les entregará un tablero con adaptaciones.
En el desarrollo de las partidas, se irán planteando preguntas como:

¿Es la única solución o podría encontrar otra?
¿Qué estrategias has utilizado?
¿Crees que hay piezas que deben colocarse antes que el resto?
¿Tu solución final ha sido modificada a lo largo de la partida, o desde el principio todas las piezas estaban en ese lugar?

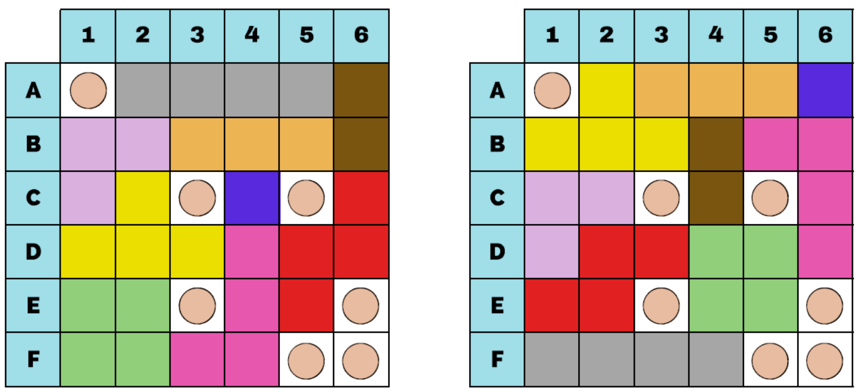
</td>
</tr>
<tr>
<td>POSIBLES SOLUCIONES</td>
<td>


Figura 1. Soluciones posibles en la Partida 1.
</td>
</tr>
</table>

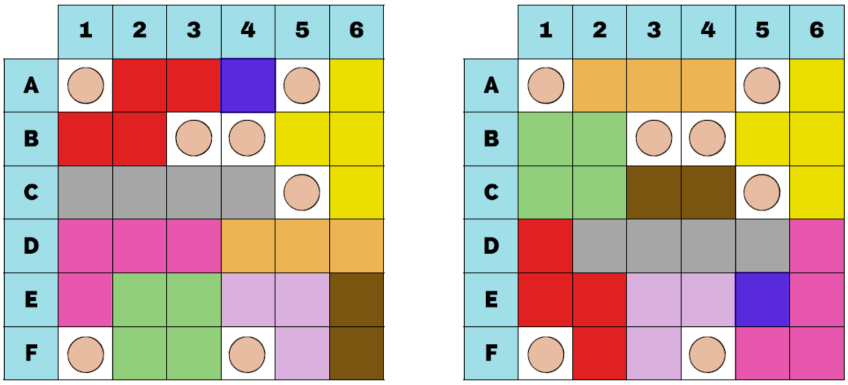


Figura 2. Soluciones posibles en la Partida 2.

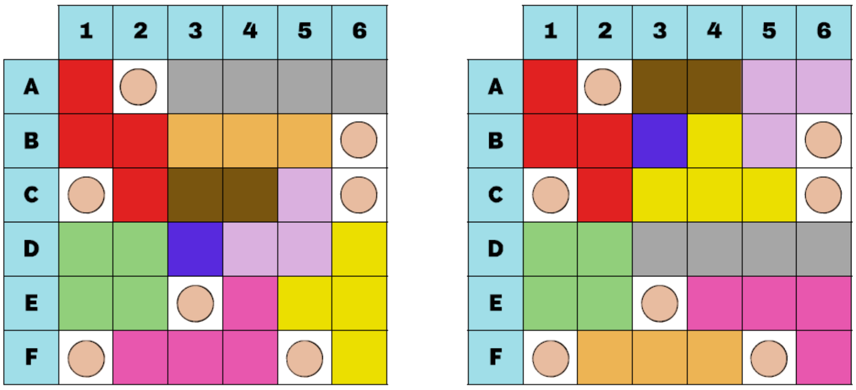


Figura 3. Soluciones posibles en la Partida 3.

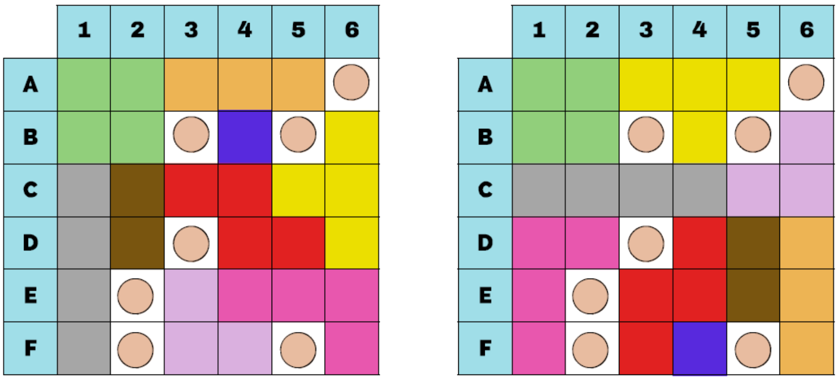


Figura 4. Soluciones posibles en la Partida 4.

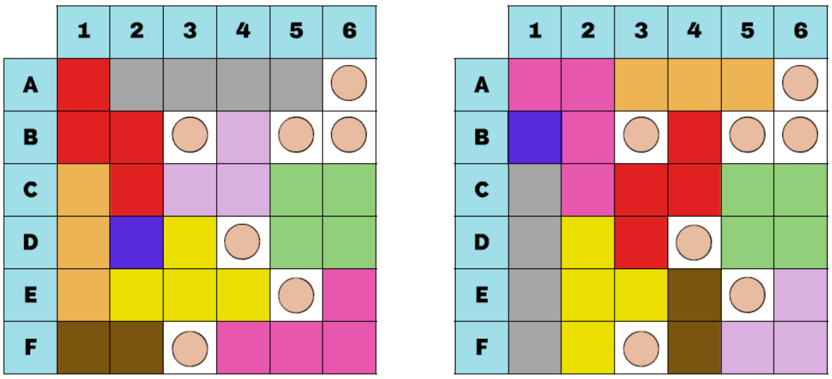


Figura 5. Soluciones posibles en la Partida 5.

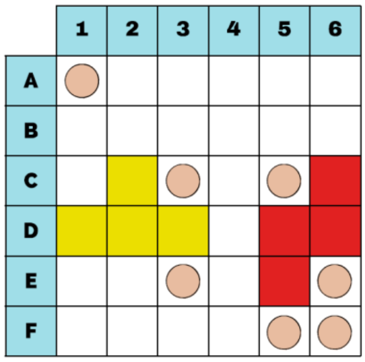
<table>
<tr>
<td>ADAPTACIÓN</td>
<td>


Figura 6. Adaptación de la Partida 1.

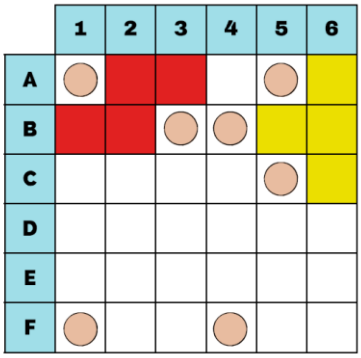


Figura 7. Adaptación de la Partida 2.

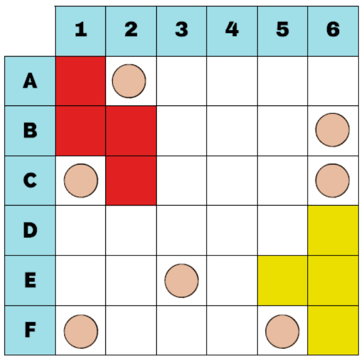


Figura 8. Adaptación en la Partida 3.
</td>
</tr>
</table>

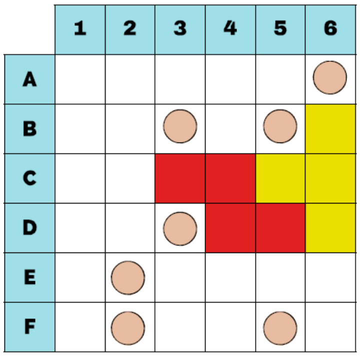
<table>
<tr><td></td><td>


Figura 9. Adaptación de la Partida 4.

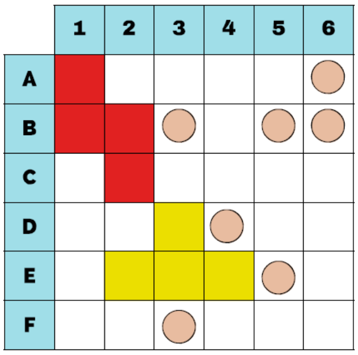


Figura 10. Adaptación de la Partida 5.
</td></tr>
</table>

Tabla 10. Desarrollo de la sesión 6 de la propuesta didáctica.

SESIÓN	7. VARIANTE DE JUEGO "BATALLA DE GENIOS"
Objetivos	• Desarrollar la lógica, la percepción y la orientación espacial. • Reflejar los conocimientos adquiridos previamente en las tareas propuestas. • Localizar e interpretar puntos cardinales en un plano. • Ser capaz de colocar las nueve piezas en el tablero.
Materiales	Tableros de la variante del juego, policubos, rotuladores.
Saberes	C.2.1. – C.2.2. – C.3.1. – F.1.1. – F.2.1. – F.2.2. (Orden ECD/1112/2022, pp. 26122-16128).
Desarrollo	De la misma manera que la sesión 6, los alumnos, por grupos jugarán al juego, aunque esta vez con algunas variantes. Las modificaciones se hallarán en el número y forma de las piezas, en el tablero y en el número de bloqueadores. • *Variante 1*: siete piezas y cuatro bloqueadores. Se elimina la columna del número 6 y la fila de la letra F. • *Variante 2*: seis piezas y cinco bloqueadores. Se elimina la columna del número 6 y la fila de la letra F. Para cada variante, se presentará a los alumnos las piezas que deben utilizar, y ellos deberán construirlas con policubos. Posteriormente, se les entregará el tablero y la posición de los bloqueadores, la cual deberán dibujar sobre el tablero. En el *Anexo 7*, pueden verse las diferentes variaciones.

Tabla 11. Desarrollo de la sesión 7 de la propuesta didáctica.

4.2.1. Elaboración de los materiales

El juego "*Batalla de Genios*" está compuesto por 9 piezas de madera de diferentes colores (véase *Anexo 1*). Para llevarlo al aula en las sesiones 5º, 6º y 7º, se crean nuevas piezas mediante el uso de policubos, las cuales serán descubiertas por los alumnos mediante las situaciones de aprendizaje previas al juego.

Antes de ponerlo práctica en el aula, se analiza cuántas piezas van a ser necesarias para su construcción, de manera que se verifique un correcto material para una correcta consecución:

- Un monocubo de color azul oscuro.
- Un bicubo de color marrón.
- Dos tricubos de color morado y naranja.
- Cinco tetracubos de color azul, gris, rojo, verde y amarillo.

Al ser 25 alumnos, y dividirlos en 5 grupos de cinco alumnos cada uno, se necesitan: cinco policubos de color azul oscuro, diez policubos de color marrón, quince policubos morados, quince policubos naranjas, veinte de color azul, veinte de color gris, veinte de color verde y veinte de color amarillo.

Como consecuencia de no disponer del material poliminós, se propone el uso de los policubos en todas las sesiones, interpretándolos como poliminós 3D.

4.3. Cuestionario para identificar componentes de la dimensión afectiva del alumno

Para estudiar el sentido *socioemocional* o *socioafectivo* del currículo de Matemáticas, se ha diseñado un cuestionario cuya finalidad es recoger las creencias y actitudes del grupo de alumnos con el cual se lleva a cabo la propuesta didáctica, hacia y sobre las Matemáticas (véase *Anexo 8*). Como señalo, el instrumento empleado para el análisis de estas creencias trata de un formulario compuesto por varias preguntas, que puede distribuirse en dos secciones:

- Sección 1: evaluación de información personal de los participantes, donde se aprecian preguntas como ¿Cuál es tu nombre? y ¿A qué curso o clase vas?
- Sección 2: cuestiones con dominio afectivo. En primer lugar, se plantean seis imágenes y se les cuestiona a los alumnos: ¿Dónde crees que están estudiando matemáticas? Posteriormente, deben justificar sus respuestas. A continuación, se presentan tres oraciones incompletas (Las clases de Matemáticas son...; En clase de

matemáticas hago…; Cuando hago tareas de matemáticas me siento…). Deben responder con al menos tres frases.

La primera parte está constituida por seis imágenes. La imagen B muestra una clase expositiva, en la que la docente explica el contenido, mientras que la imagen C pone en juego la discusión en el aula. Además, la imagen A propone no solo el trabajo en grupo sino también el uso de material u objetos. Por su parte, la imagen D muestra un proceso de aprendizaje más individual donde adquiere protagonismo el uso del libro de texto que aparece en la fotografía. El objetivo de estas cuatro imágenes es explorar las creencias que han construido los alumnos en torno a lo que es una clase de matemáticas.

Finalmente, las imágenes E y F muestran expresiones faciales distintas de dos niños. El objetivo es identificar si las matemáticas movilizan emociones agradables y/o desagradables a través de la proyección de la imagen mostrada. Es relevante poder indagar en cómo identificar estas emociones, puesto que la emoción sostenida en el tiempo constituye actitudes hacia las matemáticas.

4.4. Metodología

El enfoque metodológico que se sigue es la resolución de problemas apoyado en el uso de material manipulativo como vehículo para ayudar al alumno en el proceso de aprendizaje.

Por medio del Modelo de Van Hiele, uno de los métodos didácticos más utilizados en la enseñanza de la Geometría, es efectuada dicha iniciativa. Este modelo se constituye por cinco fases de aprendizaje, las cuales guían al docente en el diseño y organización de las situaciones de aprendizaje, de forma que los estudiantes pasen de un nivel a otro. Cuando se han llevado a cabo las cinco fases, el alumno debe haber alcanzado el nivel de razonamiento siguiente (Vargas y Gamboa, 2013, p.84). Es necesario destacar que, el currículo aporta información en el sentido espacial del área de Matemáticas sobre este modelo didáctico. Concretamente, el currículo señala: "*El modelo de Van Hiele (1986) es marco muy útil en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, tanto para el diseño de secuencias didácticas como para la gestión de las actividades en el aula*" (Orden EDC/1112/2022, pp.26083-26084).

A continuación, se muestra una tabla (Tabla 12) que recoge la relación de las fases con las sesiones y tareas propuestas:

Sesión	*Fase de Van Hiele*	
N.º 1	1) Información	Se trata de las primeras tareas propuestas, las cuales permiten conocer el punto de partida de los alumnos. Asimismo, los alumnos toman contacto con el nuevo tema objeto de estudio.
N.º 2	2) Orientación dirigida	Se guía a los alumnos mediante actividades y problemas (dados por el profesor o planteados por los mismos estudiantes), con el fin de que estos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos por formar.
N.º 3	2) Orientación dirigida 3) Explicitación	En esta sesión no se produce un aprendizaje de conocimientos nuevos, sino una revisión del trabajo llevado a cabo con anterioridad. El docente plantea actividades a los alumnos, que permitan la discusión y comentarios sobre la forma de resolverse los ejercicios y relaciones que se han observado o utilizado.
N.º 4	2) Orientación dirigida 4) Orientación libre	Durante esta sesión, se presentan actividades relacionadas con conceptos estudiados anteriormente, que permitirán a los educandos descubrir nuevas relaciones. Además, se propone un reto al alumnado. Por ello, deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver ese problema, que resulta más complejo que los anteriores.
N.º 5	4) Orientación libre	Se trata de la sesión en la que se introduce el juego, sin ser introducido en específico. Es decir, se propone a sus alumnos problemas que no sean una simple aplicación directa de un dato conocido, sino que son tareas más abiertas, preferiblemente con varias vías de resolución o con varias soluciones. El profesor debe limitar al máximo su ayuda a los estudiantes en la resolución de los problemas.
N.º 6 N.º 7	4) Orientación libre 5) Integración	Durante las dos últimas sesiones, se proponen diferentes partidas del juego "Batalla de Genios". En ellas, deberán aplicar los conocimientos adquiridos en otras situaciones nuevas. Estos problemas deben obligar a los estudiantes a combinar sus conocimientos. Son tareas que no implican la aparición de nuevos conocimientos, sino solo la organización de los ya adquiridos.

Tabla 12. Relación entre las fases del Modelo de Van Hiele y las sesiones de la propuesta didáctica (Vargas y Gamboa, 2013).

Además, la resolución de las tareas se realiza en pequeños grupos heterogéneos. De esta manera, se pone en valor la comunicación y la valoración de las diferentes estrategias, la movilización del lenguaje a nivel oral y la argumentación, por lo que se trabajan las competencias correspondientes al sentido socioafectivo que se han descrito en el apartado 4.1.

4.5. Temporalización

En esta sección, se muestra la Tabla 13, donde es explicada la temporalización de las sesiones que componen la propuesta didáctica, indicando para cada una de ellas el tiempo estimado en su realización.

Temporalización de las sesiones	
1ª Sesión	60 minutos
2ª Sesión	60 minutos
3ª Sesión	45 minutos
4ª Sesión	45 minutos
5ª Sesión	45 minutos
6ª Sesión	45 minutos
7ª Sesión	45 minutos

Tabla 13. Temporalización de la propuesta didáctica.

4.6. Evaluación de la propuesta didáctica. Criterios de evaluación

Durante toda la puesta en práctica de las actividades, se realizará una evaluación continua, de modo que se observará y tomará nota de la evolución de los alumnos: ritmo de aprendizaje, cuáles son los aspectos en los que se percibe que tienen mayores dificultades o cuáles son más sencillos. Es decir, mediante la observación directa y a través del análisis de las fichas de los estudiantes, se analizarán las dificultades de los alumnos en cada una de las sesiones implementadas en el aula, analizando si hay un progreso en el aprendizaje: ¿Las dificultades que tenían en la primera sesión permanecen en la tercera? Todo ello se registrará en un diario (ver *Anexo 9*), y posteriormente, se transcribirá a este documento (en el apartado de *Implementación*). Se tratará de una evaluación general del grupo-clase, sin detenerse en la individualidad del alumnado.

Para ello, se diseñan varios criterios de evaluación, los cuales son el referente para evaluar el desarrollo de competencias por parte de los educandos. En el *Anexo 10*, se elabora una tabla (Tabla 14) en la que se recoge la relación establecida entre las sesiones y las competencias específicas trabajadas en ellas. Durante la totalidad de la propuesta didáctica, son llevadas a cabo las cinco competencias específicas nombradas en el marco curricular, pero dependiendo de la tarea varía el criterio con el que se evalúan. Asimismo, se muestran los criterios de evaluación de las siete sesiones que componen la propuesta.

4.7. Recogida de información acerca de las sesiones

La recogida de información se ha efectuado mediante la observación directa de los alumnos a lo largo de las diferentes sesiones implementadas. Asimismo, se ha realizado un análisis sobre las respuestas dadas en las fichas de trabajo de cada uno de los educandos.

5. IMPLEMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

5.1. Contextualización del centro

La implementación se lleva a cabo en el Colegio Público de Educación Infantil y Primaria “Luis García Sáinz”, en el municipio de Fuentes de Ebro (Zaragoza). Se encuentra localizado en la carretera de Castellón, a 26 kilómetros de Zaragoza. La población del municipio asciende, aproximadamente a 4600 habitantes.

El centro educativo está ubicado en la Avenida Agustina de Aragón, s/n junto a la escuela de Infantil de la localidad y frente al IES Benjamín Jarnés, al cual están adscritos los alumnos que acaban la etapa de Educación Primaria.

Se compone por dos edificios, uno de ellos para Educación Infantil, conformado por cuatro aulas y una sala de psicomotricidad, y el edificio central, que acoge a los alumnos de 3º de Educación Infantil y a Educación Primaria. Así pues, el centro educativo se compone por seis aulas de Educación Infantil (dos unidades de 3º de Infantil), dos vías para 1º, 3º, 5º y 6º de Educación Primaria, y tres vías en 2º y 4º de Educación Primaria, con un total de 410 alumnos aproximadamente.

Por otro lado, se puede encontrar tutorías, biblioteca, sala de profesores, dirección, EOEIP, aula de música, aula de informática, aula de Desarrollo de Capacidades (DC), aula de pedagogía terapéutica, aula de audición y lenguaje, comedor y cocina, patios del recreo, un huerto, y aseos para profesorado y alumnado. En relación con los accesos al centro escolar, cada ciclo escolar entra por una puerta diferentes y para entrar a las instalaciones se dispone de escaleras y de rampa, lo que favorece la inclusión de todo el alumnado.

El alumnado procede de entornos socioculturales diversos, con niveles de vida variados. La gran mayoría son niños y niñas procedentes de la zona. Hay un alto porcentaje de familias de origen árabe y de Europa del este, así como familias procedentes de Sudamérica y de África.

5.2. Contextualización del aula

La implementación de la propuesta tiene lugar en el C.E.I.P Luis García Sáinz, en una de las dos vías de este curso de Educación Primaria, debido a que en este centro educativo hay dos aulas de 6º. En este caso, son 25 alumnos (13 chicas y 12 chicos). Se trata de un grupo bastante numeroso, considerando que es un colegio de entorno rural, y que en muchas de las aulas de cursos inferiores el alumnado es inferior a veinte.

Para distribuirlos de manera eficaz, se sienta a cada niño en función de sus necesidades. El conjunto de mesas está dispuesto mediante la formación de grupos, los cuales están compuestos en función de las cualidades y capacidades del alumnado. Los alumnos o las alumnas que son más dependientes están al lado de aquellos que necesitan mayor ayuda individualizada por parte de la maestra, de manera que cuando esta no puede atenderles, el otro educando puede cubrir parte de sus necesidades. Para entender la distribución del alumnado de manera más clara en la Figura 12.

En general, el alumnado de esta aula se caracteriza por ser inquieto, con autonomía y con un comportamiento que en ocasiones resulta inadecuado. Asimismo, son niños muy curiosos, participativos y también, sobre todo las chicas, algo habladores. Sin embargo, la mayoría de ellos presentan falta de atención, teniendo que repetir las explicaciones y las tareas por parte de la maestra o tutora.

Cabe destacar que en el aula hay varios alumnos ACNEAE, es decir, alumnos con Necesidad Específica de Apoyo Educativo, los cuales requieren una atención educativa diferente a la ordinaria. En primer lugar, una de las alumnas presenta Trastorno Específico del Lenguaje (TEL), que es un trastorno del lenguaje similar a las afasias, pero de manera congénita. Otra alumna presenta Altas Capacidades (AACC) y finalmente existe un alumno que presenta problemas de comprensión y expresión, lo que le dificulta seguir la clase como el resto de los niños. Por último, he de señalar que seis alumnos de esta aula están repitiendo curso o han repetido algún curso anterior en alguna ocasión, requiriendo alguno de ellos ACIS.

De los 25 alumnos, cinco de ellos son árabes y se encuentran perfectamente integrados en el grupo. Sus familias están muy implicadas en la educación de sus hijos.

5.3. Temporalización

En un principio, la experimentación se iba a ejecutar a principios del tercer trimestre, y se desarrollaría a lo largo de seis sesiones durante tres semanas, puesto que es el tiempo que proporciona la tutora. Justifica que no puede ofrecer más tiempo, ya que tiene que dar todos los contenidos programados. Seguidamente, se muestran las fechas que facilita (Tabla 15):

1ª Sesión	60 minutos	21 de marzo de 2023
2ª Sesión	60 minutos	24 de marzo de 2023
3ª Sesión	45 minutos	28 de marzo de 2023
4ª Sesión	45 minutos	31 de marzo de 2023
5ª Sesión	45 minutos	11 de abril de 2023
6ª Sesión	45 minutos	14 de abril de 2023

Tabla 15. Temporalización inicial.

Estas seis sesiones, iban a tener lugar los martes y los viernes, en las horas de Desarrollo de Capacidades (12:15 a 13:15h), y en la hora de Tutoría (13:15 a 14:00h). Puede observarse de manera más clara en el horario del aula, presentado en la Figura 11:


HORARIO ESCOLAR

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
9:00 a 10:00	Francés	Lengua	Mates	Inglés	Mates
10:00 a 11:00	Mates	Mates	EF	Francés	Música
11:00 a 11:45	Lengua	Ciencias	Valores	Ciencias	Ciencias
11:45a 12:15	R	E	CR	E	O
12:15 a 13:15	Inglés	DC	Informática	Lengua	Plástica
13:15 a 14:00	EF	EF	Inglés	Ciencias	Tutoría

Figura 11. Horario del grupo-clase con quien se implementan las sesiones.

Días antes de la consecución de la primera sesión, la tutora del aula me comunicó un cambio debido a que no tenía más tiempo para la impartición de los contenidos programados. No comprendía ese aspecto, dado que las horas que me había planteado no eran para trabajar áreas del currículo.

Después de esa modificación, me propuso dos fechas para la implementación de dos sesiones, pasando a realizarse los días 21 y 31 de marzo, y añadió que después de Semana Santa podría realizar otra sesión (13 de abril). Esto significa que de seis sesiones que iba a poner en práctica inicialmente, pasaba a poder implementar únicamente tres (véase Tabla 16).

Además, en las horas de DC, la maestra encargada de esa aula saca a niños de 6º para preparar el teatro de final de curso, por lo que no iba a saber hasta el momento de la sesión con cuántos niños me iba a encontrar en el aula. A pesar de preguntarles por ello, no me daban una respuesta clara.

Por otro lado, para el desarrollo de las sesiones, se plantea que los alumnos queden agrupados de cinco en cinco, ya que el número total en el aula es 25 educandos. Es cierto que, dependiendo de las circunstancias de cada sesión, esta agrupación puede verse modificada.

Temporalización final		
1ª Sesión	60 minutos	21 de marzo de 2023
2ª Sesión	60 minutos	31 de marzo de 2023
5ª Sesión	45 minutos	13 de abril de 2023

Tabla 16. Temporalización final.

Asimismo, se destaca que, hasta el momento, en el aula, los alumnos no han tratado los temas relacionados con los saberes básicos a trabajar, aunque es cierto que han tenido experiencias previas en otros cursos. Por otro parte, en relación con los juegos, nunca se han utilizado como herramienta didáctica. Tampoco suele utilizarse la dinámica de trabajo colaborativo con ellos, pese a que estén normalmente agrupados por equipos (consultar la Figura 12 para ver el plano).

5.4. Implementación de las sesiones

En el momento en el que han sido desarrolladas, los alumnos no han visto ningún contenido relacionado con movimientos (giros o traslaciones), ni tampoco con simetrías. No es un aspecto negativo, dado que no se busca que el alumno nombre dichos conceptos, pero sí que se acerque a ellos con su vocabulario.

Para trabajar dentro del aula, se han realizado modificaciones respecto a las agrupaciones habituales del grupo-clase (Figura 12), construyendo cinco grupos de cinco alumnos cada uno. Se ha tenido en cuenta el nivel académico de cada alumno, con el fin de conformar grupos más heterogéneos. Asimismo, se han tenido en cuenta las necesidades educativas del aula, situando a los alumnos con NEAE en diferentes equipos. De esta forma, reciben ayuda del resto de sus compañeros.

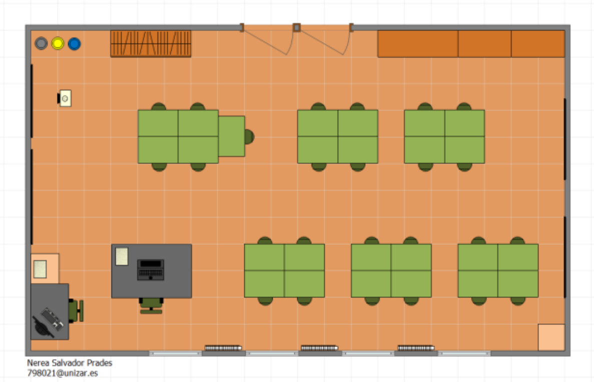


Figura 12. Agrupaciones habituales de 6ºA.

5.4.1. Implementación de la primera sesión

La sesión tiene lugar el 21 de marzo de 2023, en el horario de 12:15 a 13:15 horas, durante el momento de Desarrollo de Capacidades. Al coincidir con ese momento, seis de los alumnos del aula no pudieron estar presentes en el desarrollo de esta tarea. Cabe destacar que la tutora del grupo-clase estaba avisada de la puesta en práctica de estas actividades con suficiente tiempo, además de que fue consensuada y propuesta con ella. Aun así, han comprendido la situación y han reducido el número de alumnos que sacar del aula, para que yo pudiera llevar a cabo la sesión con el mayor número de educandos.

Las agrupaciones realizadas fueron tres grupos de cinco alumnos cada uno, y un grupo de cuatro alumnos. Para perder el mínimo tiempo posible, coloqué las mesas adecuadamente con anterioridad a la sesión. En total, se formaban cuatro grupos.

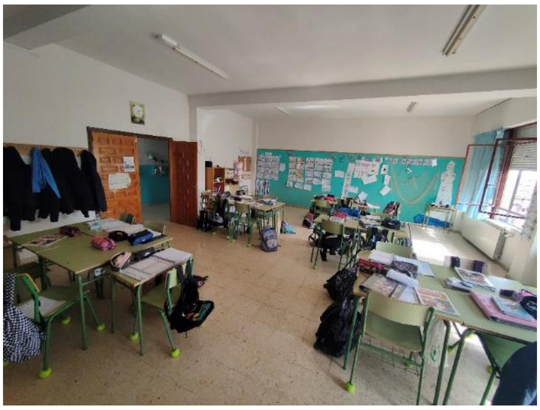


Figura 13. Agrupaciones para el desarrollo de la primera sesión.

Los alumnos se sentaron en sus mesas usuales, y fue entonces, cuando comencé a explicar qué íbamos a hacer durante esa hora. En primer lugar, los dividí en los grupos que había hecho calmadamente momentos antes (se observan en la Figura 13); después, repartí las fichas individuales a cada uno, y posteriormente, les presenté el material que íbamos a utilizar: los policubos. Cabe destacar, que no sabían la existencia de ese material, ni tampoco su nombre y uso. Al querer promover la experimentación, intenté explicar lo mínimo posible sobre ellos.

Decidí dejarles leer de forma individual la hoja, y en el caso de que surgieran dudas, levantasen la mano y me preguntasen. A continuación, se expone un análisis de cada uno de los ejercicios propuestos en la sesión:

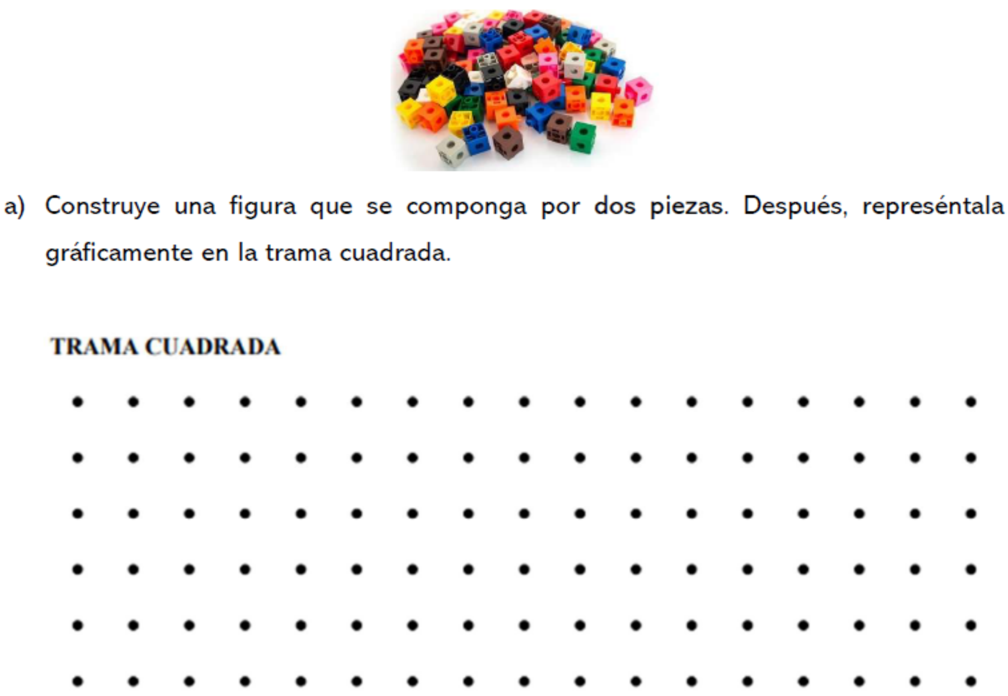


Figura 14. Primera tarea de la primera sesión.

El primer ejercicio consistía en construir una figura con dos piezas o policubos (Figura 14). No se buscaba una respuesta única; aunque solo exista un bicubo único, se puede colocar en diferentes posiciones. Las respuestas más repetidas se observan en la Figura 15:

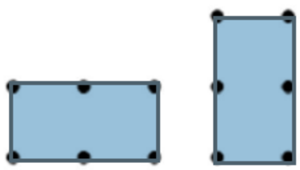


Figura 15. Respuestas más repetidas por los alumnos.

A través de ellas, se puede observar que solo es posible construir una figura con dos piezas o policubos, pero que dependiendo de la posición o dirección en la que se construya, va a parecer una figura distinta.

b) A continuación, se muestras dos figuras compuestas por dos piezas o policubos. La primera es de color amarillo y la segunda rosa. Constrúyelas y responde a la pregunta. ¿Son iguales o diferentes?

Justifica tu respuesta de manera individual.

Después, comenta las respuestas con tu grupo y escribe el resultado común en la tarjeta.

Figura 16. Segunda tarea de la primera sesión.

En el segundo ejercicio planteado (Figura 16), se muestran dos figuras compuestas por dos policubos cada una de ellas. Como se aprecia, cada una está construida con un color, lo que supone un aspecto confuso para los alumnos, debido a que ha condicionado algunas de las respuestas. Se les pregunta que, si ambas figuras son iguales o diferentes, ya que este aspecto es el punto de partida de la práctica, donde se van a trabajar indirectamente los contenidos de movimientos y giros, y simetría (especular). Algunas de las respuestas son:

- “Son iguales porque están puestas de la misma manera y son las mismas piezas”.
- “Son iguales por forma, pero tienen diferente color”.
- “Son distintas por el color”.
- “Son iguales, pero cambia el color”.
- “Son iguales porque cuadran”.
- “Son iguales, pero cambia el color y posición”.
- “Yo creo que son iguales en la forma, pero diferentes en el color y en la posición”.

La mayoría de las respuestas no están argumentadas, y durante la consecución de la actividad, se ha apreciado que algunos de los componentes de los grupos entendían la igualdad de las figuras porque al “girarlas” o “moverlas” resultaban ser la misma (a pesar de tener diferente color), pero el resto de los alumnos continuaban sin encontrarle el sentido. En la gran parte de las respuestas, se observa que basan su respuesta en la cantidad de piezas que conforman las dos figuras, y no tanto en los movimientos que se pueden hacer sobre ellas. Como conclusión, el grupo-clase opina que las dos figuras son iguales en cuanto a forma.

Cabe destacar que, la tarjeta donde tenían que escribir la respuesta común no fue utilizada por la mayoría de los alumnos, ya que muchas veces no leen lo pide el enunciado. Llegaron a un consenso y lo escribieron debajo del enunciado.

c) Construye con los policubos todas las figuras diferentes que puedan construirse con tres cubos. Cada vez que halléis una, debéis representarla gráficamente en la trama cuadrada.

Figura 17. Tercer enunciado de la primera sesión.

En la tercera consigna (Figura 17), se pide al alumnado que construya todas las figuras diferentes con tres policubos, y posteriormente, que las representen en la trama cuadrada. La respuesta ideal sería que, mediante lo extraído de la actividad anterior, dibujasen las dos únicas figuras existentes de tres piezas, que se presentan en la Figura 18:

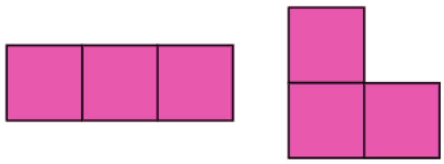


Figura 18. Dos únicas figuras compuestas por tres piezas.

Pero, lo que sucedió realmente es que, ningún alumno dibujó solamente dos figuras, sino que representaron gráficamente ambas figuras, colocándolas de muchas maneras posibles, incluso inclinadas. Seguidamente, en la Figura 19, muestro algún ejemplo de las respuestas de los alumnos.

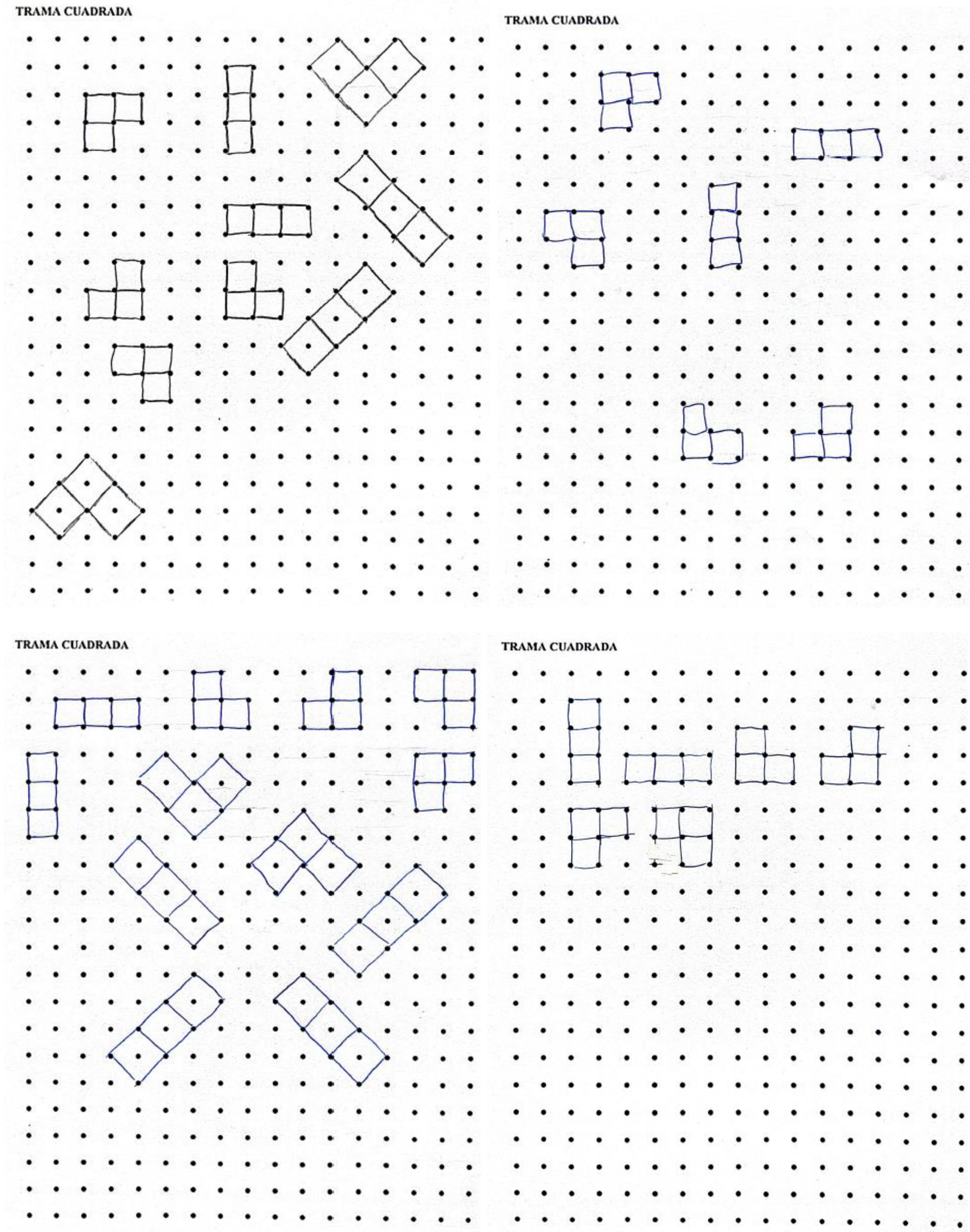
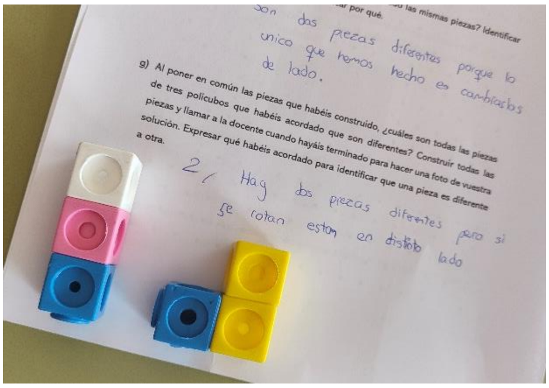


Figura 19. Algunas respuestas de los alumnos.

A través de las cuatro siguientes preguntas (d), e), f) y g)), se espera que el alumnado visualice que la respuesta anterior es incorrecta, y que la mayoría de las figuras dibujadas están repetidas, siendo la respuesta correcta las figuras formadas por tres cubos seguidos y tres cubos que formen una "L", independientemente de la posición. Algunas de las conclusiones a las que llegan los educandos son (Figura 20):



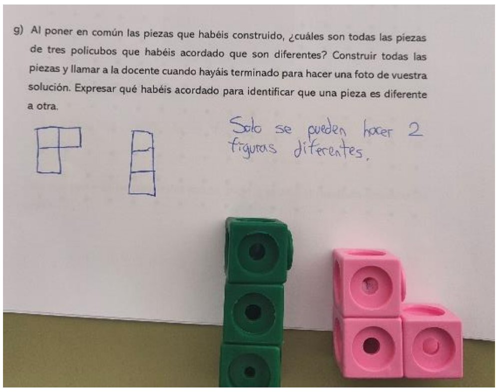


Figura 20. Algunas respuestas de la tarea g) de la primera sesión.

Para llegar a esa respuesta, discutieron y pusieron en común todas las figuras que cada uno había representado. En uno de los cuatro grupos, se comentó lo siguiente:

- *Alumna 1: Yo tengo nueve figuras, pero creo que hay algunas que son iguales, porque estas de aquí (refiriéndose a la figura formada por tres cubos seguidos) son iguales que esta (figura formada por tres cubos seguidos, de forma horizontal), pero están inclinados.*
- *Alumno 2: ¡Es verdad!*
- *Alumno 3: Claro, entonces solo hay dos piezas, porque el resto son la misma, pero con diferentes dirección y giros.*

En general, todos llegaban a la misma idea, pero usando diferentes términos. Unos decían que la dirección de la pieza había cambiado, pero que seguía siendo la misma; algunos que las piezas eran las mismas y que lo único que habían hecho era "cambiarlas de lado"; y otros, nombraban específicamente los términos de "rotación" o "giros". Ningún educando señaló el concepto de "simetría", a pesar de que en algunas representaciones sobre la trama se expusiera (por ejemplo, en el segundo ejemplo del enunciado c) aparecen dos tricubos en forma de "L" con simetría especular entre ellos).

Particularmente, hubo un grupo que llamó mi atención (véase Figura 21), debido a que su conclusión era que todas las figuras que habían representado eran iguales, es decir, afirmaban que como la figura formada por tres cubos seguidos se podía formar a partir del tricubo en forma de “L”, y, además, se cumplía la igualdad en función de los giros y de las rotaciones, concluían que “todas era iguales”, y que “solo había una igual”.

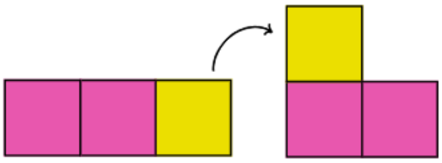
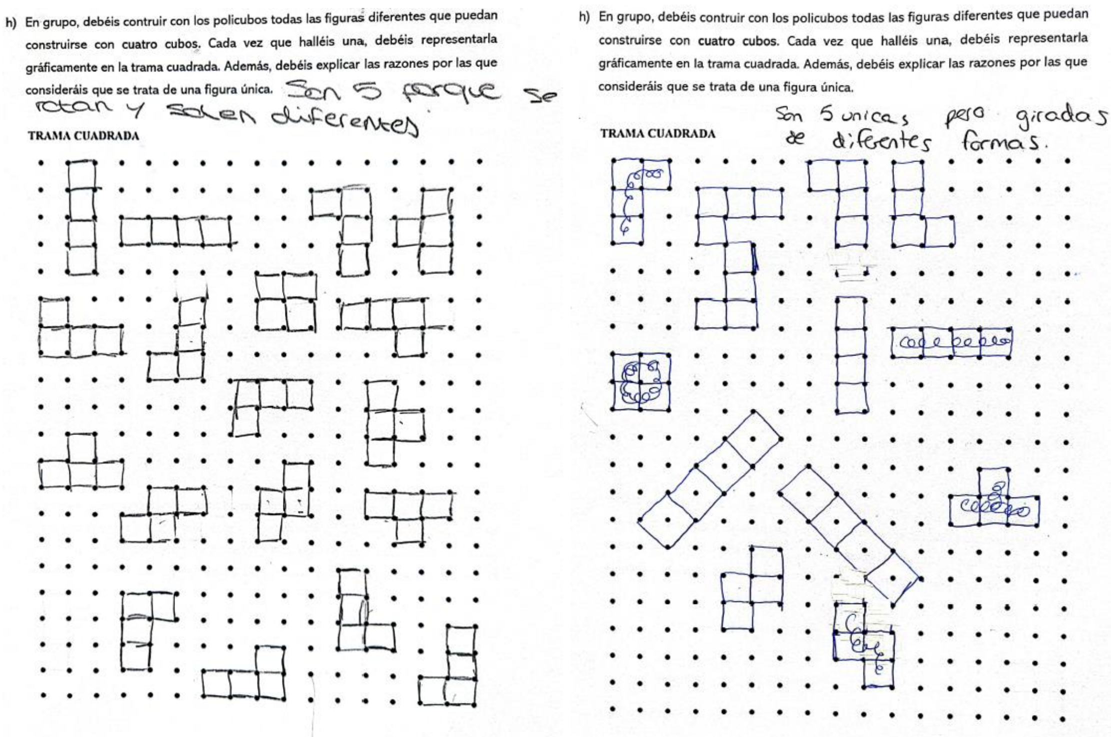


Figura 21. Representación que aporta un grupo en su explicación.

Después de estas tareas, mi sensación era satisfactoria, dado que pensaba que, si habían llegado a la idea que yo buscaba, el último ejercicio iba a salir adecuadamente.

Con efecto, en la última tarea donde se les pedía que “representasen las todas las figuras diferentes que puedan construirse con cuatro cubos”, tres de los cuatro grupos lograron resolverla correctamente a la primera, justificando que “solo había cinco figuras únicas o diferentes, pero se pueden hacer más si las cambias de dirección, las rotas o las giras”. Bien es cierto que, un grupo siguió dibujando la misma figura, pero en diferentes posiciones. Tras el debate final, se cercioraron de cuál era la respuesta correcta y lo anotaron. Si se observa la Figura 22, son mostrados varios ejemplos:



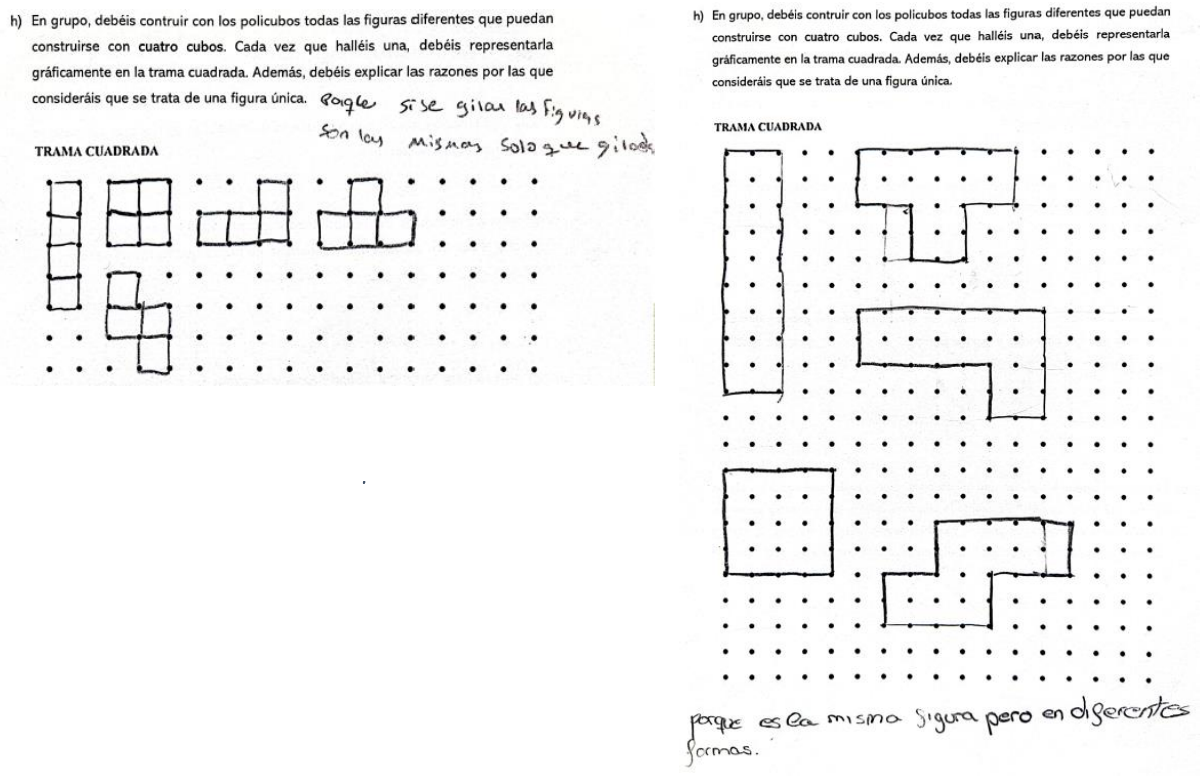


Figura 22. Algunas respuestas de los alumnos a la tarea h) de la primera sesión.

Los últimos cinco minutos de la sesión, se pudo realizar un pequeño debate, en la que grupo por grupo, iba comentando los aspectos que habían aprendido periódicamente. Todos se habían dado cuenta que, sin la primera actividad, no se habrían advertido de que dos figuras son iguales, aunque las presentes en diferentes direcciones o con distintos giros.

Con todo esto, puedo afirmar que el objetivo de la sesión ha sido logrado. Los alumnos han percibido mediante la manipulación la igualdad entre dos figuras aparentemente diferentes. Asimismo, me gratifica que todos los estudiantes identificaron las figuras esperadas, a pesar de no haberles dado en ningún momento una consigna o condición, como podría haber sido "unir cada cubo totalmente por los lados, y no parcialmente". Solo en un caso, un alumno me trajo un tetracubo de dos alturas, y se cuestionó: "¿Esto cómo lo represento en la trama?".

Por otro lado, pese a haber dado otras indicaciones para realizar determinadas tareas cuando alguno de los grupos tenía dudas, cuando por los diferentes grupos formados, volvían a preguntarme lo mismo o cuestiones similares. Esto refleja la gran inatención que presenta la mayor parte del tiempo el grupo-clase. Por ejemplo: expliqué varias veces que los puntos de la trama cuadrada sirven para dibujar cada uno de los cubos, por lo que deben unir cuatro puntos para representar cada policubo. Sorprendentemente, en las hojas de algún alumno, encontré otras formas distintas a como yo lo había explicado.

También debo comentar que los ritmos para la realización de las distintas tareas eran muy dispares en los diferentes grupos. Aun así, ha habido una correcta adecuación entre el tiempo utilizado y el disponible en la sesión.

Finalmente, en relación con las dificultades para la implementación de la sesión y las surgidas a lo largo de ella, he de decir: a simple vista se detecta que comprenden que dos piezas sean iguales entre sí, pero como no tienen el vocabulario suficiente para expresarse, y, además, la expresión es un aspecto que les cuesta en este grupo-clase, en ocasiones, resultado complicado comprenderlos. Por otro lado, al ser la primera vez que utilizaban este material didáctico, parte de la sesión estuvieron "jugando" y "enredando" con él.

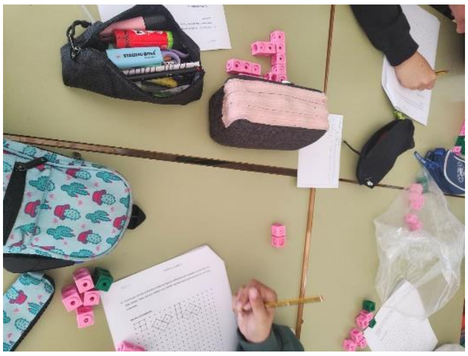


Figura 23. Alumnos trabajando durante la primera sesión.

5.4.2. Implementación de la segunda sesión

La segunda sesión se lleva a cabo el día 31 de marzo de 2023, durante la hora de Ciencias, y parte de la hora Plástica, dado que no hubo tiempo suficiente durante la primera materia. Es relevante comentar que uno de los alumnos faltó ese día al colegio, por lo que no pudo participar en la sesión, quedando finalmente cuatro grupos de cinco alumnos y un grupo de cuatro. Por otro lado, los alumnos que no estuvieron la sesión anterior se encontraban un poco perdidos en las actividades, siendo complicado acabar todas las tareas. Los resultados y sensaciones tras acabar la sesión no son satisfactorios. No solo fueron esos alumnos los que no acabaron las tareas planteadas, sino que muchos educandos no finalizaron la ficha.

El principal problema de esta situación fue la falta de atención por parte de los alumnos, quienes no escucharon muchas de las explicaciones que hice antes de comenzar con la hoja de trabajo.

Por mi parte, me sentí decepcionada debido a que expliqué todo muchas veces, y a pesar de ello, tuve que hacer muchas aclaraciones y repetir en varias ocasiones las mismas cosas.

Durante mi estancia en el colegio, los días anteriores a la sesión, fui observando las características de este grupo-clase. Como expuse en el contexto de aula, se trata de un grupo hablador y con falta de atención a los docentes, pero no me imaginaba que se iban a revolucionar tanto durante esta actividad. Imaginaba que les iba a gustar más, ya que es algo distinto a lo común, y desde mi punto de vista, supone una aprendizaje más rico y divertido. Algunas declaraciones de los alumnos durante el desarrollo de las actividades fueron: "*Esto es muy raro...*" "*No me gusta*" "*Otra vez matemáticas... al menos es sin libros*". Otra de las alumnas comentó: *"¿Hoy por qué hacemos dos clases de matemáticas*? (refiriéndose a la clase de primera hora y a esta sesión con los policubos) *Por lo menos esta es sin libros".*

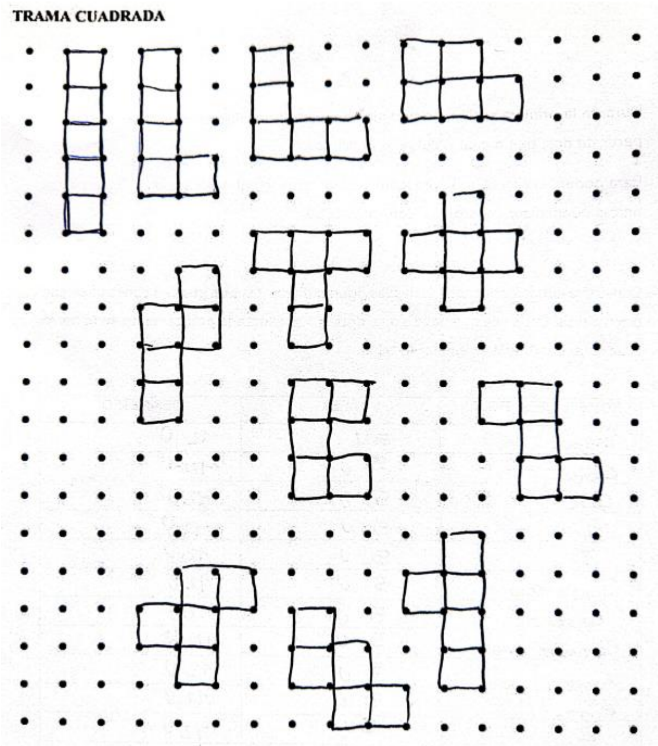
En el desarrollo de la sesión, y específicamente, en cada una de las tareas planteadas, sucedieron determinados problemas que muestro a continuación. Asimismo, para cada tarea se mostrará la respuesta que se esperaba y las respuestas obtenidas, de manera general.

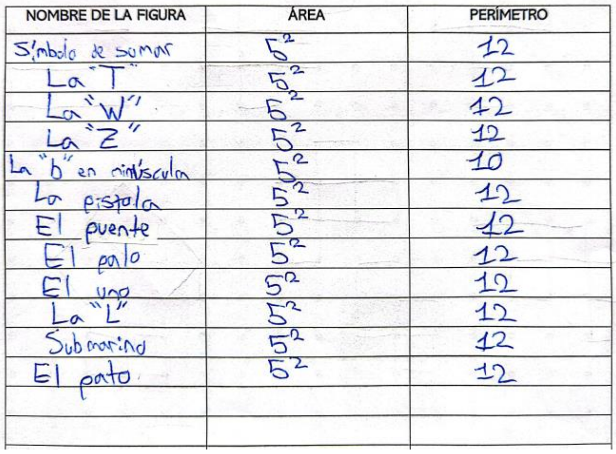
Al tratar durante la primera sesión de la propuesta, la construcción de policubos de dos a cuatro piezas, ambas incluidas, el primer ejercicio de esta sesión consistía en construir todas figuras únicas posibles con cinco cubos o policubos. Los alumnos debían tener en cuenta las consignas de la anterior sesión que tenían que considerar para crear una figura única, en las que se obtuvo la conclusión de que dos figuras eran iguales si al hacer un movimiento en ellas (giros) o simetrías, eran iguales, es decir, la misma figura. El enunciado completo de la tarea era: "*Construye con los policubos todas las figuras diferentes que puedan construirse con cinco cubos. Cada vez que halléis una, debéis representarla gráficamente en la trama cuadrada, nombrarla y rellenar la tabla*". Aunque el contenido de área y perímetro lo hubieran dado durante el primer trimestre y lo tuvieran olvidado, decidí no hacer ninguna aclaración sobre ello, porque quería que la actividad girase en torno a la experimentación.

Se esperaba que los alumnos representasen las 12 únicas figuras que pueden construirse con cinco policubos, nombrándolas con las letras del abecedario, dada su semejanza. Asimismo, que descubrieran el área de una de las doce figuras ($5u^2$), y supieran relacionarla con el resto (todas las figuras tienen cinco cubos, por lo que su área es igual). En relación al perímetro, que contasen los lados de la figura dibujada en la trama, ya que si cuentan los de los propios policubos no es correcto.

La mayoría de los alumnos lograron hallar los doce pentominós posibles, aunque algunos hallaron menos y más (Figura 24). Hubo un grupo que tan solo dibujó ocho. La explicación más lógica es la ociosidad que tienen en realizar tareas matemáticas. Otros grupos encontraron más de la cuenta, y eso se debía a que no habían considerado los giros y las simetrías, por lo que tenían figuras repetidas. Ninguno de los grupos de trabajo supo relacionar las figuras obtenidas con letras, lo que significó que cada uno había nombrado sus figuras a su gusto, relacionándolas con objetos. Algún alumno, sí que nombró alguna figura concreta con letras, como la "L" o la "T".

NOMBRE DE LA FIGURA	ÁREA	PERÍMETRO
Linea	5 U	12 U
Cesta	5 U	12 U
Cruz	5 U	12 U
L	5 U	12 U
T	5 U	12 U
Angulo recto	5 U	12 U
escaleras	5 U	12 U
Cruz deforme	5 U	12 U
Rayo	5 U	12 U
Porra	5 U	12 U
Z	5 U	12 U
Caracol	5 U	10 U





NOMBRE DE LA FIGURA	ÁREA	PERÍMETRO
Símbolo de sumar	5²	12
La "T"	5²	12
La "W"	5²	12
La "Z"	5²	12
La "b" en minúscula	5²	10
La pistola	5²	12
El puente	5²	12
El palo	5²	12
El uno	5²	12
La "L"	5²	12
Submarino	5²	12
El pato	5²	12

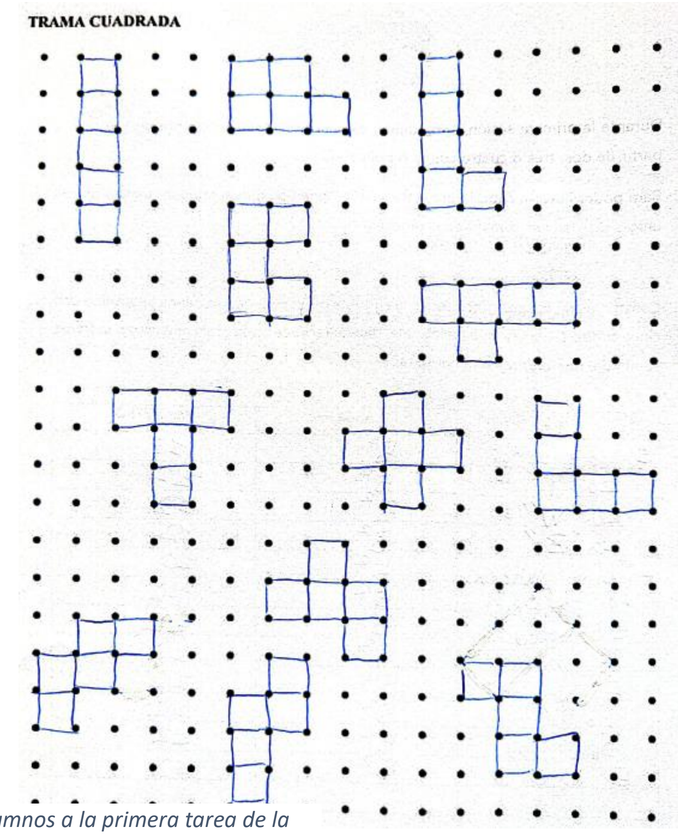


Figura 24. Respuestas de los alumnos a la primera tarea de la segunda sesión.

Fueron varias la veces en las que insistí en que anotasen al lado de cada representación gráfica de la figura sobre la trama, el nombre que le habían asignado, para que después yo pudiera saber cuál era cada figura. Solo un grupo me hizo caso, aunque esos alumnos, hallaron más pentominós de los que son considerados diferentes (véase Figura 25).

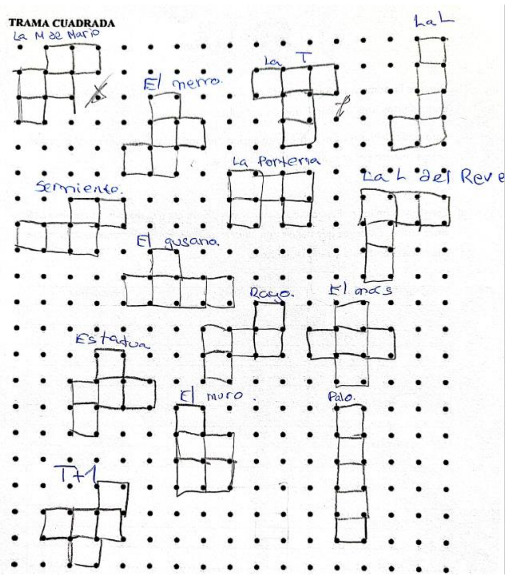


Figura 25. Respuesta de uno de los grupos a la primera cuestión.

Cabe destacar que, uno de los cinco grupos del aula, a la hora de construir los pentominós con los policubos, no tuvo en cuenta que solo se pueden representar los de una altura, creando por ello, alguno de dos alturas. Esto supuso que, a la hora de dibujarlos en la trama, los repitieron. Seguidamente, muestro una imagen (Figura 26) para poder observarlo:

Figura 26. Alumnos creando pentominós.

La segunda parte de la *tarea a)* consistía en calcular el área y el perímetro de los pentominós construidos. La única explicación que se les dio era que considerasen un lado del cuadrado (representación gráfica del cubo o policubo) de la trama como unidad de medida. A pesar de esta instrucción, había alumnos que contaban los lados del policubo y no de la representación gráfica de la figura; y otros que, medían los lados con una regla.

Conforme van realizando el cálculo de áreas y de perímetros, anoto los comentarios que compartir los integrantes de los grupos entre ellos:

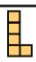
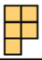
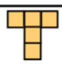
- "Si el área de esta figura es cinco, la del resto también".
- "Si lo pensáis, todas van a tener cinco, porque todas están formadas por cinco policubos".

En ningún momento hablan de unidades al cuadrado (u^2), sino que directamente nombran el número o la cifra. Es cierto que, algunos alumnos en la tabla sí que añaden una "*u*" en referencias a las unidades, pero la gran mayoría no lo hace. Me sorprende la respuesta de unos estudiantes, quienes señalan que el área de las figuras es 5^2. No comprenden el significado de "potencia elevada a dos o al cuadrado", porque en este caso, no se trata de multiplicar dos veces el cinco, sino que el área se representa en "unidades cuadradas".

Otros alumnos, al no prestar atención a las explicaciones, intentan encontrar el área de las figuras de cinco cubos, sin considerar que son cinco cuadrados iguales, por lo que pueden calcular el área de un cuadrado y multiplicarla por 5, sino que procuran buscar la "fórmula matemática" para conseguir resolver la tabla.

Por otra parte, les cuesta recordar cómo se calcula el perímetro de una figura. Entre ellos, se lo recuerdan unos a otros, aclarando que "*el perímetro es igual a la suma de los lados de una figura*". Algunos educandos reflexionan al igual que con el área: "*Si todos tienen la misma área, también tendrán el mismo perímetro*". En sus respuestas se observa ese desorden en el que se encuentran (confusión entre área y perímetro). Mediante el conteo, tenían que descubrir que todos tenían el mismo perímetro (12u), menos la figura con forma de "P".

En la Figura 27 se muestra la solución de la tabla propuesta.

PENTOMINÓ	REPRESENTACIÓN	ÁREA	PERÍMETRO
F		5 u2	12 u
I		5 u2	12 u
L		5 u2	12 u
P		5 u2	10 u
N		5 u2	12 u
T		5 u2	12 u

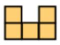
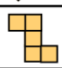
PENTOMINÓ	REPRESENTACIÓN	ÁREA	PERÍMETRO
U		5 u2	12 u
V		5 u2	12 u
W		5 u2	12 u
X		5 u2	12 u
Y		5 u2	12 u
Z		5 u2	12 u

Figura 27. Solución de la tarea.

En el segundo ejercicio planteado, se cuestiona a los alumnos sobre la tabla que han construido: *"¿Qué observáis? ¿Sabríais decir por qué?"*. Se espera que observen la igualdad en el área de todas las figuras formadas por cinco policubos (a las que denominaremos *pentominós*, sobre la trama cuadrada). La justificación se basa en que todas están formadas por cinco piezas, lo cual se pregunta en la *tarea c)*.

Por un lado, la *tarea b)* no ha sido respondida correctamente por todo el alumnado. Aunque la mayoría hayan deducido que todos tienen el mismo área porque todos están formados por cinco cubos, algunos de los educandos también afirman que todos tienen el mismo perímetro, ya que establecen una incorrecta relación entre ambos conceptos.

Algunas respuestas de los alumnos son:

- *"Tienen la misma área porque son cuadrados".*
- *"Todos tienen la misma área porque son de cinco piezas".*
- *"Las figuras que se pueden hacer con esas figuras".*
- *"Todas tienen el mismo perímetro menos una porque en esa justo tiene un cuadrado de 4 policubos".*
- *"Todas las áreas son 5 y todos los perímetros 12. Porque lo hemos comprobado".*

Llama mi atención la respuesta que da uno de los grupos (Figura 28), ya que exponen lo que muestro en la próxima imagen:

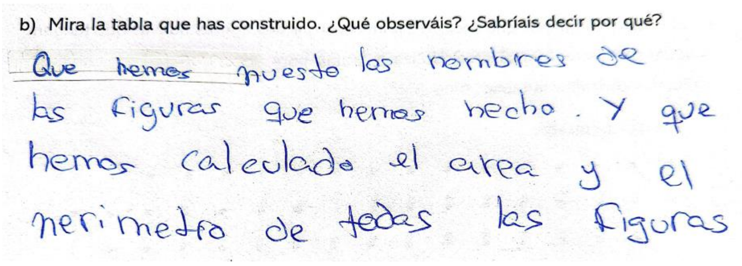


Figura 28. Respuesta de uno de los grupos a la tarea b) de la segunda sesión.

Se basan en hacer un mero resumen de lo que han hecho en el ejercicio anterior, en lugar de relacionar la igualdad del área en los pentominós.

Y, por el otro lado, en la *tarea c),* todos los alumnos coinciden en que las figuras están compuestas por cinco piezas. En ese momento, se comenta para toda el aula, que reciben el nombre de "***Pentominós***", con la finalidad de que comprendan los enunciados que hay a continuación.

En el *apartado d),* en relación con la sesión anterior, les pido a los alumnos que giren el pentominó "L" 90º, bien sea a la izquierda o a la derecha. Les interrogo: *"¿La figura cambia? ¿Qué características se mantienen iguales?*", refiriéndome con características al área y al perímetro del pentominó. En la Figura 29 muestro las dos posibles representaciones que pueden darme, y las respuestas de algunos de los niños del grupo-clase:

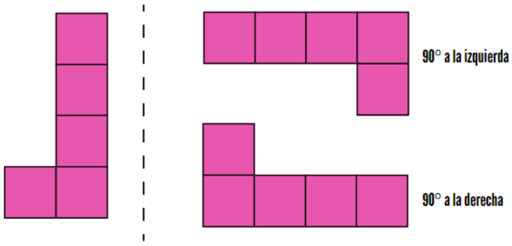
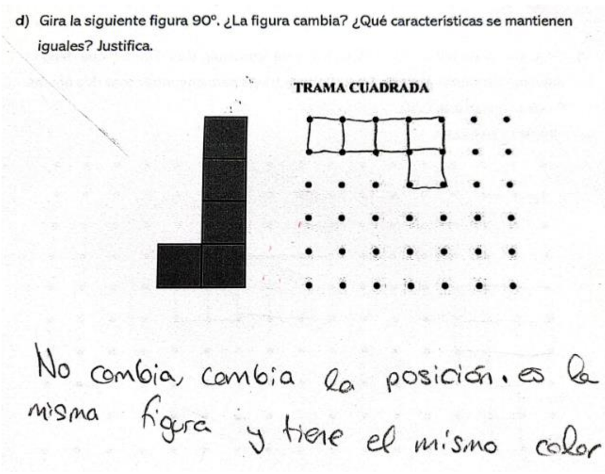


Figura 29. Respuestas posibles para la tarea d).

- "*Cambia la posición y el color de la figura*".
- "*No cambia, cambia la posición. Es la misma figura y tiene el mismo color*".
- "*La figura no cambia. Se mantienen iguales, menos por la orientación y la dirección*".
- "*La figura se mantiene igual porque no cambia su forma*".
- "Sólo cambia de lado. Son las mismas piezas, pero giradas".
- Otros alumnos afirman que la figura sí cambia, "*aunque las características se mantienen debido a que solo se ha rotado, o está hacia abajo*".

Aunque digan que cambia o que no cambia, todos concluyen que es la misma figura, pero cambiada de posición (Figura 30). Siguen sin mencionar los términos giros o movimientos, pero sí que nombran conceptos como "rotación" y "dirección". Ninguno nombra si el perímetro o el área son modificados, específicamente. Se puede deducir entonces, que entienden por características la forma y el color de la figura, y no los contenidos trabajados en la sesión.



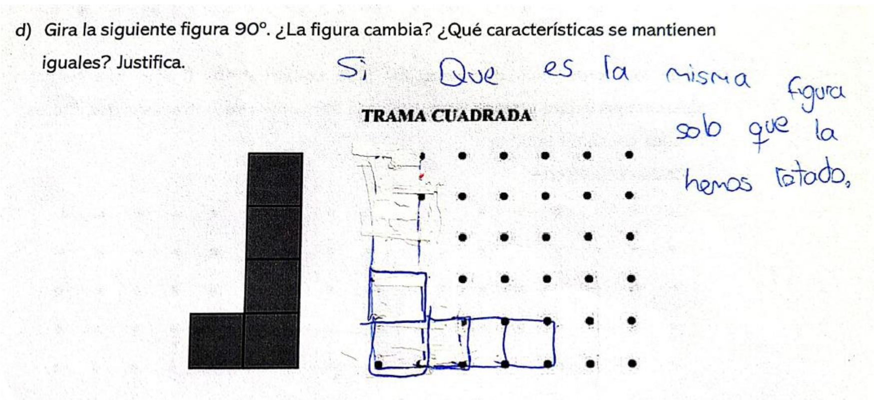


Figura 30. Algunas respuestas a la tarea d) de la segunda sesión.

En las últimas tres tareas [e), f) y g)], se les pide que elijan los pentominós necesarios para construir dos figuras nuevas que tengan: el mismo perímetro y área; diferente perímetro y misma área; y, mismo perímetro y diferente área. Durante su transcurso, suceden varias dificultades.

En primer lugar, a muchos de los alumnos no les da tiempo a llegar hasta dicha tarea, porque han estado “jugando” mientras que ejecutaban el resto. En segundo lugar, no comprenden la consigna “elige los pentominós”, por lo que realizan los ejercicios escogiendo figuras de cinco cubos sin llegar a crear una figura nueva (respuestas de la Figura 31).

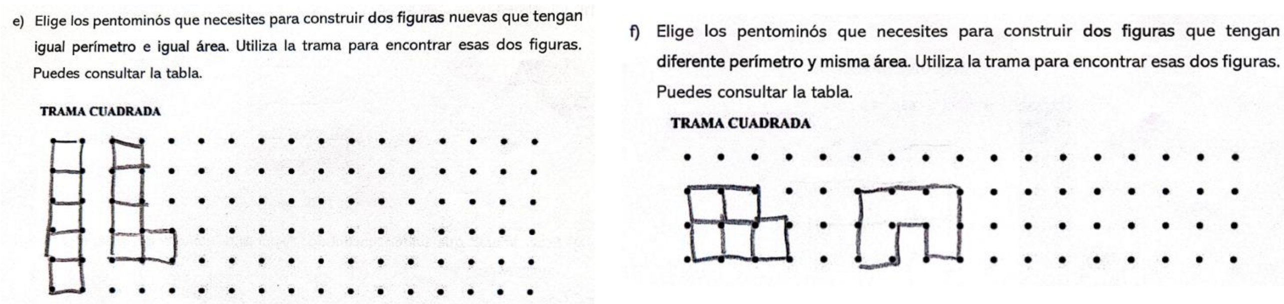


Figura 31. Alumnos que realizan la tarea con pentominós.

Otros educandos construyen nuevas figuras a partir de pentominós y de otras figuras con menor número de piezas (tetraminós), lo que supone no cumplir lo que se pide en el enunciado, donde se establece claramente “pentominós” (Figura 32).

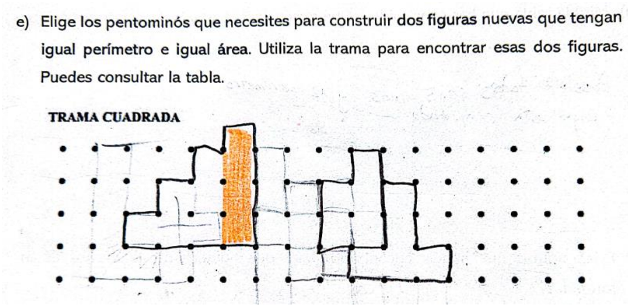


Figura 32. Alumnos que responden sin tener en cuenta las directrices del enunciado.

Varios, colocan las figuras aleatoriamente, sin contar los lados de la nueva pieza (Figura 33). Me cuestiono si este alumnado comprende verdaderamente el significado de perímetro, debido a que hay contextos donde sabe aplicarlo, y en otros no. Una posible explicación sería que los alumnos sumasen los perímetros obtenidos en la tabla, y no tuvieran en cuenta que, al unir esos pentominós para crear una nueva figura, algún lado desaparece.

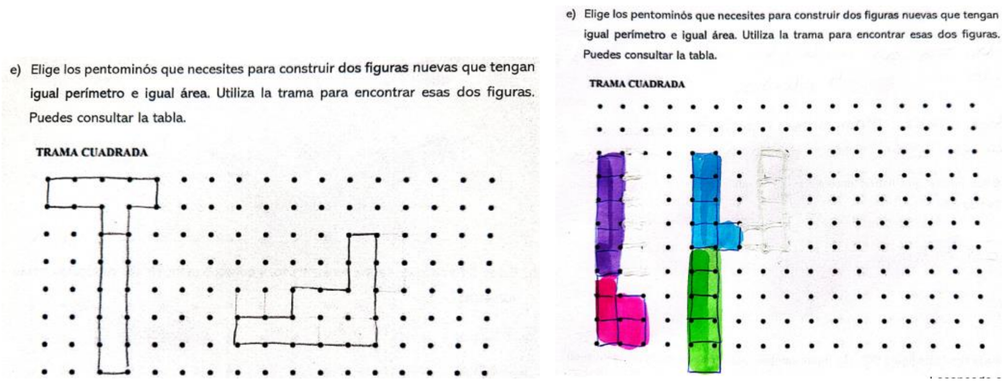


Figura 33. Alumnos que colocan poliminós de manera aleatoria.

Sin embargo, un grupo de educandos lleva a cabo la actividad adecuadamente. A continuación, se exhibe una serie de ejemplos en la Figura 34:

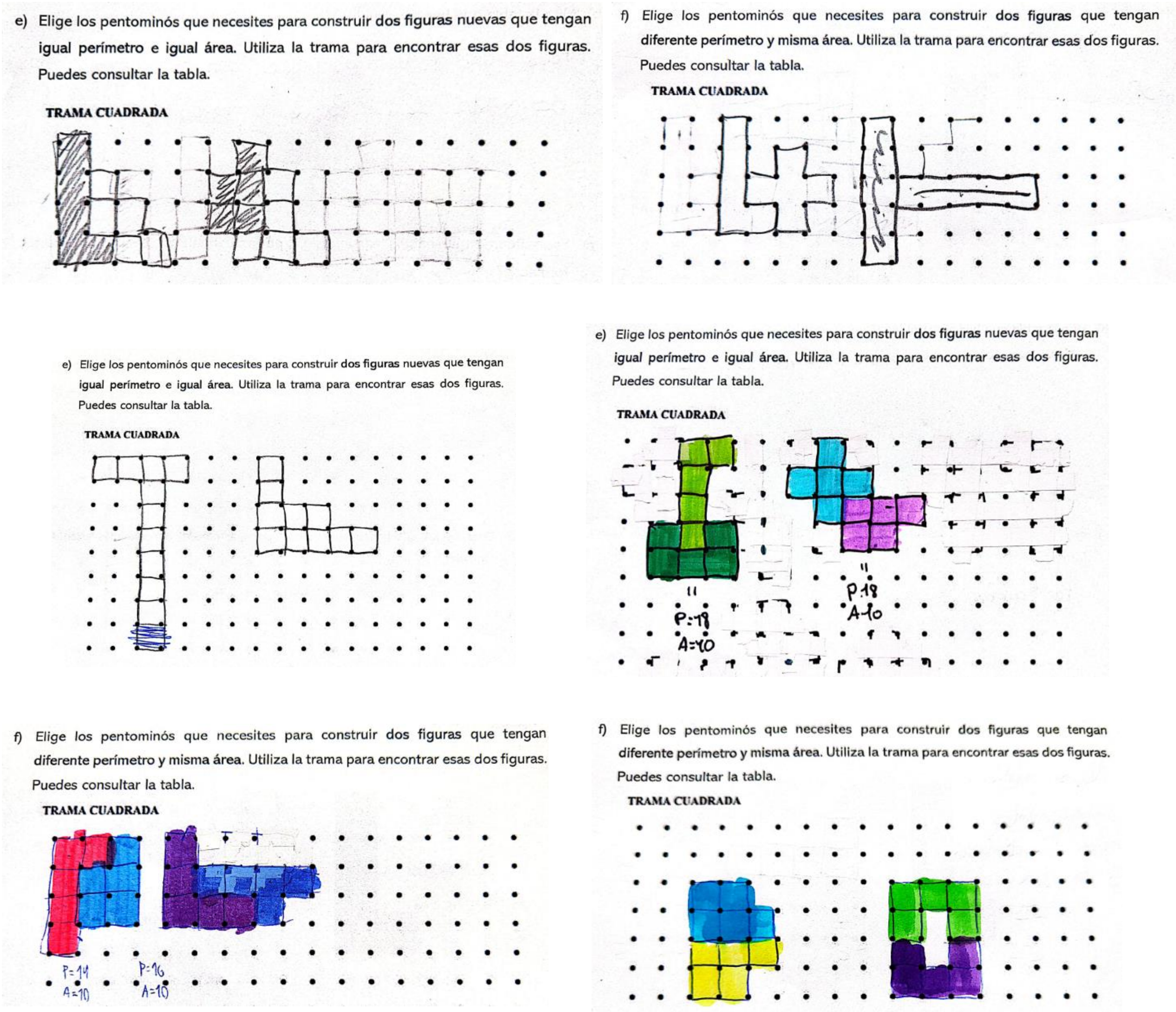


Figura 34. Respuestas de alumnos que resuelven correctamente la tarea.

Como se ha comentado, solo trece del total de alumnos realizaron la *tarea g).* Algunos de ellos, no valoran que, para crear dos figuras nuevas con diferente área a partir de pentominós, una debe contener más pentominós que la otra, dado que, si contienen el mismo número de pentominós, siempre tendrán la misma área. Se muestra un ejemplo en la Figura 35.

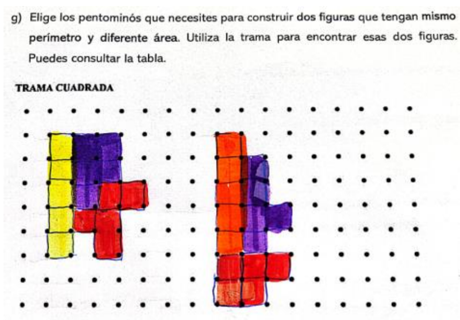


Figura 35. Respuesta de uno de los grupos a la tarea g) de la segunda sesión.

De los trece alumnos, solo un grupo formado por cuatro consigue realizar esta instrucción correctamente (véase Figura 36), añadiendo como justificación a su representación gráfica: "*Porque una figura está formada por dos y la otra por tres*". Esto permite deducir que los cuatro educandos comprenden que al tener todos los pentominós la misma área, necesitan que las figuras nuevas estén compuestas por diferente número de pentominós.

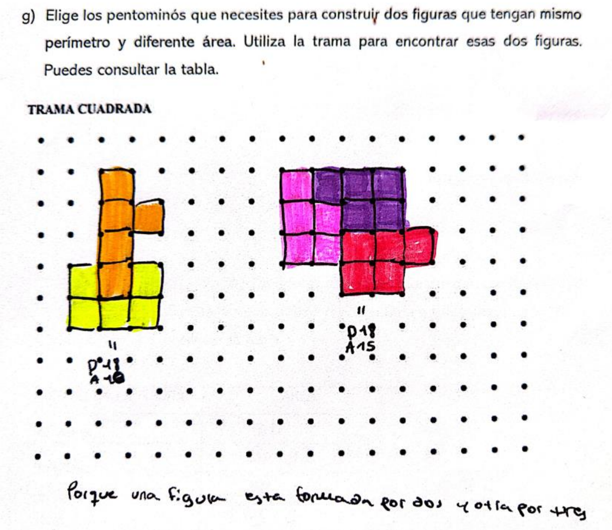


Figura 36. Respuesta del único grupo que resuelve con éxito la tarea g).

Tras este análisis, compruebo que el objetivo de la sesión no se ha alcanzado por completo. Muchos de los alumnos no tenían claros los contenidos que se estaban trabajando, y la mayor parte de la sesión no mostraban interés. En general, puedo decir que no me escucharon cuando daba las explicaciones pertinentes, lo que desencadenó en que cometieran errores superfluos que no hubieran sucedido si se me hubiera prestado atención. Además, al no estar habituados a este tipo de situaciones de aprendizaje, les cuesta razonar acerca de lo manipulativo.

Por otra parte, he de comentar que no saben trabajar en equipo. En muchas ocasiones, en las que me pasaba por los grupos de trabajo, cada integrante iba por un apartado distinto. Otras veces, observaba que mientras que dos componentes del equipo trabajaban entre ellos, el resto miraba.

Como desenlace, me han transmitido y he sentido que la actividad no les ha gustado. No veía que estuviesen motivados con ella. Esto es un aspecto que me consterna, porque como docente, intentas proponer actividades nuevas en el aula que sustituyan a lo tradicional; actividades más complejas y suculentas para su aprendizaje, y que te reciban de estas maneras, es melancólico.

5.4.3. Implementación de la tercera sesión (*5º sesión de la Propuesta*)

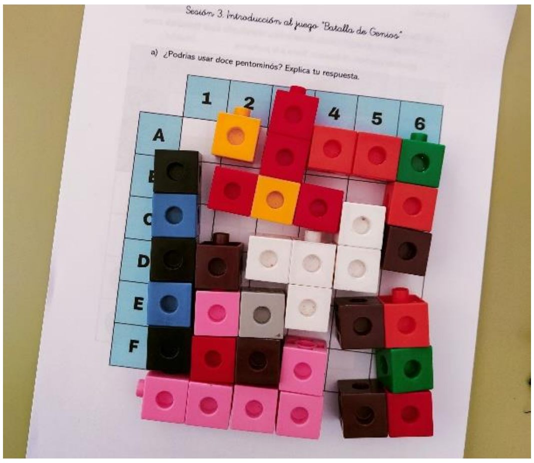
La tercera sesión se lleva a cabo el día 13 de abril de 2023, durante la segunda hora de Ciencias. Al igual que en la anterior, uno de los alumnos faltó ese día al colegio, por lo que no pudo participar en la sesión, quedando finalmente cuatro grupos de cinco alumnos y un grupo de cuatro.

En primer lugar, para el desarrollo de esta sesión, se decidió limitar el tiempo en las actividades, dado que en la anterior sesión la mayoría de los grupos no lograron acabar por motivos como despistarse. Los tiempos dados para las cinco actividades son: cinco minutos para las tres primeras tareas; y diez para las dos últimas. Destaco que, hubo alguna variación porque había equipos que tardaban más o menos. El tiempo total de la sesión fue de 45 minutos, aunque se vio reducido ya que se perdió tiempo en organizar los grupos.

A continuación, se va a ir detallando cómo fue el desarrollo de cada una de las tareas propuestas, anotando algunas de las respuestas más características.

La primera actividad mostraba el tablero del juego "Batalla de Genios", sin ningún bloqueador. Se les cuestionaba acerca de si podían completar dicho tablero con los doce pentominós únicos que descubrieron en la anterior sesión. Sin duda, ha sido la tarea que más dificultades ha conllevado. Solo un grupo ha llegado a la respuesta esperada: "*No puede completarse porque hay 36 huecos, y los doce pentominós forman 60 policubos*". El resto, han fundamentado su respuesta diciendo que "*no se puede porque los números 12 o 36 no son múltiplos de 5"*. Otros alumnos han interpretado que no tenían que poner los doce pentominós, por lo que han respondido: "*No se puede porque el total de cuadrados es 36, y con pentominós que son de cinco, no se pueden porque sobra un cuadrado (entendiendo que pueden poner siete pentominós)*". Considero que la redacción de la pregunta era confusa. Si se hubiera preguntado *"¿Podrías usar los doce pentominós existentes?",* quizá hubieran dado con la respuesta buscada.

Seguidamente, en la Figura 37, se exponen imágenes de dos de los grupos intentando colocar los pentominós:



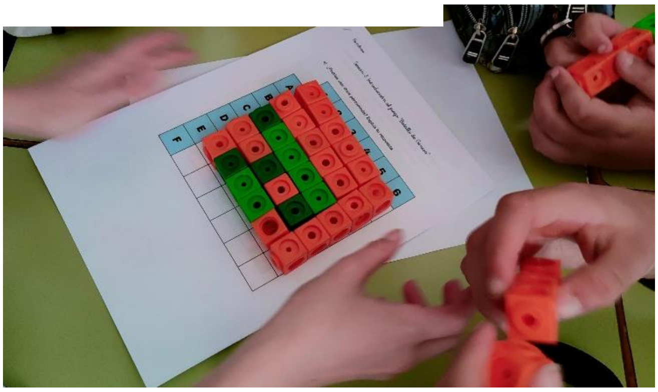
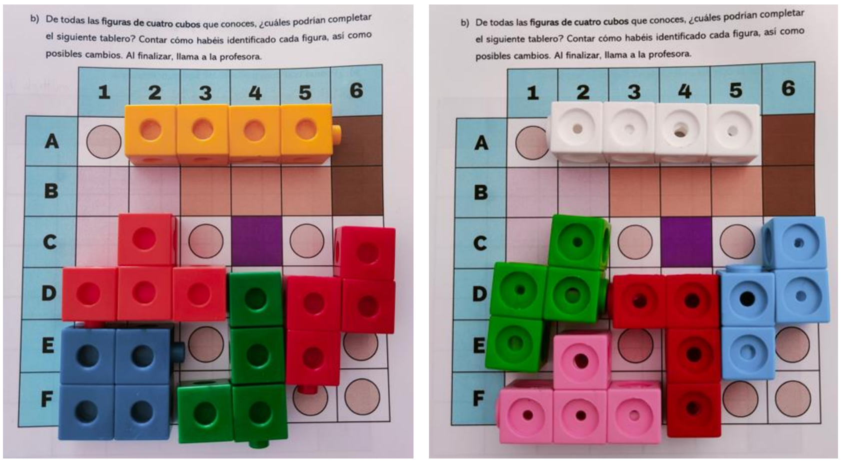


Figura 37. Respuesta de dos de los grupos a la primera tarea de la quinta sesión.

En el segundo enunciado se proponía que completasen un tablero del juego, el cual tenían los siete bloqueadores y tres de las piezas colocadas. La labor consistía en encontrar figuras formadas por cuatro cubos (tetraminós) que pudieran completar dicho tablero. Todos los grupos han logrado resolver la tarea con éxito, y como se esperaba, de diversas maneras. En general, ningún equipo comentaba cómo habían identificado la figura, debido a que todos se acordaban de construir los tetraminós o tetracubos. Sí que es cierto que, la figura situada en la fila A es la primera que descubrían, y tras ello, comenzaban a experimentar con el resto. Una de las estrategias que siguió algún grupo fue contar los cuadrados que había que rellenar y formar tantas figuras de cuatro cubos como celdas blancas hay. Inmediatamente, en la Figura 38 se adjuntan algunas de las respuestas:



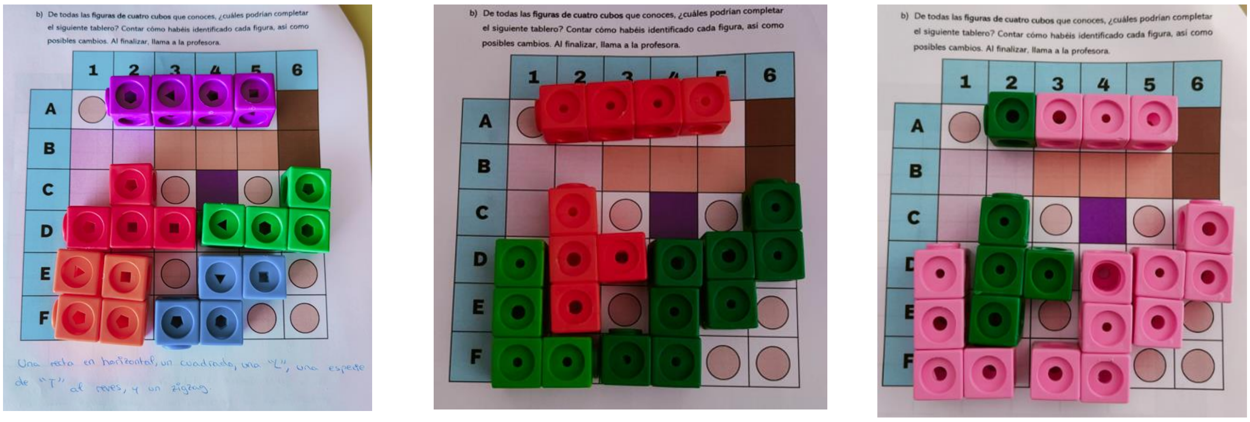


Figura 38. Algunas respuestas al segundo enunciado de la quinta sesión.

La tercera actividad, en la que también aparece un tablero con bloqueadores, pregunta a los alumnos sobre la posibilidad de colocar figuras de tres y cuatro cubos, sucesivamente. Deben comprobar si puede completarse el tablero con triminós o tetraminós, y en caso negativo, argumentar si modificando algún elemento del tablero podría complementarse correctamente. La respuesta que se busca es que, para los triminós, quiten dos bloqueadores (ya que 27 huecos entre 3 policubos es igual a 9 figuras); y, para los tetraminós, eliminen un bloqueador (28 huecos entre 4 es igual a 7 figuras). La mayoría de los alumnos contestas con una respuesta similar a este planteamiento, aunque otros añaden: "*No se puede porque el total de cubos vacíos no es múltiplo de 3 ni de cuatro*". Ninguno da la posibilidad de añadir una columna o fila más, y añadir más bloqueadores. A continuación, pueden observarse algunas de sus comprobaciones (Figura 39):

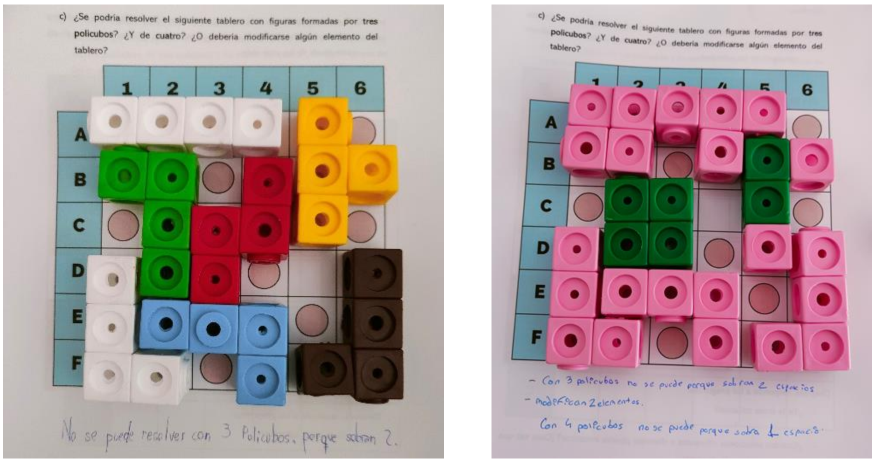


Figura 39. Respuestas a la tarea c) de la quinta sesión.

En la tarea d) se mostraba un tablero del juego con 7 bloqueadores y con cuatro, de las nueve figuras que componen el juego, colocadas sobre él. Se decía: "*El tablero puede* *completarse con tres figuras formadas por cuatro cubos y por dos figuras formadas por tres cubos, ¿cuáles son?*". Las 5 figuras restantes son únicas, es decir, se esperaba que los alumnos buscasen 5 figuras diferentes y no repitieran figuras entre sí. En el caso de las dos figuras formadas por tres cubos, se buscaba que los educandos pensasen en los dos únicos triminós que existen (L e I); sin embargo, casi todos los grupos repitieron la misma figura. Sucedió una situación semejante con los tetraminós. Pueden verse algunas de las respuestas en la Figura 40.

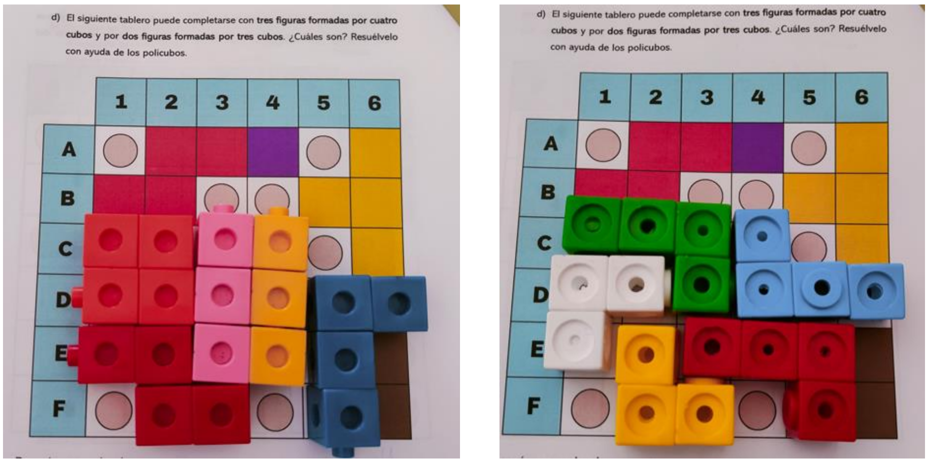


Figura 40. Respuestas a la tarea d) de la quinta sesión.

Solo uno de los cinco grupos, descubrió las cinco fichas únicas. Su respuesta se expone en la Figura 41.

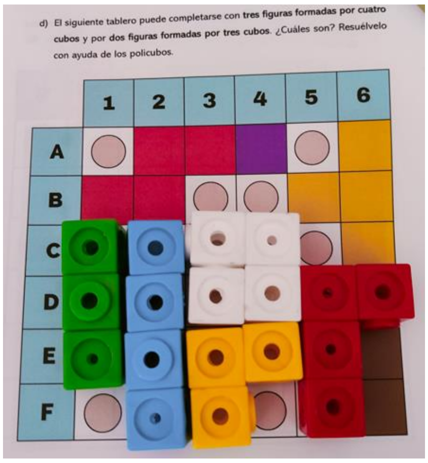


Figura 41. Respuesta del grupo que halla las cinco piezas.

Independientemente de esto, todos los alumnos saben que no es la única solución, por lo que, animados por las docentes, buscan otra. Por falta de tiempo, cada grupo realiza dos soluciones, y debido a ello, cuando se les cuestiona sobre "*¿Cuántas soluciones diferentes pueden encontrar*?", responden que dos. Ningún grupo razona que puede haber muchas o incluso infinitas. Dentro de esta tarea, también se les cuestiona sobre si el tablero pudiese completarse con figuras formadas por cuatro o cinco cubos. Un grupo responde que *no se* *puede*, dado que entiende que el tablero debe completarse “o con figuras de cuatro cubos, o con figuras de cinco, y no combinándolas entre ellas”. El resto de los niños, experimentando con los policubos, dan una respuesta afirmativa a la cuestión. Se puede observar en la siguiente figura (Figura 42):

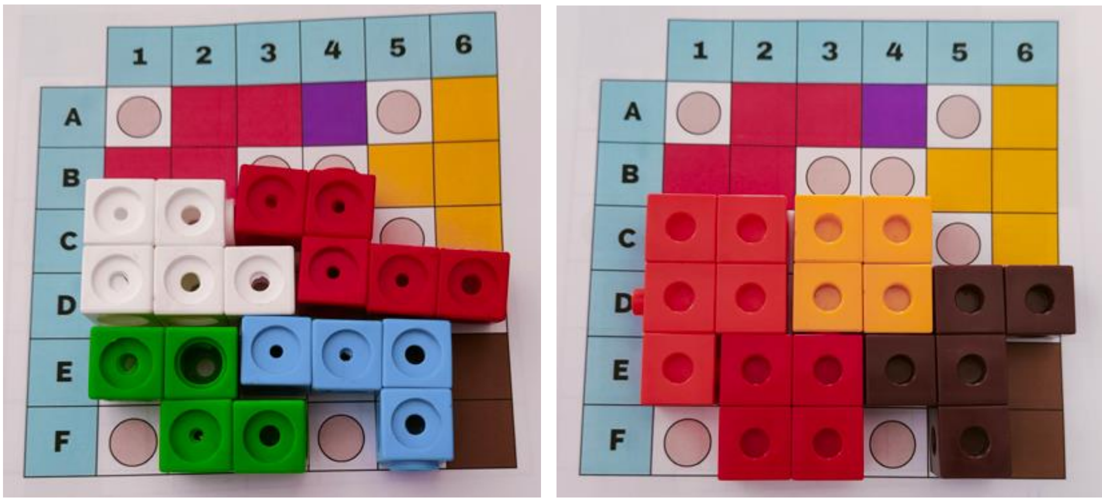


Figura 42. Respuestas de algunos grupos a la penúltima tarea de la quinta sesión.

La última pregunta de la sesión es, realmente, una partida al juego “Batalla de Genios”. En el enunciado, se explica que dicho juego está compuesto por siete bloqueadores y varias figuras formadas por policubos (figuras de uno, dos, tres y cuatro policubos). Dándoles como consigno la posición de los bloqueadores, deben intentar resolver el tablero con figuras creadas en las sesiones anteriores. Ellos no saben que el juego está compuesto por nueve figuras, ni que todas ellas son únicas. Esto significa que una de las posibilidades de respuesta es que se repitan figuras, por ejemplo, colocar tres policubos sueltos. En la Figura 43 puede contemplarse:

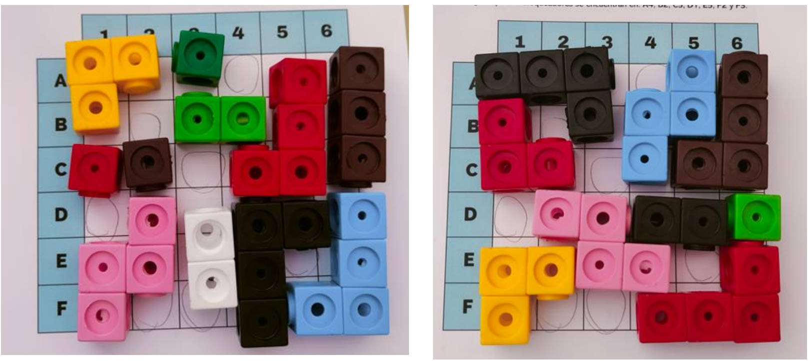


Figura 43. Algunas respuestas a la última tarea.

Uno de los equipos no leyó bien el enunciado, y como puede observarse en la Figura 44, completó el tablero con figuras de cinco policubos.

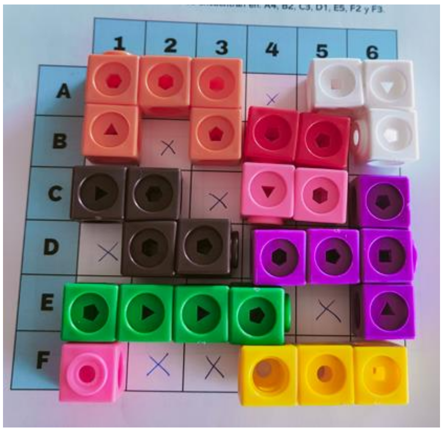


Figura 44. Respuesta a la tarea final del grupo que no leyó correctamente el enunciado.

Infortunadamente, ninguno de los grupos completó el tablero con las figuras que corresponden con el juego. Por ello, al finalizar la sesión, mostré las nueve figuras que componen el juego "Batalla de Genios", así como el resto de los componentes del juego (ver *Anexo 1*). Dos de los alumnos comentaron que tenían el juego en sus casas.

Como conclusión, se puede afirmar que el objetivo de la sesión ha sido superado. Todos los alumnos se han familiarizado con los policubos y han sabido responder en mayor medida a las cuestiones que se les planteaban. Asimismo, han puesto en práctica estrategias para poder resolver los diferentes tableros, y han sabido trabajar en equipo.

5.5. Resultados del cuestionario sobre el área de las Matemáticas

La realización del cuestionario se llevó a cabo en los hogares de los niños y en el aula, dependiendo de la disposición de instrumentos tecnológicos que tenga cada alumno. Esta situación tuvo lugar entre la primera y la segunda sesión de la propuesta didáctica, por lo que algunas de las respuestas del alumnado pueden verse condicionadas por ello. En el *Anexo 8* puede verse el cuestionario.

En relación con la población y la muestra, estuvo conformada por los educandos de una de las vías de 6º de Educación Primaria del C.E.I.P. Luis García Sáinz de Fuentes de Ebro (Zaragoza). Un total de 25 estudiantes con edades comprendidas entre los 11 y 13 años. Cabe destacar que, se realizó una muestra piloto con los alumnos de 5º de Educación Primaria, con el fin de analizar la fiabilidad y validez del cuestionario, y comprobar si existen errores en la redacción y en la construcción del instrumento. La frecuencia de respuestas por imagen se muestra en la siguiente figura (Figura 45):

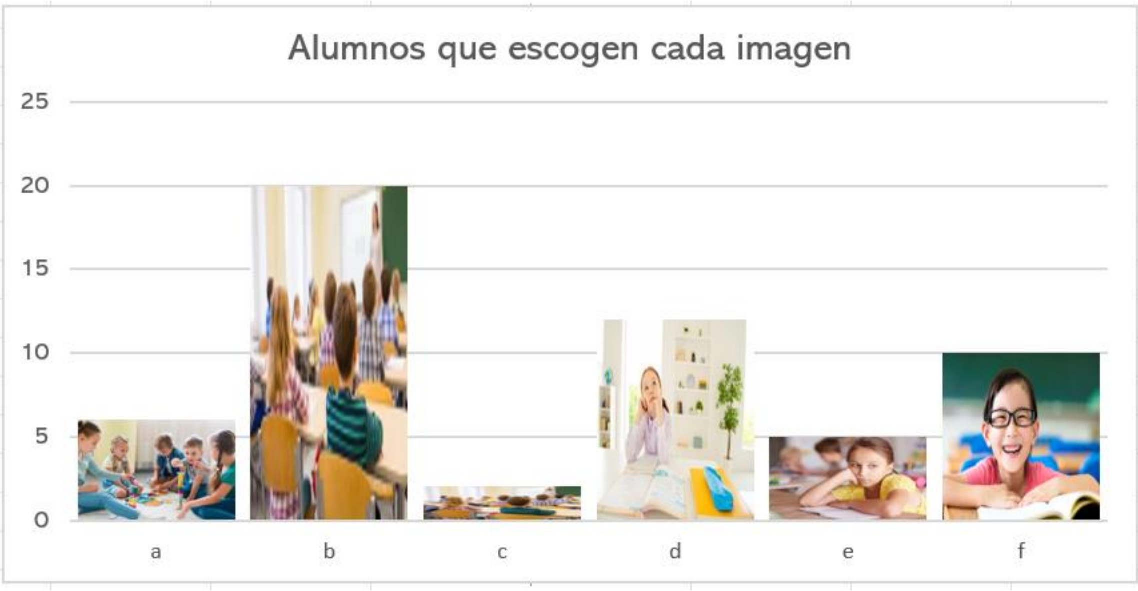


Figura 45. Gráfico de barras que muestra la selección de los alumnos.

Tras efectuar el cuestionario en el aula de 6ºA de Educación Primaria, merece la pena destacar que la imagen más seleccionada en la primera cuestión ha sido la b), siendo elegida en veinte ocasiones. Asimismo, muchos de los alumnos han seleccionado más de una imagen, siendo la combinación más repetida b) y d), y seguida a ella, b) y f) o b), d) y f). Dos de los alumnos escogen las imágenes b), c) y d). Para llevar a cabo un análisis más meticuloso, se ha identificado para las tres imágenes más escogidas la justificación por su elección, analizando las respuestas y observando aquellas categorías que más se repiten. Por ejemplo, en la imagen b) se repite la consigna "prestan atención". Concretamente seis de los veinte alumnos que la seleccionan, indican esa justificación o similar a ella. Es necesario subrayar que, la primera alumna de 6º de Educación Primaria en realizar el cuestionario selecciona solamente la imagen b), y no da explicaciones respecto a ello, dejando esa pregunta en blanco. Dos de los alumnos tampoco justifican su elección.

Seguidamente, en las Tabla 17, 18 y 19 se muestran las categorías de respuesta de las imágenes más seleccionadas, es decir, las imágenes b), d) y f), así como la frecuencia de respuestas y algunos ejemplos de los alumnos por cada categoría.

IMAGEN B	RESPUESTAS EN FUNCIÓN DE LA CATEGORÍA		
	Actitudes y acciones en el aula de matemáticas	*Semejanza a la realidad*	*Otros*
	S47: "Porque están en clase estudiando" S57: "La clase de matemáticas es para estar concentrado" S72: "Porque están atendiendo a la profesora"	S62: "Porque se parece a mi clase" S63: "Porque hay muchos niños"	S55: "Porque a lo mejor la profesora les está enseñanza matemáticas"
FRECUENCIA DE RESPUESTAS	16	2	2

Tabla 17. Categorías de respuestas para la elección de la imagen B y su frecuencia en la muestra.

En la Tabla 17, donde se muestran las categorías de respuesta de la imagen b), se observa que el motivo principal de su selección son las "*actitudes y acciones en el aula de matemáticas*", categoría que engloba características como "silencio para aprender", "concentración", "estudiar" o "prestar atención", y que explica, por tanto, cómo se sitúa el educando dentro del aula. Es decir, los alumnos consideran que una clase con niños atentos, que miran al docente o a la pizarra, es un aula donde estudian matemáticas.

IMAGEN D	RESPUESTAS EN FUNCIÓN DE LA CATEGORÍA		
	Pensar	*Estudiar*	*Libro de texto / Deberes*
	S50: "Porque parece que están pensando" S52: "Está concentrada"	S47: "Porque están estudiando para un examen"	S57: "Porque está haciendo sus deberes" S63: "Porque tiene un libro que parece ser de mates"

FRECUENCIA DE RESPUESTAS	8	1	3

Tabla 18. Categorías de respuestas para la elección de la imagen D y su frecuencia en la muestra.

En la Tabla 18, en la que se exponen las categorías de respuesta de la imagen d), se acentúa la categoría "*pensar*". Esta justificación explica que los alumnos conectan las matemáticas con acciones como "pensar" y "estar concentrado". También se repiten respuestas como "el uso del libro de texto" y "los deberes".

IMAGEN F	**RESPUESTAS EN FUNCIÓN DE LA CATEGORÍA**		
	Felicidad y diversión	*Semejanza a la realidad*	*Actitudes y acciones en el aula de matemáticas*
	S51: "Porque está en clase feliz" S57: "El niño está contento" S70: "Se divierte"	S62: "Porque se parece a mi clase"	S49: "Porque la profe les está explicando las mates" S69: "Porque presta atención" S72: "Porque está estudiando con su libro"
FRECUENCIA DE RESPUESTAS	4	1	5

Tabla 19. Categorías de respuestas para la elección de la imagen F y su frecuencia en la muestra.

Por último, la Tabla 19 recoge las categorías de respuesta de la imagen f) y su frecuencia. La categoría más utilizada por el alumnado para justificar su elección es de nuevo "*actitudes y acciones en el aula de matemáticas*", donde los escolares dan respuestas como "prestar atención" o "estudiar con el libro". Destacan respuestas relacionadas con "*felicidad y diversión*", es decir, los educandos relacionan el área de matemáticas con estas emociones.

6. CONCLUSIONES Y VALORACIÓN PERSONAL

Con la realización de este Trabajo de Fin de Grado se ha procurado demostrar la relevancia que puede tener la utilización de materiales manipulativos en el aprendizaje de las Matemáticas en la etapa escolar, fundamentalmente, el juego educativo y los policubos.

Mediante las investigaciones teóricas y la implementación de situaciones de aprendizaje en un contexto educativo real acordes a esta línea, se ha probado que trabajar con material manipulativo estimula el aprendizaje, motiva a los educandos a cambiar sus actitudes y creencias hacia las Matemáticas, facilita el desarrollo de los contenidos y favorece una enseñanza activa, creativa y participativa.

Uno de los objetivos en los que se basa el trabajo es revisar la literatura para caracterizar el concepto de juego en Educación Matemática. Como se ha evidenciado, hasta hace relativamente poco tiempo, como se ha aclarado a lo largo del marco teórico, los juegos no tenían el apoyo necesario en el sistema educativo, sino que estaban descritos como un instrumento para sobrellevar los 'tiempos muertos'. Afortunadamente, la legislación educativa actual está evolucionando en este aspecto, comenzando a dar cabida a los juegos como metodología de enseñanza-aprendizaje.

Diseñar una propuesta didáctica para trabajar saberes del sentido espacial era otra de las finalidades, estando en todo momento presentes los policubos, que permitieran al alumno realizar conjeturas y razonamientos sobre el aprendizaje. Tras llevar al aula parte de esta propuesta, se ha podido apreciar la incidencia de los materiales manipulativos en el aprendizaje de los alumnos, y en particular, el efecto positivo que han tenido sobre el interés de los escolares por la materia de Matemáticas. Al principio de la propuesta se creó un ambiente de incertidumbre, debido a que los alumnos nunca habían trabajado con este tipo de material, pero a medida que se iban realizando las situaciones de aprendizaje diseñadas, se observaba cómo los alumnos estaban atentos e interesados por cada una de las tareas propuestas. Pese a que la implementación ha sido breve, durante su transcurso se ha podido percibir un cambio de actitud por parte de los educandos hacia el área de Matemáticas. Es decir, el tercer objetivo del trabajo, que consistía en el análisis de las creencias hacia las Matemáticas no sólo ha podido examinarse, sino que mediante la propuesta las actitudes de los alumnos han ido modificándose de manera positiva.

Del mismo modo que he mencionado los aspectos positivos y puntos fuertes, también han ido surgiendo limitaciones durante el proceso. Las dificultades surgidas se han plasmado en la puesta en práctica de las situaciones de aprendizaje con los educandos. En su mayoría, han sido causadas por la disponibilidad de tiempo, debido a que, al estar de prácticas en los centros educativos, has de sujetarte a las indicaciones de los maestros responsables. En primer lugar, no han podido ser implementadas todas las sesiones que conforman la propuesta didáctica, pudiendo desarrollar tan solo tres de ellas. Pese a ello, se ha decidido incluir todas las sesiones que se habían pensado inicialmente, dado que todas ellas juntas tienen un hilo conductor adecuado, que por sí solas las implementadas no disponen totalmente. Otra dificultad que se ha percibido en la implementación de las sesiones ha sido el tiempo dedicado a cada una de ellas, ya que este en ocasiones era muy limitado, no pudiendo acabar algunas de las tareas asignadas por parte de algunos alumnos.

Estas decisiones que he tenido que ir tomando han variado los resultados esperados, no pudiendo observar finalmente el juego como herramienta metodológica en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, al no poner en práctica toda la propuesta, no ha podido ser ejecutada una evaluación individual y cualitativa, sino que sólo se ha observado de manera general las tres situaciones de aprendizaje implementadas.

A pesar de todo, los resultados de la experiencia del aula han sido claramente satisfactorios tras comprobar que el alumnado, prácticamente en su totalidad, realizó sin dificultades importantes las actividades propuestas, tanto las realizadas en grupos, en parejas o individualmente. Durante el proceso, se fue percibiendo que las dificultades que identificaba en la primera sesión en algunos escolares, en la última implementación ya no existían.

Para finalizar mi Trabajo de Fin de Grado, me gustaría referenciar una frase de Puig Adam, matemático y didacta español e impulsor principal del uso de recursos manipulativos en España para la enseñanza de la Geometría. Adam (1955) afirmaba que "se ha tardado no poco en tener conciencia clara de que no hay aprendizaje donde no hay acción y que, en definitiva, enseñar bien ya no es transmitir bien, sino saber guiar al alumno en su acción de aprendizaje…" (como se citó en Fernández y Sahuquillo, 2015).

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, Á. (2008). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico - manipulativos: Para niños y niñas de 6 a 12 años* (3ª ed.). Madrid: Narcea.

Alsina, Á. y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva: Propuestas para una educación matemática accesible.* (1ª ed.). Madrid: Narcea.

Área, M., Parcerisa, A. y Rodríguez, J. (2010). *Materiales y recursos didácticos en contextos comunitarios*. (1ª ed.). Graó.

Barrantes, M. y Blanco, L. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(2), 241-250.

Barrantes, M. (2002). *Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje* (Tesis de Doctorado). Departamento de Didáctica de la Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Facultad de Educación. Universidad de Extremadura. España. https://www.eweb.unex.es/eweb/ljblanco/documentos/2004%20Barrantes_Blanco_recuerdos.pdf

Bishop, A. (1991). *Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht (Holanda): Kluwer.

Bishop, A. (1998). El papel de los juegos en educación matemática. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 18*, 9-19.

Cardón, V. & Sgreccia, N. F. (2016). Lugar que asume el juego como estrategia didáctica en clases de Matemática al inicio de la escolaridad primaria. *UNIÓN: Revista Iberoamericana De Educación Matemática*, *47*, 81–105.

Cascallana, M. T. (2002). *Iniciación a la matemática: Materiales y recursos didácticos.* (2ª ed.). Santillana.

Corbalán, F. y Deulofeu, J. (1996). Juegos manipulativos en la enseñanza de las Matemáticas. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, *7*, 71-80.

Delacruz, G. C. (2011). Games As Formative Assessment Environments: Examining The Impact of Explanations Of Scoring and Incentives On Math Learning, Game Performance, And Help Seeking. *CRESST: The National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing*, *796*, 7-15.

Edo, M. (1998). Juegos y matemáticas. Una experiencia en el ciclo inicial de primaria. *Uno: Revista De Didáctica De Las Matemáticas*, *18*, 21–37.

Edo, M., Baeza, M., Deulofeu, J., y Badillo, E. (2018). Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema. *Revista Iberoamericana De Educación Matemática*, *14*, 61–75. ISSN: 1815-0640.

Fabres, R. (2016). Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, utilizadas por docentes de segundo ciclo, con la finalidad de generar una propuesta metodológica atingente a los contenidos. *Scielo*, *2* (1), 87-105. DOI: http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052016000100006

Fernández, R. y Sahuquillo, A. (2015). Aprender jugando y manipulando Matemáticas Propuesta de Aplicación Práctica para Alumnado con Discapacidad Intelectual. *XVII Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*. Cartagena.

Ferrero, L. (1998). ¡Hagan juego! Juegos matemáticos para la educación primaria. *Uno: Revista De Didáctica De Las Matemáticas*, *18*, 39–46.

Flores, P., Lupiáñez, J. y Marín, A. (2010). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas de secundaria y bachillerato*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. http://funes.uniandes.edu.co/1946/1/libro_MATREC_2011.pdf

Gairín, J. (1990). Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas. *Educar, 17*, 105-118.

González, A., Molina, J.G. y Sánchez, M. (2014). La matemática nunca deja de ser un juego. *Educación Matemática, 26* (3), 111-135.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED, 32,* 55–70.

Ley Orgánica 3/2020 del 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE).

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE).

López, I. (2010). El juego en la Educación Infantil y Primaria. *Autodidacta*, 19-37.

Lúdilo (2023). *Batalla de Genios*. https://www.ludilo.es/producto/batalla-de-genios/

Monroy, A., y Sáez, G. (2011). Teorías sobre el origen del juego. *EFDeportes, 153.* https://www.efdeportes.com/efd153/teorias-sobre-el-origen-del-juego.htm

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L. J. (2014). El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: estudio de una experiencia innovadora. *UNIÓN: Revista Iberoamericana De Educación Matemática*, *39*, 19–33.

ORDEN ECD/850/2016, de 29 de julio, por la que se modifica la Orden de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. Boletín Oficial de Aragón, 12 de agosto de 2016, 20713-20884.

ORDEN ECD/1112/2022, de 18 de julio, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. Boletín Oficial de Aragón, 145, 27 de julio de 2022, 25614-26207.

Prieto, B. (2014). *Materiales manipulativos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas* [Trabajo Fin de Grado, Universidad de Valladolid]. UVaDOC. https://uvadoc.uva.es/handle/10324/7619

Santacreu, M., Campos, P., Candela, C., Ivars, N. y Martí, M. (2015). Policubos. En C. Fernández y S. Llinares (Coords), *Alternativas en la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Primaria* (1ª Edición, 145-155). Universidad de Alicante.

Sinclair, N. & Bruce, C. D. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM Educación Matemática, 47,* 319-329. DOI 10.1007/s11858-015-0693-4

Soto, D. (2020). *El juego en el área de Matemáticas en la educación Primaria* [Tesis de Doctorado, Universidad de Murcia]. Repositorio Institucional - Universidad de Murcia.

Vargas, G., y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, *27* (1),74–94.

8. ANEXOS

Anexo 1. Juego "Batalla de Genios"

Figura 46. Juego "Batalla de Genios" Fuente: Google.

	1	2	3	4	5	6
A						
B						
C						
D						
E						
F						

Figura 47. Tablero para jugar en el aula a "Batalla de Genios"

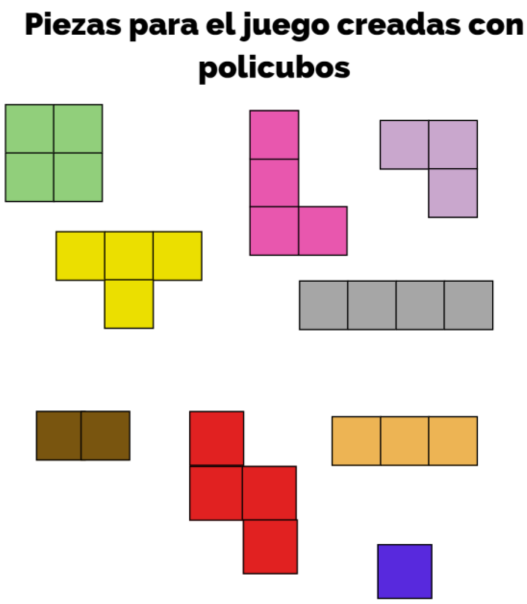


Figura 48. Piezas del juego

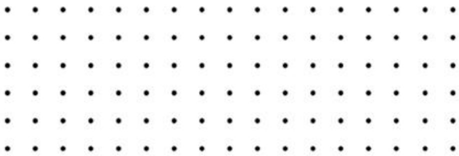
.

Anexo 2. Material utilizado para la sesión 1º (*Hoja de los alumnos*)

Sesión 1 Nombre y Apellidos:

a) Construye una figura que se componga por **dos piezas**. Después, represéntala gráficamente en la trama cuadrada.

TRAMA CUADRADA



b) A continuación, se muestras **dos figuras** compuestas por **dos piezas** o **policubos**. La primera es de color amarillo y la segunda rosa. Constrúyelas y responde a la pregunta. ¿Son iguales o diferentes?

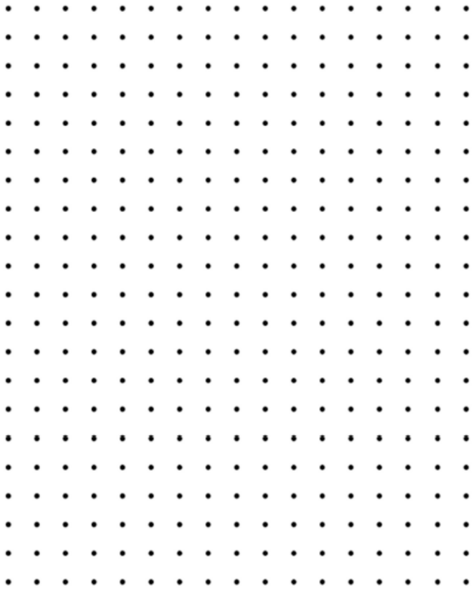
Justifica tu respuesta de manera individual.

Después, comenta las respuestas con tu grupo y escribe el resultado común en la tarjeta.

Sesión 1 Nombre y Apellidos:

c) Construye con los policubos todas las figuras diferentes que puedan construirse con **tres cubos**. Cada vez que halléis una, debéis representarla gráficamente en la trama cuadrada.

TRAMA CUADRADA



Sesión 1 Nombre y Apellidos:

d) Cuando creas que has encontrado todas las piezas diferentes, pon en común con tus compañeros las piezas que has encontrado.

Las siguientes preguntas son para que se respondan <u>en grupo</u>, para ello tenéis que pedir una hoja a la docente:

e) ¿Todos los miembros del equipo habéis encontrado el mismo número de piezas? Anotar el nombre de cada uno y el número de piezas que ha identificado cada uno.

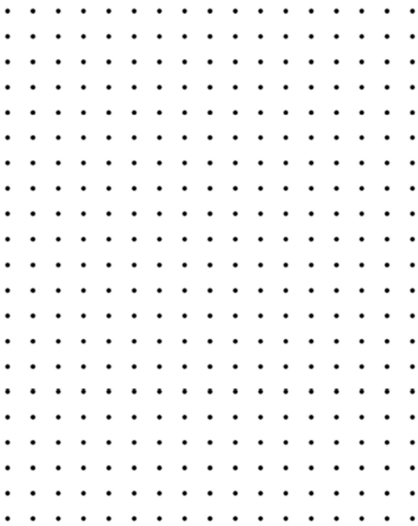
f) ¿Todos los miembros del equipo habéis encontrado las mismas piezas? Identificar las piezas que son diferentes y explicar por qué.

g) Al poner en común las piezas que habéis construido, ¿cuáles son todas las piezas de tres policubos que habéis acordado que son diferentes? Construir todas las piezas y llamar a la docente cuando hayáis terminado para hacer una foto de vuestra solución. Expresar qué habéis acordado para identificar que una pieza es diferente a otra.

Sesión 1 Nombre y Apellidos:

h) En grupo, debéis contruir con los policubos todas las figuras diferentes que puedan construirse con **cuatro cubos**. Cada vez que halléis una, debéis representarla gráficamente en la trama cuadrada. Además, debéis explicar las razones por las que consideráis que se trata de una figura única.

TRAMA CUADRADA



N.º de grupo:	Nombres:

Figura 49. Tareas propuestas en la ficha de trabajo de la 1º sesión.

Anexo 3. Material utilizado para la sesión 2º (*Hoja de los alumnos*)

Sesión 2 Nombre y Apellidos:

Durante la primera sesión, aprendimos a construir las diferentes figuras posibles a partir de dos, tres o cuatro cubos o policubos.

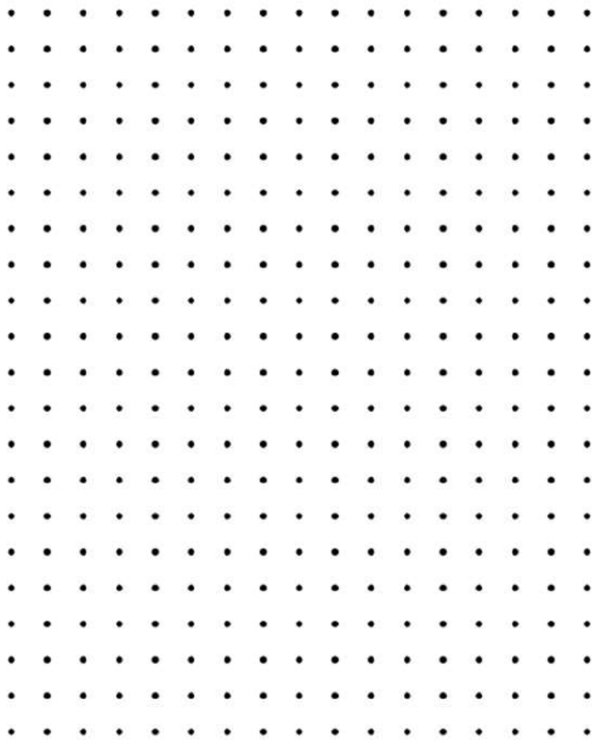
Para poder llevar a cabo la presente sesión, tenemos que averiguar cuántas piezas únicas pueden ser construidas con cinco cubos.

a) Construye con los policubos todas las figuras diferentes que puedan construirse con cinco cubos. Cada vez que halléis una, debéis representarla gráficamente en la trama cuadrada, nombrarla y rellenar la tabla.

NOMBRE DE LA FIGURA	ÁREA	PERÍMETRO

Sesión 2 Nombre y Apellidos:

TRAMA CUADRADA

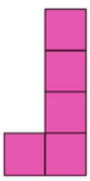


Sesión 2 Nombre y Apellidos:

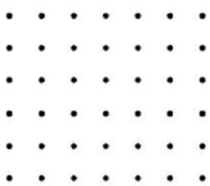
b) Mira la tabla que has construido. ¿Qué observáis? ¿Sabríais decir por qué?

c) Estas figuras que habéis encontrado, ¿por qué número de cuadrados están formadas?

d) Gira la siguiente figura 90º. ¿La figura cambia? ¿Qué características se mantienen iguales? Justifica.



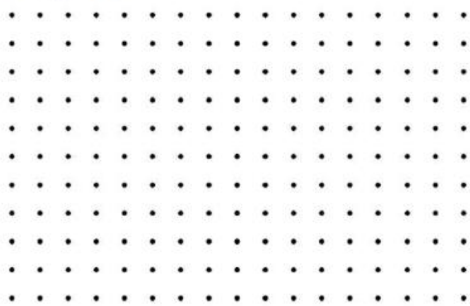
TRAMA CUADRADA



Sesión 2 Nombre y Apellidos:

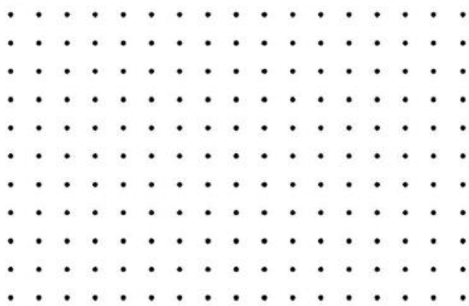
e) Elige los pentominós que necesites para construir **dos figuras** nuevas que tengan **igual perímetro** e **igual área**. Utiliza la trama para encontrar esas dos figuras. Puedes consultar la tabla.

TRAMA CUADRADA



f) Elige los pentominós que necesites para construir **dos figuras** que tengan **diferente perímetro y misma área**. Utiliza la trama para encontrar esas dos figuras. Puedes consultar la tabla.

TRAMA CUADRADA



Sesión 2 Nombre y Apellidos:

g) Elige los pentominós que necesites para construir **dos figuras** que tengan **mismo perímetro** y **diferente área**. Utiliza la trama para encontrar esas dos figuras. Puedes consultar la tabla.

TRAMA CUADRADA

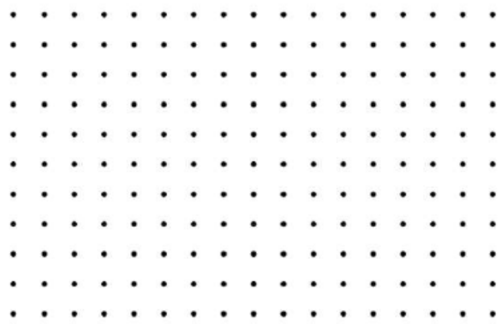


Figura 50. Tareas propuestas en la ficha de trabajo de la 2ª sesión.

Anexo 4. Plantillas / Resolución de los rompecabezas de la 3ª sesión

ROMPECABEZAS 1: 6X10

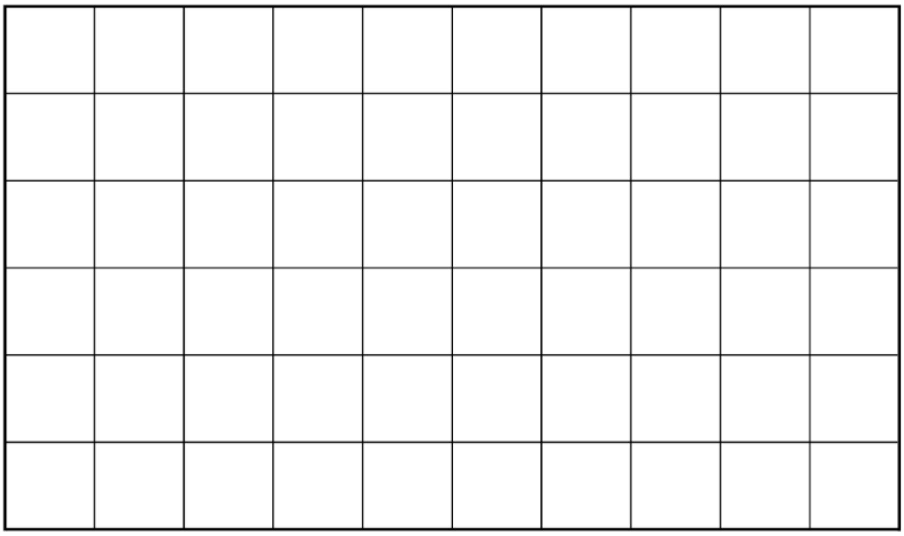
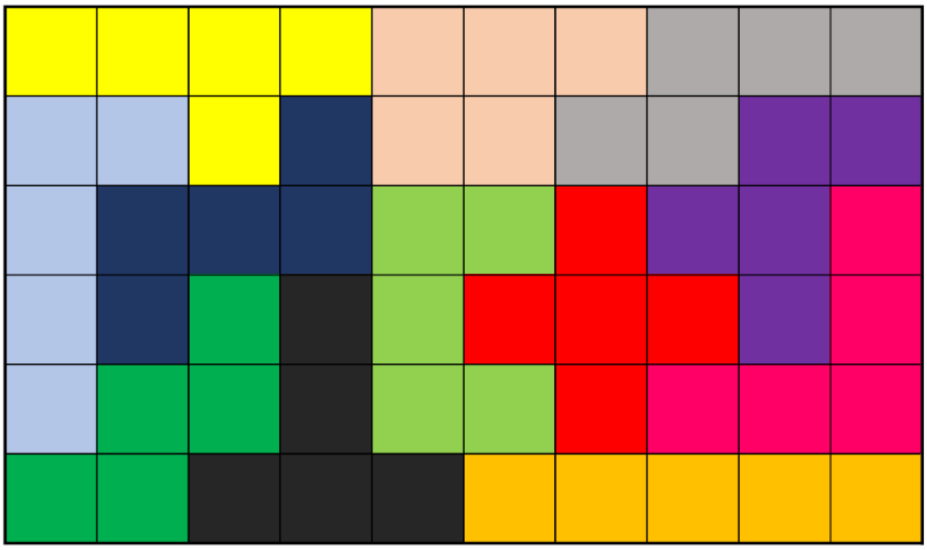


Figura 51. Rompecabezas 1 (6x10)

POSIBLES SOLUCIONES



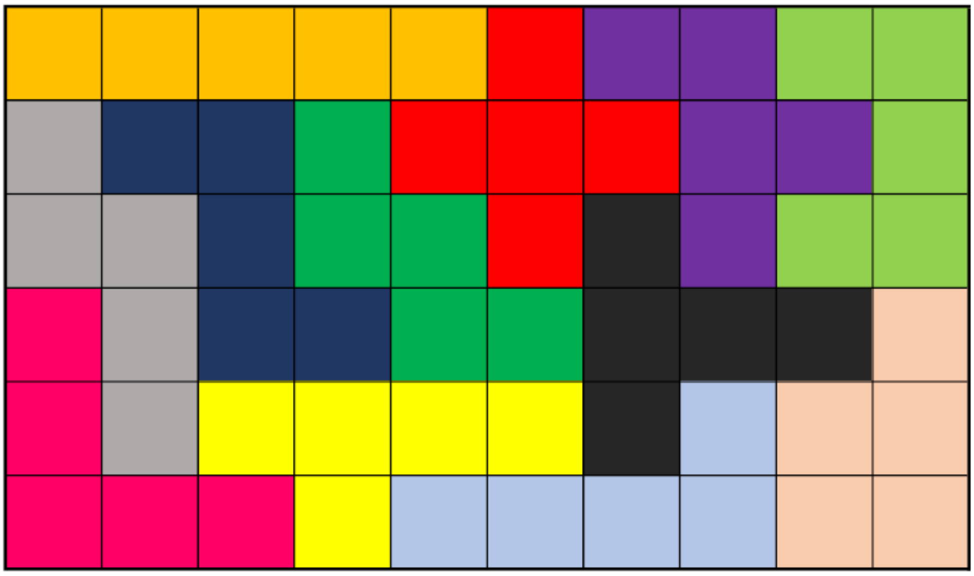


Figura 52. Soluciones del Rompecabezas 1 (6x10)

ROMPECABEZAS 2: 5X8

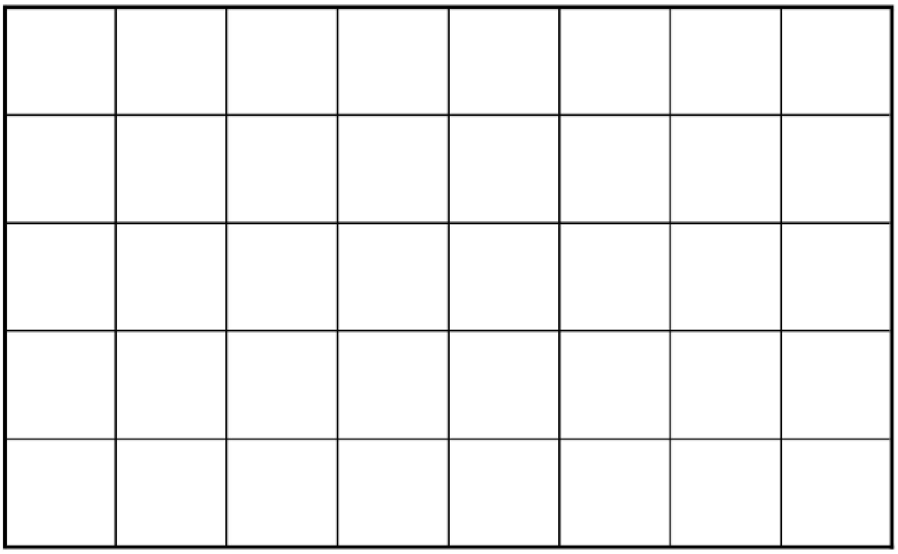


Figura 53. Rompecabezas 2 (5x8).

POSIBLES SOLUCIONES

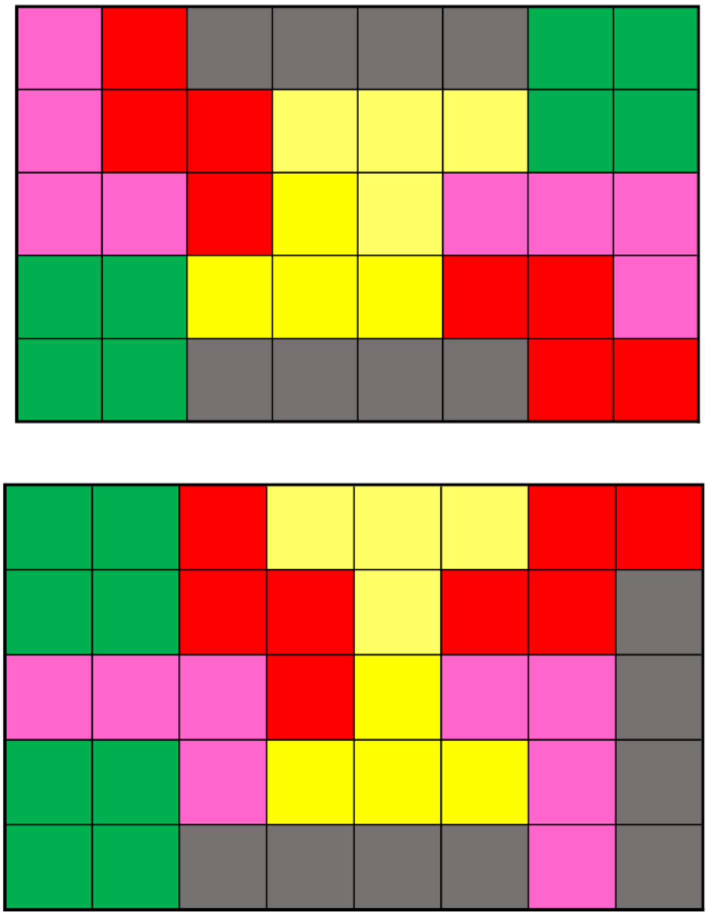


Figura 54. Soluciones del Rompecabezas 2 (5x8).

ROMPECABEZAS 3: 4X6

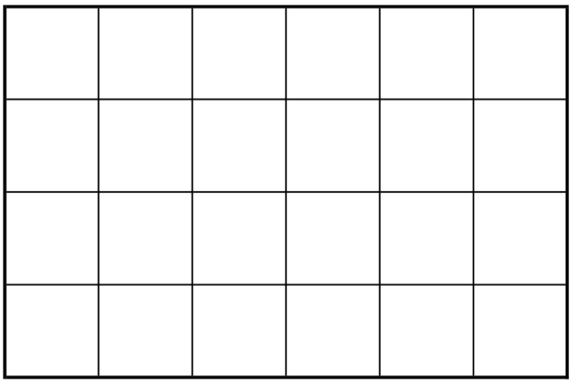


Figura 55. Rompecabezas 3 (4x6).

POSIBLES SOLUCIONES

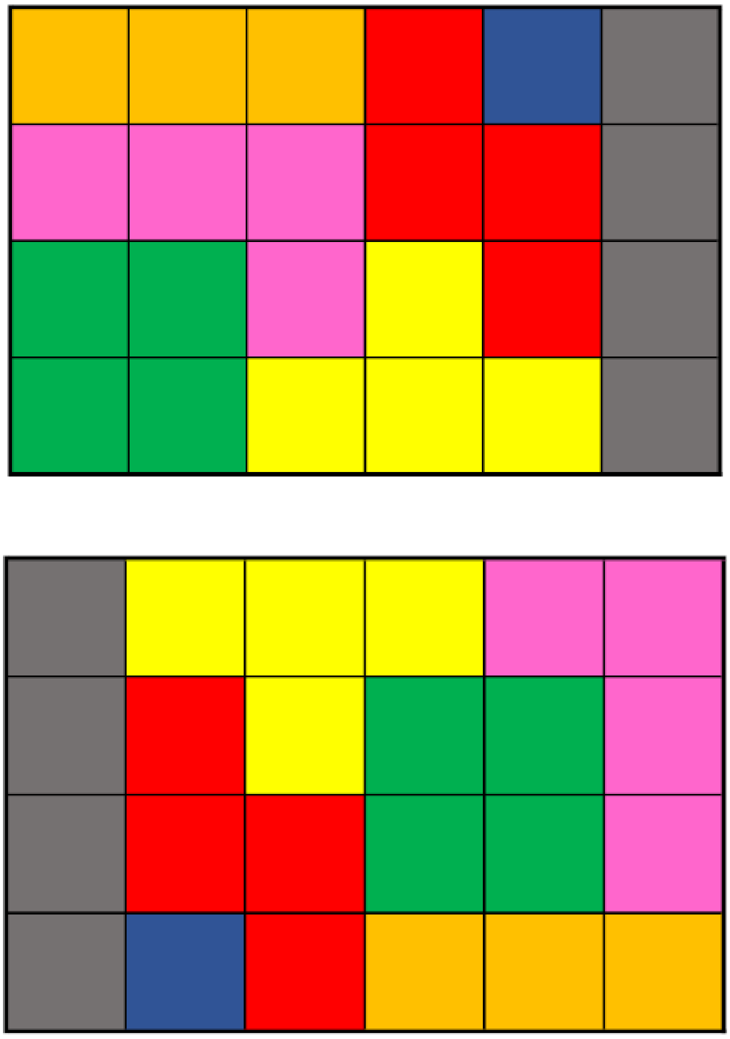


Figura 56. Soluciones del Rompecabezas 3 (4x6).

ROMPECABEZAS 4: 5X12

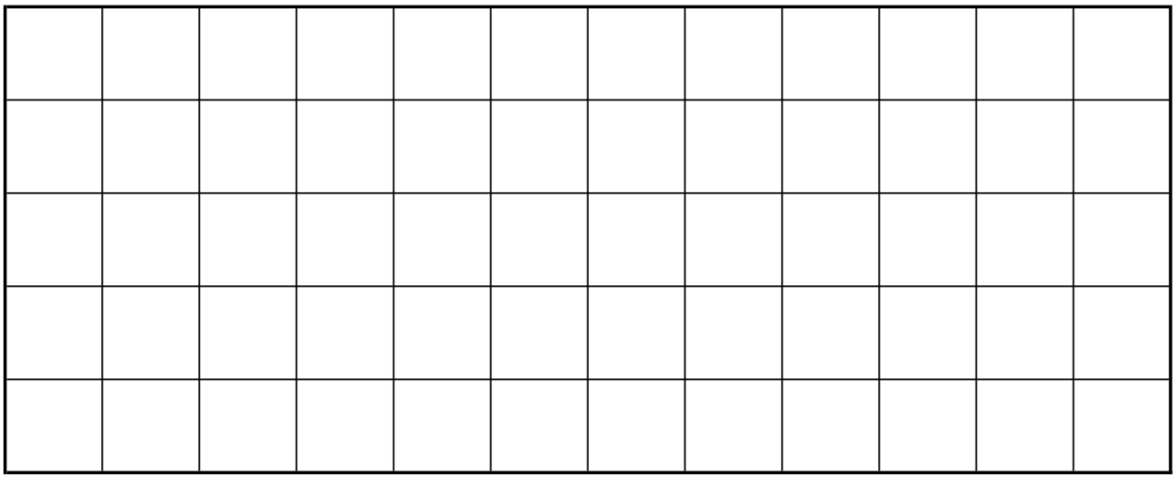
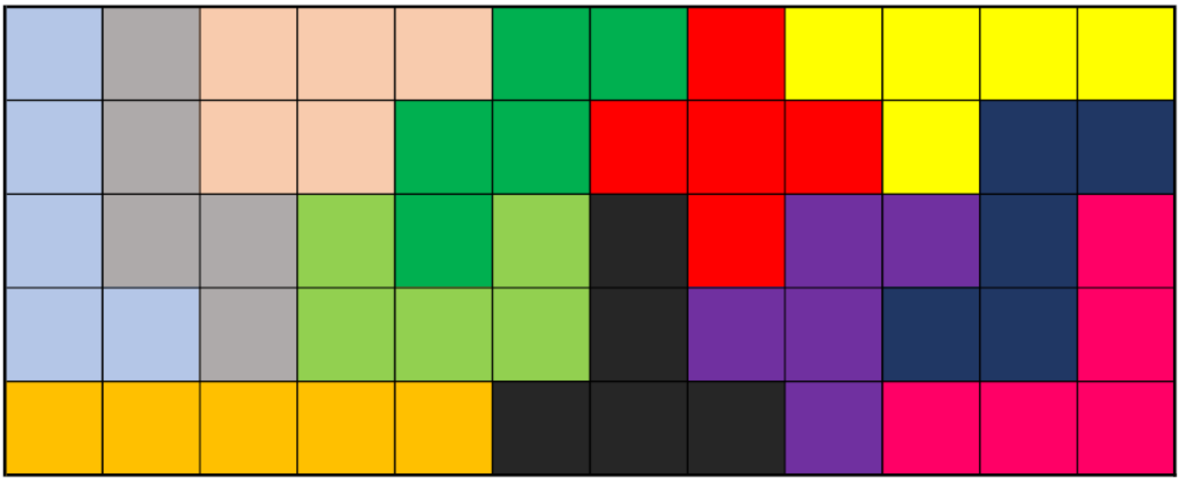


Figura 57. Rompecabezas 4 (5x12).

POSIBLES SOLUCIONES



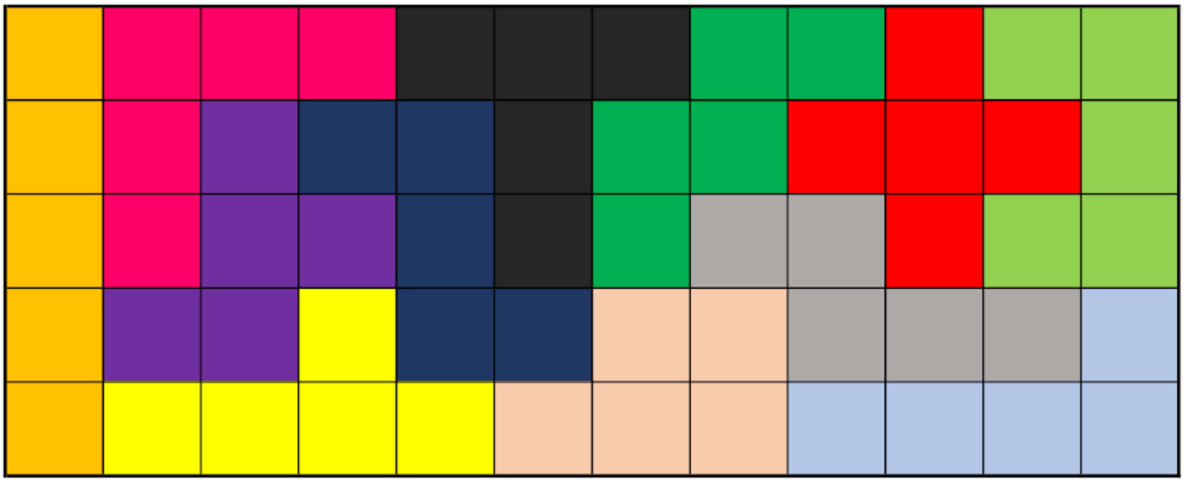


Figura 58. Soluciones del Rompecabezas 4 (5x12).

Anexo 5. Tricubos, tetracubos y piezas del Cubo Soma (Sesión 4)

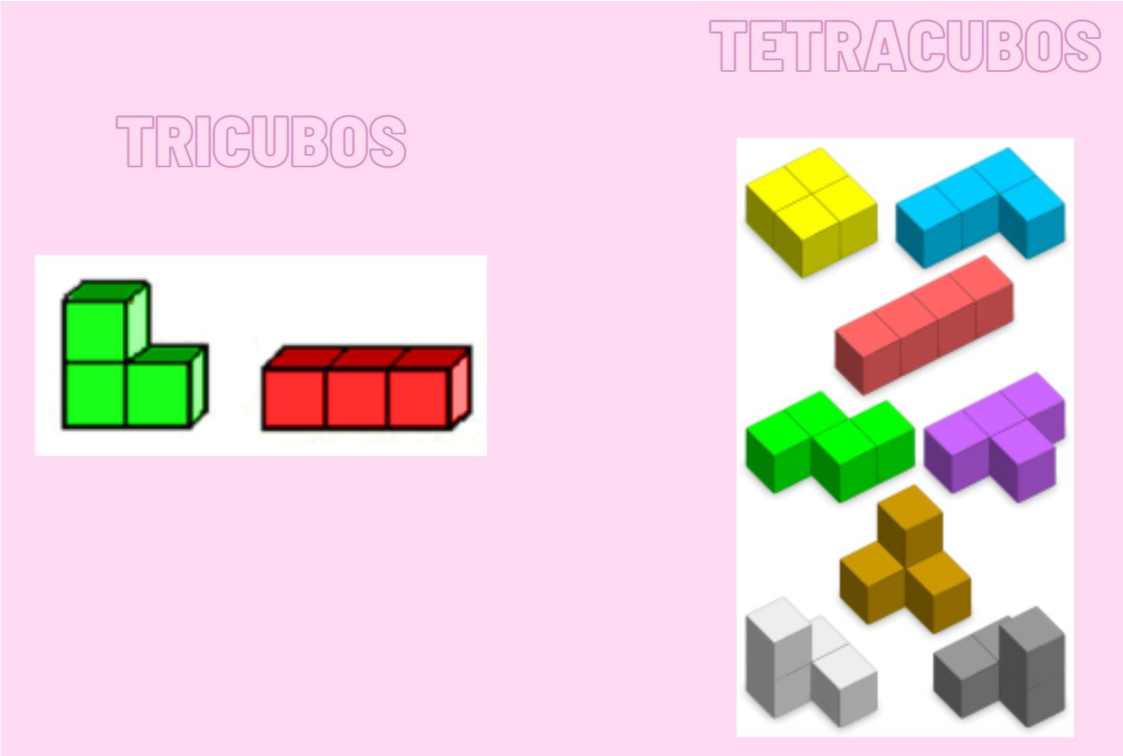


Figura 59. Tricubos y tetracubos existentes

Figura 60. Tricubo y tetracubos para el Cubo Soma

Figura 61. Pasos para la construcción del Cubo Soma

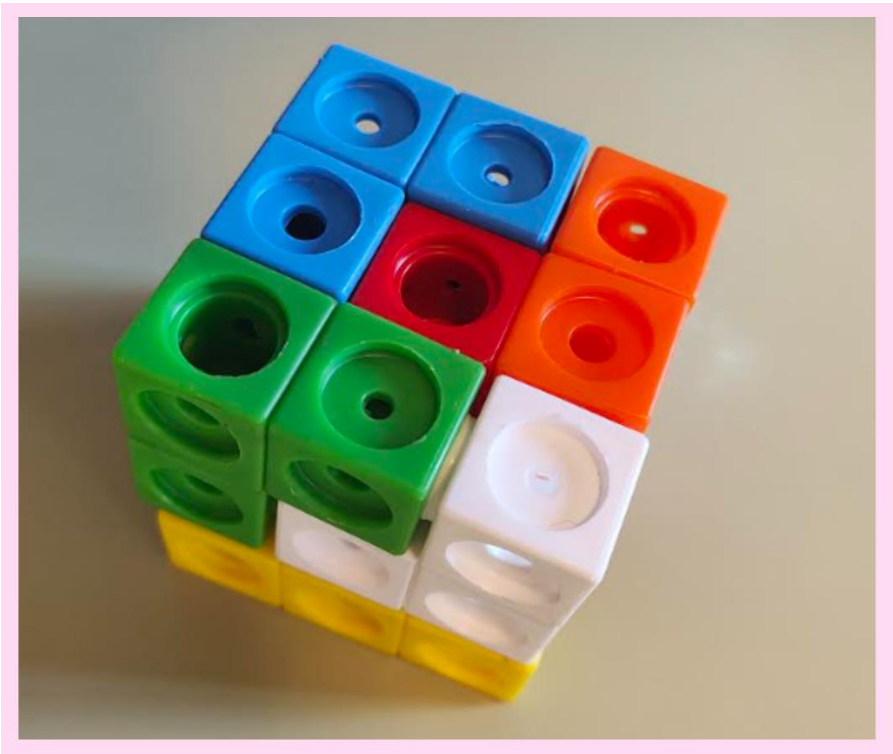


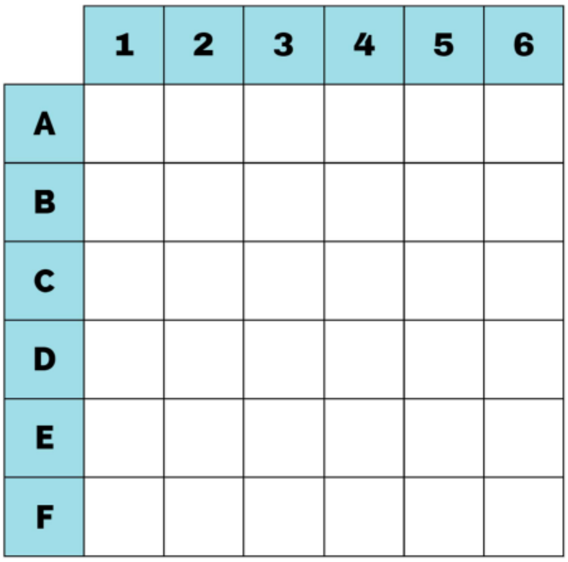
Figura 62. Cubo Soma construido

Anexo 6. Material utilizado para la sesión 5º (*Hoja de los alumnos)*

Nombres:

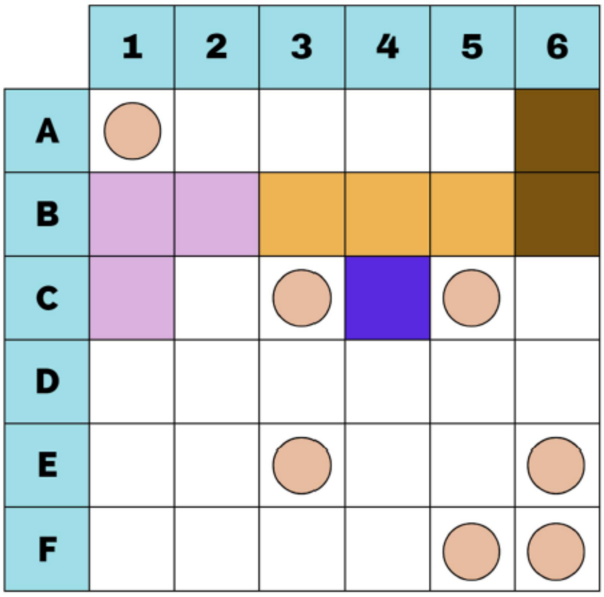
Sesión 3. Introducción al juego "Batalla de Genios"

a) ¿Podrías usar doce pentominós? Explica tu respuesta.



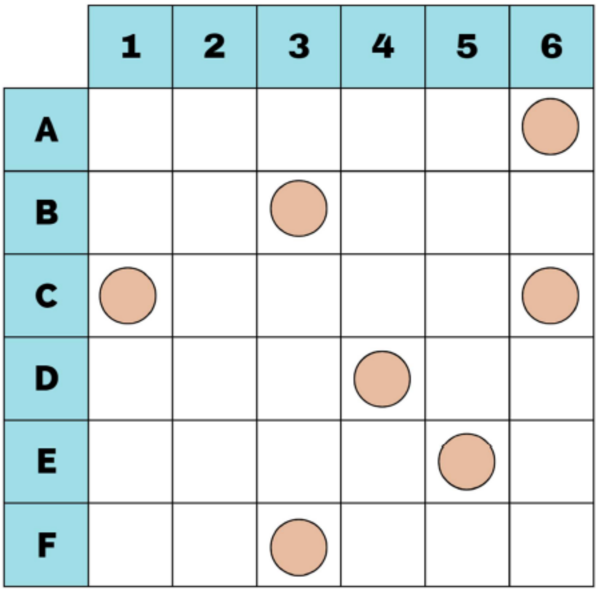
Nombres:

b) De todas las **figuras de cuatro cubos** que conoces, ¿cuáles podrían completar el siguiente tablero? Contar cómo habéis identificado cada figura, así como posibles cambios. Al finalizar, llama a la profesora.



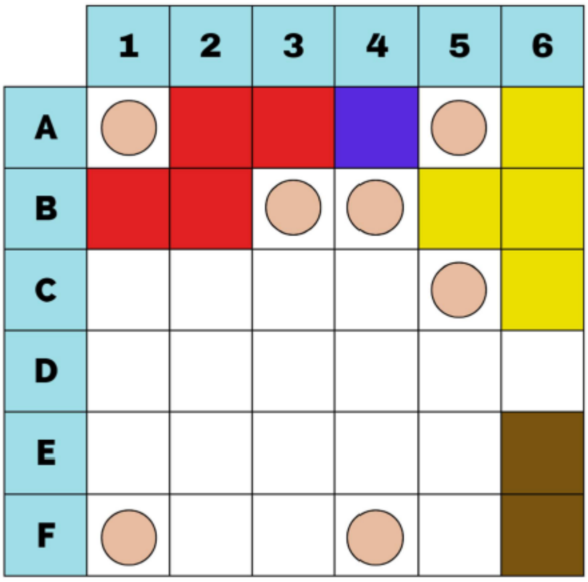
Nombres:

c) ¿Se podría resolver el siguiente tablero con figuras formadas por tres policubos? ¿Y de cuatro? ¿O debería modificarse algún elemento del tablero?



Nombres:

d) El siguiente tablero puede completarse con **tres figuras formadas por cuatro cubos** y por **dos figuras formadas por tres cubos**. ¿Cuáles son? Resuélvelo con ayuda de los policubos.



Después, responde a las preguntas:

- ¿Es la única solución?
- ¿Cuántas soluciones diferentes o distintas puedes encontrar? [Cada vez que hagas una avisa a la docente]

¿Puede completarse con figuras formadas por cuatro o cinco cubos?

Nombres:

e) El juego "**Batalla de Genios**" está compuesto por siete bloqueadores (cilindros de madera) y varias figuras formadas por policubos. Hay pieza/s de **un policubo**, de **dos policubos**, de **tres policubos** y de **cuatro policubos**. ¿Con qué figuras de las creadas en sesiones anteriores se puede completar el tablero teniendo en cuenta que los siete bloqueadores están en siete de las casillas?
Imagina que los bloqueadores se encuentran en: **A4**, **B2**, **C3**, **D1**, **E5**, **F2** y **F3**.

	1	2	3	4	5	6
A						
B						
C						
D						
E						
F						

Figura 63. Tareas propuestas en la ficha de trabajo de la 5ª sesión.

Anexo 7. Variantes del juego "Batalla de Genios" para la sesión 7

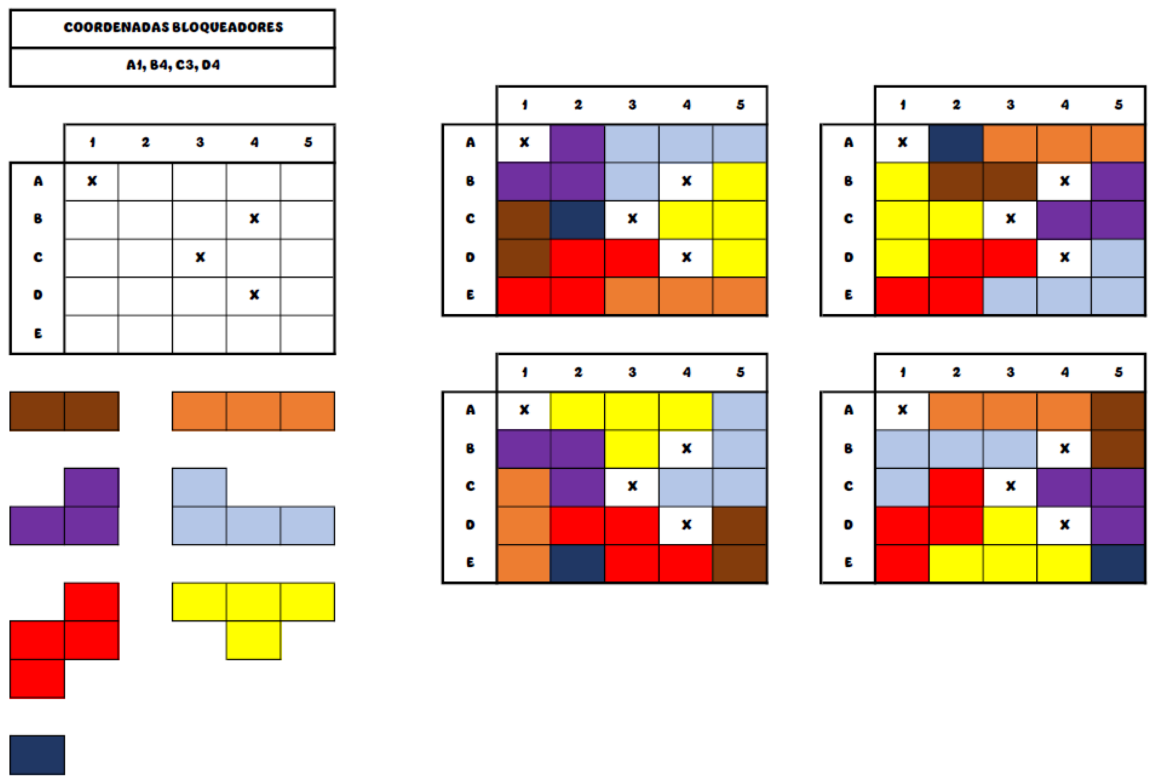


Figura 64. Primera partida de la 7ª sesión.

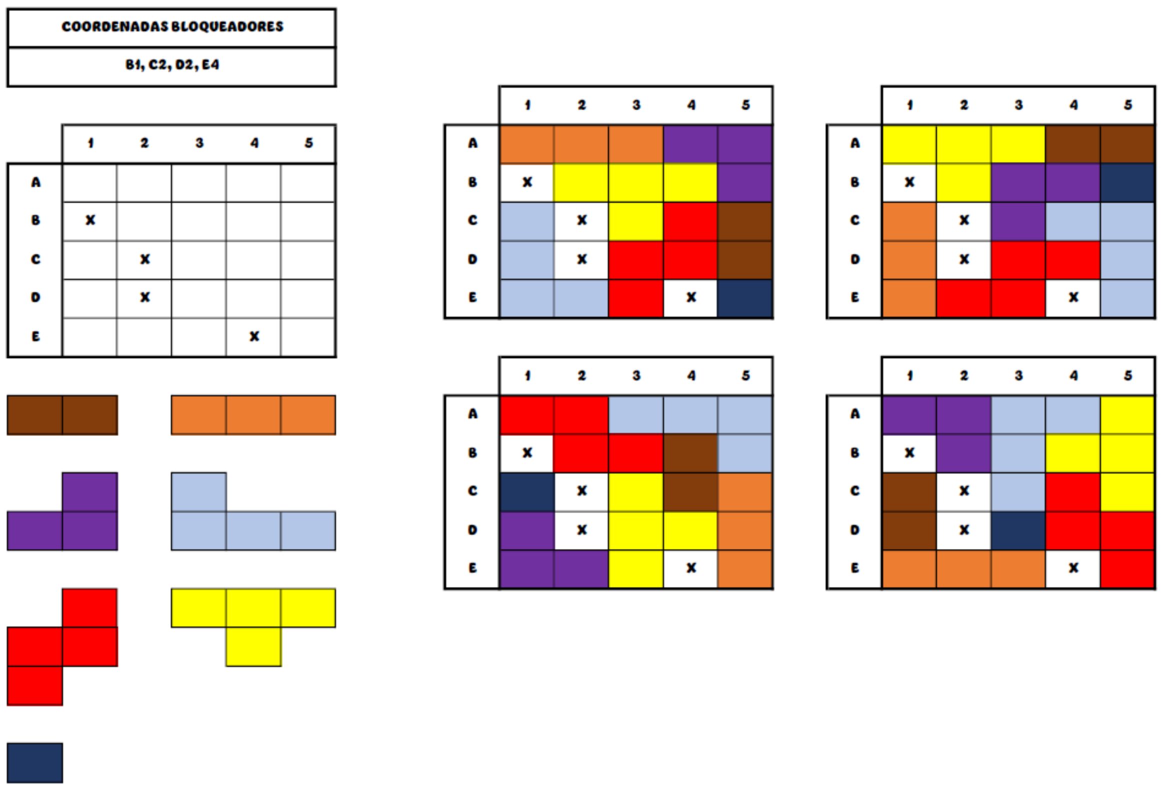


Figura 65. Segunda partida de la 7ª sesión.

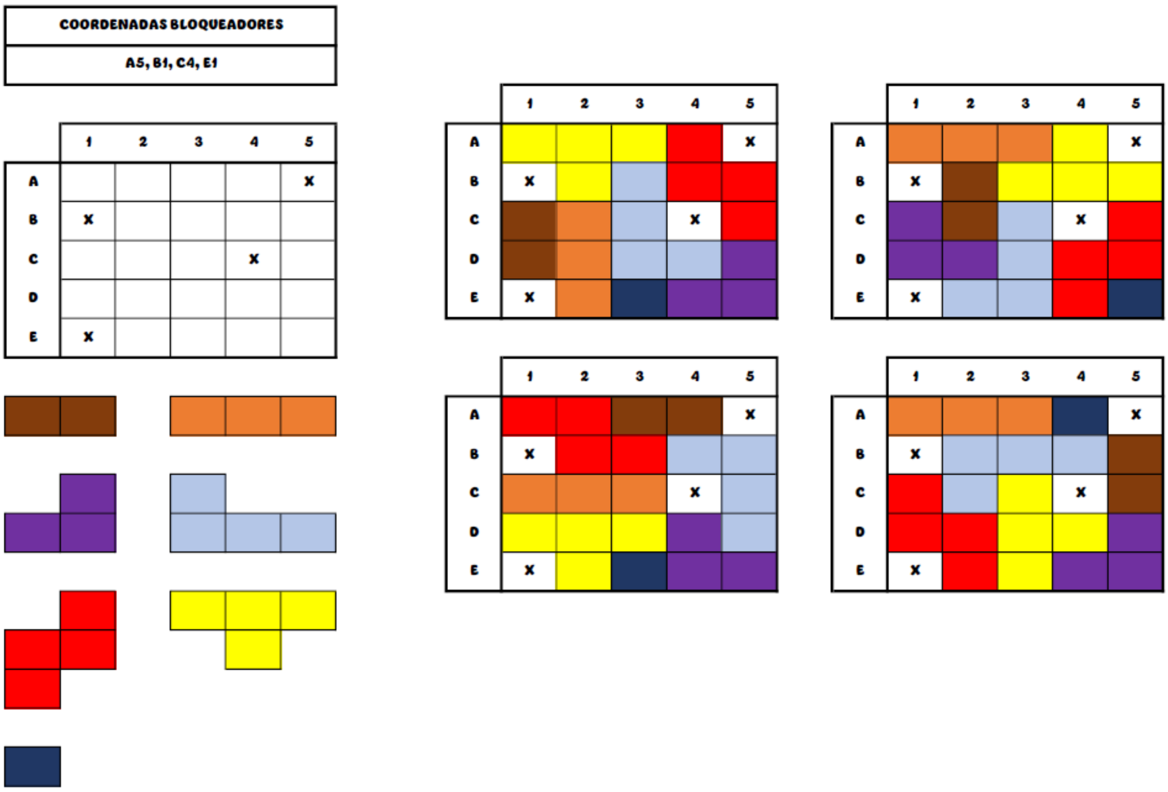


Figura 66. Tercera partida de la 7ª sesión.

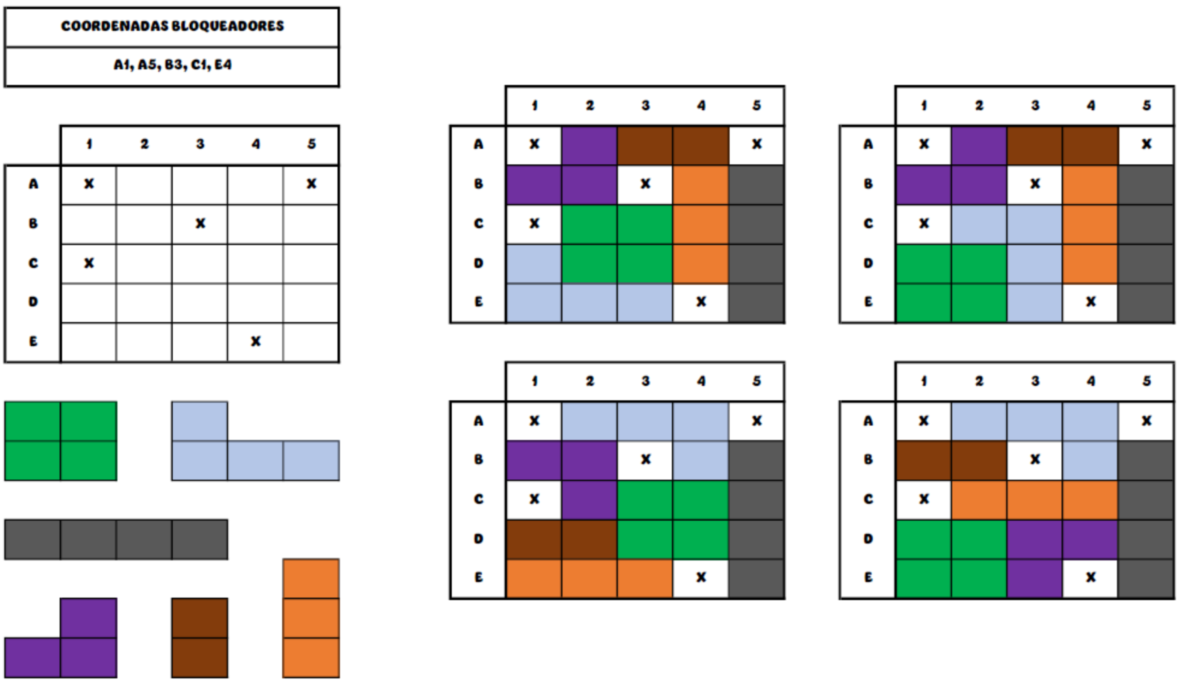


Figura 67. Cuarta partida de la 7ª sesión.

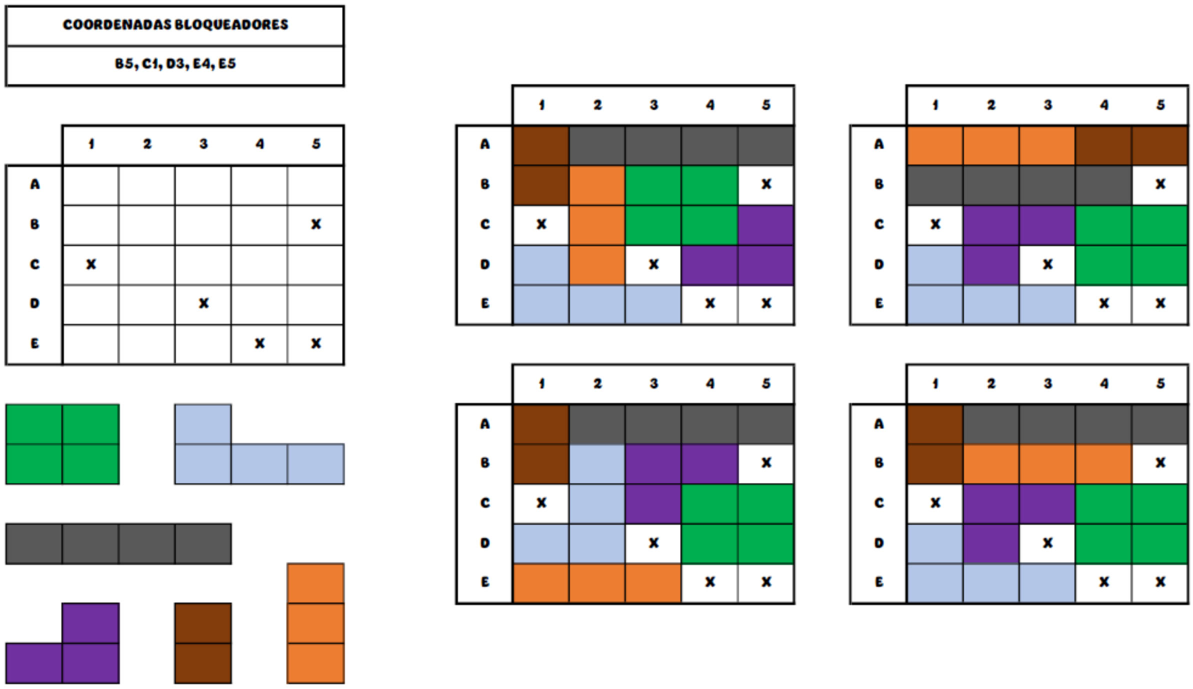
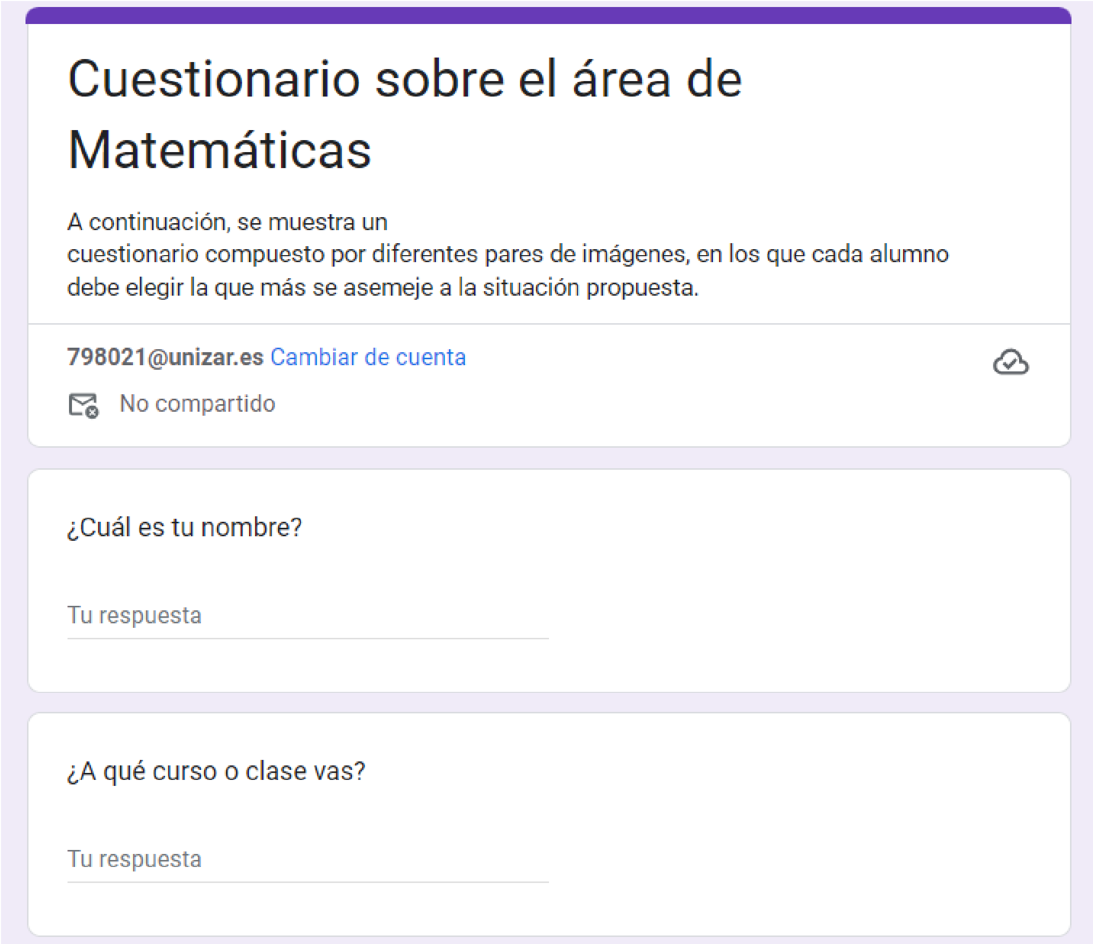


Figura 68. Quinta partida de la 7ª sesión.

Anexo 8. Cuestionario sobre el área de Matemáticas



Cuestionario sobre el área de Matemáticas

A continuación, se muestra un cuestionario compuesto por diferentes pares de imágenes, en los que cada alumno debe elegir la que más se asemeje a la situación propuesta.

798021@unizar.es Cambiar de cuenta

No compartido

¿Cuál es tu nombre?

Tu respuesta

¿A qué curso o clase vas?

Tu respuesta

Figura 69. Sección 1 del cuestionario.

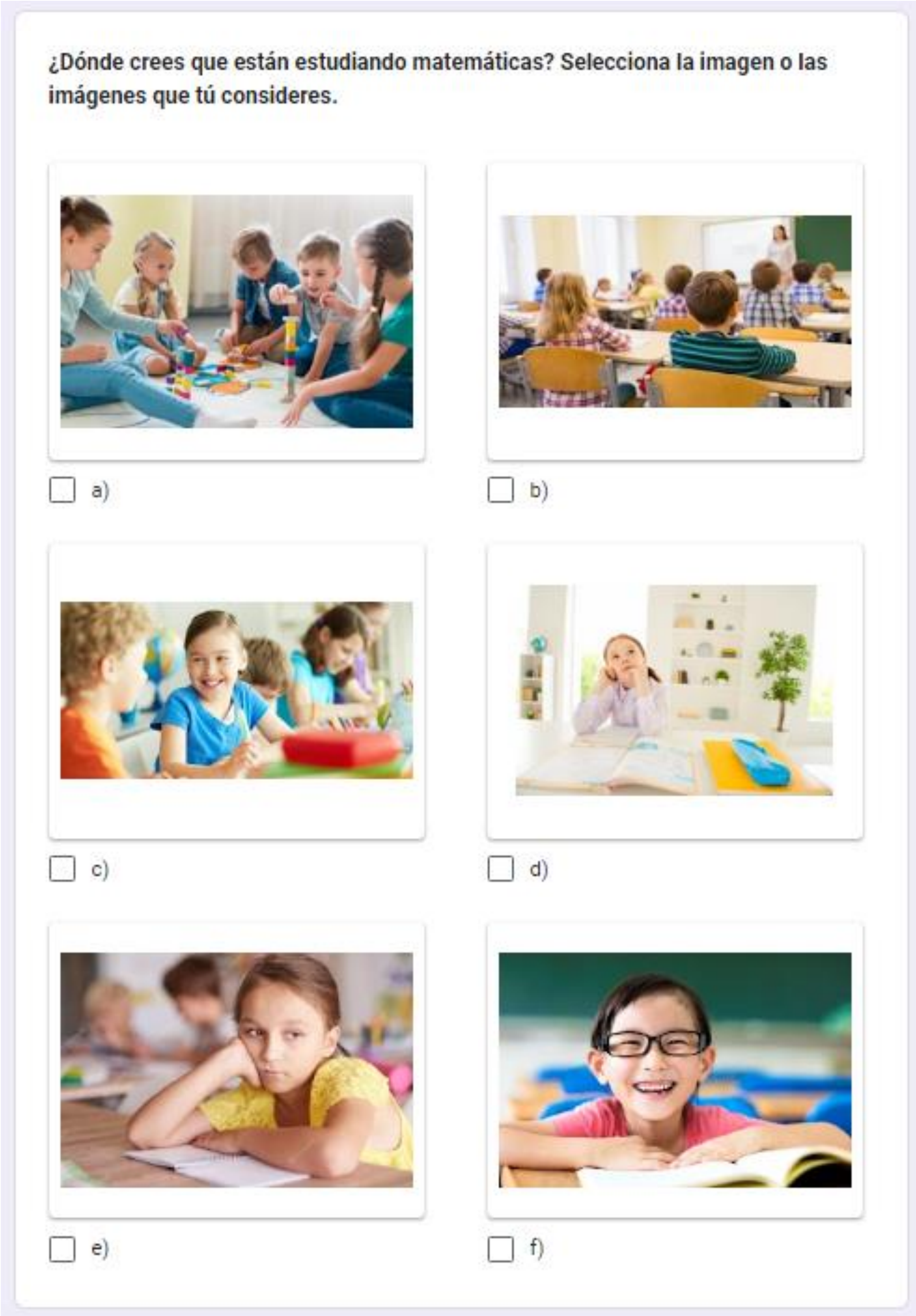


Figura 70. Sección 2 del cuestionario (selección de imágenes).

Nombra las imágenes que has seleccionado, explicando las razones de tu elección.

Tu respuesta

Las clases de Matemáticas son... (completa con tres frases, pero puedes extenderte lo que tú quieras)

Tu respuesta

En clase de matemáticas hago... (completa con tres frases, pero puedes extenderte lo que tú quieras)

Tu respuesta

Cuando hago tareas de matemáticas me siento (completa con tres frases, pero puedes extenderte lo que tú quieras)

Tu respuesta

¡Muchas gracias por tu respuesta!

Figura 71. Sección 2 del cuestionario (justificación).

Anexo 9. Registro de evaluación para ejecutar la evaluación de las sesiones implementadas

Registro de evaluación de la Sesión 1

CRITERIO DE EVALUACIÓN	SÍ / NO	OBSERVACIONES
3.3. EL ALUMNO ES CAPAZ DE ARGUMENTAR QUE DADAS DOS FIGURAS EXISTE UNA EQUIVALENCIA SI A TRAVÉS DE UN MOVIMIENTO PERMITIDO DE UNA DE ELLAS (GIRO O SIMETRÍA) SE CONSTRUYE LA OTRA.		
3.3. EL ALUMNO CONJETURA QUE DOS PIEZAS SON EQUIVALENTES SI SON IGUALES EN FORMA Y TAMAÑO PORQUE LA POSICIÓN QUEDA COINCIDIDA AL GIRO.		
6.2. EL ALUMNO ES CAPAZ DE EXPRESAR LAS IDEAS DE MANERA ORAL Y ESCRITA, APOYÁNDOSE EN EL REPRESENTACIÓN GRÁFICA O EN EL USO DE MATERIAL MANIPULATIVO.		
6.2. EL ALUMNO PARTICIPA EN LAS DISCUSIONES DEL GRUPO COMPARTIENDO DE MANERA ADECUADA SU RAZONAMIENTO O CONJETURAS ESTABLECIDAS.		
7.2. EXPRESA ACTITUDES POSITIVAS ANTE LA SITUACIÓN O RETO MATEMÁTICO PLANTEADO, COMO LA PERSEVERANCIA Y LA RESPONSABILIDAD VALORANDO EL ERROR COMO UNA OPORTUNIDAD DE APRENDIZAJE.		
8.1. / 8.2. PRESENTA UNA ESCUCHA ACTIVA ANTE LAS PROPUESTAS DE TODOS SUS COMPAÑEROS Y LAS VALORA COMO VÁLIDAS CAMBIANDO SU PROPIA RESPUESTA EN CASO DE QUE IDENTIFIQUE EL ERROR.		

Anexo 10. Criterios de evaluación utilizados en la propuesta didáctica (Tercer ciclo)

SESIÓN	***COMPETENCIA ESPECÍFICA***	***CRITERIOS DE EVALUACIÓN***
N.º 1	**CE.M.3.** **CE.M.6.** **CE.M.7.** **CE.M.8.**	3.3. El alumno es capaz de argumentar que dadas dos figuras existe una equivalencia si a través de un movimiento permitido de una de ellas (giro o simetría) se construye la otra. 3.3. El alumno conjetura que dos piezas son equivalentes si son iguales en forma y tamaño porque la posición queda coincidida al giro. 6.2. El alumno es capaz de expresar las ideas de manera oral y escrita, apoyándose en la representación gráfica o en el uso de material manipulativo. 6.2. El alumno participa en las discusiones del grupo compartiendo de manera adecuada su razonamiento o conjeturas establecidas. 7.2. Expresa actitudes positivas ante la situación o reto matemático planteado, como la perseverancia y la responsabilidad valorando el error como una oportunidad de aprendizaje. 8.1. / 8.2. Presenta una escucha activa ante las propuestas de todos sus compañeros y las valora como válidas cambiando su propia respuesta en caso de que identifique el error.
N.º 2	**CE.M.2** **CE.M.3.** **CE.M.6.** **CE.M.7.** **CE.M.8.**	2.2. Obtener posibles soluciones o conclusiones sobre el reto o situación matemática planteada, seleccionando entre varias estrategias conocidas justificando la elección. 3.3. El alumno es capaz de argumentar que dadas dos figuras existe una equivalencia si a través de un movimiento permitido de una de ellas (giro o simetría) se construye la otra. 3.3. El alumno conjetura que las figuras formadas por cinco piezas presentan la misma área dadas sus características. 3.3. El alumno razona que las figuras formadas por cinco piezas no tienen siempre el mismo perímetro, estableciendo diferencias entre el área y el perímetro dependiendo de las características de la figura.

		6.1. El escolar interpreta y adquiere vocabulario y lenguaje matemático apropiado, mostrando la comprensión del mensaje en cada situación. 6.2. El alumno es capaz de expresar las ideas de manera oral y escrita, apoyándose en la representación gráfica o en el uso de material manipulativo. 7.2. Expresa actitudes positivas ante la situación o reto matemático planteado, como la perseverancia y la responsabilidad valorando el error como una oportunidad de aprendizaje. 8.1. / 8.2. Presenta una escucha activa ante las propuestas de todos sus compañeros y las valora como válidas cambiando su propia respuesta en caso de que identifique el error.
N.º 3	**CE.M.2** **CE.M.6.** **CE.M.7.** **CE.M.8.**	2.1. Seleccionar entre diferentes estrategias, para resolver un problema justificando la estrategia seleccionada y compartiendo la reflexión que justifica la elección. 2.2. Obtener posibles soluciones o conclusiones de un problema seleccionando entre varias estrategias conocidas justificando la elección. 6.1. Interpretar lenguaje matemático sencillo presente en situaciones cercanas y significativas para el alumnado en diferentes formatos, adquiriendo vocabulario apropiado y mostrando la comprensión del mensaje. 6.2. Comunicar los resultados utilizando diferentes formas de representación las conjeturas y procesos matemáticos, apoyándose en el material manipulativo. 7.2. Expresa actitudes positivas ante la situación o reto matemático planteado, como la perseverancia y la responsabilidad valorando el error como una oportunidad de aprendizaje. 8.1. Colabora activa, respetuosa y responsablemente en el trabajo en equipo mostrando iniciativa, comunicándose de forma efectiva, valorando la diversidad, mostrando empatía y

		estableciendo relaciones saludables basadas en la tolerancia, la igualdad y la resolución pacífica de conflictos. 8.2. Acepta la tarea propuesta e implicarse en la exploración compartida de la situación o resolución del problema, respetando los argumentos de otros, poniéndolos a prueba, participando de la construcción del conocimiento y contribuyendo a las discusiones y puestas en común.
N.º 4	**CE.M.6.** **CE.M.7.** **CE.M.8.**	6.1. Interpretar lenguaje matemático sencillo presente en situaciones cercanas y significativas para el alumnado en diferentes formatos, adquiriendo vocabulario apropiado y mostrando la comprensión del mensaje. 6.2. Comunicar los resultados utilizando diferentes formas de representación las conjeturas y procesos matemáticos mediante un lenguaje matemático adecuado. 7.2. Expresa actitudes positivas ante nuevos retos matemáticos tales como la perseverancia y la responsabilidad valorando el error como una oportunidad de aprendizaje.
N.º 5	**CE.M.2** **CE.M.3.** **CE.M.6.** **CE.M.7.** **CE.M.8.**	2.2. Obtener posibles soluciones o conclusiones sobre el reto o situación matemática planteada, seleccionando entre varias estrategias conocidas justificando la elección. 3.3. El alumno es capaz de argumentar que dadas dos figuras existe una equivalencia si a través de un movimiento permitido de una de ellas (giro o simetría) se construye la otra. 3.3. El educando localiza en el plano punto de referencia (puntos cardinales). 3.3. El alumno describe posiciones y movimientos en el cuadrante de sistema de coordenadas cartesiano. 6.1. El escolar interpreta y adquiere vocabulario y lenguaje matemático apropiado, mostrando la comprensión del mensaje en cada situación. 6.2. El alumno es capaz de expresar las ideas de manera oral y escrita, apoyándose en la representación gráfica o en el uso de material manipulativo.

		7.2. Expresa actitudes positivas ante la situación o reto matemático planteado, como la perseverancia y la responsabilidad valorando el error como una oportunidad de aprendizaje. 8.1. / 8.2. Presenta una escucha activa ante las propuestas de todos sus compañeros y las valora como válidas cambiando su propia respuesta en caso de que identifique el error.
N.º 6	**CE.M.2** **CE.M.6.** **CE.M.7.** **CE.M.8.**	2.1. Seleccionar entre diferentes estrategias, para resolver un problema justificando la estrategia seleccionada y compartiendo la reflexión que justifica la elección. 2.2. Obtener posibles soluciones o conclusiones de un problema seleccionando entre varias estrategias conocidas justificando la elección. 6.1. Interpretar lenguaje matemático sencillo presente en situaciones cercanas y significativas para el alumnado en diferentes formatos, adquiriendo vocabulario apropiado y mostrando la comprensión del mensaje. 6.2. Comunicar los resultados utilizando diferentes formas de representación las conjeturas y procesos matemáticos, apoyándose en el material manipulativo. 7.2. Expresa actitudes positivas ante la situación o reto matemático planteado, como la perseverancia y la responsabilidad valorando el error como una oportunidad de aprendizaje. 8.1. Colabora activa, respetuosa y responsablemente en el trabajo en equipo mostrando iniciativa, comunicándose de forma efectiva, valorando la diversidad, mostrando empatía y estableciendo relaciones saludables basadas en la tolerancia, la igualdad y la resolución pacífica de conflictos. 8.2. Acepta la tarea propuesta e implicarse en la exploración compartida de la situación o resolución del problema, respetando los argumentos de otros, poniéndolos a prueba, participando de la construcción del conocimiento y contribuyendo a las discusiones y puestas en común.

N.º 7	**CE.M.2** **CE.M.6.** **CE.M.7.** **CE.M.8.**	2.1. Seleccionar entre diferentes estrategias, para resolver un problema justificando la estrategia seleccionada y compartiendo la reflexión que justifica la elección. 2.2. Obtener posibles soluciones o conclusiones de un problema seleccionando entre varias estrategias conocidas justificando la elección. 6.1. Interpretar lenguaje matemático sencillo presente en situaciones cercanas y significativas para el alumnado en diferentes formatos, adquiriendo vocabulario apropiado y mostrando la comprensión del mensaje. 6.2. Comunicar los resultados utilizando diferentes formas de representación las conjeturas y procesos matemáticos mediante un lenguaje matemático adecuado. 7.2. Expresa actitudes positivas ante nuevos retos matemáticos tales como la perseverancia y la responsabilidad valorando el error como una oportunidad de aprendizaje. 8.1. Colabora activa, respetuosa y responsablemente en el trabajo en equipo mostrando iniciativa, comunicándose de forma efectiva, valorando la diversidad, mostrando empatía y estableciendo relaciones saludables basadas en la tolerancia, la igualdad y la resolución pacífica de conflictos. 8.2. Acepta la tarea propuesta e implicarse en la exploración compartida de la situación o resolución del problema, respetando los argumentos de otros, poniéndolos a prueba, participando de la construcción del conocimiento y contribuyendo a las discusiones y puestas en común.

Tabla 14. Criterios de evaluación utilizados en la propuesta didáctica.