6. ANEXOS

6.1 ANEXO I. Cálculo de una solución particular de una ecuación no homogénea de orden 1

Para el cálculo de las soluciones particulares vamos a proceder por el método de los coeficientes indeterminados. Se plantean los casos más relevantes.

Caso (1): $g(t)$ es una constante.

En este caso, la ecuación (3.2.1.1) se convierte en

$$y_t + a_1 y_{t-1} = B, \tag{I.1}$$

dónde B es una constante dada. Como solución se prueba con una constante indeterminada, a la que se llama μ. Sustituyendo en la ecuación (I.1) se obtiene $(1+a_1)\mu = B$, de donde

$$\mu = B/(1+a_1),$$

y de este modo $y_t^p = B/(1+a_1)$ es una solución particular de la ecuación completa.

Este método no sirve si $1+a_1 = 0$, es decir, si $a_1 = -1$[21].

En este caso la ecuación (I.1) puede escribirse como

$$y_t - y_{t-1} = B. \tag{I.2}$$

Como solución particular probamos ahora con μt. Sustituyendo en (I.2) tenemos

$$\mu t - \mu(t-1) = B,$$

de dónde

$$\mu = B.$$

Una solución particular es entonces $y_t^p = Bt$.

[21] Esto significa que $\lambda = 1$ es raiz de la ecuación característica asociada a la ecuación en diferencias.

Es importante señalar que el tratamiento anterior es un ejemplo de la siguiente norma general en el método de coeficientes indeterminados para calcular una solución particular de la ecuación completa: *Si la función que se prueba como solución particular no nos sirve (* $\lambda = 1$ *es solución de la ecuación característica), se debe intentar a renglón seguido con esa misma función multiplicada por* t.

Caso (2): $g(t)$ es una función exponencial.

Cuando $g(t) = Bd^t$, en dónde B y d son constantes dadas, se debe probar como solución particular μd^t, siendo μ una constante indeterminada. Sustituyendo en (3.2.1.1) tenemos

$$\mu d^t + a_1 \mu d^{t-1} = Bd^t .$$

Por tanto

$$d^{t-1}(\mu d + a_1 \mu - Bd) = 0 ,$$

$$\mu d + a_1 \mu - Bd = 0 ,$$

$$\mu = \frac{Bd}{d + a_1} .$$

Una solución particular será

$$y_t^p = \frac{Bd}{d + a_1} d^t .$$

Este método no sirve si $d + a_1 = 0$, es decir, si d es raíz de la ecuación característica. Probamos entonces con $t\mu d^t$ como solución particular. Sustituyendo en (3.2.1.1) obtenemos:

$$t\mu d^t + a_1 (t-1) \mu d^{t-1} = Bd^t ,$$

$$d^{t-1}[(d + a_1) t\mu - a_1 \mu - Bd] = 0 ,$$

como $d + a_1 = 0$

$$-a_1 \mu - Bd = 0 ,$$

por tanto

$$\mu = -Bd / a_1 .$$

En este caso una solución particular sería

$$y_t^p = \frac{-Bd}{a_1} t d^t .$$

Caso (3): $g(t)$ es una función polinomial de grado m

Por ejemplo, sea $g(t) = B_0 + B_1 t$ en donde B_o y B_1 son constantes determinadas. En este caso se prueba con $y_t^p = \alpha + \beta t$, como solución particular, siendo α y β constantes indeterminadas. Sustituyendo en (3.2.1.1) tenemos

$$(\alpha + \beta t) + a_1[\alpha + \beta(t-1)] = B_0 + B_1 t ;$$

$$(1 + a_1)\beta t + \alpha(1 + a_1) - a_1\beta = B_0 + B_1 t .$$

Igualando coeficientes de los dos polinomios nos queda este sistema:

$$\begin{cases} (a_1 + 1)\beta = B_1 \\ (a_1 + 1)\alpha - a_1\beta = B_0 \end{cases},$$

cuya solución determina los valores de α y β, siempre que este sistema tenga solución[22].

Caso (4): $g(t)$ es una función trigonométrica del tipo seno-coseno.

En este caso, $g(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \operatorname{sen} \omega t$, donde B_1, B_2 son constantes conocidas. Como solución particular se debe probar la función $\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$, en donde α y β son constantes indeterminadas. Sustituyendo en (3.2.1.1) obtenemos

$$\alpha \cos \omega t + \beta \operatorname{sen} \omega t + a_1 \alpha \cos(\omega t - \omega) + a_1 \beta \operatorname{sen}(\omega t - \omega) = B_1 \cos \omega t + B_2 \operatorname{sen} \omega t .$$

Por trigonometría se sabe que:

$$\cos(\omega t \pm \omega) = \cos \omega t \cos \omega \mp \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \omega$$

$$\sin(\omega t \pm \omega) = \sin \omega t \cos \omega \pm \cos \omega t \operatorname{sen} \omega .$$

[22] Siempre que $\begin{vmatrix} 0 & a_1 + 1 \\ a_1 + 1 & -a_1 \end{vmatrix} = -(a_1 + 1)^2 \neq 0$. Esto se cumple si 1 no es solución de la ecuación característica.

Entonces, con una transformación de la ecuación anterior se obtiene:

$$[(1+a_1\cos\omega)\alpha - a_1\beta\,\mathrm{sen}\,\omega - B_1]\cos\omega t + [\alpha a_1\,\mathrm{sen}\,\omega + (1+a_1\cos\omega)\beta - B_2]\,\mathrm{sen}\,\omega t = 0$$

Ambos sumandos tienen que ser 0 dando lugar al sistema:

$$\begin{aligned}(1+a_1\cos\omega)\alpha - a_1\,\mathrm{sen}\,\omega\beta &= B_1\\ a_1\,\mathrm{sen}\,\omega\alpha + (1+a_1\cos\omega)\beta &= B_2\end{aligned},$$

que nos permitirá determinar α y β.

6.2 ANEXO II. Cálculo de una solución particular de la ecuación no homogénea de orden 2

Como ejemplo planteamos la forma de obtener una solución particular con el método de los coeficientes indeterminados en el caso más sencillo. En el resto de casos posibles, la forma de proceder es análoga a la seguida en el **ANEXO I**.

Supongamos que $g(t)=B$, supongamos entonces que

$$y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} = B. \qquad \text{(II.1)}$$

Como solución particular se puede probar $y_t^p = \mu$, en donde μ es una constante indeterminada. Sustituyendo directamente en (II.1) se obtiene $\mu + a_1\mu + a_2\mu = B$, a partir de lo cual

$$\mu = \frac{B}{1+a_1+a_2}.$$

Si $1+a_1+a_2=0$, es decir, 1 es raíz de la ecuación característica, se prueba con la solución particular $y_t^p = \mu t$. Sustituyendo queda

$$\mu t + a_1\mu(t-1) + a_2\mu(t-2) = B$$

$$(1+a_1+a_2)\mu t - \mu(a_1+2a_2) = B,$$

$$\mu = \frac{-B}{a_1+2a_2}.$$

Si también $a_1 + 2a_2 = 0$, 1 es raíz doble de la ecuación característica. Se prueba entonces con $y_t^p = \mu t^2$. Tras sustituir y con transformaciones se obtiene en este caso:

$$\mu = \frac{B}{2}.$$

6.3 ANEXO III. Condiciones de estabilidad para ecuaciones lineales de orden *n*

Sea

$$p(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad \text{(III.1)}$$

la ecuación característica asociada a (3.4.1.1) con $a_n \neq 0$.

Existen criterios basados en cálculos con los coeficientes de esta ecuación que son condiciones necesarias y suficientes para que las soluciones de la ecuación característica tengan módulo menor que 1. Aquí enunciaremos el criterio de **Shur-Cohn**[23] aunque existen otras formulaciones alternativas como la de **Samuelson** o la de **Shur**[24].

<u>Condiciones de Shur-Cohn</u>

Todas las raíces de la ecuación característica (III.1) tienen módulo menos que 1 si, y sólo si, se verifican las condiciones:

I. $p(1) > 0$.

II. $(-1)^n p(-1) > 0$.

III. Los menores interiores de las matrices[25]

[23] Fernández, Vásquez y Vegas (2003).
[24] Gandolfo (1976).
[25] Dada una matriz cuadrada de orden n, sus menores interiores son aquellos que resultan de eliminar simultáneamente las r primeras filas y columnas y las r últimas filas y columnas (con $0 \leq r \leq n/2$).

$$p_{n-1}^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ a_{n-2} & ... & a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & 0 & a_n \\ 0 & ... & 0 & a_n & a_{n-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & a_n & ... & a_4 & a_3 \\ a_n & a_{n-1} & ... & a_3 & a_2 \end{pmatrix}$$

son todos positivos.

6.4 ANEXO IV. Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden con *n* ecuaciones

Un sistema lineal de primer orden de n ecuaciones en diferencias lineales autónomas será

$$\begin{aligned} y_{1,t+1} &= a_{11}y_{1t} + a_{12}y_{2t} + ... + a_{1n}y_{nt} + b_1 \\ y_{2,t+1} &= a_{21}y_{1t} + a_{22}y_{2t} + ... + a_{2n}y_{nt} + b_2 \\ ... \\ y_{n,t+1} &= a_{n1}y_{1t} + a_{n2}y_{2t} + ... + a_{nn}y_{nt} + b_n \end{aligned} .$$

En notación matricial $\begin{pmatrix} y_{1,t+1} \\ ... \\ y_{n,t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_{1t} \\ ... \\ y_{nt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ con $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$.

El estado estacionario será $\begin{pmatrix} y^e \\ ... \\ y^e \end{pmatrix} = (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ que existe si, y sólo si, $|I_n - A| \neq 0$.

Este equilibrio será asintóticamente estable si, y solo si, todos los valores propios de A (soluciones de la ecuación $|A - \lambda I_n| = 0$) son en módulo menores que 1.

La aplicación de las condiciones de estabilidad exige que el determinante $|A - \lambda I_n|$ sea desarrollado hasta obtener un polinomio explícito, y este desarrollo es muy trabajoso si n es grande. Existen condiciones que pueden ser aplicadas directamente con los coeficientes sin tener que desarrollar el determinante. Hay que señalar, que todas las condiciones siguientes, excepto la primera, son, o bien suficientes (pero no necesarias) o necesarias (pero no suficientes), lo cual debe de ser tenido muy en cuenta a la hora de aplicarlas a los modelos económicos[26].

I. Sea $a_{ij} \geq 0$. En este caso para que exista estabilidad asintótica la condición necesaria y suficiente es que se cumplan las siguientes desigualdades.

$$1 - a_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ -a_{1n} & -a_{22} & \dots & 1-a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

II. Sea $a_{ij} \geq 0$ (los coeficientes deben de ser positivos). Se forman las n sumas $S_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$, $j = 1, 2, ..., n$. En este caso un conjunto de condiciones suficientes de estabilidad consiste en que ningún S_j sea mayor que 1, y que al menos uno de ellos, sea menor que 1.

III. Sea $a_{ij} \geq 0$. En este caso un conjunto de condiciones suficientes de inestabilidad es que todas las S_j (con $S_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$, $j = 1, 2, ..., n$) sean mayores que la unidad.

IV. Sean los a_{ij} arbitrarios. Se forman las sumas $| S_j | = \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} |$, $j = 1, 2, ..., n$. El que todos los $| S_j |$ sean menores que 1 constituye un conjunto de condiciones suficientes de estabilidad.

V. Una condición necesaria de estabilidad es que $\left|\text{Traza}(A)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right| < n$.

VI. Una condición necesaria de estabilidad es que $\left|\text{Det}(A)\right| < 1$.

[26] Fernández, Vásquez y Vegas (2003).