



Escuela de Ingeniería y Arquitectura Universidad Zaragoza

# Proyecto Fin de Carrera

## SIMULACIÓN NUMÉRICA DE FENÓMENOS DE INESTABILIDAD EN ESTRUCTURAS METÁLICAS CON DLUBAL

AUTOR

DIRECTOR DEL PROYECTO SERGIO PUERTOLAS

EINA - ESCUELA UNIVERSITARIA INGENIERIA TÉCNICA INDUSTRIAL ESPECIALIDAD MECÁNICA CONVOCATORIA SEPTIEMBRE DE 2014

> Repositorio de la Universidad de Zaragoza – Zaguan http://zaguan.unizar.es

## ÍNDICE

## 1 OBJETIVOS GENERALES Y BREVE INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

## 2 PANDEO POR FLEXIÓN O DE EULER

#### 2.1 Revisión teórica del fenómeno

- 2.1.1 Problema patrón. Elemento articulado-articulado
- 2.1.2 Problema patrón. Elemento empotrado-empotrado
- 2.1.3 Problema patrón. Elemento empotrado-libre
- 2.1.4 Problema patrón. Elemento empotrado-empotrado con apoyo deslizante
- 2.1.5 Problema patrón. Elemento empotrado-articulado
- 2.1.6 Longitud de pandeo y curva de Euler
- 2.1.7 Limitaciones de la teoría de Euler. Pandeo real

#### 2.2 Normativa de aplicación CTE DB SE-A

#### 2.3 Caso analizado

- 2.3.1 Presentación del modelo
- 2.3.2 Cálculos teóricos
- 2.3.3 Cálculo según normativa de aplicación CTE DB SE-A
- 2.3.4 Cálculo mediante DLUBAL elementos finitos
- 2.3.5 Análisis de los resultados obtenidos

#### 2.4 Análisis de los resultados obtenidos

#### **3 PANDEO LATERAL**

#### 3.1 Revisión teórica del fenómeno

- 3.1.1 Problema patrón. Viga sometida a flexión pura: M<sub>c</sub>
- 3.1.2 Viga en voladizo con carga puntual en el extremo libre

#### 3.2 Normativa de aplicación CTE DB SE-A

#### 3.3 Caso analizado: Viga en voladizo

- 3.3.1 Cálculo teórico
- 3.3.2 Cálculo según normativa de aplicación CTE DB SE-A
- 3.3.3 Cálculo mediante DLUBAL elementos finitos
- 3.3.4 Cálculo mediante DLUBAL módulo para el análisis de pandeo lateral y flexo torsión mediante elementos finitos.
- 3.3.5 Cálculo mediante DLUBAL módulo para el análisis de pandeo lateral y flexo torsión según Eurocódigo
- 3.3.6 Análisis de los resultados obtenidos
- 3.3.7 Influencia del peso propio en los resultados

## 4 PANDEO DE PLACAS: ABOLLADURA

#### 4.1 Revisión teórica del fenómeno

- 4.1.1 Ecuación diferencial del pandeo de placas en teoría lineal
- 4.1.2 Carga crítica para placa comprimida en una dirección
- 4.1.3 Carga crítica para placa sometida a cortante
- 4.1.4 Fcr para varios casos. Coeficiente de pandeo de placas

#### 4.2 Normativa de aplicación CTE DB SE-A

- 4.2.1 Abolladura a cortante
- 4.2.2 Abolladura ante cargas puntuales

#### 4.3 Casos analizados

- 4.3.1 Abolladura a cortante
  - 4.3.1.1 Cálculo según normativa de aplicación CTE DB SE-A
  - 4.3.1.2 Cálculo mediante DLUBAL
  - 4.3.1.3 Análisis y comparativa de los resultados obtenidos
- 4.3.2 Abolladura a cortante-Influencia de la colocación de rigidizadores
  - 4.3.2.1 Cálculo mediante DLUBAL elementos finitos
  - 4.3.2.2 Análisis gráfico de los resultados obtenidos
  - 4.3.2.3 Análisis y comparativa de los resultados obtenidos
- 4.3.3 Abolladura frente a cargas puntuales. Carga transmitida de un ala a otra
  - 4.3.3.1 Cálculo según normativa de aplicación CTE DB SE-A
  - 4.3.3.2 Cálculo mediante DLUBAL elementos finitos
  - 4.3.3.3 Análisis y comparativa de los resultados obtenidos

#### 4.3.4 Abolladura frente a cargas puntuales. Efecto de la colocación de rigidizadores

- 4.3.4.1 Cálculo según normativa de aplicación CTE DB SE-A
- 4.3.4.2 Cálculo mediante DLUBAL elementos finitos
- 4.3.4.3 Análisis y comparativa de los resultados obtenidos
- 5 ANEXOS
- 6 AGRADECIMIENTOS

#### **1.-OBJETIVOS GENERALES E INTRODUCCIÓN HISTÓRICA**

Tal y como se desprende del título de este documento, "*Simulación Numérica de Fenómenos de Inestabilidad Mediante DLUBAL*", el desarrollo del mismo se centrará principalmente en el análisis de los **fenómenos de inestabilidad** a los que con mayor frecuencia suelen enfrentarse las estructuras metálicas, y en la exposición y aplicación de las diferentes herramientas disponibles para el estudio de dichos fenómenos (teóricas, numéricas, etc.).

Definiendo *la estructura* como un conjunto de elementos conectados entre sí con el objeto de resistir *con seguridad* las cargas a las que se encuentra sometida y transmitirlas al terreno base, durante la realización de este documento centraremos nuestra atención en el estudio de *situaciones en las que la combinación de cargas actuantes impide a la estructura cumplir con los objetivos definidos*, y más concretamente, vamos a analizar la influencia que diversas geometrías y condiciones de contorno de los elementos de la estructura, tienen sobre el valor de la carga que hace que la estructura se convierta en inestable, definiéndose la *estabilidad* como la *"capacidad de un elemento o estructura para resistir los esfuerzos a los que se encuentra sometido sin llegar a* pandear *o colapsar*".

Así, se estudiarán varios tipos de *elementos metálicos* sometidos a un cierto estado de carga, analizando en cada caso el valor crítico de dicha carga y el modo en que la inestabilidad se manifestará. En concreto *se propondrán 3 situaciones diferentes*, las cuales se describen a continuación:

- Elemento "esbelto" sometido a axil de compresión, con condiciones de empotramiento en los apoyos. En este caso el elemento presentará un fenómeno de inestabilidad conocido como *Pandeo de Euler*.
- 2) Viga en voladizo con carga aplicada en el extremo libre, provocando flexión según el eje fuerte, que dará lugar a la aparición de desplazamientos laterales al alcanzarse cierto valor de la carga, conociéndose comúnmente a este tipo de inestabilidad como *Pandeo lateral*.
- Perfil armado con alma esbelta sometido a esfuerzo cortante o a cargas puntuales, aproximándonos en estos casos a los fenómenos de *Abolladura de Placas* por cortante en el alma o por compresión transversal del alma.

El desarrollo de los casos mencionados se realizará con un *carácter fundamentalmente docente*, pretendiendo dotar a todo aquel que pudiese consultar el presente texto de las herramientas necesarias para la comprensión de los fenómenos de inestabilidad con mayor presencia en el campo de las estructuras metálicas, cualquiera que sea su conocimiento previo de los mismos.

Como **objetivo** concreto y principal, buscaremos dejar constancia del desarrollo de cada caso estudiado con DLUBAL, para que sirva de referencia a futuros usuarios del programa. Para ello se ha descrito paso a paso, a "modo de guión de prácticas", como se modela, como se introducen cargas, como se calcula y como se consultan los resultados obtenidos.

Con objeto de desarrollar los contenidos mencionados, el presente documento se estructurará del siguiente modo:

- Capítulo 1: Pandeo de Euler
- <u>Capítulo 2: Pandeo lateral</u>
- Capítulo 3: Pandeo de placas: Abolladura

Cada uno de estos apartados se analizará desde varios puntos de vista:

- a) *Teórico*. Se desarrollarán en detalle los modelos teóricos y matemáticos que definen cada problema de forma genérica, pasando a continuación a obtener expresiones concretas para las situaciones propuestas.
- b) Normativo. Se describirán las expresiones matemáticas, tablas y gráficas empleadas por la normativa de aplicación vigente en España para el estudio de cada uno de los casos tratados.
- c) Numérico. Un apartado fundamental de este proyecto, consistente en el modelado y resolución de los problemas propuestos mediante la utilización del software comercial DLUBAL, basado en el cálculo numérico mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF).

Como anexos se adjuntará la normativa vigente para cada uno de los fenómenos de inestabilidad estudiados.

#### EL PROGRAMA DLUBAL

La herramienta en torno a la que gira el proyecto y con la que se calcula el apartado numérico de cada uno de los casos es el programa DLUBAL, un extenso y potente paquete informático que abarca el cálculo de estructuras en diversos materiales(vidrio, madera, acero, hormigón), cálculo de instalaciones, planificación BIM etc.

Dentro de este paquete, el programa empleado en este proyecto es RFEM, es un potente programa de análisis de elementos finitos 3D que ayuda a los calculistas estructurales a satisfacer las necesidades de la ingeniería moderna. El manejo intuitivo, la facilidad de uso y la eficiente entrada de datos hacen posible un trabajo fácil con RFEM.

La familia de programas de RFEM está basada en un sistema modular. El programa principal RFEM se utiliza para definir estructuras, materiales y cargas para tanto sistemas de estructuras planas como espaciales compuestas de placas, muros, láminas y barras. La creación de estructuras combinadas así como el modelado de sólidos y elementos de contacto también es posible.

RFEM proporciona deformaciones, esfuerzos internos, esfuerzos en los apoyos, así como también las tensiones de contacto del suelo. Los módulos adicionales facilitan la entrada de datos automática al crear las estructuras, así como también para las uniones, y realizan análisis y diseños avanzados.

La filosofía modular permite combinar todos los programas de manera individual según sus necesidades. RFEM ofrece numerosas interfaces representando la herramienta perfecta para una suave interacción entre CAD y el análisis estructural en el Modelado de información para la edificación (BIM).

El cálculo se puede realizar para todos los tipos de barras de acuerdo con el análisis estático lineal, de segundo orden o de grandes deformaciones. Esta selección está disponible para tanto los casos de carga como para las combinaciones de carga. Los parámetros de cálculo posteriores pueden definirse individualmente para los casos de carga, combinaciones de carga y de resultados, que incrementa la flexibilidad con respecto al método de cálculo y especificaciones detalladas.

## BREVE INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

Aunque en lo que sigue trataremos la aparición del fenómeno de la inestabilidad ante diversos tipos de carga (no necesariamente de compresión), uno de los problemas más complejos en la ingeniería estructural y de mayor trascendencia práctica, es el de la inestabilidad de elementos estructurales parcial o totalmente comprimidos y el de las estructuras constituidas por dichos elementos. Es natural, por tanto, que su análisis y la reflexión sobre su comportamiento hayan atraído la atención de multitud de mentes conocidamente brillantes, que a lo largo del tiempo han contribuido a establecer los fundamentos del análisis estructural.

Así, Galileo en el libro editado en 1638 "*Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove Scienze*", utilizó el recurso pedagógico y literario del diálogo entre Sagredo y Salviati para plantear la influencia de la esbeltez en la capacidad resistente de una pieza comprimida:

*SAGREDO*: "Yo estoy convencido por los hechos, pero no comprendo por qué la resistencia no se multiplica en la misma proporción que el material; y yo estoy muy asombrado porque, al contrario, la resistencia aumenta en mayor proporción que la cantidad de material. Así por ejemplo, si comprimimos dos barras cilíndricas, la que tiene doble área soporta no sólo dos veces más la carga, sino tres o tres veces y media más."

SALVIATI: "Incluso no se equivocará si dice cuatro veces más."

SAGREDO: "Entonces, Salviati, tendrías que resolver estas dificultades y clarificar estos conceptos, porque imagina a qué campo de ideas bellas y útiles da acceso la solución de este problema; y si tú te ocupas de él en tu exposición de hoy, tanto Simplicio como yo, te estaremos muy agradecidos."

Más de un siglo después, Euler demostró que la respuesta "teórica" era que la barra cilíndrica con doble área que otra, soporta 4 veces más de carga, por cuanto ésta es directamente proporcional a la inercia de la sección que, siendo circular, varía con la potencia cuarta del diámetro.

Hoy la respuesta es...que depende, y que la relación de las cargas en el caso expuesto puede variar entre 2, en piezas poco esbeltas, y 4 en las de gran esbeltez, y que para precisar el valor hay que aceptar convenciones basadas, ciertamente, en numerosísimos análisis teóricos y experimentales.

Un hito fundamental en lo referente al conocimiento del fenómeno de inestabilidad estructural se produce en 1744 cuando el matemático alemán Leonar Euler (1707-1783) publica el "*Methodus inveniendi Líneas curvas*…", donde por primera vez se planteó la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de la pieza comprimida biarticulada y el valor de la carga para la que "teóricamente" se desestabilizará la pieza.

Al valor de la carga,  $P_{cr}$ , se le conoce desde entonces, en honor a su autor, como carga crítica de Euler, y es la fórmula de referencia en la que se basan, explícita o implícitamente, todos los planteamientos modernos de la inestabilidad estructural.

A partir de Euler fueron muy numerosos los matemáticos que, al tiempo que impulsaron el desarrollo del cálculo diferencial y de otras especialidades del saber matemático, se interesaron por los problemas de inestabilidad estructural y aplicaron en su solución los nuevos conocimientos disponibles.

Euler partió de unas hipótesis muy claras que simplificaban y hacían posible el análisis de la pieza comprimida. La observación, el estudio y la experimentación, han ido progresivamente acotando el campo de validez de las hipótesis de partida de Euler y ajustando los valores que resultan de las formulaciones consiguientes con los "reales". Pero la metodología que nació con Euler y sus continuadores, permanece y ha sido esencial como marco eficaz del progreso en nuestros conocimientos sobre la estabilidad estructural.

Durante los posteriores desarrollos teóricos referentes a las distintas clases de inestabilidad a estudiar tendremos ocasión de desarrollar con más profundidad el problema planteado por Euler, analizando sus limitaciones prácticas y la influencia que las condiciones de contorno tendrán sobre el valor de la carga crítica del problema.

Desde los tiempos de Euler y Lagrange hasta nuestros días, el apoyo en multitud de ensayos y el desarrollo de técnicas de cálculo no lineal han contribuido a una mejora en los modelos empleados para la definición de la inestabilidad "de Euler", comúnmente llamada **pandeo** de Euler. Además, se ha avanzado notablemente en el estudio de otros tipos de inestabilidades que afectan a las estructuras o a alguna de sus partes bajo ciertos estados de carga y que también serán desarrolladas ampliamente más adelante.

El *Método de los Elementos Finitos* (**MEF** en castellano o FEM en inglés) es un **método numérico** general para la aproximación de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales muy utilizado en diversos problemas de ingeniería y física.

Muchos de los problemas de la ingeniería y de las ciencias aplicadas están gobernados por ecuaciones diferenciales o integrales. La complejidad de geometría o de las condiciones de contorno halladas en muchos de los problemas del mundo real impiden obtener una solución exacta del análisis considerado, por lo que se recurre a técnicas numéricas de solución de las ecuaciones que gobiernan los fenómenos físicos. El Método de los Elementos Finitos es una de estas técnicas numéricas, muy apropiada para su implementación en computadores.

Cuando se produce la llegada de los primeros ordenadores en la década de los 50, el cálculo de estructuras se encontraba en un punto en el que los métodos de cálculo predominantes consistían en **técnicas de iteración** (métodos de Cross y Kani) que se realizaban de manera manual y por tanto resultaban bastante **tediosos**.

La llegada de la **computadora** permitió el resurgimiento del método de los desplazamientos ya conocidos en siglos anteriores (Navier, Lagrange, Cauchy), pero que eran difíciles de aplicar dado que al final conducían a la resolución de enormes sistemas de ecuaciones inabordables desde el punto de vista manual.

El Método de Elementos Finitos fue inicialmente desarrollado en 1943 por R. Courant, quien utilizó el método Ritz de análisis numérico y minimización de las variables de cálculo para obtener soluciones aproximadas a un sistema de vibración. Poco después, un documento publicado en 1956 por M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, y L. J. Topp estableció una definición más amplia del análisis numérico. El documento se centró en "la rigidez y deformación de estructuras complejas". Con la llegada de los primeros ordenadores se instaura el cálculo matricial de estructuras. Éste parte de la discretización de la estructura en *elementos lineales tipo barra* de los que se conoce su rigidez frente a los desplazamientos de sus nodos. Se plantea entonces un sistema de ecuaciones resultado de aplicar las ecuaciones de equilibrio a los nodos de la estructura.

Con la llegada de los centros de cálculo y los primeros programas comerciales en los años 60, el MEF, a la vez que se populariza en la industria, refuerza sus bases teóricas en los centros universitarios. Dada su generalidad el método se amplió a otros campos no estructurales como la conducción de calor, la mecánica de fluidos, etc. donde compitió con otros métodos numéricos como el *método de las diferencias finitas* que aún siendo más intuitivos, tenían de nuevo dificultades de planteamiento para *geometrías complejas*.

En los años 70 se produce un gran crecimiento de la bibliografía, así como la extensión del método a otros problemas como los **no lineales**. En esta década, el MEF estaba limitado a caros ordenadores centrales generalmente propiedad de las industrias aeronáuticas, de automoción, de defensa y nucleares. Se estudian nuevos tipos de tipos de elementos y se sientan las bases matemáticas rigurosas del método, que había aparecido antes como técnica de la ingeniería que como método numérico de la matemática.

Por último, a partir de la década de los 80, con la generalización de los ordenadores personales, se extiende el uso de los programas comerciales que se especializan en los diversos campos, instaurándose el uso de *pre y postprocesadores gráficos que realizan el mallado y la representación gráfica de los resultados*. Se continúa en el estudio de la aplicación del método a nuevos modelos de comportamiento (plasticidad, fractura, daño continuo, etc.) y en el análisis de los errores.

#### **2. PANDEO DE EULER**

El pandeo por flexión es un fenómeno de inestabilidad elástica que suele darse en elementos comprimidos esbeltos, y que se manifiesta por la aparición de importantes desplazamientos transversales a la dirección principal de compresión. Los desplazamientos descritos se traducen en la aparición de una flexión adicional en el elemento.

La aparición de flexión de pandeo limita severamente la resistencia en compresión de un pilar o cualquier tipo de pieza esbelta. A partir de cierto valor de la carga axial de compresión, anteriormente denominado carga crítica de pandeo ( $P_{cr}$ ), puede producirse una situación de inestabilidad elástica, en la cual la deformación aumentará sin necesidad de incrementar la carga, produciendo tensiones adicionales que superarán la tensión de rotura, provocando el colapso del elemento estructural.

#### 2.1. Revisión teórica del fenómeno

#### 2.1.1. Problema patrón. Elemento articulado-articulado.



Como se vio en el apartado 1.1. el problema planteado por Euler venía definido por la expresión:

$$M + P \cdot y(x) = 0; \ y'' = \frac{M}{EI}; \ \Rightarrow y'' + \frac{P}{EI} y = 0$$
 (2.1)

dicha ecuación se cumple para una geometría senoidal de la deformada, de ecuación:

$$y = A \cdot sen(kx)$$
 siendo **A** una cte.  $y k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ 

con condiciones de contorno:

x=0 y=0 x=L y=0

Imagen 2.1. Pandeo de Euler

La 1ª condición de contorno se cumple en cualquier caso.

Para la  $2^{a}$  condición de contorno tenemos  $0 = A \cdot sen(kL)$ , que es un típico problema de autovalores con 2 posibles soluciones:

• A=0. Es decir, que no puede existir otra deformada que la recta (y=0 sea cual sea el valor de la carga P).

• sen(kL)=0 cualquiera que sea el valor de la constante *A*, y por tanto de la *amplitud de la deformada senoidal*.

Esta última condición se cumple siempre que kL=n, esto es, para valores de la carga crítica

$$P_{cr} = n^2 \frac{f^2 EI}{L^2}$$
 (2.2)

siendo n el número de ondas de la geometría senoidal del soporte comprimido.

Para n=1, tendremos la *carga crítica de Euler*  $P_{cr1} = \frac{f^2 EI}{L^2}$ 

Para otros valores de n, tendremos P<sub>cr2</sub>, P<sub>cr3</sub>, etc.



Imagen 2.2. Modos de pandeo en soporte biarticulado

En síntesis, por tanto, la solución de la ecuación diferencial que representa el comportamiento de la pieza comprimida de Euler, tiene dos soluciones posibles:

I. Una en la que la pieza comprimida permanece recta, *cualquiera que sea el valor P* de la carga aplicada;

II. otra, en la que cuando la carga alcanza su valor crítico,  $P_{CT}$ , la barra pandea con una deformada senoidal *quedando indeterminado el valor de su desplazamiento transversal máximo*  $y_{max}=A$ .

Como ya se comentó, al valor de la carga crítica dado por la expresión de Euler se llega partiendo de unas hipótesis que difícilmente pueden ajustarse a la realidad, y que a continuación recordamos:

• Inicialmente la pieza que va a ser comprimida tiene una geometría perfectamente recta;

• Carga P perfectamente centrada y alineada con la directriz recta de la pieza;

• Material perfecto e indefinidamente elástico manteniendo sus características, cualquiera que sea el nivel de carga;

• Pieza totalmente distensionada y sin tensiones residuales autoequilibradas que puedan influir en su comportamiento.

Por otra parte, la solución de Euler se ha obtenido para unas condiciones muy concretas de sustentación, en este caso, las de un elemento **articulado en sus 2** extremos.

Pasaremos a continuación a resolver el problema de Euler para *diferentes tipos de condiciones de sustentación*, obteniendo en cada caso el valor de  $P_{cr}$ , analizándose más adelante el efecto que el no cumplimiento de las hipótesis ideales tendrá sobre el valor de  $P_{cr}$ .

#### 2.1.2. Elemento empotrado-empotrado



En la figura puede observarse la situación analizada.

Este caso difiere del anteriormente analizado por la aparición de sendos momentos de valor M0 en cada uno de los extremos del elemento, por lo que la nueva ecuación de equilibrio a satisfacer será:

**Imagen 2.2.**Soporte Empotrado-empotrado

$$P \cdot y(x) + M(x) - M_0;$$
  
 $y'' + \frac{P}{EI}y = \frac{M_0}{P}$  (2.3)

La solución de la ec. diferencial mostrada tendrá la forma:

$$y = C_1 sen\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x\right) + \frac{M_0}{P} \quad (2.4)$$

con condiciones de contorno:

De la primera de ellas se obtiene:

$$0 = C_2 + \frac{M_0}{P} \Longrightarrow C_2 = \frac{M_0}{P}$$

Y de la segunda:

$$y' = 0 = C_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} \Longrightarrow C_1 = 0$$

Quedando la solución como:

$$y = \frac{M_0}{P} \left[ 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x\right) \right]$$
(2.5)

Esta solución aún no tiene por qué cumplir las condiciones de contorno de x=L, ya que la curva "y" indicada cumplirá con la condición y=y´=0 para distintos valores de x en función del valor de P, así qie para hacer coincidir el punto x=L con el primer punto y=y´=0 (1er modo de pandeo) de la curva debemos imponer la siguiente ecuación:

$$\cos\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L = 1 \Longrightarrow \sqrt{\frac{P}{EI} \cdot L} = 2fn$$

Resultando el siguiente valor de P<sub>cr</sub> para n=1:

$$P_{cr} = \frac{4f^{2}EI}{L^{2}} = \frac{f^{2}EI}{(L/2)^{2}}$$
(2.6)

Expresión esta última que nos indica que la carga de pandeo para un elemento biempotrado es igual a la de un elemento biarticulado de igual "EI" y longitud "L/2".



Este resultado es lógico, pues como puede observarse en la figura existen puntos de inflexión en la deformada "y" a una distancia L/4 de los apoyos, y por tanto, la parte central se comporta como un elemento biarticulado de longitud L/2 cuya carga crítica de pandeo coincide con la anteriormente definida:

$$P_{cr} = \frac{f^2 EI}{(L/2)^2}$$

## 2.1.3. Elemento empotrado-libre

Procediendo del mismo modo que en el caso anterior, con la misma condición de contorno en x=0:

$$y = \frac{M_0}{P} \left[ 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x\right) \right] \quad (2.7)$$

En este caso, en el extremo x=L deberemos cumplir y<sup>\*\*\*</sup>=0:

$$y'' = \frac{M_0}{P} \frac{P}{EI} \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L = 0 \Longrightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L = \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot f$$

Así, la carga crítica para n=1 será:

$$P_{\rm r} = \frac{\left(\frac{f}{2}\right)^2 EI}{L^2} = \frac{f^2}{(2L)^2} EI \quad (2.8)$$

Imagen 2.4.Soporte empotrado-libre

P

Expresión esta última que equivale a afirmar que la carga de pandeo para un elemento empotrado-libre es igual a la de un elemento biarticulado de igual "EI" y longitud "2L" como se refleja Imagen 2.5.



Imagen 2.5. Longitud de pandeo en soporte empotrado-libre

## 2.1.4. Elemento empotrado-empotrado con apoyo deslizante

El problema es totalmente análogo a los anteriores, obteniéndose la carga crítica de pandeo de imponer la condición y'=y''=0.





**Figura 2.6** Soporte empotrado-Empotrado (deslizante)

Mo

Mo

## 2.1.5. Elemento empotrado-articulado

Este caso difiere de los anteriores, ya que, como puede observarse en la Figura 2.7, al producirse la deformación aparecen en los apoyos unos esfuerzos en dirección  $\dot{y}$ . Por lo tanto, la ecuación de equilibrio que debe satisfacerse en este caso tendrá la siguiente forma:

$$M + P \cdot y + \frac{M_0}{L} \cdot x - M_0 = 0 \qquad (2.10)$$

Que se transforma en:

$$y'' + \frac{P}{EI} \cdot y = \frac{M_0}{EI} \cdot (1 - \frac{x}{L})$$
 (2.11)

La solución para la ecuación diferencial formulada tendrá la forma:

$$y = C_1 sen\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x\right) + \frac{M_0}{P} \cdot (1 - \frac{x}{L}) \quad (2.12)$$

En el extremo x=L, tenemos que y=y"=0, y por tanto tendremos:

$$y = \frac{M_0}{P} \cdot \left[ \frac{1}{L \cdot \sqrt{P / EI}} \cdot sen \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \right]$$
(2.13)

Aplicando las ya conocidas condiciones de contorno en el extremo x=0 se obtiene:

Figura 2.7. Esfuerzos en pilar empotrado-articulado

Mo/L

Y(x)

Mo/L

Mo/L

P

Mo/L

$$0 = y_0 = C_2 + \frac{M_0}{P} \Longrightarrow C_2 = -\frac{M_0}{P}$$
$$0 = y_0 = C_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} - \frac{M_0}{LP} \Longrightarrow C_1 = \frac{M_0}{LP \cdot \sqrt{P / EI}}$$

Con lo cual :

$$y = \frac{M_0}{P} \cdot \left[\frac{1}{L \cdot \sqrt{P / EI}} \cdot sen \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x + 1 - \frac{x}{L}\right] \quad (2.14)$$

La solución distinta de la trivial será:

$$tg\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L = \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \Longrightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L = 2fn + 4,49 \quad \text{y para n=1 tendremost}$$
$$P_{cr} = \frac{(4,49)^2 EI}{L^2} = \frac{f^2 EI}{(0.7 \cdot L)^2} \quad (2.15)$$

Es decir, la carga crítica coincide con la de un elemento biarticulado de longitud  $0,7\cdot L$  y con igual ÉI; lo cual quiere decir que en la figura anterior tendremos un punto de inflexión a un longitud  $0,3\cdot L$  del extremo empotrado, y el resto del elemento se comporta como biarticulado.

## 2.1.6 Longitud de pandeo y curva de Euler

Del estudio de los casos anteriores (correspondientes al pandeo por flexión bajo diversas condiciones de sustentación) se desprende que en cualquiera de ellos la carga crítica de pandeo puede expresarse en la forma:

$$P_{cr} = \frac{f^2}{{L_k}^2} EI \qquad (2.16)$$

Siendo  $L_k$  la longitud de pandeo, que suele expresarse como  $L_k=\beta \cdot L$ , donde es un coeficiente que depende de las condiciones de contorno y que indica qué tanto por ciento de la longitud total de la barra se ve afectada por el pandeo.



Imagen 2.9. Longitudes de pandeo

En la figura anterior y de izquierda a derecha el coeficiente toma los siguientes valores:

=1 (articulado-articulado),

=0.7 (empotrado articulado)

=0.5 (empotrado-empotrado)

=2 (empotrado-libre)

La expresión de la cargas crítica puede modificarse haciendo uso de la ecuación  $I=A\cdot i^2$ , donde "A" es el área de la sección e "i" es el radio de giro según el momento flector. Procediendo de este modo se obtiene:

$$\dagger_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{f^2 E}{(L_k / i)^2} \quad (2.17)$$

El factor  $L_k/i$  se denomina habitualmente **esbeltez** y permite expresar la tensión crítica de pandeo de un modo unívoco sean cuales sean las condiciones de apoyo:

$$\dagger_{cr} = \frac{f^2 E}{\}^2} \quad (2.18)$$

En la siguiente figura se representa la tensión cr en función de la esbeltez, obtenida a partir de la ecuación anterior con E=2.1·10<sup>6</sup> Kg/cm<sup>2</sup>. Esta curva, conocida como *curva de pandeo* o *curva de Euler*, es suficiente para obtener la tensión crítica de un elemento de acero (o de cualquier otro material sin más que cambiar el valor de E) cualesquiera que sean sus condiciones de apoyo, y como veremos más adelante, la normativa actual la emplea como base para el diseño "seguro" frente a pandeo de estructuras metálicas.



Imagen 2.10. Curva de Euler

Se muestra también a continuación una imagen real de barras de acero que han sido sometidas a compresiones mayores o iguales a la crítica correspondiente a sus condiciones de sustentación. De izquierda a derecha pueden observarse las compresiones realizadas a un elemento biarticulado (2.1.1.1), biempotrado (2.1.1.2), empotrado articulado (2.1.1.5) y empotrado libre (2.1.1.3)





#### 2.1.7. Limitaciones a la teoría de Euler. Pandeo real.

Como vimos anteriormente Euler partió de unas hipótesis muy claras que simplificaban y hacían posible el análisis de la pieza comprimida. Estas hipótesis, en base a la observación y el estudio empírico, presentan claras incoherencias con el comportamiento real.

La causa de las incoherencias entre comportamiento real y teórico de la pieza comprimida se encuentra en las mencionadas hipótesis de las que Euler, conscientemente, partió para establecer la ecuación diferencial.

Ninguna de las "perfecciones" supuestas son atributos de la pieza real. Euler modelizó una pieza ideal, sin imperfecciones. La "pieza real", en contra de lo ocurrido con la "pieza perfecta o ideal" de Euler, se caracterizará por los siguientes rasgos:

• Su directriz no será nunca perfectamente recta. Es inevitable una **deformación inicial** de geometría impredecible.

• La carga no estará nunca perfectamente centrada. Es inevitable una cierta **excentricidad de las carga**s aplicadas.

• El material de la pieza no tiene un comportamiento indefinidamente lineal y elástico, por lo que no es indiferente el nivel de cargas y deformaciones a las que estará sometido.

• Los procesos de fabricación y manipulación de las piezas y los efectos de las condiciones ambientales (gradientes de temperatura, por ejemplo), generan inevitables **tensiones residuales** que se auto equilibran pero que afectan al comportamiento de la pieza real.



Imagen 2.11. "Imperfecciones" de la pieza real

Pasamos a continuación a analizar la influencia que estos factores, anteriormente obviados, tienen sobre la validez de la teoría desarrollada hasta ahora:

En el apartado 2.1.1.6. obtuvimos la expresión de la tensión crítica de Euler en función de la longitud característica y el radio de giro de la sección, resultando:

$$\dagger_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{f^2 E}{(L_k/i)^2} \Longrightarrow \dagger_{cr} = \frac{f^2 E}{\}^2}$$
  
: esbeltez de la pieza

La esbeltez de la pieza, definida como la relación entre la longitud de pandeo y el radio de giro mínimo de la sección transversal de la pieza, es un parámetro sumamente importante en el problema de pandeo. Efectivamente, **cuanto más esbelta es una barra mayor es el riesgo de pandeo**. Esto puede deducirse sin más que observar la expresión de la tensión crítica de Euler, que depende inversamente de la esbeltez.

Podemos representar la función  $\sigma_{cr}=f()$  y al hacerlo vemos que cuando tiende a cero, la tensión crítica de Euler tiende a infinito.

La fórmula de Euler fue deducida bajo la hipótesis de la validez ilimitada de la Ley de Hooke por lo tanto la misma solamente es válida si  $\sigma_{cr} < \sigma_p$  (límite de proporcionalidad):

La esbeltez límite para la cual tiene validez la Ley de Euler será:

$$\dagger_{cr} = \frac{f^2 E}{\}^2} = \dagger_p \Longrightarrow \}_p = f \sqrt{\frac{E}{\dagger_p}} \qquad (2.19)$$

Para el acero p=103,9 y  $\dagger_{cr} = \frac{f^{2}0E}{\}^{2}}$  para cualquier p 103,9



Imagen2.12. Curva "real" de pandeo

Como se observa en la figura anterior, en la zona comprendida entre esbeltez cero y p, la fórmula de Euler debe ser reemplazada por otra ley que contemple el comportamiento elastoplástico del material (región  $\sigma_{crk}$ ), aunque habitualmente se acepta el uso de la curva de Euler hasta alcanzar  $\sigma_{cr}=f_y$ , como pudo apreciarse en la curva mostrada en la Imagen 2.10.



#### 2.2. Normativa de aplicación CTE DB SE-A

Revisaremos ahora el tratamiento que se da al fenómeno analizado (pandeo de Euler) en las normativas de aplicación españolas relativas a estructuras de acero: Código Técnico de la Edificación (CTE). SE-A.

Los criterios aplicados para asignar una cierta capacidad resistente a las **secciones**, así como los criterios de plastificación aceptados para establecer los límites últimos resistentes se recogen para cada caso en el *ANEXO I* al final de este documento. Se incluye también en este anexo la clasificación relativa a los tipos de sección contemplados, y los *artículos, tablas y figuras* necesarios para la obtención de algunos coeficientes empleados en las expresiones que se recogen en este apartado.

Nos centraremos aquí en las expresiones de aplicación para la comprobación de **barras** en prevención de la aparición del tipo de inestabilidad analizado en este apartado.

El documento de Seguridad Estructural para Acero (SE-A) del CTE es un Documento Básico destinado a verificar la seguridad estructural de los elementos metálicos realizados con acero *en edificación*.

Como ya hemos comentado se incluyen a continuación las expresiones a aplicar para la comprobación de elementos rectos de sección y axil constantes, emplazando al apartado de anexos las aclaraciones referentes a la obtención de alguno de los componentes de dichas expresiones.

Así, el CTE SE-A admite que la capacidad a pandeo por flexión para el caso que nos ocupa puede tomarse como

$$N_{b,Rd} = \cdot A \cdot f_{yd}$$

donde A,  $f_{yd}$  y el *coeficiente de pandeo* se calculan de acuerdo a lo establecido en los artículos 6.3.2 y 6.3.2.1 recogidos en el **Anexo I**.

#### 2.3. Caso analizado

#### 2.3.1 Presentación del modelo

En este primer análisis someteremos a una **pieza de sección maciza rectangular y constante a una carga de compresión** que incrementaremos hasta alcanzar la inestabilidad, que en este caso se manifestará en la forma del *pandeo de Euler* estudiado en el *Apartado 2.1* de este documento.

Las características geométricas de la sección se muestran a continuación:



Imagen 2.20. Sección y longitud de la barra analizada

La calidad del acero empleado corresponde a la gama **S275** (cuyo límite elástico se sitúa en los 275 Mpa).

## 2.3.2 Cálculos teóricos

Antes de comenzar con la obtención de los resultados será necesario definir algunos parámetros que caracterizan a la sección bajo estudio, tales como el momento de inercia en una y otra dirección, los radios de giro, etc.

Para la sección descrita en la Imagen 2.20 tendremos:

$$I_{y} = \frac{1}{12} bh^{3} = \frac{0.01 \cdot 0.03^{3}}{12} = 2.25 \cdot 10^{-8} m^{4} ; \quad i_{y} = \sqrt{\frac{I_{y}}{A}} = \sqrt{\frac{2.25 \cdot 10^{-8}}{3 \cdot 10^{-4}}} = 8.66 \cdot 10^{-3} m$$

$$I_{z} = \frac{1}{12} hb^{3} = \frac{0.03 \cdot 0.01^{3}}{12} = 2.50 \cdot 10^{-9} m^{4} ; \quad i_{z} = \sqrt{\frac{I_{z}}{A}} = \sqrt{\frac{2.50 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-4}}} = 2.88 \cdot 10^{-3} m$$

Además, para el acero tendremos E=210 Gpa =  $210 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ 

Deberemos determinar también cual es la *dirección predominante de pandeo*, es decir, el eje alrededor del cual se alcanzará la inestabilidad en primer lugar, que corresponderá al de **mayor esbeltez**.

La esbeltez quedó definida en el *Apartado 2.1.1.6* como la relación  $j=L_k/ij$  donde  $L_k= \cdot L$  recibía el nombre de *longitud de pandeo*, y dependía de las condiciones de contorno de la pieza analizada.

$$\begin{cases} \lambda_{\rm y} = \frac{0.5 \cdot 1}{8.66 \cdot 10^{-3}} = 57.74 \\ \lambda_{\rm z} = \frac{0.5 \cdot 1}{2.88 \cdot 10^{-3}} = 173.6 \end{cases}$$
 con lo que finalmente  $\lambda_{\rm max} = \max(57.74, 173.6) = 173.6 = \lambda_z$ 

Una vez comprobado que el eje predominante de pandeo es el z (eje débil), estamos en disposición de realizar los cálculos correspondientes.

La obtención de la carga crítica teórica para el caso ensayado es inmediata, sin más que aplicar la expresión de la carga resultando:

$$N_{\rm cr} = \frac{\pi^2 E I_z}{(0.5 \cdot L)^2} = 20.727 \text{ KN}$$

#### 2.3.3 Cálculo según normativa de aplicación CTE DB SE-A

En el *Apartado 2.1.2.1* se incluyeron todas las referencias necesarias de la norma CTE. SE-A para afrontar el análisis de piezas afectadas por pandeo de Euler. Así, según se recoge en el *Artículo 6.3.2* (ver *Anexo I*), la resistencia de cálculo a pandeo por flexión de una barra de sección constante viene dada por la expresión:

con  $f_{yd} = \frac{f_y}{M_1}$ , siendo en este caso M1=1,05  $\overline{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \begin{cases} \lambda_1 = 86.8 \\ para acero S275 \end{cases} = 1.995$ 

$$\Rightarrow f_{yd} = \frac{275 \cdot 10^6}{1.05} = 2.62 \cdot 10^8 \frac{N}{m^2}$$

El *coeficiente de pandeo* () puede determinarse en función de la esbeltez reducida y de la curva de pandeo oportuna, de acuerdo a lo establecido en el *Artículo* 6.3.2.1. Así:

$$\overline{\lambda} = \sqrt{\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{f}_{y}}{\mathbf{N}_{cr}}} = \frac{\lambda}{\lambda_{1}} = \begin{cases} \lambda_{1} = 86.8\\ \text{para acero } S275 \end{cases} = 1.995$$
(4.5)

en la que para el cálculo de N<sub>cr</sub> se admite el uso de la expresión de Euler

Consultando la *Tabla 6.1* incluida en el *Anexo I*, las secciones *macizas* son remitidas a la *curva de pandeo*  $_{,c}c''$  (ver Tabla 6.3). Entrando en la tabla mencionada para un valor de =1.995 tenemos el siguiente valor del coeficiente de pandeo

Se obtiene así finalmente un valor de la carga crítica de cálculo

$$N_{b,Rd} = \cdot A \cdot f_{vd} = 0.1965 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot 2.62 \cdot 10^{8} = 15.445 \text{ KN}$$
(4.6)

Como vemos, resulta un cálculo más conservador que el realizado en el apartado anterior por aplicación de la teoría de Euler.

## 2.3.4 Cálculo mediante DLUBAL Elementos finitos

En este epígrafe vamos a realizar el cálculo mediante DLUBAL Elementos Finitos, se va a seguir paso a paso la modelado y resolución del caso.

#### 1.-MODELADO

Abrimos un nuevo archivo y lo llamamos Pandeo de Euler y aceptamos.

57 R	FEM 5.02	.0053 (64b	it) Tria	I - [Abolla	dura-barra	9]
	Archivo	<u>E</u> dición	Ver	Insertar	<u>C</u> álculo	Re
1.9	- 9/	1- 7	-195	8: 0	Pr - 9	∝ <u>†</u> z
	23	Nuevas	barra:	simples		9
Nave	nador de	provectos	Datos		2. <b>R</b> 22	×

Pulsamos en nueva barra simple y seleccionamos una sección de las dimensiones

indicadas: 10x30 mm.

ucva barra	<u>×</u>
General Occiones   Langitudes eficaces   Modificar rigides	2
Earra núm.	Tipo de barrs
, Nudo núm.	FL 10x30
Ciro do barra por Ciro do barra por C Anguo & 0.00 - P [1] C Nudo a cellar Núm: Intenor V 5	y .
Soción Inicio de Jarra, 1   FL 10x30   Acero S 235	
Articulación en barra	
Fin de barra: Ninguno	
	Aceptar Cancelar

Vamos a marcar el origen y longitud de la barra.

Ludonú≂, Jnco	nům	Зата под
2	: 🖏	1
Cuordenaulse	Moda d	e er o sda
8:         0.000 +         (m)           9:         0.000 +         (m)           2:         0.000 +         (m)           4:         0.000 +         (m)           5:         0.000 +         (m)           6:         0.000 +         (m)           6:         0.000 +         (m)           0:         0.000 +         (m)	© Nuc O tan Upter o [ []Lon	o / punto co co y de [17] y de con gatud y dirección y dirección
n N N N N N N N N N N N N N N N N N N N	ېرې د ا	neenaulamente a siba quo er staro de tratajo * ∰  * at 2000 (≙ ) [m] nomb (☆) [m]

Aceptamos e introducimos las coordenadas de origen de la barra (0,0,0).

Aceptamos e introducimos las coordenadas del final de la barra (1.2,0,0).



Ya tenemos nuestra barra.

General Opeiones Longitudes eficaces Modificaring doz	
Darra núm.	
Factores de longitudes eficaces         Longitudes eficaces           kor,y :         0.500 + (m)           []         Lor,y :         0.603 (m)           kor,z :         0.500 + (m)	Darra plana 30/10
Longitud de barra L : 1.200 [m]	Carga crítica de pandeo Nor : 14.38 [KN] Comprobar el exceso de carga de pandeo crítica en el cálculo

Ajustamos la longitud eficaz de pandeo según el coeficiente que le corresponde, en este caso, 0,5.

Ahora vamos a convertir el modelo en superficies para proceder al calculo mediante EF Seleccionamos la barra y clicando botón derecho elegiremos *Generar superficies desde barras-Generar*.

000	augues long Should Weens augunes (claus 1999	1	
10	Sistema de coordenadas		
fint.	Plano de trabajo, rejilla/forzar cursor, referencia a objetos, líneas auxiliares		EP 30AX6
	Seleccionar plano de trabajo		# 2323-34-
1	Rejilla		
#2	Multiplicar separación de rejilla x2		
72	Dividir separación de rejilla x2		
13	Importar reacciones en aboyos como carga		
×	Conectar lineas/barras		
53	Comprobación plausible		
	Comprobación del modelo	ь	
	Filminar targas		/
	Generar modelo - Barras	۲	
	Generar modelo - Superficies	•	
	Generar superficies desde barras		ᡒ Configuración
	Generar cargas	•	4 Generar
10	Convertir carga en nudo/lineal en carga supeficial		
-5-	Definir línes paralela		
de	Definir barra paralela		

Vamos a definir el empotramiento de la barra.



Pulsamos el botón Nuevo apoyo en nudo y seleccionamos empotrado.

Lo aplicamos en el nudo superior de la barra obteniendo el resultado de la imagen inferior.

Para el nudo inferior vamos a elegir un empotramiento con desplazamiento en Z.

рсуо пит.	En los nudos núm.	
2		
Bino del apoy		
iecuencia:	Grado en torno e	
X7Z -	×   0.00 €€ [*1	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
	Y 0.00 🗐 👔	
	Z 0.00 ÷ [*]	
Apoyo elástic	u pur	
Pilar en Z		
Aprovo	Constante eléctica	No Ineal dad
I	C <sub>uX</sub> :	Ni guna • 🛛 💬
V .7	C., y.	Nrg_na 🔹
7:	Cu.z . The second second	Nrguna 🔹
lencoión		
I¥l av:	C. Y :	Narguna 🔹 🐨
2 9r	G <sub>g</sub> ,∽: ≜• (d4m/ad)	Ning na 🔻 🐻
El ∉z:	Ca, ≠ : 0 000 ÷ [ [kNm/rad]	Nirg.na 🔹 🐨
<b>m</b>		
comentario		



Ya tenemos nuestro modelo correctamente definido.

## 2.-INTRODUCCIÓN DE CARGAS

Vamos a proceder a introducir una carga unitaria en el extremo libre de la barra.



Seleccionamos Nueva carga en barra

entities and Accorde Conserve de co	ronecări Galarestrasies	ecomes Cashrespherics te tage Dinformatives	de est radas	
ison co erga oktáloron	COL	Descripcies and eccardo carga	and the second	log ngova
E C. Carona chaile		amprove		<u>3</u>
	Great Automa	SI-Caller		
	alore as re-		1118 - BH	
	G -emercies			
	-			
	made:			
	a in La	6		
	2	ž.		
		1		
	1	10		
	8 C - 10			
	0 330			
	10000			
	00000000			
	10 100 s			
and the second	· Second			
H H 2 L 1/ 25 84	X		- 🧟	

Se nos abre la pantalla para configurar los casos de carga. Para este primer caso desactivamos el peso propio.

Editar carga er	n barra							
Nor	Referencia a	I n las h	arras núm		Tipo de carda "Fuerza"			
1	@ Rama	1			Disbibución de carga "Uniform	ie"		
	D Usta de bar D Conjuntos d	ati 9 Vetitals	(			TP		
lipo de carga		Distribución de carga	Dirección de carga					
🐵 Filoza		P intual	Local	⊜ x				
() Momento		F +	res de bars	Øv ⊡u	i•			
() Temperatu	n	(B) Unforme		ার্চার 🖂 🖉				
⑦ Eelomack ⑦ Eesplazan	orrazial ie lu avial	<ul> <li>Trapezoidal</li> <li>Cuadrangular</li> </ul>	Global referida a la longitud real de barra	© X © Y ⊛ ZL				
<ul> <li>Controllect</li> <li>Pretensede</li> <li>Pretensede</li> </ul>	hn o mickei o final	C Parabolica	Clobal referida a la longitud proyectada de barra:	(C) X <sup>1</sup> (C) Y <sup>2</sup> (C) Z <sup>2</sup>	Dirección de carga "Global ZU			
C Exita.	miento - 🖓				Y*	I Day		r.
Professora de	e carga				- Z	ż		
	msks] == 000.  msks] == 000.  msks] == 000.	A: E. Listancia Carca sub	(m) (숙) (m) elativa en % e la fongtud total de		-* 555			e 1mn 4
		Daria						-a-
Comentario				- [10				
0 3					A	peptar Cancelar	_	

[-STADI_ITY - [a ver.]					
Archivo Configuración Ayuda	1				
CA1 Anáisis de estabilidad 🔫	21 Factores	s de carga critica			
Datos de entrada	Mada	A bader de parte oritien	R bottor do mayoritairen	C.	
Resultados	núm.	f [-]	«[·]	Mensaje	
Factores de carga crítica	1	23.649	1.044		
Vectores propios por superficie	2	46 739 76 277	1 022		
	1	114.670	1.009		
	5	129.431	1.008		
	7	215.420	1.005		
	8	263.502	1.004		
		1.		Manua initata da la antir de deidas 0.000000	
C III F	]				
			Gielo	U	Aceptar Cancelar
			Gero	U	Aceptar
-STADLITY - (e ver.)			Grand	U	
r-STADILITY - (a ver.) Archivo Configuración Ayuda	1		Grand	0	Aceptar Cancela
F-STADILITY - (a ver.) Archivo Configuración Ayuda	a 21 Factore	s de carga crítica	Gau	U	Aueplar Cancela
F-STADILITY - (a ver.) Archivo Configuración Ayuda	1 21 Hactore	s de carga crítica			Accular Cancela
C-STABILITY - [e ver.] Archive Configuración Ayuda CA1 Anóisis de estabilidad Usatos de entrace Unatos de entrace	21 Hactores	o de carga crítica A Antonio de parga crítica	B Factor de navoración	c.	Auspilar Cancela
F-STAULITY - Je ver.] Archivo Configuración Ayuda CA1 Anàlais de estabilidad Uatos de enrace 	21 Factore: Modo núm.	s de carga crítica Faciliz de barga crítica f (-)	B Hactor de nayoración «[]	C. Mensaje	
CAT Análois de catabildod  Archivo Configuración Ayuda  CA1 Análois de catabildod  Uatos de entraca  Datos generales Resultados  Resultados Pactores de carga oráca Pactores de carga oráca Pactores de carga oráca	21 Hactores Modo núm.	s de carga crítica Nador de barga crítica f (-) 223.619	R Actor de nayoración & C. 1044	C. Mensaje	Aceptar Cancela
	Modo núm.	s de carga critica Hador de barga critica 1 [c] 23.649 46.733 76.272	B Factor de nayoración « [] 1.044 1.022 1.013	C. Mensaje	Accular Cancela
F-STAULITY - [e ver.] Archivo Configuración Ayurla CA1 Anóisia de catobildad Datos de enraca: Datos generales Resultados Pactores propos por nudo Vectores propos por nudo Vectores propos por nudo	Modo núm. 1 2 3 4	c de carga critica A Contra C	R Factor de nayoración ∞ [] 1.044 1.022 1.013 1.009	C. Mensaje	Accular Cancela
F-STABILITY - [e ver.] Archivo Configuración Ayuda CA1 Análais de catabildod • CA1 Análais de catabildod • CA1 Análais de catabildod • - Catos quere des Resultados - Pactores de carga crítica - Vectores propios por superficie - Vectores propios por superficie	Modo núm.	c de carga critica A clor de paga critica 1 (c) 23.649 44.733 76.277 114.670 125.431	R Factor de navoración & [-] 1.044 1.072 1.013 1.009 1.008	C Mensaje	
F-STAULITY - [e ver.] Archivo Configuración Ayurla CAL Anáisia de estabilido Datos de entrace Datos de entrace - Declus guerendes Resultados - Factores de carga crítica - Vectores propios por nuío - Vectores propios por superficie	Modo núm. 1 2 3 4 5 6 7	c de carga crítica A contra carga crítica 1 (-) 23.649 46.733 76.277 114.673 124.431 100.459 216.459 216.459	B Factor de mayoración α[] 1.044 1.022 1.013 1.009 1.008 1.006	C. Mensaje	
F-STABILITY - le ver.] Archivo Configuración Ayuda CA1 Anáisia de estabilidad  Uatos de entrade Uatos de entrade C-Deus guerendes Resultados Pactores de carga oritica Vectores propios por superficie	Modo núm. 1 2 3 4 5 6 7 8	s de carga crítica Hador de barga crítica 1 (-) 23.649 46.733 76.277 114.673 76.277 114.673 160.459 215.420 203.502	B Hactor de nayoración «[] 1.044 1.022 1.013 1.009 1.008 1.006 1.005 1.004	C. Mensaje	Accular Cancela
F-STAULTY - [e ver.] Archivo Configuración Ayuda CA1 Anáisia de estebilido Usos de enrace Deus generales Resultados Pactores de carga critica Vectores propios por nudo Vectores propios por superficie	Modo 1 21 -actore: Modo 1 2 3 4 5 6 7 7 8	r de carga critica Hader de barga critica 1 (-) 23,649 46,733 76,277 114,670 129,431 160,459 215,420 260,502	B Hactor de nayeración @ [] 1.044 1.022 1.013 1.009 1.009 1.005 1.005 1.004	C. Mensaje	Aceptar Cancela
F-STABLITY - [e ver.] Archivo Configuración Ayuriz CA1 Análisis de catobilidad Labora de anraca Delus generales Resultada Pactores de carga oráca Vectores propos por nudo Vectores propos por superficie	Modo núm. 1 2 3 4 5 6 7 8	z de carga critica Hador de barga critica 1 (-) 23,649 46,733 76,277 114,670 124,431 160,459 215,420 203,502	R Factor de navoración ∞ [] 1.044 1.022 1.044 1.099 1.009 1.009 1.005 1.004	C. Mencaje	
I-STABLITY - [e ver.] Archivo Configuración Ayudz CA1 Análais de catabildod CA1 Análais de cata	Modo 1 21 Factores Modo 2 3 4 5 6 7 7 8	s de carga critica A Factor de parga critica 1 (c) 23.643 44733 76.277 114.670 129.431 160.459 215.420 263.502	B Factor de mayoración ∞ [-] 1.044 1.072 1.013 1.009 1.008 1.005 1.004	C Nensaje	
	Modo Modo 1 2 3 4 5 6 7 7 8	c de carga critica Adorde paga critica 1 (-) 23.649 44.733 76.277 114.670 129.431 160.459 215.420 203.502	B Factor de navoración #[-] 1.044 1.02 1.043 1.003 1.003 1.004 1.005 1.004	C. Nensaja	
	21 Factore Modo núm. 1 2 3 4 4 5 6 7 7 8	c de carga critica A contra carga critica 1 (-) 23.649 46.733 76.277 174.631 160.459 215.429 20.502	B         μ           Hactor de mayoración         α [1]           1.044         1022           1.013         1.009           1.005         1.005           1.004         1.005	C. Mensaja	
	21 Factore Modo núm. 2 3 4 5 6 7 8	c de carga critica hador de baga critica 1 (-) 23.649 46.733 76.277 114.673 128.431 160.459 215.423 203.502	B etcl of enzyoracion [] 1.044 1072 1.013 1.009 1.009 1.005 1.005 1.004	C. Mensaje	
-STADILITY - [e ven] Arnivo Configuración Ayuda Al Anóisis de estabilidad - Delus generales - Delus generales tesuitado Pactores de carga crítica Vectores propos por nudo Vectores propias por superficie	21 -actore Modo 1 2 3 4 5 6 6 7 7 8	z de carga critica Hador de barga critica 1 (-) 23,649 46,733 76,277 114,670 124,431 160,459 215,420 203,502	R         Image: Control of the mayoracion w [-]           ∞ [-]         .044           1 022         1.013           1 009         1.004           1 005         1.004	C. Mensaje	
-STADILITY - [a ven] Archivo Configuración Ayudz Archivo Configuración Ayudz Archivo Configuración Ayudz altode entracaDelus yenerales Less ItadaPactores de carga críticaVectores propos por nudoVectores propos por superficie	21 Factore Modo núm. 2 3 4 5 6 7 8	z de carga critica Haclor de parga critica 1 (c) 23.643 44733 76.277 114.670 129.431 160.459 215.429 263.502	B Factor de mayoración ∞ [-] 1.044 1.022 1.013 1.009 1.008 1.005 1.004	C Mensaja	
-STADILITY - [e ven] Archivo Configuración Ayudz A1 Anóisis de establidod	21 Factore Mada núm. 1 2 3 4 5 6 6 7 8	c de carga critica Hador de paga critica 1 (-) 23.649 46.733 76.277 114.670 129.431 160.459 215.429 203.502	B Factor de navoración #[] 1.044 1.02 1.013 1.009 1.005 1.005 1.004	C. Nensaja	
-STADILITY - [e ver.] Archivo Configuración Ayudz A1 Anóisis de estabilidod  - Delus guerades tesu tadas - Delus guerades tesu tadas - Pactores de carga crítica - Vectores propios por superficie	21 Factore Modo núm. 1 2 3 4 4 5 6 7 7 8	c de carga crítica A A A A A A A A A A A A A A A A A A A	B         μ           Hactor de mayoración         α [1]           1.044         1022           1.013         1.009           1.005         1.005           1.004         1.005	C. Mensaje	
-STADLITY - [a ven] An Anôiais de estabilidad An Anôiais de estabilidad - Secores generales - Vectores propios por nudo - Vectores propios por superfeie	21 -actore Modo 1 2 3 4 5 6 7 8	s de carga critica Hador de barga critica 1 (-) 23,649 46,733 76,277 114,670 128,431 160,459 215,420 203,502	R         μ           Hactor de navoración         (1)           α [.]         1.044           1 072         1.013           1 009         1.006           1 005         1.004           1 005         1.004	C. Mensaje	Accplar
-STADILITY - [e ven] Arnivo Configuración Ayuda Al Anóisis de establidad  -Tabos de enraceDelus generales Resultado Pactores de carga crítica Vectores propos por nudo Vectores propis por superfice	21 -actore Modo 1 2 3 4 5 6 6 7 7 8	z de carga critica Factor de parga critica 1 (-) 23.649 46.733 76.277 114.670 124.431 160.459 215.420 203.502	R Factor de nayoración ∞ [] 1.044 1.022 1.004 1.009 1.009 1.009 1.005 1.004	C. Mensaja	Accplar Cancela
-STADILITY - [a ver.] Archivo Configuración Ayudz Al Anóisis de establidod  -Index serverales -DeLus generales SesúrtadosPactores de carga críticaVectores propos por nudo - Vectores propos por superficie	Additional and a second	s de carga crítica Hadior de parga crítica 1 (-) 22.649 44733 76.277 114.670 124.431 160.453 215.420 203.502	B Factor de mayoración ∞ [-] 1.044 1.072 1.013 1.009 1.006 1.005 1.004	C Nensaja	Aceplar Cancela
-STADILITY - [e ven] Archivo Configuración Ayudz Al Anóisis de establidod	21 Factore Modo 2 3 4 5 6 6 7 8	s de carga critica Hador de parga critica 1 (-) 23.649 44.733 76.277 114.670 129.431 160.493 215.420 263.502	R Factor de mayoración ∞ [-] 1.044 1.024 1.044 1.029 1.006 1.006 1.005 1.004	C. Nensaja	Aceplar Cancela
F-STABILITY - [e ver.] Archivo Configuración Ayudz CA1 Análisis de estabilidad  CA1 Análisis de estabilidad CA1 A	21 Factore Modo núm. 1 2 3 4 5 6 7 8	s de carga critica Factor de paga critica 1 (-) 23.649 44.733 76.277 114.670 129.431 160.459 2151.459 2151.20 263.502	B Factor de navoración ∞[] 1.044 1.024 1.044 1.027 1.013 1.009 1.005 1.004 1.004	C. Mensaje	Aceptar Cancela
F-STAULITY - [e ver.] Archivo Configuración Ayura CA1 Análisis de catabilidad • Index de carga critica Pactores propos por nudo Vectores propios por superficie	21 -actore Mpdb 1 2 3 4 5 6 7 8	z de carga critica 1 (-) 23,649 46,733 76,277 114,673 124,431 160,459 215,423 203,502	R Factor de nayoración ∝[] 1.044 1.022 1.044 1.022 1.004 1.005 1.005 1.004	C. Nensaje	Accplar Cancela
F-STABLITY - [e ver.] Archivo Configuración Ayura CA1 Análais de catobildod • CA1 Análais de catobildod • Delos generales Resultado - Pactores propos por nudo - Vectores propos por nudo - Vectores propos por superficie	A 21 Factores Modo 3 4 5 6 7 7 8	z de carga critica Hador de parga critica 1 (-) 23.649 46.733 76.277 114.670 124.431 160.459 215.420 203.502	R Factor de mayoración ∞ [] 1.044 1.072 1.013 1.009 1.005 1.005 1.004	C Nencaje	Accplar
F-STAULITY - [e ver.] Archivo Configureción Ayudz CAL Anóisis de catabildod  CAL Anóisis de catabildod CAL Anóisis de catabildod CAL Anóisis de catabilidod CAL Anóisis de catabilido	2 1 Factore Modo núm. 1 2 3 4 5 6 7 8	z de carga critica Factor de parga critica 1 (-) 23.649 44733 76.277 114.670 129.431 160.499 215.420 263.502	B         Image: Control of the image is a control of the image	C. Nensaja	Aceptar Cancela
F-STABILITY - [e ver.] Archivo Configuración Ayudz CA1 Análisis de catabildod • Celus guerades Resultados Pactores de carga critica Vectores propos por nudo Vectores propos por superficie	21 Factore Modo núm. 2 3 4 5 6 7 8	z de carga critica Hactor de parga critica 1 (-) 23.649 44.733 76.277 114.677 114.677 125.431 160.459 215.429 263.502	R         Image: Control of the image is a control of the image	C. Nensaje	Accplar
F-STAULTY - [e ver.] Archivo Configuración Ayuda CA1 Análisis de catabilidad * Delos generales Resultados Pactores de carga crítica Vectores propios por nudo Vectores propios por superficie	21 -actore Modo 1 2 3 4 5 6 7 8	z de carga critica 1 (-) 23.649 46.733 76.277 114.670 128.431 160.459 215.420 203.502	B         Image: Pactor de mayoración ∞ []           4 [.]         1.044           1 072         1.013           1 009         1.004           1 005         1.004           1 005         1.004	C. Mensaje	Accplar Cancela
	21 -actore Modo 1 2 3 4 5 6 6 7 7 8	z de carga critica Factor de parga critica 1 (-) 23,649 46,733 76,277 114,670 124,431 160,453 2(51,42) 2(51,42) 2(51,42) 2(51,42)	R         Image: Constraint of the mayoracion w []           % []         1.044           1 022         1.013           1 009         1.006           1 005         1.004	C Mensaja	
STADILITY - [e ver.] Arnivo Configuración Ayudz A1 Anóisis de establidad • - Delus yenerales Essistado - Pactores de carga crítica - Vectores propos por nudo - Vectores propos por superfe	21 Factore Modo 3 4 5 6 7 7 8	z de carga crítica Hador de parga crítica 1 (-) 23.649 46.733 76.277 114.670 124.431 160.459 215.420 203.502	B         Image: Control of the image is a control of the image	C Nemaje	
-STADILITY - [e ver.] Archivo Configuración Ayudz Al Anóisis de estabilidad • -Delus generales testistado Pectores de carga crítica Vectores propos por nudo Vertores propios por superfeie	2 1 Factores Modo 1 1 2 3 4 4 5 6 7 7 8	z de carga critica Hador de parga critica 1 (-) 23.649 44 733 76.277 114.670 129.431 160.459 215.429 263.502	B Factor de mayoración ∞ [-] 1.044 1.072 1.013 1.099 1.008 1.005 1.005 1.004	C Nensaje	

Aceptamos y se abre la ventana para configurar la carga.

Seleccionamos una carga puntual de valor 1kN en el eje Z y la aplicamos en el extremo con libertad en Z. Aceptamos y veremos la carga aplicada en el punto deseado.

## 3.-CÁLCULO



Como deseamos analizar las posibles inestabilidades en esta barra, vamos al módulo específico que DLUBAL tiene para este fin: RF-STABILITY.

Ponemos 8 como número de valores propios y pulsamos calcular.

Archive Configuración /	lyuda		
CAT Auflishub colublidat	<ul> <li>14 Datos cenerales</li> </ul>		
Le tos de antrada	General	Métado de cáliculo	
• - Dettas generales	Norman consider any order of the index is a factor in a factor of the second	ArcTine, Lever Aduration @ ArcTine Constraints program © Companissemental bases at table do to computer to a state of table to a state of the state of table to a state of table to @ Kolland prover professional to bottome to # Kolland professional to # Kolland professional to bottome to # Kolland pr	BILITY
	Cara (randomich de la sje   201 - Cara a semannite v Oppones  # Unordene réfetos fivorables deados a sacado  # Unordene chará aveca de la sera random	<ul> <li>Précos de travestin ICS</li> <li>Précos de travestin ICS</li> <li>Pode travestin</li> <li>Précos de travestin la comprobación y determinación de la enstitutad</li> </ul>	-STA
	Activer preference in del minimo per este sy      entre solo este sy     Activer preference in del minimo per este sy     Extiner monfractores de radiat desce R/D4     Express reductores adves ministrats	More that A sector the matrix commutator $\Theta_{i}$ is a gap but $1$ $O_{i}$ is gap that $2$ $O_{i}$ is gap that $2$ or $i \neq 0$ $O_{i}$ is gap to $i \neq 0$ . $O_{i}$	
	ran y tradineción fer a ge  UCI-Logo sermanente = +  UCI-Logo sermanente = +  UCI-Logo sermanente  UCI-Log	Configuration pore golfen. Mil Petrar grave toronomies locales de bat de totoxe ora 2.222 - 1 [-]	por el métada de valores propios
	Comortante	1	4

#### 4.-RESULTADOS

La primera ventana que obtenemos en resultados es la de los factores de carga crítica, en este caso es de 21.649. Es decir que la carga crítica será: 1 x 21.649=21.649 kN.

	A	В
Modo núm.	Factor de carga crítica f [-]	Factor de mayoración α [-]
1	21.649	1.048
2	33.224	1.031
3	43.286	1.024
4	72.249	1.014
5	108.840	1.009
6	132.558	1.008
7	153.082	1.007
8	205.434	1.005

Si pulsamos en gráfico podremos ver los efectos producidos para cada valor propio.

En las imágenes inferiores podemos ver los primeros cuatro modos de pandeo.




# 2.4 Análisis de los resultados obtenidos

En el siguiente cuadro se pueden ver los diferentes resultados obtenidos para cada forma de cálculo:

	TEÓRICO	СТЕ	DLUBAL EF
Pcr	20.727	15.445	21.649

Se puede apreciar que el cálculo teórico coincide casi exactamente con los cálculos mediante elementos finitos.

Se ve claramente que el cálculo mediante normativa queda del lado de la seguridad en comparación con los cálculos mediante elementos finitos.

#### **3. PANDEO LATERAL**

El pandeo lateral es un fenómeno de inestabilidad que aparece en vigas sometidas a flexión, para determinadas geometrías de la sección de la viga y bajo ciertas condiciones de aplicación de la carga. Imaginemos una viga sometida a un momento flector uniforme (Imagen 2.1); en cada sección habrá una zona comprimida y otra traccionada (Imagen 2.2), de modo que a lo largo de la viga existe un cordón sometido a compresión.



Consecuentemente, si la compresión de este cordón alcanza un determinado valor, éste tenderá a pandear. No obstante, el cordón comprimido "no está solo", el resto de la viga tiende a impedir el pandeo, y solo cuando M alcanza un valor suficientemente grande (de modo que la tendencia al pandeo pueda más que la rigidez lateral de la viga) se producirá la inestabilidad.



Esta inestabilidad se traduce en una flexión lateral de la viga acompañada de un giro de torsión como se puede apreciar en la imagen superior.

Siguiendo el guión general del proyecto se va a analizar este fenómeno de inestabilidad a través de la teoría sobre la materia, la normativa que la rige y la introducción de un ejemplo ilustrativo en el programa DLUBAL según las diferentes posibilidades que este nos ofrece: módulos específicos para el cálculo de pandeo lateral y elementos finitos.

### 3.1. Revisión teórica del fenómeno

Se considera la viga de la Imagen 2.3 con 2 planos de simetría y sometida a cargas en el plano (y-z). Se supone, como en el caso del pandeo de Euler, que es posible una situación de equilibrio con una cierta flexión lateral y torsión. En la imagen se definen unos ejes x, y, z para toda la viga, y unos ejes , , para cada sección, siendo y los ejes de simetría, y el perpendicular. La posición de una sección se define por el movimiento según x e y de su centro, con desplazamientos denominados u,y, v, así como por el ángulo girado en torno a z.

Para pequeñas deformaciones los cosenos directores de los ejes , , son:

$$< \begin{cases} l_1 = 1 \\ m_1 = \{ \\ n_1 = -\frac{du}{dz} \end{cases} y \begin{cases} l_2 = -\{ \\ m_2 = 1 \\ n_2 = -\frac{dv}{dz} \end{cases} y \begin{cases} l_3 = \frac{du}{dz} \\ m_3 = \frac{dv}{dz} \\ n_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_{X-Z} = K_{\zeta-z'} = \frac{d^2 u}{dz^2} \\ K_{Y-Z} = K_{y-\zeta} = \frac{d^2 y}{dz^2} \end{cases}$$
 Fórmula 2.1

Para pequeñas deformaciones el ángulo girado es pequeño, y se puede suponer que las curvaturas en los planos x - z y - son iguales, y que las curvaturas en y- z y - también lo son:

Con lo que las 2 ecuaciones de flexión de una rebanada resultan:

$$E \cdot I_{\varsigma} \cdot \frac{d^{2}v}{dz^{2}} = M_{\varsigma}$$
  

$$E \cdot I_{y} \cdot \frac{d^{2}u}{dz^{2}} = M_{y}$$
  
Fórmula 2.2

Donde I e I son los momentos de inercia de la sección respecto de y . M y M son los momentos flectores en torno a estos ejes, con sentido positivo según la Imagen 2.5.



De la ecuación de torsión para el caso general con torsión no uniforme en perfiles abiertos obtenemos una 3ª ecuación:

$$GJ \frac{d\{}{dz} - EI_{\rm S} \frac{d^3\{}{dz^3} = M, \qquad F \acute{o}rmula \ 2.3$$

Podemos referir las 3 ecuaciones anteriores al momento M, sin más que tener en cuenta que:

$$M_{\varsigma} = M \cos \{, \qquad M_{y} = M sen \{, \qquad M_{r} = M sen r,$$

Y dado que es pequeño, sen , cos 1 y sen - du/dx.

Desarrollaremos inicialmente estas y otras ideas para el *problema patrón* que nos servirá de base para el resto de casos.

# $_{3.1.1.}$ Problema patrón. Viga sometida a flexión pura: $M_c$

Imaginemos una sección doble T sometida a un momento flector uniforme M0 (Imagen2.6)



En cada sección la resultante de esfuerzos no es más que un momento M<sub>0</sub>. Si se considera el trozo de viga a la izquierda de m-n, el momento sobre esta sección, referido a ejes x,y,z, será:

$$Mx = -M0$$
;  $M_v = 0$ ;  $M_z = 0$ 

Hemos llamado M<sub>x</sub>, M<sub>y</sub> y M<sub>z</sub> a los momentos según los ejes con sentido positivo dado por la regla del sacacorchos. Como consecuencia del giro de ejes podemos referir las ecuaciones (2.2 - 2.3) al momento M, sin más que tener en cuenta que:

$$M_{z} = M_{0} \cos \{, M_{y} = M_{0} sen \{, M_{z} = M_{0} sen r,$$

y dado que es pequeño, sen , cos 1 y sen - du/dx

$$\begin{pmatrix} M_{\varsigma} \\ M_{y} \\ M_{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \{ & -\frac{du}{dz} \\ -\{ & 1 & -\frac{dv}{dz} \\ \frac{du}{dz} & \frac{du}{dz} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M \\ \{ \cdot M_{0} \\ -\frac{du}{dz} \cdot M_{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{\varsigma} \\ M_{y} \\ M_{J} \end{pmatrix}$$
 Fórmula 2.4

Con lo que:

1

$$M_{z} = M_{0} \qquad M_{z} = \{ \cdot M_{0} \qquad M_{y} = -\frac{du}{dz} \cdot M_{0}$$

41

Sustituyendo en las ecuaciones diferenciales (2.2) se obtiene:

$$E \cdot I_{X} \cdot \frac{d^{2}v}{dz^{2}} - M_{0} = 0$$
  

$$E \cdot I_{Y} \cdot \frac{d^{2}u}{dz^{2}} - \{ \cdot M_{0} = 0$$
  

$$GJ \frac{d\{}{dz} - EI\check{S} \frac{d^{3}\{}{dz^{3}} + \frac{du}{dz}M_{0} = 0$$
  
Fórmula 2.5

Este es el sistema de ecuaciones que debemos resolver. Derivando respecto de z:

$$-EI_{S} \frac{d^{4} \{}{dz^{4}} + GJ \frac{d^{2} \{}{dz^{2}} + \frac{M_{0}^{2}}{EI_{Y}} \cdot \{ = 0$$
 Fórmula 2.6

Por simplicidad, convertiremos la ecuación anterior en:

$$\frac{d^{4} \{}{dz^{4}} - 2r \frac{d^{2} \{}{dz^{2}} - s \cdot \{ = 0$$
 Fórmula 2.7

Siendo :

$$r = \frac{GJ}{2 \cdot EI_{s}} \quad y \qquad s = \frac{M_{0}^{2}}{EI_{y} \cdot EI_{s}}$$

La solución a esta ecuación es del tipo:

$$\{ = A_1 sen(m \cdot z) + A_2 \cos(m \cdot z) + A_3 e^{n \cdot z} + A_4 e^{-n \cdot z}$$
$$m = \sqrt{-\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + S}} \qquad y \qquad n = \sqrt{\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + S}} \qquad F \acute{o}rmula \ 2.8$$

donde

Siendo m y n cantidades reales positivas.

Las constantes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  y  $A_4$  deben ser determinadas mediante las condiciones en los extremos. Para ello, supondremos que estos no rotan en torno al eje z, pero que están libres en cuanto al alabeo:

De las condiciones en z=0 se obtiene:

 $A_2=0$  y  $A_3=-A_4$  con lo cual  $=A_1$ sen(m·z)-2·A\_4senh(n·z)

De las condiciones en z=1 tenemos:

 $A_1$ sen(m·L) -2·A\_4senh(n·L)=0  $A_1$ ·m2·sen(m·L) -2·A\_4·n2·senh(n·L)=0

La solución no trivial se obtiene igualando a cero el determinante:

 $sen(m \cdot L) \cdot (n2 \cdot senh(n \cdot L) + m_2 \cdot sen(n \cdot L)) = 0$ 

resultando que  $sen(m \cdot L)=0$  y A<sub>4</sub>=0

La solución queda pues de la forma:

$$\{ = A_1 sen(m \cdot z) \qquad con \ m = \frac{f}{L}$$
$$-r + \sqrt{r^2 + s} = \frac{f^2}{L^2} \qquad F \circ rmula \ 2.9$$

Con lo cual:

$$-\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + S} = \frac{f^2}{L^2} \qquad \qquad F \circ rmula \ 2.10$$

Sustituyendo y y despejando  $M_0$ , se obtiene el valor del momento crítico, que es valor del momento que hace que se manifieste la inestabilidad:

$$(M_0)_{cr} = \frac{f}{L} \sqrt{E \cdot I_Y \cdot GJ \cdot \left(1 + \frac{EI_{S}}{GJ} \cdot \frac{f^2}{L^2}\right)} \qquad Formula \ 2.11$$

El caso más simple en el sentido de la expresión del  $M_{cr}$ , es el de la viga con sección rectangular y pared delgada. En este caso, la rigidez a torsión es nula (I =0), y por tanto el término entre paréntesis (amplificador) toma valor 1, resultando:

$$(M_0)_{cr} = \frac{f}{L} \sqrt{E \cdot I_Y \cdot GJ}$$
 Fórmula 2.12

Se calcula aquí el momento que produciría el pandeo lateral de un elemento biarticulado sometido a flexión pura. Para el elemento sometido a otro tipo de carga o con diferentes condiciones de apoyo procederíamos de un modo similar siendo la integración de las ecuaciones diferenciales obtenidas para cada caso mucho más complicada que en el caso simple analizado. En la obra de Timoshenko y Gere "Theory of Elastic Stability" pueden encontrarse las soluciones para varios casos de carga y apoyo, escapando estos desarrollos a los objetivos de este documento.

Sí se analiza el problema de pandeo lateral para viga en voladizo con carga concentrada en el extremo libre (con perfil doblemente simétrico y de pared delgada) de acuerdo al esquema mostrado en la siguiente imagen, por tratarse de uno de los problemas que se modelara y resolvera durante la realización de este proyecto.

Antes de obtener una solución al problema planteado resolveremos un caso más simple de viga en voladizo con sección rectangular, por ser un problema ampliamente tratado en la literatura disponible, a diferencia del caso que nos ocupa.

## 3.1.2. Viga en voladizo con carga puntual en el extremo libre

#### Sección rectangular y carga aplicada en el centro de esfuerzos cortantes

Como se ha comentado anteriormente, se considera a continuación el caso de una viga en voladizo solicitada por una carga concentrada actuando en el extremo libre.



Imagen 2.8

La viga analizada presenta una sección rectangular por simplicidad, y la carga se supondrá aplicada en el centro de esfuerzos cortantes (**CEC**) de la sección transversal. Del mismo modo se establece la hipótesis de que la carga permanece vertical incluso después de producirse la deformación. Para obtener la carga crítica (P<sub>cr</sub>) en este caso deberemos integrar las ecuaciones diferenciales planteadas en el apartado anterior. Para ello se utilizará el método de las diferencias finitas. Los sistemas de coordenadas empleados, así como la definición de los sentidos positivos asignados a momentos flectores y torsores se muestran en la Imagen 2.8. Se definen unos momentos torsores debido a que, como resultado del pandeo y analizando en el instante inicial del mismo (para la posición deformada), el extremo libre de la viga se desplaza una cierta cantidad en dirección x.

$$M_{x} = -P \cdot L + P \cdot z = -P \cdot (L - z)$$

$$M_{y} = 0$$

$$M_{x} = -P \cdot u - P \cdot u = -P \cdot (u - u)$$
*Fórmula 2.12*

Este hecho, induce la aparición de un momento torsor alrededor de z de valor  $M_z=P$ · en el extremo empotrado, junto con una reacción vertical de valor P y un momento flector en dirección x de valor  $M_x= -P \cdot L$  en dicho extremo. Del equilibrio en una sección genérica situada a una distancia z del borde empotrado obtenemos los siguientes valores del momento:

Puesto que es conveniente representar las ecuaciones anteriores en términos de los ejes , , necesitamos obtener la expresión de los momentos anteriores proyectados sobre dichos ejes.

En la Imagen 2.9 se muestran los ángulos existentes entre los ejes iniciales y los ejes ligados a la sección, así como la proyección de los momentos anteriormente definidos sobre dichos ejes.



Imagen 2.9

Realizando de nuevo la aproximación para pequeños ángulos (sen , cos 1y sen - du/dx), se tiene que:

$$M_{x} = M_{x} - M_{z} \frac{du}{dz} = -P \cdot (L - z) - P(\mathbf{u} - u) \cdot \frac{du}{dz}$$
$$M_{y} = -M_{x} \cdot \{ -M_{z} \frac{dv}{dz} = P \cdot (L - z) \cdot \{ -P \cdot (\mathbf{u} - u) \cdot \frac{dv}{dz}$$
$$M_{z} = M_{x} \frac{du}{dz} + M_{z} = -P \cdot (L - z) \cdot \frac{du}{dz} + P(\mathbf{u} - u)$$
Fórmula 2.13

Despreciando los términos de orden mayor que la unidad resulta:

$$M_{z} = -P \cdot (L-z) \qquad F \circ mula \ 2.14$$

$$M_{y} = P \cdot (L-z) \cdot \{$$

$$M_{z} = M_{x} \frac{du}{dz} + M_{z} = -P \cdot (L-z) \cdot \frac{du}{dz} + P(u-u) \qquad F \circ mula \ 2.15$$

Para los sentidos positivos de desplazamientos y momentos supuestos en la Imagen 2.8, las ecuaciones de momentos flectores y torsores referidas a los ejes solidarios a la sección son las ya conocidas :

$$E \cdot I_X \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} = -M_X$$
$$E \cdot I_Y \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} = M_y$$

 $GJ \frac{d\{}{dz} - EI_{\$} \frac{d^{3}\{}{dz^{3}} = M_{,} = M_{z}$  con  $I_{\$} = 0$  en este caso (sección rectangular)

Fórmula 2.16

Sustituyendo las expresiones de los momentos en las ecuaciones diferenciales anteriores obtenemos las ecuaciones a resolver:

- 2

$$E \cdot I_{x} \cdot \frac{d^{2}v}{dz^{2}} - P \cdot (L - z) = 0$$
  

$$E \cdot I_{y} \cdot \frac{d^{2}u}{dz^{2}} - P \cdot (L - z) \cdot \{ = 0$$
  

$$GJ \frac{d\{}{dz} + P \cdot (L - z) \cdot \frac{du}{dz} - P(u - u) = 0$$
  
Fórmula 2.17

Puede observarse como las ecuaciones (2.17a), que gobiernan los desplazamientos tras el pandeo ("u" y ""), son independientes de la ecuación (2.17b), que define el desplazamiento vertical que tiene lugar en la viga antes de alcanzarse la inestabilidad. Antes de intentar resolver las ecuaciones (2.17c), es conveniente eliminar la variable *u* derivando (2.17c), y sustituir la expresión de d2u/dz2 despejándola de (2.17b), como ya hicimos en el caso general. Procediendo de este modo resulta:

$$GJ \frac{d^{2} \{}{dz^{2}} + \frac{P^{2} \cdot (L-z)^{2}}{EI_{Y}} \cdot \{ = 0 \Longrightarrow \frac{d^{2} \{}{dz^{2}} + \}^{2} \left(1 - \frac{z}{L}\right)^{2} \cdot \{ = 0$$
 Fórmula 2.18

En la ecuación anterior se ha definido por comodidad el parámetro

$$\}^{2} = \frac{P^{2}L^{2}}{GJ \cdot EI_{Y}}$$

La Fórmula 2.18 es lineal, pero sus coeficientes no son constantes; por esta razón, su resolución es considerablemente más complicada que la llevada a cabo para el caso del apartado anterior. Realizando varios cambios de variable, la ecuación 2.18 puede transformarse en una ecuación tipo Bessel cuya solución es conocida; este procedimiento puede ser consultado en la obra de Timoshenko y Gere anteriormente referenciada. En lugar de ello, utilizaremos el método de las diferencias finitas para obtener una solución aproximada. Este método permite aproximar la derivada de una función en un punto en términos del valor de la función en dicho punto, y su valor en 1 ó más puntos próximos a éste.

Así:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=i} \cong \Delta f_i = \frac{f_{i+h} - f_i}{h} \qquad F \acute{o}rmula \ 2.19$$

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \frac{\Delta(f_{i+h/2} - f_{i-h/2})}{h} = \frac{\frac{f_{i+h} - f_i}{h} - \frac{f_i - f_{i-h}}{h}}{h} = \frac{f_{i+h} - 2f_i + f_{i-h}}{h^2}$$

Para obtener la formulación del problema en el sentido de las diferencias finitas dividimos la viga en 2 segmentos iguales de longitud h=L/2 (Imagen 2.10). Los extremos de los segmentos así formados se denotan por i=0, 1, 2. El punto i=0 corresponde al extremo empotrado, y el i=2 se refiere al extremo libre del elemento. Se incluye además un segmento adicional que se extiende desde i=2 hasta i=3, correspondiendo a la prolongación del eje del elemento hasta una distancia L/2 del extremo libre.



Imagen 2.10

En la imagen aparece también la prolongación imaginaria de la deformada del elemento hasta el punto i=3, ya que como se verá para el desarrollo del método es necesario evaluar el valor de a ambos lados del punto i=2. La ecuación diferencial en cualquier punto z=i se obtiene sin más que sustituir en la ecuación la expresión de la derivada 2ª dada por el método de las diferencias finitas, recogida en la ecuación, resultando:

$$\frac{\{\frac{1}{i+h} - 2\{\frac{1}{i} + \frac{1}{i-h} + \}^2 \left(1 - \frac{z_i}{L}\right)^2 \cdot \{\frac{1}{i} = 0$$
 Fórmula 2.20

Particularizando en i=1 (z=L/2) se tiene que

$$\left\{ {}_{2}-2\left\{ {}_{1}+\left\{ {}_{0}+\right\} ^{2}\left( 1-\frac{1}{2}\right) ^{2}\cdot \frac{L^{2}}{4}\left\{ {}_{1}=0\right. \right.$$

y para i=2 (z=L) resulta

$$\{_{3} - 2\{_{2} + \{_{1} + \}^{2} (1-1)^{2} \cdot \frac{L^{2}}{4} \{_{2} = 0\}$$

Operando se llega finalmente a las ecuaciones buscadas:

$$\begin{cases} _{2} + \{ _{0} + \left( \frac{\}^{2} \cdot L^{2}}{16} - 2 \right) \cdot \{ _{1} = 0 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} _{3} - 2\{ _{2} + \{ _{1} = 0 \end{cases}$$
*Fórmula 2.21*

En el extremo empotrado (Z=0) del elemento el giro de torsión es  $_0 = 0$ .

La 2<sup>a</sup> condición de contorno se obtiene de imponer que el momento de torsión se anule en el extremo libre del elemento. Así:

$$Gj\frac{d\xi}{dz} = M_z = 0$$
 en z=L  
 $\Rightarrow \frac{d\xi}{dz} = 0$  en z=L

Esta última condición implica que 3=1, con lo que la Fórmula 2.21 quede como sigue:

$$\{ {}_{2} + \left( \frac{\}^{2} \cdot L^{2}}{16} - 2 \right) \cdot \{ {}_{1} = 0$$

$$F \acute{o}rmula \ 2.22$$

$$2\{ {}_{1} - 2\{ {}_{2} = 0$$

Para obtener una solución distinta de la trivial para el sistema de ecuaciones anterior y obtener así el valor de la carga crítica debemos igualar a cero el determinante; así:

$$\begin{vmatrix} \frac{3^2 \cdot L^2}{16} - 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -2 \cdot \left( \frac{3^2 \cdot L^2}{16} - 2 \right) - 2 = 0$$

Quedándonos con la solución positiva de la ecuación anterior:

$$\} = \frac{4}{L} = \sqrt{\frac{P_{cr}^2 \cdot L^2}{GJ \cdot EI_y}} \implies P_{cr} = \frac{4}{L^2} \sqrt{GJEI_y} \qquad Formula \ 2.23$$

La expresión de la carga crítica se ha obtenido en este caso bajo el supuesto de sección rectangular de pared delgada con la carga aplicada en el CEC de la sección transversal.

#### Secciones doblemente simétricas y carga aplicada en el borde superior

Aún hoy existe poca claridad respecto al tratamiento teórico de otros casos de carga y tipo de sección como el que intentaremos modelar en este documento, correspondiente a un perfil doblemente simétrico de pared delgada con carga aplicada en el extremo libre (Imagen 2.11), a una distancia 'a' del centro de esfuerzos cortantes, alternándose en este sentido expresiones "poco fiables" con métodos más exactos pero de difícil aplicación.





En este documento se hará uso de la expresión empírica, para la determinación de la carga crítica bajo los supuestos anteriores, desarrollada por Lei Zhang y Geng Shu Tong en el Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Zhejiang (China), en base a múltiples cálculos numéricos llevados a cabo mediante la aplicación de programas de elementos finitos (EF) desarrollados a tal efecto.

A partir de estos "análisis por elementos finitos" (AEF) se desprende que la carga crítica en ménsulas con doble simetría, con carga vertical aplicada en el CEC y actuando de manera uniformemente repartida o concentrada sobre el extremo libre del voladizo, puede calcularse como:

$$M_{cr} = C_1 \frac{f^2 E I_y}{(2L)^2} \sqrt{\frac{I_{\rm S}}{I_y} \left[1 + \frac{GJ(2L)^2}{f^2 E I_{\rm S}}\right]} \qquad F \acute{o}rmula \ 2.24$$

Donde:

$$C_{1} = \frac{4.9(1+K)}{\sqrt{4+K^{2}}} \qquad K = \sqrt{\frac{f^{2}EI_{w}}{GJL^{2}}}$$

Debe considerarse igualmente el efecto de un cambio de posición de la carga a lo largo del eje vertical de la sección, dado que con el giro de la sección, una carga aplicada fuera del CEC induce un momento adicional sobre el elemento, reduciéndose considerablemente el valor de la carga admisible (carga crítica) estimada para la aparición de la inestabilidad. El efecto mencionado puede apreciarse claramente en la Imagen 2.12.



Para el caso de carga colocada a una distancia a del CEC sobre el eje vertical de la sección (con a positivo en el borde superior), la determinación de la carga crítica puede realizarse sin más que modificar la expresión del caso centrado, resultando:

$$M_{cr} = C_1 \frac{f^2 E I_y}{(2L)^2} \left[ -C_2 a + \sqrt{\left(-C_2 a\right)^2 + \frac{I_{\S}}{I_y} \left[1 + \frac{GJ(2L)^2}{f^2 E I_{\S}}\right]} \right]$$
 Fórmula 2.25

El coeficiente C1 para el caso que nos ocupa es el mismo que el definido anteriormente, mientras que C2 tomará valores en función del punto de aplicación de la carga (en función de "a"). Definimos en primer lugar el parámetro m=2a/h, siendo h la distancia entre el CEC y los 2 bordes.

Así:

para a 0 (0 m 2): 
$$C_2 = 2.165 - 0.28(k - 2.4)^2$$
  
para a < 0 (-2 m 0):  $C_2 = \frac{0.69K + 0.6}{1 - mK}$ 

Esta expresión arroja resultados con un alto grado de exactitud para el rango habitual de K (K=0.1÷2.5) al ser comparados con los resultados obtenidos experimentales y con los obtenidos mediante métodos numéricos (MEF), como puede apreciarse en la Imagen 2.13.



En la Imagen 2.13 se comparan los resultados derivados de la aplicación de la expresión aquí desarrollada con los derivados del AEF, y con los reportados por

*Nethercot* en "The effective lengths of cantilevers as governed by lateral buckling", por *Guo YJ*. en "Stability of cantilevers, theory and aplications" y por *Wang* y *Kitipornchai* en ""The stability of mono-symmetric cantilevers".

En la Imagen 2.13. la comparación tiene lugar de nuevo con el AEF y con los resultados reportados por Trahair en "Flexural-torsional buckling of structures" [12]. Queda demostrada en sendas gráficas la más que aceptable validez de la expresión utilizada para el rango de valores de K anteriormente mencionado.

## 3.2. Normativa de aplicación CTE DB SE-A

El Código Técnico establece la obligatoriedad de la comprobación frente a pandeo lateral para los casos en los que exista flexión dentro del plano del elemento con un arriostramiento lateral insuficiente En los casos en que se haga necesaria esta comprobación, se sugiere un valor para la resistencia frente a pandeo lateral dado por la expresión:

$$M_{b,Rd} = t_{LT} W_y \frac{f_{yd}}{x_{M1}} \qquad F \acute{o}rmula \ 2.26$$

La obtención del coeficiente de pandeo lateral (  $_{LT}$ ) se lleva a cabo a partir de la esbeltez lateral (  $_{LT}$ ) :

$$\overline{F}_{LT} = \sqrt{\frac{W_{y,p1}f_y}{M_{cr}}}$$

En cuya expresión se hace uso del *momento crítico*, que es el dato que nos interesa a efectos de este proyecto y cuya obtención mediante el CTE pasa por la aplicación de la siguiente ecuación:

$$M_{cr} = \sqrt{M_{LTV}^{2} + M_{LTW}^{2}} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} M_{LTV} = C_{1} \frac{f}{L_{C}} \sqrt{GI_{T}EI_{z}} \\ M_{LTW} = W_{e1,y} \frac{f^{2}E}{L_{C}^{2}} C_{1}i_{f,2}^{2} \end{cases} \qquad Formula \ 2.27$$

Los términos y parámetros relacionados en estas formulas se encuentran claramente definidos en el anexo I, donde se incluye la normativa de aplicación al completo.

### **3.3.** Casos analizados

En los epígrafes anteriores se han repasado los fundamentos teóricos y la normativa de aplicación para el pandeo lateral. En este apartado se va a modelar un perfil IPE100 con condiciones de contorno de empotramiento en uno de los extremos y libertad en el otro, para poner en práctica lo expuesto anteriormente.

Al modelo descrito se le va a imponer una carga P vertical y hacia arriba en el extremo libre, con punto de aplicación en el centro del borde inferior del perfil, la cual provocará la aparición de unos esfuerzos de flexión alrededor del eje fuerte de la barra, estableciéndose así las condiciones necesarias para el pandeo lateral. Las características geométricas de la sección se muestran en la imágenes 2.14 y 2.15.

Propiedad de la sección	Símbolo	Valor	Unidad	
Canto	h	100.0	mm	
Ancho	Ь	55.0	mm	
Espesor de alma	tw	4.1	mm	
Espesor de ala	tf	5.7	mm	
Radio de empalme de raíz	r	7.0	mm	
Canto entre alas	hi	88.6	mm	
Canto del alma recta	d	74.6	mm	
Área de la sección	A	10.32	cm <sup>2</sup>	
Área de cortante	Ay	5.28	cm <sup>2</sup>	
Área de cortante	Az	3.69	cm <sup>2</sup>	
Área de cortante según EC 3	Av,y	6.73	cm <sup>2</sup>	
Área de cortante según EC 3	Av,z	5.08	cm <sup>2</sup>	
Área de cortante plástico	Apl,y	6.27	cm <sup>2</sup>	
Área de cortante plástico	Apl,z	3.87	cm <sup>2</sup>	
Momento de inercia	Iy	171.00	cm <sup>4</sup>	
Momento de inercia	Iz	15.92	cm <sup>4</sup>	
Radio de giro determinante	İy	40.7	mm	
Radio de giro determinante	İz	12.4	mm	
Radio de giro polar	ip	42.5	mm	
Radio de giro del ala con 1/5 del área del a	izg	14.0	mm	
Volumen	V	1032.00	cm <sup>3</sup> /m	
Peso	P	8.1	kg/m	
Superficie	Asuperf	0,400	m²/m	
Factor de sección	Am/V	387.597	1/m	
Módulo de torsión	It	1.20	cm <sup>4</sup>	
Módulo de alabeo	Iω	350.00	cm <sup>6</sup>	
Módulo resistente elástico	Wy	34.20	cm <sup>3</sup>	
Módulo resistente elástico	Wz	5.79	cm <sup>3</sup>	
Módulo resistente de alabeo	Ww	26.99	cm <sup>4</sup>	
Momento estático	Sy,max	19.70	cm <sup>3</sup>	
Momento estático	Sz,max	2.16	cm <sup>3</sup>	
Módulo de alabeo normalizado	ωmax	12.97	cm <sup>2</sup>	
Momento estático de alabeo	S <sub>co,max</sub>	10.16	cm <sup>4</sup>	Imagen 2.1



Imagen 2.15

Se realizarán los cálculos teóricos en base a las expresiones empíricas desarrolladas en el citado apartado y se analizara la influencia del peso propio en el valor de la carga crítica comparando el resultado obtenido con el derivado del resto de análisis (normativa, DLUBAL EF, con y sin consideración del peso propio, etc).



La calidad del acero corresponde a la serie S275 y la longitud del modelo será de 5,7 metros.

### 3.3.1. Cálculo teórico

Para el cálculo del momento crítico  $(M_{cr})$  de una viga en voladizo con sección bisimétrica y carga puntual aplicada sobre el extremo libre, en algún punto del eje vertical de la sección (a

una distancia a del centro de esfuerzos cortantes (CEC), se usa la formula 2.25:

$$M_{cr} = C_1 \frac{f^2 E I_y}{(2L)^2} \left[ -C_2 a + \sqrt{\left(-C_2 a\right)^2 + \frac{I_{\S}}{I_y} \left[1 + \frac{GJ(2L)^2}{f^2 E I_{\S}}\right]} \right]$$
 Fórmula 2.25

para a 0 (0 m 2):  $C_2 = 2.165 - 0.28(k - 2.4)^2$ 

siendo m=2<sup>a</sup>/h, C<sub>1</sub> = 
$$\frac{4.9(1+K)}{\sqrt{4+K^2}}$$
 y K= $\sqrt{\frac{f^2 E I_w}{G I_T L^2}}$ 

En el apartado anterior se han descrito todas las características físicas y geométricas de la sección bajo estudio, por los que disponemos de todos los datos necesarios para obtener el valor del  $M_{cr}$ , y a partir de éste, el de la carga crítica.

Sustituyendo de acuerdo a los valores y expresiones dados tenemos:

K=4.79·10-3, 
$$C_1=2.460$$
  $C_2=0.559$ 

Dando lugar a un valor del momento crítico:

$$M_{cr}$$
=3.694 KN·m = Pcr·L  $P_{cr}$ =648.05 N

## 3.3.2. Cálculo según normativa de aplicación CTE DB SE-A

Para el desarrollo de esta sección debemos trasladarnos al Apartado 2.2.de este documento, en el cual se recogen todos los artículos y fórmulas que el CTE propone para el análisis de piezas susceptibles de pandear lateralmente.

En dichos artículos, más concretamente en el Artículo 6.3.3.2 se indica que la distribución de momentos no debe superar en ninguna sección el valor del momento límite dado por la expresión:

$$M_{b,Rd} = t_{LT} W_y \frac{f_{yd}}{x_{M1}} \qquad F \acute{o}rmula \ 2.26$$

W<sub>v</sub> W<sub>pl</sub>, y para secciones de tipo 1 y 2

$$\mathsf{t}_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \overline{\mathsf{f}}_{LT}^2}}$$

con 
$$\Phi_{LT} = 0.5 \left[ 1 + \Gamma_{LT} \left( \overline{f}_{LT} - 0.2 \right) + \overline{f}_{LT}^2 \right]$$
 y  $\overline{f}_{LT} = \sqrt{\frac{W_{y,p1} f_y}{M_{cr}}}$ 

El CTE sugiere además la siguiente expresión para el momento crítico:

$$M_{cr} = \sqrt{M_{LTV}^2 + M_{LTW}^2} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} M_{LTV} = C_1 \frac{f}{L_C} \sqrt{GI_T EI_z} & (a) \\ M_{LTW} = W_{e1,y} \frac{f^2 E}{L_C^2} C_1 i_{f,2}^2 & (b) \end{cases}$$

A partir la ecuación anterior podemos calcular el  $M_{LTV}$  en cuanto conozcamos el valor del coeficiente C<sub>1</sub>, el cual, para una distribución de momentos como la que nos ocupa, toma el siguiente valor según la Tabla 6.7.



C1=2.05 y Lc=2L y sustituyendo en (4.18 (a)),  $M_{LTV} = 3.221 \text{ KN} \cdot \text{m}$ 

Para el cálculo de  $M_{LTW}$  consultaremos el apartado 4 del Artículo 6.3.3.3, que nos dice que  $M_{LTW}$  coincide con la carga de pandeo del soporte formado por el ala comprimida y la 3ª parte de la zona comprimida del alma (es decir, 1/6 del alma total en este caso).



$$M_{cr} = \sqrt{3.221^2 + 0.125^2} = 3.223 \text{ KN} \cdot \text{m} \implies P_{cr} = 565.35 \text{ N}$$

Para cerrar los cálculos se determina a qué clase pertenece el perfil sometido a los esfuerzos definidos en nuestro caso (flexión con el ala superior comprimida), y utilizando para ello las tablas 5.3 y 5.4 del Anexo I. La sección con carga puntual en el extremo y hacia arriba se encontrará sometida a la distribución de tensiones mostrada en la Imagen 2.17, la cual nos permitirá clasificar el tipo de sección que estamos estudiando.



Imagen 2.19

Por lo que podemos observar en la Imagen 2.19, existirán elementos intermedios (alma) sometidos a flexión simple y elementos con borde libre (alas) sometidos a compresión y tracción respectivamente. Analizaremos pues la clase a la que pertenecen las distintas partes del perfil en base a los criterios tabulados. El elemento de clase mayor determinará la clase general del perfil, de acuerdo a lo establecido por la Norma.

• Ala superior (comprimida):

$$c = \frac{55 - 4.1 - 2 \cdot 7}{2} = 18,45mm$$

$$\frac{c}{t_f} = 3.24$$

$$v = \sqrt{\frac{235}{275}} = 0.92$$

$$\Rightarrow \frac{c}{t_f} < 9v = 8.26 \Rightarrow CLASE 1$$

• Alma (flexión simple):



Por lo tanto, el perfil utilizado bajo las hipótesis de cargas consideradas es de clase1, por lo que el módulo resistente a utilizar en es el plástico que para el IPE100 toma el valor

$$W_y$$
  $W_{pl}$ , y = 39.41 · 10-6 m<sup>3</sup>

 $\overline{F}_{LT} = \sqrt{\frac{W_{y,p1}f_y}{M_{cr}}} = 1.83 \qquad \left\{ \begin{array}{c} \text{tabla 6.6} \\ \text{perfil laminado } h/b \le 2 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \textit{curva a}$ 

Así, LT=0.245 y la resistencia de cálculo al pandeo lateral finalmente resulta:

M<sub>b,Rd</sub>=2.414 KN·m P<sub>cr,Rd</sub>=423.50 N

## 3.3.3. Cálculo mediante DLUBAL Elementos finitos

En este epígrafe vamos a realizar el cálculo de pandeo lateral, se va a seguir paso a paso la modelado y resolución del caso.

#### 1.-MODELADO

Abrimos un nuevo archivo y lo llamamos Pandeo lateral-EF y aceptamos.

57 F	RFEM 5.02	.0053 (64b	it) Tria	I - [Abolla	dura-barra	9]
	Archivo	Edición	Ver	Insertar	<u>C</u> álculo	Re
1.9	- 9/	1- 7	-195	8. 8	P= - 9	× p
	23	Nuevas	barras	simples	CIB	9
Nave	dador de	provertos	- Datos		с. <b>п</b> . с	×

Tioc de see dén Part se ceclor ar Tara selace anar Sienarin (4) IPE PD P. OI Laborative/contained ~ IITL 0 0 ٢ 55 H IFE0 IFEV HEA 1 w 1 3 0.00 Film HH W M - NSC 13 - NSC 13 - NSC 13 - NSC 13 - NSC 13 - NSC 13 - NSC 13 - NSC 13 - NSC 13 - NSC 14 - NSC Grupt de no naviatritante Tote Fabrican:c/homa JLU 📃 Fojme do la sección olu 📄 Nota de la section -odc A L Q 0 ŵτγ Material 99. 3 - Acero S 279 DIN 18500 1990-1 0252 0253 0254 1995 1994 1994 🔄 jno uir no välidas 🔄 Lirupo de favoritos 1 http:// PS Acopter Canoder

Vamos al apartado Sección y elegimos para el inicio de barra, en el apartado laminadas y elegimos un perfil IPE-100.

Μικίο πύπ	Linea num	1	Barra nú <u>m</u>
2	1	to.	1
Coordonadaa	-	Nedo de	cntrade
X: 0.000	순 [m]	👰 Nudo	/ punto
r: 0.000	🛊 înî	Cliona	/ inea
Z: 0.000	4 îni	Listance	n in the second s
S. agtua Singen de rețili Sitjime nuco	•	JE Longi L 1 Perp @ Zngi	ud y cirección + 호텔 [다] endicularmente a la ban ulo en piano de trabajo
		o Longitud	<u>ه [م]</u> [د]
222	5	L :	2000 🛃 (m) rao
		41:	[nī]

Pulsamos el botón Nuevas barras simples.

Aceptamos e introducimos las coordenadas de origen de la barra (0,0,0). Aceptamos e introducimos las coordenadas del final de la barra (5.7,0,0).

Ya tenemos nuestra barra.



Ahora vamos a convertir el modelo en superficies para proceder al AEF Seleccionamos la barra y clicando botón derecho elegiremos *Generar superficies desde barras-Generar*.



Una vez hecho esto, obtendremos el resultado de la imagen inferior, habiendo terminado ya la configuración del modelo.



Vamos a definir el empotramiento de la barra.

57 R	FEM 5.02	0053 (64b	it) Tria	I - [Abolla	dura-barra	*]
1	<u>A</u> rchivo	<u>E</u> dición	<u>V</u> er	Insertar	<u>C</u> álculo	R
1.9	- 9 3	1 - 1	-   🚰		Pr - 9	× ‡
: 🗋	3.	<b>9 🖬</b>	) &	luevo apoj	/o en nudo	7

Pulsamos el botón Nuevo apoyo en nudo y seleccionamos empotrado.

Lo aplicamos en el nudo derecho de la barra obteniendo el resultado de la imagen inferior.



Ya tenemos nuestro modelo correctamente definido.

### 2.-INTRODUCCIÓN DE CARGAS

Vamos a proceder a introducir una carga unitaria en el extremo libre de la barra.



Seleccionamos Nueva carga en nudo.



Se nos abre la pantalla para configurar los casos de carga. Para este primer caso desactivamos el peso propio.

Núm.	En lo	is nudos nún.	Fuerzas
1			X
Carga en rud	In		Ŷ
Fue za.	P),	0.000 🗢 🕨 [kN]	Z Pz
	P*	0.000 🐡 (kN)	- P
	Pz:	1.000 🛟 🕨 (kN)	Px
Moriento:	Mx	0.000 🗘 knm]	Manager
	My:	0.000 🐡 (kNm)	MUSHIERIOS
	Mz:	0.000 🗢 🚩 (kNm)	Y X
			Z Mz
Comentaric			Mx
			💽 📝 Orientaco según la regia de la maro derec
D 👼			Aceptar

Aceptamos y se abre la ventana para configurar la carga.

Seleccionamos una carga puntual de valor 1kN en el eje Z y la aplicamos en el extremo libre.



Aceptamos y veremos la carga aplicada en el punto deseado.

# 3.-CÁLCULO



Como deseamos analizar las posibles inestabilidades en esta barra, vamos al módulo específico que DLUBAL tiene para este fin: RF-STABILITY.

Ponemos 8 como número de valores propios y pulsamos calcular.



### 4.-RESULTADOS

La primera ventana que obtenemos en resultados es la de los factores de carga crítica, en este caso es de 0,638. Es decir que la carga crítica será:  $1 \ge 0,638 = 0,638$  kN.

1 Facto	res de carga crítica	
	A	В
Modo núm.	Factor de carga crítica f [-]	Factor de mayoración α[-]
-11	0.638	1. Contraction of the second s
2	1.765	2.307
3	3.062	1.485
4	4.624	1.276
5	6.438	1.184
6	8.565	1.132
7	10.971	1.100
8	13.698	1.079

Si pulsamos en gráfico podremos ver los efectos producidos para cada valor propio.





# **3.3.4.** Cálculo mediante DLUBAL Modulo para el análisis de pandeo

# lateral y flexo torsión mediante elementos finitos

En este epígrafe vamos a realizar el calculo de pandeo lateral, se va a seguir paso a paso la modelado y resolución del caso. Este módulo también calcula por elementos finitos.

1.-MODELADO

Abrimos un nuevo archivo y lo llamamos Pandeo lateral- Barra y aceptamos.



Pulsamos el botón Nuevas barras simples.

Contraction of the second second second second second second second second second second second second second s	Contraction of the second second second second second second second second second second second second second s	A CONTRACTOR OF A CONTRACTOR OF A CONTRACTOR OF A CONTRACTOR OF A CONTRACTOR OF A CONTRACTOR OF A CONTRACTOR OF	provide and the second s
Tioc de seeden	Part se ectioner	Tara solsee anor	6 . AU
IIIII	ieus Lataranie/contarixa	Siencino -	
		185.100	
	I IFFo	IPF 1.20	55.0
	I IFEO	IPE 140	
1 1 2 ~ 1	I HEA	IPE 180	
	I HEB	IPE 200	5 70
	T HEAL	IP5 240	
	I HE .	IPE 270	
(3)	T IFB-S -	IPE 300 IPE 320	
	I IFE 751	IPE 360	00
Filro	1 HB-	IPE 400 IPE 450	2 V
Gropt de no navfatritante.	1 😳 🛁 🖓 🛀 🖄	IPE 200	
Tota 💉	I M AISC 13	IPS 350 IPS - 101	
	1 H- 🔤 ASU 19	IPE 790-137	
Fabrican:c/norma	IH AS MA6/A6/4-U	IPs 7904147	and a second discourses
vic 🖌	I UJ III US 201	II 12 250 - 100	
Forma do lo soción	王 0.2 0.5 4.1		
u h			
310	II 🔤 🏧 🕹 🖬		
Note de la section:	T II Adved		laure 1
- odc	117 🔤 Ade-d		
and the second se	The Advert		
	117. Set 11936		Filadestat
	Î IFF 🔤 DIL 10755 1994		🔤 3 - ACHO S 270 DIN 18500 1995-11
🔄 , rouit no válidas 🛛 🔛	HE E DIN 1025 2 1995		
T is no natarmitor	HE M BILL 1025 4 1994		
	I W STMAGAG		27.102
	1 W A S M A	<u></u>	
			Acepter Canceler

Vamos al apartado Sección y elegimos para el inicio de barra, en el apartado laminadas

y elegimos un perfil IPE-100.

<u>Y</u> udo núm	Linea núm	Barra nú <u>m</u>
2	1	1
Coordonadaa	Nod:	de entrade
x:         0.000           y:         0.000           2:         0.000           Seterencia         0.000           Seterencia         0.000           Seterencia         0.000           Seterencia         0.000           Junc nuco         Junc nuco	hinii ⊛ N mi ⊖ E mi ust a. ∭⊔ut t:	udo / punta orra / iñea ancio 96 96 anglud y cirección * (क) [m]
		Perpendicularmanta a la bar inquia en pano ce trabajo e en pano e trabajo e en pano e trabajo e en pano e trabajo e e trabajo e e trabajo e e trabajo e e trabajo e e trabajo e e trabajo e e trabajo e trabajo
Aceptamos e introducimos las coordenadas de origen de la barra (0,0,0). Aceptamos e introducimos las coordenadas del final de la barra (5.7,0,0). Ya tenemos nuestra barra.

Vamos a definir el empotramiento de la barra.

57 R	FEM 5.02	0053 (64b	it) Tria	I - [Abolla	dura-barra	a*]
	Archivo	<u>E</u> dición	Ver	Insertar	<u>C</u> álculo	R
1.9	-91	1 - 17	- 1 😼	8. S	Pm - 9	<u>a</u> ‡
1	3.	9 🖬		luevo apoj	/o en nudo	5

Pulsamos el botón Nuevo apoyo en nudoy seleccionamos empotrado.

Lo aplicamos en el nudo derecho de la barra obteniendo el resultado de la imagen inferior.



Ya tenemos nuestro modelo correctamente definido.

## 2.-INTRODUCCIÓN DE CARGAS

Vamos a proceder a introducir una carga unitaria en el extremo libre de la barra.



Seleccionamos Nueva carga en nudo.

eni-14,4	Actories Constantin de contine	oir Gebreson	e er soortes Carbresoret te targe Detter sa	ees de est, i sola	
1000 CO 1070	oderte	.038	geschecht sellecte so surga		Tore reported
F CC	Caro, parmali,	1.4	approve		2
		Gred 45	intrastruktet		
		gal-pris la	- 118	P/a ar	
		· 10	ionec	•	
		Pesilorest			
		<u></u>			
		20(3))	larís		
		1 -			
		2	1.11 1.11		
		1.000			
		0.00000			
		0.000			
		-			
		· Selectary			
	F R P W )	S		- 🖻	

Se nos abre la pantalla para configurar los casos de carga. Para este primer caso desactivamos el peso propio.

Núm.	En lo	is nudos nún.	Fuerzas
1			X
Carga en rud	In		· · ·
Fue za.	P).	0.000 🛟 🕨 [kN]	Z Pz
	P*	0 000 🗇 🖡 [kN]	p.
	Pz:	1.000 🗢 🕨 (kN)	Px +
Momento:	Mx	0.000 🖘 (kNm)	Manantos
	My:	0.000 🛟 🕨 [kNm]	
	Mz:	0.000 🗢 🚩 (kNm)	Y X
			Z Mz
Comentaric			Mx ¥
			Crientaco según la regia de la maro derech

Aceptamos y se abre la ventana para configurar la carga.

Seleccionamos una carga puntual de valor 1kN en el eje Z y la aplicamos en el extremo libre.



Aceptamos y veremos la carga aplicada en el punto deseado.

## 3.-CÁLCULO

	RF-STEEL Surfaces	Analisis general de tensiones de superficies de acero	Froyectos de acero	÷
2	RF-STEEL Members	Análisis general de tension es de barras de acero	Freyectos de hormigón	+
Fe.	RF-STEEL EC3	Cálculo de barras de acero según Eurocódigo 3	Proyectos de madera Proyectos de aluminio	+
Also	RF-STEEL ALSC	Cálculo de barras de acero según ASO (LRPD o ASO) Cálculo de barras de acero según IS	Dinámica Uniones	) }
LA JBS	RF-STEEL SIA	Cálculo de barras de acero según SIA 262 Cálculo de barras de acero según Bis	Cimentaciones	+
148	RF-STEEL GB RF-STEFL CS	Cálculo de barras de acero según GB Cálculo de barras de acero según CS	Terres	•
LA NIC	RF-STEEL AS RF-STEEL NTC-DF	Cálculo de barras de acero según AS Diseño de barras de acero según NTC-DF	Médulos externos	7 )
Lat Van	RF-STEEL SP (versión demo) RF-STEEL Flastic (versión demo)	Cálculo de barras de acero según SP Cálculo de barras de acero según FIFM		
SAVS 4D	RF-STEEL SANS (versión demo) RF-STEEL Fatigue Members (versión	Cálculo de barras de acero según SANs n demo) Cálculo a fatiga de barras de acero		-
?四	RF-KAPPA RT-LTD	Anàlisis de pandec por Flexión Anàlisis de pandeo lateral y flexotorsional		
母	RF-FF-ITF	Análisis de pandeo latera effexotorsional por el MEF		

Vamos a emplear el módulo especifico con el que cuenta DLUBAL para el análisis de Pandeo Lateral y flexo torsión por el MEF.

El primer paso será seleccionar todas las barras y el caso de carga que queremos analizar, según la imagen inferior.



Comprobamos que el material elegido sea acero S275, que la sección sea la adecuada así como los apoyos.

		A					В			
Material núm.		Descripción del material				Comentario				
1	🔄 Hormigón	C30/37   EN 1	992-1-1:200	4/AC:2010						
2	Acero S 235   EN 1993-1-1:2005-05									
3	Acero S 2	75   EN 1993-	1-1:2005-05							
4	Acero S 2	75   DIN 1880	0:1990-11	-						
4 Apo	yos en ni	udos								
4 Apo	yos en nu	udos B	С	D	E	F	G	н	ř. i	
4 Аро Ароуо	yos en nu A Conjunto	udos B Nudos	C Apoy	D Domuelle (I	E kN/m]	F Coacción a	G I giro o muel	H [ H [kNm/rad]	I Coacción al alabe	
4 Apo Apoyo núm.	yos en nu A Conjunto núm.	udos B Nudos núm.	С Ароул их	D oomuelle (I uy	E kN/m] uz	F Coacción a ψx	G Igiroomuel φγ	<u>H</u>  e [kNm/rad] 	 Coacción al alabe ω[kNm <sup>3</sup> ]	
4 Apo Apoyo núm. 1	yos en nu A Conjunto núm.	Idos B Nudos núm. 2	С Ароуч их	D o muelle (l uy	E kN/m] uz	F Coacción a φx	G I giro o muel VY V	H e (kNm/rad) ØZ V	I Coacción al alabe ω [kNm <sup>3</sup> ]	
4 Apo Apoyo núm. 1 2	yos en nu A Conjunto núm.	Idos B Nudos núm. 2	C Apoyr ux V	D Doomuelle [l UY I	E kN/m] uz V	F Coacción a φχ	G Igiroomuel φγ I	H e [kNm/rad] ØZ Ø	I Coacción al alabe ω [kNm <sup>3</sup> ]	
4 Apo Apoyo núm. 1 2 3	yos en nu A Conjunto núm. 1	Jdos B Nudos núm. 2	C Apoyu ux V	D oomuelle (I uy V	E kN/m] uz	F Coacción a φχ	G Igiroomuel ∳Y ☑	H e [kNm/rad] ØZ I	L Coacción al alabe ω [kNm <sup>3</sup> ]	
Apoyo núm. 1 2 3 4	yos en nu Conjunto núm.	Idos B Nudos núm. 2	C Apoy ux V	D o muelle (I uy V	E kN/m] uz	F Coacción a φx	G I giro o muel ⊉Y ☑	H e (kNm/rad) ØZ Ø	I Coacción al alabe ω [kNm <sup>3</sup> ]	

Una vez hecho esto, pulsamos en calcular.

## 4.-RESULTADOS

La primera ventana que obtenemos en resultados es la de los factores de carga crítica, en este caso es de 0,642. Es decir que la carga crítica será:  $1 \ge 0,642 = 0,642$  kN.

A	В	C	D	E
Conj. núm.	Caso de carga	Factor de carga críti	Núm. de iteraciones	Motivo para la interrupción del cálculo
1	CC1	0.6426	1	El coeficiente de la diagonal de la matriz es menor que cero

Si pulsamos en gráfico podremos ver los efectos producidos para cada valor propio.

En este epígrafe vamos a realizar el calculo de pandeo lateral, se va a seguir paso a paso la modelado y resolución del caso. Este módulo calcula según Eurocódigo.

### 1.-MODELADO



Abrimos un nuevo archivo y lo llamamos Pandeo lateral- Barra y aceptamos. Pulsamos el botón *Nuevas barras simples*.

Secciones laminadas Seccio	nes en l			×
Tioc do socidón	Part se cecilonar	Tara palpapianor	P 200	
IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	Image: Second second	Strate * IP2 E0 IP2 E0 IP2 E0 IP2 E0 IP2 E00 IP2 E00		
030	± 🗤 🚾 Ant-d		1 A T Q	0
	I WTM Sector III. Sector IIF. Dis. 1935		Material	
reuir no válidas 🛛 😿 uir. po cetavortos:	⊥ IFF         ■ Dif. 10755 1994           ⊥ HE ∃         ■ Dif. 10752 1996           ⊥ HE A         ■ Dif. 10553 1994           ⊥ HE A         ■ Dif. 10554 1994           ⊥ W         ■ ASTLA 6AA 641           ⊥ W         ■ ASTLA 6AA 641           ⊥ W         ■ ASTLA 6AA 641		27 103	1
			Acopter Cancelor	5

Vamos al apartado Sección y elegimos para el inicio de barra, en el apartado laminadas y elegimos un perfil IPE-100.

<u>Mudo núm</u>	Linea nun	1	Barra nú <u>m</u>
2	1	E.	1
Coordonadaa		Nodo do	cntrade
x: 0.000 🚖	[m]	🔘 Nudo	/ punto
r: 0.000 💠	îm]	C Borrg	/ inca
Z: 0.000 😂	(m)	Listanc	ia i
Referencia Staptus Cortaen de retilla Júrre nuco	4 1 2		Total       Total       Total       +

Aceptamos e introducimos las coordenadas de origen de la barra (0,0,0). Aceptamos e introducimos las coordenadas del final de la barra (5.7,0,0).

Ya tenemos nuestra barra.



Vamos a definir el empotramiento de la barra.

57 R	FEM 5.02	0053 (64b	it) Tria	al - [Abolla	dura-barra	i*]
	Archivo	<u>E</u> dición	Ver	Insertar	<u>C</u> álculo	R
1.9	-91	1 - 7	-   🚰		P×1 - 9	<u>ix</u> ‡
	23	<b>9 🖬</b>	181	Vuevo apoj	yo en nude	5

Pulsamos el botón Nuevo apoyo en nudo y seleccionamos empotrado.

Lo aplicamos en el nudo derecho de la barra obteniendo el resultado de la imagen inferior.



Ya tenemos nuestro modelo correctamente definido.

### 2.-INTRODUCCIÓN DE CARGAS

Vamos a proceder a introducir una carga unitaria en el extremo libre de la barra.



Seleccionamos Nueva carga en nudo.

ACTI- 14 4	Actores Constants de contores	in Contractor	s de scocres. Carbrespret te tarte Dartor	sore: bet. sis	
100000000	a oddertra	, COM	Descripcient del eccardo carga		Toringonal
F C	Caro parmati.	1.00	approve.		Ξ
		Gred 4	innerata		
		galopić in	a a a a a a a a a a a a a a a a a a a	estal de	
		· 10	ionec	•	
		Pege 0700			
		2 <b>89</b> 5 50 <u>701</u> 5	luči <u>ž</u> i		
		2	1 1		
				<u>.</u>	- 1000000 - 00
		Jane and			1
HIB!	L' DA DA X			- 9	

Se nos abre la pantalla para configurar los casos de carga. Para este primer caso desactivamos el peso propio.

Núm.	En lo	os nudos nún.	Fuerzas
1			X
Carga en rud	In		Ŷ
Fue za.	P).	0.000 🗢 🕨 [kN]	Z Pz
	P*	0 000 🗇 🕨 [kN]	PY
	Pz:	1.000 💠 🖹 [kN]	Px
fornento:	Mx:	0.000 🛟 🕨 (kNm)	Mamorteo
	My:	0.000 🛟 🕨 [kNm]	Wijileitos
	Mz:	0.000 🜲 (kNm)	Y X
			Z Mz
			M
omentaric			Mx
			🔽 📝 Urlentaco según la regla de la maro derecha

Aceptamos y se abre la ventana para configurar la carga.

Seleccionamos una carga puntual de valor 1kN en el eje Z y la aplicamos en el extremo libre.



Aceptamos y veremos la carga aplicada en el punto deseado.

## 3.-CÁLCULO

	E CTEEL Curforan	Applicit general de tenciones de superficies de segre	
	IF-STEEL Surfaces IF-STEEL Members IF-STEEL EC3 IF-STEEL AISC IF-STEEL SIA IF-STEEL BS IF-STEEL G3 IF-STEEL G3 IF-STEEL CS IF-STEEL AS	Analisis general de tensiones de superficies de acero       Proyectos de acero         Arálisis general de tensiones de barras de acero       Proyectos de hormigó         Cálculo de barras ce acero según Eurocódigo 3       Proyectos de hormigó         Diseño de barras de acero según AISC (LRFD o ASD)       Dinámica         Cálculo de barras de acero según IS       Uniones         Cálculo de barras de acero según IS       Cálculo de barras de acero según BS         Cálculo de barras de acero según GB       Cálculo de barras de acero según CS         Cálculo de barras de acero según AISC       Comentaciones	n
F	F-STEEL NTC-DF	Diseño de barras de acero según NTC-DF Módulos externos	
	(F-STEEL SP (versión demo) (F-STEEL Plastic (versión demo) (F-STEEL SANS (versión demo)	Cálculo de barras de acero según SF Cálculo de barras de acero según PIFM Cálculo de barras de acero según SANS n demol	
,	F-KAPPA	Análisis de pandeo por flexión	

Vamos a emplear el módulo especifico con el que cuenta DLUBAL para el análisis de Pandeo Lateral y flexotorsión.

El primer paso será seleccionar todas las barras y el caso de carga que queremos analizar, según la imagen inferior.

Cálculo de			1
Barras:	1	Todas 📉 🔁	e o o o e construction const
Conjuntos:		Todos 📉 🔀 🔁	
Casus / comb	vinaciones de carga existentes	Selección para el cálo	ulu
QIA CC2	1	G CC1	N
STR CO1	1.35*CC1		5
STR CU2	1.35°CC1 + 1.5°CC2		
s ch CO3	CC1		
S Chi CO4	CC1 + CC2	>	
STr CO5	CC1		
S Fr CUG	001 ( 0.51002	22	
S Qp CO7	CCI		
s op CO8	CC1 + 0.3°CC2		
		Q	

Comprobamos que el material elegido sea acero S275.

	A	В	
Material núm.	Descripción del material	Comentario	
1	Hormigón C30/37   EN 1992-1-1:2004/AC:2010		
2	Acero S 235   EN 1993-1-1:2005-05		
3	Acero S 275   EN 1993-1-1:2005-05		
4	Acero S 275   DIN 18800:1990-11		

## En el apartado Parámetros-barras hemos de seleccionar en la opción Tipo de apoyo: VOLADIZO.

	A	В	1 C	L D	E	F	
Barra		Tipo de apoyo	Cortante	Coacción	Punto de aplicación de	Cálculo	Tipo
núm.	Sección	Carga de pandeo lateral l	Nor Panel	al giro	Zp	de M <sub>or</sub>	Coeficier
1	1 - IPE 100	Apoyo articulado			En el ala superior	Automático para todos lo:	s CC/ Viga
onfigura Secciv	ición para Barra núm.1	1 IPE 1	00			Apoyo a	rticulado
			uu tioulada				
Panel de cortante		Apoyo ai	niculado 1		β=		
Coacción al giro			1			Apovo ar	rticulado fiio empotrado
Punto de anticación de carga		Endala					
Método de determinación del M-cr		utomáti	ico para todos los				
Tipo d	le viga	Viga Jami	inada		β=		
Comer	ntario	- Inge lain	11000			Viga en v	voladizo
						k l	β= 2.0 /
			të Të			Apoyos	excepcionales
			8			?!	
			12			Definir N	KI = ?
			tê Tê				N <sub>KI</sub> = ?
						the second second second second second second second second second second second second second second second se	

Una vez hecho esto, pulsamos en calcular.

## 4.-RESULTADOS

La primera ventana que obtenemos en resultados es la de los factores de carga crítica, en este caso es de 1,994 en rojo. Es decir que la carga crítica será: 1 : 1,994 = 0,501 kN.

	A	В	C	D	E	F
Sección núm.	Barra núm.	Barra Posición ( núm. x (mm) de	Caso de carga	so Razón Criterio arga de cálculo de cálci		Comentario sobre el método de cálculo
1	IPE 100					
	1	5700.000	CC1	1.994	>1	23) Error de cálculo según las ecuaciones (16) y (22)
						Ŀ₹
	11		Máx.:	1.994	>1	<b>B</b> > 1,0

## **3.3.6.** Análisis de los resultados obtenidos

En el siguiente cuadro se pueden ver los diferentes resultados obtenidos para cada forma de cálculo:

	TEÓRICO	СТЕ	DLUBAL EF	DLUBAL MÓDULO EF	DLUBAL MÓDULO EC
P <sub>cr</sub> (N)	648	565	638	642	501

Se puede apreciar que el cálculo teórico coincide casi exactamente con los cálculos mediante elementos finitos.

Se ve claramente que el cálculo mediante normativa queda del lado de la seguridad en comparación con los cálculos mediante elementos finitos, aproximadamente en un 12%.

## 3.3.7. Influencia del peso propio de la viga en los resultados

La consideración del peso propio de la viga lleva asociada la aparición de un momento en el empotramiento de signo contrario al introducido por la carga puntual. Para el caso de carga distribuida dicho momento tomará un valor:

$$M_{pp} = -\frac{pL^2}{2} = -\frac{9.8 \cdot A \cdot \dots \cdot L^2}{2} = -1287.22Nm$$

Así, aplicando el *principio de superposición*, se requerirán  $P = M_{pp}/L = 225.83$ N adicionales respecto de la carga crítica obtenida con anterioridad, para la "compensación" de este momento que se opone al producido por la carga aplicada.

Vamos a contrastar este punto con los diferentes métodos empleados en el apartado anterior. Por no ser repetitivos solamente se va a exponer paso a paso cada uno de los procesos. Solamente tenemos que activar la casilla de peso propio en la hipótesis de carga nº1, según se aprecia en la imagen inferior.

asos de carga   Anninnes   Expresiones d	combinación   Combinaciones de acciones   Con	rbinaciones de carga 🛛 Combinacion	es de resultados		
'esos de carga existentes	CC núm. Descripción d	el caso de carga		Para resove	
C CC1	1		~		
	General Parámetros de cálculo				
	Categoria de accion		EN 1990   JNE		
	G Pennariente				
	Peso propio				
	🗹 Activo				
	Factor en circeción:	2 2000- 00-			
	X: C.000 🗢 F1	······································			
	Y: LUW 🗢 🖯				
	Z: 1.000 😂 [·]				

## **3.3.7.1.** Cálculo mediante DLUBAL Elementos finitos

La primera ventana que obtenemos en resultados es la de los factores de carga crítica, en este caso es de 0,781 Es decir que la carga crítica será:  $1 \ge 0,781 = 0,781$  kN.

	A	B	С
Modo núm.	Factor de carga crítica f [-]	Factor de mayoración α[-]	Mensaje
1	0.781		
2	2.160	1.862	
3	3.729	1.366	
4	5.632	1.216	
5	7.826	1.146	
6	10.419	1.106	
7	13.315	1.081	
8	16.629	1.064	

# **3.3.7.2.** Cálculo mediante DLUBAL Módulo para el análisis de pandeo lateral y flexiotorsional según método de elementos finitos

La primera ventana que obtenemos en resultados es la de los factores de carga crítica, en este caso es de 0,7427 Es decir que la carga crítica será:  $1 \ge 0,7427 = 0,7427$  kN.

A	В	C	D	E
Conj. núm.	Caso de carga	Factor de carga críti	Núm. de iteraciones	Motivo para la interrupción del cálcul
1	CC1	0.7427	1	El coeficiente de la diagonal de la matriz es menor que cero

## 3.3.7.3. Análisis de los resultados

Se va a comparar los resultados obtenidos en este punto con los obtenidos en el análisis sin peso propio.

En el siguiente cuadro se pueden ver los diferentes resultados obtenidos para cada forma de cálculo:

	DLUBAL EF	DLUBAL MÓDULO EF
P <sub>CR</sub> SIN PP (N)	638	642
P <sub>cr</sub> CON PP (N)	781	742
DIFERENCIA (N)	143	100
DIFERENCIA (N)	18%	13%

Se puede apreciar que la el valor para  $P_{CR}$  aumenta significativamente, entre un 13 y un 18% al considerar el peso propio.

#### 4. PANDEO DE PLACAS: ABOLLADURA

En los apartados anteriores a esta sección se ha tratado el pandeo de elementos "mono dimensionales". Estos análisis han resultado relativamente simples dado que en ellos podía asumirse que la flexión tenía lugar únicamente en 1 plano. En este apartado se tratará el pandeo de placas, el cual implica la aparición de momentos flectores en 2 planos, dando lugar por tanto a un análisis más complejo. El sentido de estudiar el fenómeno del pandeo en placas reside en la aplicabilidad de las expresiones resultantes al campo del pandeo de los elementos que componen un perfil laminado (o armado) como puede apreciarse en la Imagen 3.1.



Figura 3.1

En piezas sometidas a flexión, el alma se encuentra sometida a unas tensiones normales y tangenciales que hacen que, en general, pueda haber zonas sometidas a una tensión principal (o las dos) de compresión. Si estas tensiones de compresión son lo suficientemente grandes, puede aparecer una bifurcación del equilibrio, siendo posibles estados de equilibrio con deformaciones transversales del alma. Es decir, es posible que se produzca el pandeo o abolladura del alma.

El análisis se centrará en primer lugar en la obtención de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento con pandeo de la placa.

#### 4.1. Revisión teórica del fenómeno

Cuando una placa delgada es sometida a fuerzas de compresión en su plano, puede sufrir deformaciones transversales si los valores de la carga se encuentran por encima de ciertos límites puede producirse el pandeo de la placa. El pandeo de placas difiere del de barras en 2 aspectos fundamentales:

1. Desde el punto de vista matemático, funciones como la de deflexión, momento, etc. serán funciones de 2 variables, y por tanto, como comentamos anteriormente, el comportamiento vendrá definido por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

2. Desde el punto de vista resistente hay una diferencia muy importante. En el caso de barras, la aparición del pandeo implica que el elemento no sea capaz de resistir más carga, y que por tanto colapse. Esto no ocurre así en placas, ya que estás, una vez que han sufrido abolladura pueden seguir soportando aumentos de carga, llegándose alcanzar cargas muy superiores a la de aparición de la "primera abolladura" antes del fallo de la pieza.

 $\begin{array}{c} \end{array}$ 

Se considera una placa de espesor uniforme h como la mostrada en la Imagen 3.2

Imagen 3.2

En desarrollos posteriores se atenderá a las referencias aquí mostradas. Además, denominaremos superficie media al plano xy situado a una distancia h/2 de las 2 caras de la placa. En la imagen se muestra también un elemento diferencial de volumen que

nos permite observar las tensiones que pueden aparecer en cada plano, con carácter general una normal y dos tangenciales.

La obtención de las ecuaciones teóricas que rigen el comportamiento a pandeo de la placa de Kirchhoff vendrá basada en las siguientes hipótesis:

a) Deformaciones tangenciales xz y yz despreciables, y por tanto las normales a la superficie media permanecen rectas y normales tras la deformación.

b) Tensión normal z y su correspondiente deformación z despreciables, y por ello, los giros de la superficie media son representativos de los giros en cualquier punto de la placa.

c) Efectos de membrana provocados por la flexión despreciables frente a los de la propia flexión.

d) Material homogéneo, isótropo y comportamiento de acuerdo a la Ley de Hooke.

Como consecuencia de las 2 primeras hipótesis, podremos tratar el problema como uno de tensión plana. En base a las hipótesis c) y d), podremos modelar el comportamiento de la placa mediante ecuaciones diferenciales lineales y de coeficientes constantes.

#### 4.1.1. Ecuación diferencial del pandeo de placas en teoría lineal

Se buscará en este apartado obtener la ecuación que rige el equilibrio en la posición deformada, en la cual existirá una influencia de los esfuerzos coplanarios (Imagen 3.3) sobre la flexión. A partir de dicha ecuación se podrán desarrollar los casos particulares que supondrán la base para la elaboración de modelos que nos permitan reproducir y analizar el fenómeno más adelante. Esta ecuación será deducida a partir del análisis de la superficie media sometida a un estado de cargas constante como el mostrado en la imagen, en la que las fuerzas serán consideradas positivas cuando actúan en las direcciones indicadas. Por otra parte, las fuerzas referidas son fuerzas por unidad de longitud.





Imagen 3.3

El equilibrio de los esfuerzos coplanarios provocados por el sistema de fuerzas definido debe ser establecido en la posición deformada sobre un elemento diferencial de volumen como el representado en la Imagen 3.4 de lados dx y dy y espesor igual al de la placa (h).



#### Imagen 3.4

Dado que las deformaciones en la superficie media debidas al flector son despreciables, los esfuerzos coplanarios se deben únicamente al efecto de las cargas coplanarias y no varían con x o y. Sin embargo, el ángulo girado por la superficie sí varía con x y con y, dando lugar a las pendientes y curvaturas indicadas en la figura. Realizando la aproximación ya presentada en apartados anteriores para pequeños ángulos, la suma de momentos en dirección x y en dirección y, y la suma de fuerzas sobre dichos ejes son ambas nulas. La suma de las proyecciones de las fuerzas Nx sobre el eje z resulta:

$$N_{X}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} dx\right) \cdot dy - N_{X} \frac{\partial w}{\partial x} dy \qquad \qquad F \acute{o}rmula \ 3.01$$

O de otro modo:

La proyección y posterior suma del resto de esfuerzos actuantes sobre el elemento diferencial en dirección *z* resulta :

$$\left(N_{y}\frac{\partial^{2}w}{\partial y^{2}}+N_{xy}\frac{\partial^{2}w}{\partial x\partial y}+N_{yx}\frac{\partial^{2}w}{\partial x\partial y}\right)dx\partial y \qquad \qquad F\acute{o}rmula \ 3.03$$

Para determinar las componentes según z de los esfuerzos cortantes se desprecian las curvaturas de los lados en los que actúan, lo cual es posible dado que los términos que resultarían al considerar dichas curvaturas son de un orden superior a los términos que se han retenido.

Aplicando la igualdad Nxy=Nyx a la expresión del equilibrio de momentos según z y adicionando los términos (3.01) y (3.02) se obtiene la resultante de fuerzas en la superficie media según z:

$$\left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) dx \partial y \qquad \qquad F \acute{o}rmula \ 3.04$$

Además de las fuerzas coplanarias presentadas en la Imagen 3.04 sobre el elemento diferencial de la placa flectada actuarán los momentos y cortantes mostrados en la Imagen 3.05. en la cual se definen los sentidos positivos para los mismos.





Las componentes de los esfuerzos cortantes en las direcciones x e y son despreciables. En dirección z la suma de esfuerzos debidos al cortante resulta

$$\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_z}{\partial y}\right) dxdy \qquad \qquad F \acute{o}rmula \ 3.05$$

Este término, unido a los ya obtenidos en la ecuación (3.05) nos da la ecuación de equilibrio en dirección z:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$
 Fórmula 3.06

Considerando ahora el sumatorio de momentos según *x* igual a cero obtenemos:

$$\frac{\partial M_{y}}{\partial y}dydx - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q_{x}}{\partial x}\frac{dxdydy}{2} - Q_{y}dxdy - \frac{\partial Q_{y}}{\partial y}dxdydy = 0 \qquad F \circ f mula 3.07$$

Reteniendo únicamente los términos de orden inferior resulta:

$$\frac{\partial M_{y}}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_{y} = 0 \qquad \qquad F \circ rmula \ 3.08$$

Procediendo ahora del mismo modo para el equilibrio de momentos según y se tiene:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0 \qquad \qquad F \text{ ormula 3.09}$$

Las ecuaciones (3.06), (3.08) y (3.09) representan las 3 ecuaciones de equilibrio considerando el pandeo de la misma. A menudo, estas ecuaciones pueden simplificarse combinándose para "eliminar" algunas de las variables. Así, derivando respecto de y en (3.07) y haciendo lo propio respecto de x en (3.08) tenemos:

$$\frac{\partial Q_{y}}{\partial y} - \frac{\partial^{2} M_{y}}{\partial y^{2}} - \frac{\partial^{2} M_{xy}}{\partial x \partial y}$$
  
$$\frac{\partial Q_{x}}{\partial x} - \frac{\partial^{2} M_{x}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial^{2} M_{yx}}{\partial y \partial x}$$
  
*Fórmula 3.10*

Sustituyendo ahora las ecuaciones (3.10) en la ecuación (3.05) obtenemos una única ecuación de equilibrio en la que no aparecen los esfuerzos debidos al cortante:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad Formula \ 3.11$$

El siguiente paso consistiría en obtener la relación existente entre momentos y desplazamientos, relacionando para ello los momentos con las tensiones, las tensiones con las deformaciones y las deformaciones con los desplazamientos. Este proceso, por extenso, no se llevará a cabo en este documento tomándose directamente las relaciones del libro de *Alexander Chajes* "Principles of Structural Stability Theory". Dichas relaciones vienen dadas por:

$$M_{x} = -D\left(\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}} + -\frac{\partial^{2}w}{\partial y^{2}}\right) \qquad M_{y} = -D\left(\frac{\partial^{2}w}{\partial y^{2}} + -\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}\right)$$
$$M_{xy} = -D(1--)\frac{\partial^{2}w}{\partial x \partial y}$$
$$D = \frac{Eh^{3}}{12(1--2)} \qquad Formula \ 3.12$$

La variable D representa la rigidez a flexión por unidad de ancho de la placa, resultando equivalente al término EI utilizado en barras. Por otra parte, las relaciones momento-curvatura dadas anteriormente para la placa son análogas a las que teníamos en el apartado anterior para el caso de la barra (M=-EI(d2y/dx2)). Comparando las relaciones obtenidas para ambos casos se observa que la relación para el caso de la placa coincide con la de la barra, afectada por un factor  $1/(1-\mu 2)$ . Esta diferencia se debe a que la barra tiene permitida la deformación lateral, mientras que en la placa dicha deformación se encuentra restringida por el material adyacente. Sustituyendo las relaciones (3.11) en la Ecuación (3.12) se obtiene finalmente la ecuación diferencial a integrar para resolver el problema de pandeo de placas:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad F \circ f mula 3.13$$

Ya estamos pues en disposición de particularizar esta expresión para los casos de interés en lo que respecta a este documento que en concreto serán el de abolladura por compresión uniaxial y el de abolladura por cortante, desarrollados respectivamente en los próximos apartados.

## 4.1.2. Carga crítica para placa comprimida en una dirección

Consideraremos una placa rectangular simplemente apoyada de lados a y b y espesor h solicitada por una fuerza de compresión uniforme por unidad de longitud de valor Nx tal y como se indica en la imagen 3.6



Imagen 3.6

Observando que la carga aplicada es negativa respecto de los signos definidos en la imagen 3.4, y que para el caso analizado Ny=Nxy=0, la ecuación diferencial de la placa flexionada (3.13) queda de la forma:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad F \circ f$$

Dado que los 4 bordes se encuentran simplemente apoyados las condiciones de contorno vienen dadas por la anulación de los momentos y de la deflexión lateral en dichos bordes. Así:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad en \ x = 0 \quad y \ en \ x = a$$
$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad en \ y = 0 \quad y \ en \ y = b$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad en \ x = 0 \quad y \ en \ x = a$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad en \ y = 0 \ y \ en \ y = b$$

Fórmula 3.15

Sustituyendo las 2 últimas condiciones en las 2 primeras se tiene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad en \ x=0 \quad y \ en \ x=a$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad en \ y=0 \quad y \ en \ y=b$$

Fórmula 3.16

De acuerdo a los procesos ya conocidos de resolución el siguiente paso para la obtención de la carga crítica se corresponde con la determinación de la solución no trivial de la ecuación diferencial que gobierna el fenómeno considerado. En este caso la ecuación diferencial viene expresada en derivadas parciales, por lo que resulta conveniente realizar ciertas consideraciones previas. La principal diferencia entre una ecuación diferencial ordinaria y otra en derivadas parciales reside en que mientras para el primer caso puede la ecuación puede ser satisfecha por una única función, para el segundo pueden existir numerosas funciones que cumplan la expresión.

Es por ello que la solución general en derivadas parciales es mucho más difícil de obtener, ya que mientras que la solución general de la ecuación ordinaria nos da una expresión de la variable en función de 1 ó varias constantes, la solución obtenida para una ecuación diferencial en derivadas parciales solo describe el comportamiento de la variable dependiente en términos generales. A consecuencia de lo anterior, no merece la pena la obtención de la solución general a la Ecuación (3.14), en lugar de ello, se acostumbra a obtener una expresión del comportamiento de la variable utilizando una solución en forma de serie de Fourier:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{mf}{a}\right) \cdot x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{nf}{b}\right) \cdot y \qquad \qquad F \circ rmula \ 3.17$$

La expresión mostrada cumple todas las condiciones de contorno (i-iv), y en ella m y n son el número de semiondas de la placa abollada en direcciones x e y respectivamente. Para imponer también el cumplimiento de la ecuación diferencial basta derivar la expresión anterior y sustituirla en la Ecuación (3.14), resultando:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[ \frac{m^4 f^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 n^2 f^4}{a^2 b^2} + \frac{m^4 f^4}{b^4} - \frac{N_x}{D} \frac{m^2 f^2}{a^2} \right] sen\left(\frac{mf}{a}\right) \cdot x \cdot sen\left(\frac{nf}{b}\right) \cdot y$$
  
Fórmula 3.18

El primer término de la expresión anterior consiste en un número infinito de sumandos de funciones independientes. La única forma de que dicha suma valga cero es que todos y cada uno de los coeficientes de los sumandos valgan cero. Así:

$$A_{mn} = \left[\frac{m^4 f^4}{a^4} + 2\frac{m^2 n^2 f^4}{a^2 b^2} + \frac{m^4 f^4}{b^4} - \frac{N_x}{D}\frac{m^2 f^2}{a^2}\right] = 0$$
$$A_{mn} = \left[f^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 - \frac{N_x}{D}\frac{m^2 f^2}{a^2}\right] = 0$$

Fórmula 3.19

La solución trivial implica *Amn*=0, que marca el equilibrio *sin pandeo*. Las posibles bifurcaciones del equilibrio con aparición de la flexión vienen dadas por implican la *anulación del término contenido en el corchete*. Despejando el valor de la carga en dicho término tenemos:

$$N_{x} = \frac{Da^{2}f^{2}}{m^{2}} \left(\frac{m^{2}}{a^{2}} + \frac{n^{2}}{b^{2}}\right)^{2} \qquad 6 \qquad N_{x} = \frac{Df^{2}}{b^{2}} \left(\frac{mb}{a} + \frac{n^{2}a}{mb}\right)^{2} \qquad F \acute{o}rmula \ 3.20$$

Si llamamos resulta finalmente a / b = r resulta finalmente:

$$N_x = \frac{Df^2}{b^2} \left(\frac{m}{r} + \frac{n^2 r}{m}\right)^2 \qquad F \circ rmula \ 3.21$$

De acuerdo con la expresión obtenida el valor crítico de la carga de compresión está relacionado con las características geométricas de la placa, y con el número de ondas generados en cada dirección. Como en el caso de los fenómenos anteriormente analizados, se determinará el valor más bajo de la carga para el que se produce el pandeo. Dicha solución se dará siempre con un valor de n=1 (1 sola semionda en dirección y), dado que n se encuentra únicamente en el numerador.

Para n=1, y expresando (3.21) como:

$$N_x = \frac{Df^2}{b^2} \cdot k \quad \text{con} \quad k_x = \left(\frac{m}{r} + \frac{r}{m}\right)^2 \qquad F \acute{o}rmula \ 3.22$$

El mínimo valor de la carga se dará para kmín. Así, derivando *k* respecto de *m* se tiene:

$$\frac{d(N_x)}{dm} = \frac{2Df^2}{b^2} \left(\frac{m}{r} + \frac{r}{m}\right) \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{m^2}\right) = 0$$
$$\frac{1}{r} - \frac{r}{m^2} = 0 \Longrightarrow m = r \Longrightarrow k = 4$$

Fórmula 3.23

Resultando:

$$N_{xcrit} = \frac{4Df^2}{b^2} F \acute{o}rmula \ 3.24$$

Conforme a los resultados obtenidos, al ir aumentando la carga se alcanzará un cierto valor de Nx para el cual se producirá la abolladura. En este primer instante de aparición de la abolladura se generará una semionda en dirección y, y un número de semiondas en dirección x que dependerá de la relación entre los lados de la placa a/b, y que según (3.23) será igual a *m*. Hay que notar en este punto, que *m* siempre será un número entero y que *r=a/b* no tiene porque serlo, por lo que la ecuación anterior se

cumplirá estrictamente únicamente en el caso en que r sea un número entero. En el caso general, para un r dado, no entero, el pandeo se producirá con un número de ondas m próximo al valor de r, pero no igual (típicamente, el n° de ondas m será igual a la parte entera de r o a la parte entera de r+1). Representando las evoluciones de k en función de r para un m fijo, observamos que para cada valor de r existen varios valores de k posibles, cada uno correspondiente a un mi dado. Nos interesaremos así, para cada r, por el valor mínimo de k(mi,r) que nos indicará que *el pandeo para dicha relación de aspecto de la placa* r=a/b *se producirá para un cierta carga y con un número de semiondas* mi *en dirección* x.



Imagen 3.7

En la gráfica se observa que el primer modo de pandeo presentará una única semionda en dirección x para r<a, mientras que se manifestará mediante dos semiondas para r< a modo de ejemplo se desarrolla la obtención del primero de estos puntos de cambio del comportamiento a pandeo. Se observa en la curva que en el primer tramo la curva con menor k es la de m=1, mientras que a partir de cierto valor de r la curva de m=2 se encuentra por debajo de la de m=1. Deberemos buscar por tanto el punto de corte de las 2 curvas, presentándose un modo de pandeo diferente a uno y otro lado de dicho punto.



Del mismo modo se obtendría el resto de puntos; sin embargo a partir de m=4 la curva es muy aplanada y se acepta que para r>4 (a>4b), podemos tomar kmin=4.

#### 4.1.3. Carga crítica para placa sometida a cortante

El fenómeno de pandeo de placas no es exclusivo de elementos sometidos a compresión axial, sino que puede manifestarse en placas sometidas a un esfuerzo cortante puro, ya que la única condición necesaria para la aparición de la abolladura es la existencia de tensiones de compresión en alguna zona del elemento. En el caso mencionado, la compresión aparece en planos que forman 45° con los bordes sobre los que se encuentra aplicada la carga, tal y como puede observarse en la siguiente imagen, provocando la aparición de abolladuras que siguen la dirección de estas tensiones como se aprecia en la imagen de la Imagen3.9.



Imagen3.8



Imagen 3.10

Consideremos en lo que sigue la placa simplemente apoyada mostrada en la Imagen 3.10 cargada por un cortante uniforme Nxy aplicado sobre los 4 bordes. Para la determinación de la carga crítica en el caso que nos ocupa haremos uso del método de Galerkin mostrado en el Apartado 2.8 del libro de Alexander Chajes [4] consultado para la realización de estos desarrollos.

Se necesita en primer lugar una expresión que modele el comportamiento de la placa deformada para las condiciones de contorno dadas.

En este caso:

$$w = A_1 sen \frac{fx}{a} sen \frac{fy}{a} + A_2 sen \frac{2fx}{a} sen \frac{2fy}{a}$$
 Fórmula 3.26

Para una placa a cortante puro cuya deformada venga dada mediante la Ecuación (2.100), la ecuación de Galerkin toma la forma:

$$\int_{0}^{a} \int_{0}^{a} Q(w)g_{i}(x)dxdy \quad i=1,2$$

$$Q(w) = \frac{\partial^{4}w}{\partial x^{4}} + 2\frac{\partial^{4}w}{\partial x^{2}\partial y^{2}} + \frac{\partial^{4}w}{\partial y^{4}} + 2N_{xy}\frac{\partial^{2}w}{\partial x \partial y}$$

$$g_{1}(x) = sen\frac{fx}{a}sen\frac{fy}{a}$$

$$g_{2}(x) = sen\frac{2fx}{a}sen\frac{2fy}{a}$$

Fórmula 3.27

Obteniéndose una ecuación diferente para cada término gi(x). Sustituiremos pues las expresiones de Q(w) y gi(x) y procederemos a la integración de las 2 ecuaciones resultantes. El proceso detallado de integración puede consultarse en las referencias citadas anteriormente (Chajes [4], Pág.261). Finalmente, las ecuaciones ya integradas adoptan la siguiente forma:

$$\frac{f^4}{a^2}A_1 + \frac{32N_{xy}}{9D}A_2 = 0$$
$$\frac{16f^4}{a^2}A_2 + \frac{32N_{xy}}{9D}A_1 = 0$$

Para establecer el valor de la *carga crítica* basta con igualar a cero el determinante de las 2 ecuaciones anteriores:

$$\begin{vmatrix} \frac{f^4}{a^2} & \frac{32N_{xy}}{9D} \\ \frac{32N_{xy}}{9D} & \frac{16f^4}{a^2} \end{vmatrix} = 0$$

Fórmula 3.29

Resultando un valor para la carga crítica

$$N_{xycr} = 11.1 \frac{f^2}{a^2} D \qquad Formula \ 3.30$$

Otros análisis más precisos que el aquí desarrollado, como el de Stein y Neff, ofrecen expresiones alternativas para esta carga crítica. En concreto, las fuentes citadas sugieren el siguiente valor de la carga crítica lineal de cortante:

$$N_{xycr} = 9.34 \frac{f^2}{a^2} D \qquad F \circ f = 3.31$$

#### 4.1.4. Fcr para varios casos. Coeficiente de pandeo de placas

A la vista de los resultados presentados y de otros muchos casos reportados en las referencias consultadas se puede observar que la expresión de la carga crítica de abolladura presenta una estructura común sean cuales sean las condiciones de contorno y tipo de carga para el elemento analizado. Así, cualquiera de los valores obtenidos para la carga crítica puede ser escrito de la forma:

$$F_{cr} = \frac{kf^{2}E}{12(1-\tau^{2})} \left(\frac{t}{b}\right)^{2}$$
 Fórmula 3.32

Donde Fcr es la tensión crítica normal o tangencial, y la única diferencia entre los distintos casos posibles la representa el coeficiente k, que depende de las condiciones de contorno, de la geometría de la placa y del tipo de carga aplicada. En la siguiente tabla se recoge el valor del coeficiente k para los posibles casos de interés en los posteriores estudios a realizar. Estos valores han sido extraídos nuevamente del libro de Alexander Chajes.

Condiciones de carga	Condiciones de contorno en los bordes	Coeficiente de pandeo k
Compresión uniaxial	<ul> <li>Los 2 bordes cargados se encuentran simplemente apoyados</li> </ul>	
	- Bordes descargados:	
b F	1. Los 2 simplemente apoyados	4.0
	2. Uno empotrado y el otro simplemente apoyado	5.42
a/b≥4	3. Los 2 empotrados	6.97
und 4	4. Uno simplemente apoyado y el otro libre	0.425
	5. Uno empotrado y el otro libre	1.28
Cortante puro	<ol> <li>Todos los bordes simplemente apoyados</li> <li>Todos los bordes empotrados</li> </ol>	$5.34 + \frac{4}{(a/b)^2}$ $8.98 + \frac{5.6}{(a/b)^2}$

Tabla con coeficientes de pandeo de placas para varios casos

## 4.2. Normativa de aplicación. Tratamiento según el Código Técnico de la Edificación.

Se va repasar lo que dice la normativa de aplicación, CTE DB-SE-A, respecto del fenómeno de abolladura para cortante y para cargas puntuales.

#### 4.2.1. Abolladura a cortante

El Código Técnico de la Edificación establece que no será necesario comprobar la abolladura por cortante para elementos tipo barra que posean almas de dimensiones d (altura) y t (espesor) tales que su esbeltez (d/t) cumpla:

$$\frac{d}{t} < 70 \cdot v$$

Ni en aquellos en los que disponiendo de rigidizadores transversales, se cumpla que:

$$\frac{d}{t} < 30 \cdot \mathsf{V} \cdot \sqrt{k_t}$$

La resistencia del alma frente a abolladura por cortante vendrá dada por la siguiente expresión:

$$V_{b,Rd} = \frac{d \cdot t \cdot \ddagger_{b}}{\chi_{M1}} \qquad F \circ rmula \ 3.33$$

De nuevo, k , b y se encuentran definidos en el *Anexo I* de este documento, al igual que otros parámetros y coeficientes necesarios para la determinación de éstos.

#### 4.2.2. Abolladura ante cargas puntuales

Se establece la no necesidad de comprobación ante este tipo de cargas en caso de disponerse de rigidizadores calculados de acuerdo al Artículo 6.3.3.4 en la zona de aplicación, o en el caso de elementos no rigidizados cuyas almas sean capaces de resistir el esfuerzo de compresión provocado por la carga puntual, es decir, para elementos en los que se cumpla:

$$\frac{F_{Ed}}{F_{b,Rd}} \le 1$$

FEd valor de cálculo de la carga concentrada Fb,Rd resistencia de cálculo del alma frente a cargas concentradas La resistencia de cálculo del alma frente a cargas concentradas viene dado por:

$$F_{b,Rd} = \frac{t_w f_y L_{ef}}{X_{M1}} \qquad F \acute{o}rmula \ 3.34$$

Donde Lef es un coeficiente de minoración obtenido a partir del valor que la norma aplica para la carga crítica de abolladura (Fcr), que viene dada por

$$F_{cr} = 0.9 \cdot k_F \cdot E \cdot \frac{t^3}{d}$$
 Fórmula 3.35

Los apartados necesarios para la determinación de los coeficientes necesarios para cerrar el problema se encuentran recogidos en el *Anexo I*.
### 4.3. Casos analizados

En este punto se van a estudiar una serie de casos que abarquen lo expuesto en los epígrafes teóricos anteriores:

-Cálculo a cortante:

-Cálculo teórico

-Cálculo normativo según CTE DB SE-A

-Cálculo mediante el programa DLUBAL

-Módulo de abolladura Plate-Buckling

-Elementos finitos

-Cálculo a cortante, influencia de la colocación de ridigizadores:
 -Cálculo mediante el programa DLUBAL
 -Elementos finitos

-Cálculo frente a cargas puntuales transmitidas de un ala a otra
-Cálculo normativo según CTE DB SE-A
-Cálculo mediante el programa DLUBAL
-Elementos finitos

-Cálculo frente a cargas puntuales, influencia de la colocación de ridigizadores:
-Cálculo normativo según CTE DB SE-A
-Cálculo mediante el programa DLUBAL
-Elementos finitos

La elección de un modelo ilustrativo para la representación de la abolladura no es tan sencilla como en los casos anteriores, en los que la aplicación de un determinado estado de cargas a cualquiera de los perfiles comúnmente utilizados en estructuras metálicas daba lugar a la aparición del fenómeno deseado.

La sección bajo estudio deberá cumplir una serie de requisitos geométricos que no poseen la mayoría de perfiles normalizados utilizados habitualmente. Tanto es así, que sería muy difícil conseguir abollar cualquier perfil laminado de entre los seleccionados de un catálogo, ya que con toda seguridad se alcanzarían antes otros modos de fallo (plastificación o pandeo lateral principalmente).

Por otra parte, para perfiles cuyas características geométricas los convierten en susceptibles de padecer abolladura, esta abolladura no tendrá un único modo de manifestarse como ocurría en los casos anteriores, sino que la forma de la abolladura dependerá del modo de aplicación de las cargas y del estado de esfuerzos que dichas cargas induzcan sobre las "placas" (almas y alas) del perfil bajo estudio.

Debido a todo esto, en este apartado se define una sección genérica con la que se intentará reproducir la mayoría de casos posibles, en base a ésta se modelará un "compartimento" patrón sobre el que aplicar tanto las expresiones dadas por los desarrollos teóricos como las propuestas por la normativa de aplicación. Dicho compartimento representará la parte del elemento metálico comprendida entre 2 rigidizadores transversales. En cada análisis se podrá repetir dicho patrón tantas veces como queramos para dar lugar al modelo deseado. Sobre el elemento metálico resultante en cada caso aplicaremos las cargas, dependiendo la forma de aplicación del fenómeno que deseemos reproducir.

Como consecuencia de lo anterior tendremos que modelar nuestra propia sección mediante un perfil armado, en base a unos requisitos concretos:

 El alma de la viga debe tener una esbeltez mayor a las esbelteces de referencia de la Norma; por tanto, deberemos escoger un alma de pequeño espesor y de canto suficiente.

2. No solo se pretende conseguir la abolladura, si no que ésta se produzca para valores de la carga suficientemente bajos, de cara a la posible reproducción del modelo en el laboratorio. Por lo tanto, la reducción del espesor y el incremento de la altura del alma antes mencionados no deben limitarse al mínimo necesario para que la carga crítica de abolladura sea algo menor que la de pandeo lateral o que la de plastificación, sino que serán sobrestimados.

3. Se busca un tipo de sección y una disposición que se adapte bien a la comprobación mediante el método post-crítico simple, más sencilla de realizar y análoga a la comprobación del CTE.

4. El tamaño de las alas deberá ser suficiente, para resistir "por sí solas" los esfuerzos de flexión y tracción/compresión en cada sección, pero no excesivo, para evitar que la inercia de la sección aumente tanto que reduzca la tensión equivalente por debajo de la de abolladura.

Como se ha comentado, es sabido en base a la experiencia que los perfiles normalizados difícilmente abollarán, por lo que tomando como referencia el espesor del perfil de mayor esbeltez de entre los mayores perfiles del catálogo (tw=11,5mm para el IPE750x137), y de acuerdo a los requisitos 1 y 2, se toma como alma de nuestro modelo una chapa de 5mm de espesor.

Se presenta a continuación la sección armada resultante, así como el rectángulo patrón que servirá de base a algunos de los siguientes análisis.





En lo que sigue, para cada caso analizado se mostrará inicialmente el modelo empleado para los diferentes estudios, no resultando definitivas las configuraciones mostradas en las imágenes, ya que en los estudios numéricos se han realizado modificaciones sobre las mismas con objeto de estudiar la influencia de alguno de los parámetros de la sección (existencia de rigidizadores, espesor de los mismos, espesor de las alas, etc.) sobre el valor final de la carga crítica y sobre el tipo de abolladura resultante para un acero de calidad S275.

#### **4.3.1.** ABOLLADURA A CORTANTE

En este primer caso se desea que el alma de la viga trabaje a cortante, para lo cual se ha modelado un elemento formado por 2 rectángulos del modelo patrón con carga aplicada sobre el rigidizador intermedio según la imagen inferior.



Imagen 3.13

#### 4.3.1.1. Cálculos según normativa de aplicación CTE DB SE-A

El Apartado 6.3.3.4 del CTE, incluido en el Anexo I, establece las bases de la comprobación frente a abolladura de los elementos metálicos cuya sección presenta determinadas características geométricas, anteriormente mencionadas.

El primer paso será ver que es necesaria llevar a cabo la comprobación

$$\frac{d}{t} < 70 \cdot v$$

Al no disponer de rigidizadores d/t será 750/5 = 150 con lo que la comprobación es necesaria.

La resistencia del alma frente a abolladura por cortante vendrá dada por la siguiente expresión:

$$V_{b,Rd} = \frac{d \cdot t \cdot \ddagger_b}{\chi_{M1}}$$

Donde :

•

$$k_{\rm t} = 5.34 + \frac{4}{\left(a/d\right)^2} = 7.59$$

Donde

$$w_{\rm t} = \frac{d/t}{37.4 \mathrm{v} \sqrt{k_{\rm t}}}$$

El valor de w es de 1,57.

Donde:

Resultando:

$$\ddagger_{b} = \frac{f_{y}}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{0.9}{w}\right) = 91.02 \text{ N/mm}^{2}$$

Con estos datos el resultado final para  $V_{ba,Rd}$  será de 325.075 N.

## 4.3.1.2. Cálculos mediante el programa DLUBAL

En este apartado vamos a emplear el programa de cálculo de estructuras DLUBAL para obtener la carga crítica a cortante.

Vamos a ver dos opciones, en la primera emplearemos el modulo especifico del que dispone el programa para comprobación de abolladura RF-PLATE BUCKLING y en la segunda se llevará a cabo el cálculo mediante elementos finitos.

### Cálculos mediante el módulo Plate-Buckling

Se indica paso a paso como se modela y se desarrolla el proceso de cálculo en el programa.

### 1.-MODELADO



Abrimos un nuevo archivo y lo llamamos

Abolladura-barra y aceptamos.

Pulsamos el botón Nuevas barras simples.

Laminadas	Paramétrica - Pared delgada	Peramétrica - Maciza	Paramétrica - Vadera
ILTL	IIIT	TLI	
0004	Sección simétrica en L.		
1 🔹 🛶 😫		TLI	
	Ο Π Π	TLL	TTT
Armedas	ΠΠΠ	<b>T T V</b>	
IIITT	Ţ <b>1</b> + •	V V D X	
TIII	- 1 l J	10 00	
IIIII	TCCC		Norralzada - Madera
•• <b>T</b>	ΣΟ		
15		De Tuido por el usoario	Pu-grans de ser: inn-s
		2	8

Vamos al apartado Sección y elegimos para el inicio de barra, en el apartado Parametrica-Pared delgada, la primera de las opciones, Sección simétrica en I.

pa de sección	Pararelius		
Τ         Τ         Τ         Τ           Γ         L         L         D           Γ         Τ         T         T           Γ         Τ         T         T           Ο         7         Π         Π           Π         Π         Π         Π           Ι         1         +         •           -         1         L         J	[''''] (1-3) (1-3) (1-3) (1-3) ['''''] (1-3) (1		
I C C C		0 5 Niteral	
nipo de levinitas. • 🗎 🌆	B	35 754(110/5/17/0	

En el menú introducimos los datos de nuestra sección según el croquis.

ieneral Opciones Longitudes eficades	s Modificar tig dez	
Barra húm.		
Excentricidad de barra		
lingune		_
División de la parta	Crear nueva excantricidad de bar	ra
Ninguna	• 🚡 🖻	
Apoyo elástico de barra		
Ninguna	- 🛅 💌	
No linealidad de barra		
Ninguna	• 🔁 🖻	
forma de sección variable		
linea *		
(		
LUIA IN THE INTERNAL	• 6	
	1999	

Aceptamos y vamos a la pestaña opciones, donde seleccionaremos una nueva excentricidad para la barra, con el fin de que apoye en su ala inferior.

Nudo núm.	Línea núr	т.	Barra nú <u>m</u> .
2	1	(T)	1
Coordenadas		Modo de	entrada
X:         0.000           Y:         0.000           Z:         0.000           Referencia:         SC actual           Origen de rejil         Uljimo nudo	(m) (m) (m)	Nudo Earrg Distanci a: Longi Li Li	/gunto //inea // (n) % tud y direction - (n) (n)
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2		© Perμ © Áng α; Longitud L: Π Inter ΔL:	re rulcular men te a la ba ulo en plano de trabajo + + + + + + + + + + + + + + + + + + +

Aceptamos e introducimos las coordenadas de origen de la barra (0,0,0).

Aceptamos e introducimos las coordenadas del final de la barra (2,0,0).

57 R	FEM 5.02.	0053 (64b	it) Tria	al - [Abolla	dura-barra	a*]
1	Archivo	<u>E</u> dición	Ver	Insertar	<u>C</u> álculo	R
1.94	-91	1 - 7	-   🔮	R	P×1 - 9	<u>a</u> ‡
1	23	9 🖬		Nuevo apo	yo en nudo	5

Ya tenemos nuestra barra, ahora definimos sus apoyos.

Pulsamos el botón Nuevo apoyo en nudo.

rir oroz4	En ka rudi	srin	1	4.00
1				7
Gire da spoye				
Secuence:	Grado en tom	03		
X12 -	X AI	自主日		-
	Y 00	0 <u>+1</u> []		
	7 10	0 <u>÷)</u> []		~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
Aprijin e Astico	sy.		-	/
Elferer 7	1			
Condiciones de	827/2			
Aaryo	Constant: clás	tica	No incalidad	
🛛 🕼	Gir :	÷i bar∣	l'ingune	- 5
🛛 u-:	C <sub>6</sub> y :	÷€ jitarj	Vinguna	- 5
e 🛛	Giz :	÷ βriα	ling.rs	- 9
Cascolin				
2 x::	Cor:	i€£ bhread	Vingura	
<b>□ ?</b> •:	C. Y :	0000⊕j [khrates]	Vinguna	. 9
29 12	Gyz:	<u>⊕y</u> Binnal	Vinguna	• 9
-	LL	<u>.</u>		
Carerado				
		•	à	

Impedimos el desplazamiento y el giro en todos los sentidos menos el giro en Y y lo aplicamos a los dos nudos de la barra



Ahora dividimos la barra en el punto donde más adelante colocaremos un rigidizador.

Botón derecho sobre la barra, seleccionamos Dividir barra y la opción n nudos intermedios, eligiendo 1 nudo intermedio.

### 2.-INTRODUCCIÓN DE CARGAS

Vamos a proceder a introducir la carga.

Pulsamos el botón Nueva carga en barra.

57	R	FEM 5.0	2.0053 (64b	it) Tria	I - [Abolla	dura-barra	*]						
-		Archivo	<u>E</u> dición	Ver	Insertar	<u>C</u> álculo	<u>R</u> esultados	<u>H</u> erramientas	<u>T</u> abla	Opciones	<u>M</u> ódulos adicionales	Ve <u>n</u> tana	Ayuda
1	<b>%</b>	- 91	% - ¶	- 1 🐒	8. 5	P - 9	s 🖭   🔁 -	🔁 - 🗞 - 🕻	9 😫 -	1 27 - 9	22 23 23	1 C C	
1	3	23	3 🖬 🗂	10	2 0		3 🔞 🖓 🖆		3		Nueva carga en bar	ra > 🖉	2 3xx 🔎

995-00 KB-09-06-X-07KB	CC nim. Deseranten da paao di	5 (3:33	Para readiace
201 Componente	1 Cerce pernanette	18	12
	Sur al Facinesso de salado		
	Categoría do capitin	81 1998   UNE	
	E fenerale		
	Peea propo		
	Filest-si		
	adt en titst at		
	2 <u>2</u>		
	2 30		
- 100	Gamerien		

Se nos abre la pantalla para configurar los casos de carga. Al ser un modelo experimental lo dejaremos como esta, desactivando el peso propio de la barra.

Mar	- Bolemennu	Frikadau	the first		Too de carga "fuerza"	
1	Conjuntos o	in in interest	ſ	5) B) 0	Des durcón de serge "Purtuel"	1 P
spa de carge		L'etraupair de carga	Unacción de carge			1
Duerze     Decreate     Decreate     Deformació     Dispresari     Dispresari     Dispresari     Dispresari     Pipienxado     Popienxado     Deglescela     Deplezer	nadel oro gál or incal final cento - <u>P</u>	<ul> <li>Sortual</li> <li>P</li> <li>Trapsgodal</li> <li>Trap</li></ul>	Instit deita babagian a fraha. Gala deita alabagian a baba Gobgi tekna alabagian argenta da bagtat argenta da bara:	0x 0y 0J 03z 0v 03L 03L 03P 03P 03P	UPPOCION de caspa "Sabbal ZL"	
Farémetros de	cerca				2	1
P 110 PC PC Contantanto	101 <u>- 12</u> 101 <u>- 12</u> 101 <u>- 12</u> 101 <u>- 12</u> 101	A 10 F Canada di Canada di Seria	nm 등 1 m 문구 가 atra en 3] la lorandioa de	- 6	2	

Aceptamos y se abre la ventana para configurar la carga.

Seleccionamos una carga puntual de valor 100kN en el eje Z aplicada a 1 metro del origen.



Aceptamos y veremos la carga aplicada en el punto deseado.

# 3.-CÁLCULO

sh	lvo <u>E</u> dición <u>⊻</u> er [nsertar <u>C</u> ál	nulo <u>Besultados Herramientas Jabia O</u> priones	Móa	tulos adicionales	Ventana	4
0	2 9 3 * 2 <b>8</b> - 2 8	1   D 😂 - 🔀 -	1.20	Múculo actual		
-	RF-STEEL Surfaces	Análisis general de tensiones de superficies de acero	-	Proyectos de acer	• •	
2	RF STEEL Members	Análisis general de tensiones de barras de acero		Proyectos de horr Proyectos de riad	nigén 🕨	
LE RIC DE RA DIS DE DE	RF STEEL EC3 RF-STEEL AISC RF-STEEL IS RF-STEEL IS RF-STEEL OS RF-STEEL OS RF-STEEL CS RF-STEEL CS	Cálculo de barra: ce acero segun Eurocodigo 3 Diseño de barra: de acero según AISC (LRPE o ASD) Cálculo de barra: de acero según IS Cálculo de barra: de acero según IS Cálculo de barra: de acero según ES Cálculo de barra: de acero según ISB Cálculo de barra: de acero según ISB Cálculo de barra: de acero según ISB		Proyectos de alun Dinámica Uniones Cimentaciones Estabilidad Torres Otros	ino k k k k k	
AR OK	RE-STEEL AS	Calculo de barras de acero según //S Diseño de barras de acero según NTC-DE		Móculos externo	s +	ŀ
	RF-STEEL SP (versión dame) RF-STEEL Plastic (versión demo) RF-STEEL SANS (versión demo)	Cálculo de barras de acero según SP Cálculo de barras de acero según HEM Cálculo de barras de acero según SANS	V - 1			
in.	RF STEEL Fatigue Members (version	n demo) Calculo a fatiga de barras de acero	1			
2 3	RF-LTB	Analisis de pandeo por flexión Análisis de pandeo lateral y Texploisional	• *		2	
1	RF FE LTB	Análisis de pancec lateral y flexotors onal por el MEF		$\sim$		-
2	RF EL PL	Calculo elástico plástico	1	~~~		
	RE-PLATE-BUCKLING	Análisis de espetez initice o t			/	•
ŧ	VERBAND (no instalado) C	ilculo de arriostramientos contraviento para cubiertas				

Como deseamos analizar la abolladura en esta barra, vamos al módulo específico que DLUBAL tiene para este fin: RF-PLATE BUCKLING.

Vamos a importar la barra que ya hemos modelado, para ello pulsamos Importar desde RFEM.

Archivo Contiguiscion Ayr	ica			
.Al - Ané se de abolizidure 🗖	11.Dates generales			
Moste entralia	f es-an grizin		Según Schamp (Ar egi Danamat	
Fugio zedores	Descripcón:		100 (190-1-5 · 100 (171)	- h 🗃 👘 🖬
i ⊂ou,+ ' cci	Acres 3 426 (J.K. Stationic KUUC+K)           Moduli Ber Schladson           Lini Columnic           Jack All (J.K. Kuuchen)           Lini Columnic           Lini Columnic	Alexandre da Vessor     Alexandre da Vessor     Alexandre da Vessor     Alexandre da Vessor     Alexandre da Vessor     Alexandre da Vessor     Alexandre da Vessor     Alexandre da Vessor     Alexandre da Vessor     Alexandre da Vessor     Alexandre da Vessor		C B B B B B B B B B B B B B
	Co enta io			
		5) <b>6</b>		
	11	1	<u></u>	





Seleccionamos la barra nº1 ,el alma que es su parte nº5 e importamos el caso de carga CC1.

Cat. A deta deta deta deta       I (Companya deta deta deta)         I hama marca de la contra	Archive Configuración Ayur	3		
$ \begin{array}{c} \text{ is a constraid,} \\ $	Al - Anèliss de abolisoura 🛛 🔻	1.3 Crugat		
$\begin{array}{c c} z & \bigcirc n,n - & c_A \\ \hline \hline c_B & \bigcirc c_B \\ \hline \hline resk 1 \text{ de contratilien may had solve} \end{array}$	2.1 - Aviks de socheore v Iste annen indek - Mine germanis - Telgetadores - Societadores - Cott Corp. conservation - Cott Corp. conservation	$\begin{array}{c c c c c c c } \hline L(c) \mbox{ and } \\ \hline Contact the generation of the second secon$	2020/00071 2020/00071 - 1000000000000000000000000000000000000	$ \begin{array}{c}                                     $
Preván de compresión magnitud cositive	· ·			Tensión de compresión magnitud positive

Quedará una pantalla igual que la de la imagen:

Ya tenemos nuestro modelo completo ya que el programa considera que al principio y al final de la barra, tenemos rigidizadores.

La damos a calcular y pasamos a analizar los resultados.

### 4.-RESULTADOS

### Si pulsamos gráfico podremos ver el efecto producido.



Para poder analizar los resultados, los exportaremos a una tabla Excel.

Vemos que el factor de carga crítico es de 3,34, por lo que la carga crítica para abolladura por cortante será de 334 kN.

## Cálculos mediante elementos finitos

### 1.-MODELADO



Abrimos un nuevo archivo y lo llamamos Abolladura-EF y aceptamos.

Pulsamos el botón Nuevas barras simples.

Siblicter -	a tier vero	iones													- 23
Laminad	ias			Paramèl	trice - Pa	red delga	de	Faramét	rice - Me	ciza		Paramétrica - Vadéra			
Ι	Γ	Т	L	I	Τ	Γ	Т		T	4	I				
0	0	C	4	Sec	c ón sin	nétrica en		T	0	0		HOO		Į.	
٦	2	~	1	L	I	Τ	I		L	I	T	T	T	Π	F
				0	<u>v</u>	Π	Π	T	L	L	٦.	I	T	国	I
Armada	5			I	T	Π	Π	177	11	-					
II	I	T	T	[I	Í	+	•		"T"		X	8	-	I	
Т	I	Ţ	ī	-	İ	l	5	10				R			
I	İ	[]	I	Ι	C	Ľ,	Ľ					Nonal	ada - Ma	idera	
	T			Σ	0								ID		
16								Fre 'i sido	po elu-	neriki		Pugian	a the sec	iou-s	
									X			E	1		
<b>D</b>	a													Ca	ncela:

Vamos al apartado Sección y elegimos para el inicio de barra, en el apartado Parametrica-Pared delgada, la primera de las opciones, Sección simétrica en I.



En el menú introducimos los datos de nuestra sección según el croquis.

General Opciones Longitudes elicaces	Modilicar igidez	
Barra núm.		
1		
Excentricidad de barra		
Ningune	- E	
División de la carra	Crear nueva excantricidad de barra	
Ninguna	• 🔚 💌	
Acoyo e ástico de barra		
Ninguna	-	
No linealidad de barra		
Nngna	• 🛅 🖻	
Forma de sección variable		
Linea v		
Comentario		

Aceptamos y vamos a la pestaña opciones, donde seleccionaremos una nueva excentricidad para la barra, con el fin de que apoye en su ala inferior.

Nugo	núm.	Linea	núm.	Barra nú <u>m</u> .						
	2		1	1						
Coord	enadas		Modo d	ie entrada						
X:	0.000	[m]	Nuc	lo / <u>p</u> unto						
Y:	0.000	[m]	🕐 Ean	r <u>a</u> / línea						
Z:	0.000	[m]	Distar	Distancia						
	igen de rejila imo nudo		Lon     Li     Pe     @ Ân     α: [     Longitu	gitud y dirección v (m) rpendicularmente a la ban gulo en plano de trabajo v (m) (2) rd						
2	<mark>9</mark> 8	17	L:	[m]						

Aceptamos e introducimos las coordenadas de origen de la barra (0,0,0). Aceptamos e introducimos las coordenadas del final de la barra (2,0,0).



Ya tenemos nuestra barra, ahora definimos sus apoyos.

Pulsamos el botón Nuevo apoyo en nudo.



Impedimos el desplazamiento y el giro en todos los sentidos menos el giro en Y. Lo aplicamos a los dos nudos de la barra.





Ahora dividimos la barra en el punto donde más adelante colocaremos un rigidizador.

Botón derecho sobre la barra, seleccionamos *Dividir barra* y la opción *n nudos intermedios*, eligiendo 1 nudo intermedio.

Ahora vamos a convertir en el modelo en superficies para proceder al análisis por elementos finitos.

Para ello vamos a Herramientas-Generar superficies desde barras-Configuración. Colocaremos placas frontales en ambos bordes como rigidizadores, según aparece en las siguientes imágenes

Her	r <mark>amientas T</mark> abla <u>O</u> ptiones <u>M</u> ódulos acicionales Ve <u>n</u> tana Ayuda	
2 7 7	Sistema de coorcenadas Plano da trabajo, rejilla/forzar cursor, referencia a objetos, líneas aux liares Seleccionar plano de trabajo Rej Ila	• 4 K 4 K 4 · A ·
₩. ₩.	Mult plicar separación de rej lla x2 Dividir separación de rej lla x2	< > 2 1 2 1 4
11 X	Importar reacciones en apoyos como carga Conectar líneas/bar as	
 61	Comprotactión plausible Comprobación del modelo Eliminar cargas	
	Generar modelo - Barras Generar modelo - Superficies	
	General superficies desde barras	Configuración 🦷
100	General cargas Convertir carga en nudo/lineal en carga superficial	Generar

Dividir arcos de barra	Superficies creadas
Automáticamente     Fersonsizar     Angulo do divaión     mínimo:	☑ Longitud de supefi eie de mala de EF: 0.025 ★ m]
Longitud de división minima:	
Dividir arcos de sección	Placas frontales en ambos bordes
Automáticamente	Crear Crear
💮 Sustituir arco por abscisa	Espesor de placas frontales:
🔿 Reteonalizar	🔘 Figda
Anguo de división minimo:	Personaliza     Especor: 10.0 +  mm]

Una vez hecho esto, seleccionamos todas las barras y clicando botón derecho elegiremos *Generar superficies desde barras-Generar*. Obtendremos el resultado de la imagen inferior, habiendo terminado ya la configuración del modelo.





### 2.-INTRODUCCIÓN DE CARGAS

Vamos a proceder a introducir la carga. Pulsamos el botón *Nueva carga en nudo*.

4	<u>A</u> rchivo	<u>E</u> dición	⊻er	Insertar	<u>C</u> álculo	<u>R</u> esultados	<u>H</u> erramientas	Tabla	Opciones	Módulos adicionales	Ve <u>n</u> tana	Ayuda		
3.94	- 91	% - IJ	- 3	£ \$	PM - 9	🛛 🖄   🚰 -	0-0-0	9 🔐 -	3-9	22 22 29 % · · ·	1 CT (CT		1x vi 17	- 🕅 - 🕅 -
: 🖻	33	3 🖬 🖺				9 😡 🖓 🖞	2 10 10 2	RF-ST	ABILITY CA1	Apólicie da actobilie y	1 4 > 8	2 In 2	💥 😪 🛱	ह्य हिंद



Se nos abre la pantalla para configurar los casos de carga. Al ser un modelo experimental lo dejaremos como esta, desactivando el peso propio de la barra.

Aceptamos y se abre la ventana para configurar la carga.



Seleccionamos una carga puntual de valor 100kN en el eje Z aplicada a 1 metro del origen.



Aceptamos y veremos la carga aplicada en el punto deseado.

# 3.-CÁLCULO

[Aho ladi	ira cortante-FF]				- 1
ones Má	dulos adicionales Vent	aina	Aguda		_
/ CA1 .	Modulo actua		1 2 2 23	<b>編團</b> 國	
	Froyectos de acero	ł	4 茶 七 串	<b>腺</b> 病   2	含中小文合用
2 62	Proyectos de Formigón	۲	N CH CK		715 71-34-
147.55	Proyectos de madera	+		and the second	
	Proyectos de aluminio	۶			Fanci
	D námica	F			Musiacia di res
	Uniones	۲			vitración the nóm
	Cimentaciones	×			E-839
-	Estabi idad	ł	2 RE-STABI	nálisis de establi dad	
	Torres	÷			Factor
	Otros	+			LIE 🛟
	Módulos externos	k			Seluines
			4.1		5

Como deseamos analizar las posibles inestabilidades en esta barra, vamos al módulo específico que DLUBAL tiene para este fin: RF-STABILITY.

Ponemos 8 como número de valores propios y le damos a calcular.

A1 Anelsia de catebilidad	<ul> <li>1.1 Datos generales</li> </ul>							
Jatos de entrada	General	Writinda de calcula						
Dates centrales	Vámero de velores propos inferiores (vectores propios para pandeo) para calcular 8 👘	Ar alisis de establidad: © Análais de valu es propios						
	PillBuscar vectores propios del l'actor de carga critica:	Carge no ener lada pera el falo de la 👘						
	t#: * 1	Método de vaores process						
	Importar esfuerzos axelos, ofactos no inecies y	C Haices para el pointerio característico						
	Caco / complinación de carga:	C Mátado de Acraacin de supespacio						
	CC1 - Carga permenente *	© Nétado de iteración ICG						
	Cpotones Considerar effectos fourobles decides o traceón Activar división tamb en part barros rectas . Activar pretenado intís minimo para tables y montifornac Activar indefecaciones de inglés decide letem Activar indefecaciones acles hitalés de: Cabu / unitinatió / us cages	Typo de mobile: @ Estánde: @ Ned co mitad (per el a compro section y never mitadário de le exect balo) Normalizado a de modoce normale: @ Tal que foraz (kug u yu uz) = 1 @ Tal que foraz (kug u yu uz) = 1 @ Tal que foraz (kug u yu uz) = 1 $@$ Desce la rigidoz geometrize tal que (L $\sqrt{2}$ , [Kol, (sup) = 1] $@$ Desce la rigidoz geometrize tal que (L $\sqrt{2}$ , [Kol, (sup) = 1]						
	Construction of the second para modelics motabiles for more and press modelics motabiles for more and press more the instabilities graficant entre.	Conference of parts of the Meeting gives to contain a set to be barrier direct to contain a set to be or : 0.200 $\oplus$ :]						
	Comentane							
		*						

### 4.-RESULTADOS

La primera ventana que obtenemos en resultados es la de los factores de carga crítica, en este caso es de 4,45, por lo que la carga crítica por abolladura será de 445kN.

-Styletally - 155-shake a second					
napped projektion while					
as andbes to established -	<ol> <li>For man</li> </ol>	incorparchica			
nice, de maranda Exemple: presentation Martineza	Electro .	Folgetheory without	Kada an a gasarata		
<ul> <li>Richard Norwegeneiden</li> <li>Long Lades de particier y un san Vochers rengins participar - Vestares o construction participar</li> </ul>	~~~~	1 1 4 4 7 - 5 1 3 / 8 5 0 6	120		
Vanderica aregiden par sugar Baie	X X RC	2.167 A 335 6.684 3.355	1 18     155   110   125		
				Phone & Reconstructions are in pages	1 a 1
<u>&gt; 코데</u>					Contra Linear

Si pulsamos gráfico podremos ver los efectos producidos para cada valor propio.



Parametros de tabla	Aplicación
🔽 Con encapezaco de tabla	Microsoft Excel
Sólo filas marcadas	OpenOffice.org Calc
	Formato de archivo CSV
Transferir parámetros	
📃 Exportar tabla al libro activo	
🔄 Exportar tabla a la hoja de cá	culo activa
💟 Volver a escribir la hoja de cá	cuo existente
Tables seleccionadas	
🖱 Tabla activa	🔽 Exportantablas con
🥥 Todas astablas	detalles
📝 Tablas de entrada	

Para poder analizar los resultados, los exportaremos a una tabla Excel.

### 4.3.1.3. Comparativa de resultados

En este epígrafe se comparan los resultados obtenidos en cada método de cálculo con el fin de ver las diferencias entre ellas y poder sacar las conclusiones pertinentes.

	CTE DB SE-A	DLUBAL PLATE BUCKLING	DLUBAL ELEMENTOS FINITOS
F <sub>cr</sub> (kN)	325	334	445

Puede observarse en la tabla anterior como el valor de la carga previsto por el análisis lineal de elementos finitos de DLUBAL es muy superior al cálculo según el CTE y del modulo de abolladura que calcula según Eurocodigo.

Podemos concluir que las normativas quedan ampliamente del lado de la seguridad.

En este punto, empleando el mismo modelo que en el punto anterior se va a observar la influencia que tiene la colocación de rigidizadores en la carga crítica a cortante.

Se van a modelar los siguientes supuestos:

-Viga de 6 metros de longitud sin rigidizadores intermedios.

-Viga de 6 metros de longitud con 1 rigidizador intermedio.

-Viga de 6 metros de longitud con 2 rigidizadores intermedios.

-Viga de 6 metros de longitud con 5 rigidizadores intermedios.

-Viga de 6 metros de longitud con 11 rigidizadores intermedios.

El estudio se va a llevar a cabo empleando el programa DLUBAL, mediante elementos finitos.

### 4.3.2.1. Cálculo mediante elementos finitos

Se va a desarrollar el proceso en el programa para uno de los 5 casos, el resto de llevan a cabo de manera análoga.

#### 1.-MODELADO

Abrimos un nuevo archivo y lo llamamos Abolladura rigidizadores A1 y aceptamos.



Pulsamos el botón Nuevas barras simples.

Laminad	as			Paramet	rica - Pa	red delga	de	Feremétrice - Mecize				Paramétrica - Vadera			
I	1	T	L	I	Τ	Γ	T		T	4	H				00
0	0	C	4	Sec	c ór sin	nëtrica er		I	0	0					
٦	2	~	1	E.	I	T	I		ы	I	T	T	T	n	F
				0	<u>v</u>	Π	Π	T	₽	L	1	I	T	国	I
Armada	3			I	Π	Π	Π	11	-	-	•				
II	I	T	T	[I]	Í	+	•		T		I	8	-	I	V
٦٢	I	I	Ī		İ	l	ſ	10				Ħ			
I	İ	I	I	T	C	Ę	L					Normala	ada - Ma	idera	
**	T			Σ	0								II		
15								De Trido	por el us	an-rita		Ризран	a de ser:	ioues	
									2			E	1		

Vamos al apartado Sección y elegimos para el inicio de barra, en el apartado Para métrica-Pared delgada, la primera de las opciones, Sección simétrica en I.



En el menú introducimos los datos de nuestra sección según el croquis.

General Opciones Longitudes eficaces	Nodicar ig dez	
Barra hūrt.		
1		
Excentroidad de berra		
lingune	- 1 2	
División de la barra	Crear nueva excentricidad de barra	
Ninguna	• 🛅 🕑	
Apoyo elástico de barra		
Ninguna	- 🛅 🕑	
No linealidad de barra		
Ning.na	• 🔁 🖻	
Forma de sección variable		
uneai v		
Carrorterin		
Contended	• 6	

Aceptamos y vamos a la pestaña opciones, donde seleccionaremos una nueva excentricidad para la barra, con el fin de que apoye en su ala inferior.

Nudo núm.		Linea	núm.	Bi	arra nú <u>m</u> .
2			1		1
Coordenad	as		Mod	to de ent	rada
X:	0.000 🚔	[m]		Nudo / pu	into
Y:	0.000 🔤	[m]	0	Earr <u>a</u> / lír	rea
Z:	0.000 🔶	[m]	Dis	tancia	
Origen Uljmor	de rejila rudo ) ) ) )		ι <u>ι</u> ι <u>ι</u> Θ α.	Perpence Ángulo (	y drección + + + (m) licularmente a la bar en plano de trabajo + + + + (2)
0 C 2 H		7	Lon L: [7] () ()	gitud Intervalo	.000 🗢 [m]

Aceptamos e introducimos las coordenadas de origen de la barra (0,0,0).

Aceptamos e introducimos las coordenadas del final de la barra (1,0,0).

Repetimos esta operación 6 veces para generar 6 barras de 1 m. de longitud.





Ahora vamos a convertir el modelo en superficies para proceder al análisis por elementos finitos. Para ello vamos a Herramientas-Generar superficies desde barras-Configuración.

Colocaremos placas frontales en ambos bordes como rigidizadores, según aparece en la siguiente imagen.

-		
Dividir an	cos de barra	Superficies creadas
<ul> <li>Autor</li> </ul>	náticamente	ig Longitud de aupenfi eie de malla de EF: 0.025 ⊕ ∫im]
© Perso	melizar	
/ngu minim	lo de división no:	1
Longi	tud de división	
mirun	na:	r]
Dividir an	cos de sección	Places frontales en ambos pordes
<ul> <li>Autor</li> </ul>	nálicamente	🕼 Crear
💮 Susti	uir arto por absc sa	Espesor de placas frontales:
🕐 Ferrer	inslaar	🔿 Rigda
Angu	o de división	ersonalizar
minim	10:	Bepseor 10.0 + [mm]
remientes <u>F</u> able <u>Op</u> Sistema de trordenad	ntiones <u>M</u> Cilcles ed cioneles As	- संदय् स्विम् । संदय् स्विम् ।
remieritas <u>Table Op</u> Strema de tractica de la Nario de tractic, rell Seleccionar plano de l Reji la Multipicar separación	aciones – <u>M</u> rità des estretarreles as a, Torzar cursor, reterencia a objeta rabeje de rejulta x2	regitane Agenta Read Read ) 15、Tir Course
nemientas <u>Feble Or</u> Notema de troordenad Nano de troordenad Seleccionar plano de . Reji la Mult picar separación Dividir separación de r	aciones – Miribile x soliciumeles aciu altorzar cursor, reterencia a objetr rabeje de rejile k2 rejila >2	ett faite Auguste (Augustan) (本) 中愛の見通 ・花 訂 杯 涼 [堂]
namientas <u>Falsis Or</u> Sistema de transferad Hano de transfer, rei il Seleccionar plano de l Reji la Multipicar separación Dividir separación de r Importar reacciones en	ictories Mink los estrumentes as a)forzar cursor, roteronda a opjotr labojo de rejulta k2 njilla >2 n apojos como carga	ica Faa ) Raa Faa ) Contross 이 나 Sonalitikus teorin · 한 회 타 자 방 ·
somientas <u>Polos Cr</u> Sistema de tracadorad Haro de tracajo, re ili Seleccionar plano de la Rejula Mult picar separación Disidio separación de t Importar reactiones en Conectas lineos/barras	ktornes Mink los estriumeles as ajtorzar cursor, rotoronda o opjotr labojo de rejula k2 -rjilia >2 n apoyos como carga	ica Fata Sup ata (All 다 25 의 대회) · 한 회 府 정 1 환 · 한 제 대 정
Annieulas <u>Polos Cr</u> Nicesa de teordenad Naro de tracie, re di Seleccionar plano de a Reilla Mult picar separación Dinidir separación de t Importar reacciones er Conectar linenschartas Comprebación plausia	ktiones - Milin loss est cirrueles as a,torzar cursor, rotoroncia a o ajstr rabojo de reji le k2 ejili x >2 n apoyos como carge ale	/milane Agada (開設) 25, if eas auxiliares (学) 読 預 読 気・ (学) 読 預 読 気・
namientas: <u>Palole Cu</u> Norena de tracacio, re di Seleccionar plano de s Regilia Nulti picar separación de r Importar reacciones en Conectas lineasybartas Comprebación plausie Comprebación del mo	ktionnes - <u>M</u> Piñ Ikos editionneles as a/lotzar cursor, reterencia a e opto rabeje de reji ita k2 ejili.a.>2 h apoyos como carga sia bla	*ejilane Agoda :s, ir eas austicres (田岡岡) (田岡岡) (田岡) (田岡) (田岡) (田岡) (田岡) (田
namientas <u>Patole Or</u> Sistema de troordenad Hano de troordenad Hano de troordenad Seleccionar plano de s Rejillo Dividir sepatación de n Importar reacciones en Conectar limeny harras Compretación plausie Compretación del mo eliminar cargas	ktimmes - <u>M</u> říth Ikov editi ümetles as ajtorzar cursor, rotoronda a objotr iaboju de reji ta k2 ejili k >2 n apovješ como carga i bla delo	·milane Agentes (mineas austrices · 한 정 다 값 한 지 하 · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
namientlas <u>Enble Cr</u> Streena de troordenad Hano de troordenad Hano de traoric, reuli Seleccionar plano de l Rejillo Nulto picar separación de r Importar reacciones en Conectar linensyba tras Conprobación planos: Conprobación planos: Conprobación del mo eliminar cargas Ceneror modolo - Barr	iciones <u>M</u> rjih lico edicioneles as a,torzar cursor, reterencia e opjetr rabojo de reji la is2 ejili a >2 n apoyes como carge ola delo	au 石山 · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
Internienties <u>Peble Cr</u> Strema de troordenad Hano de troordenad Hano de traorie, reuit Seleccionar plano de . Rejillo Mult picer separación de r Importar reacciones en Conectar linens/harras Comprobación pausic Comprobación pausic Comprobación del no Eliminar cargas Cenecro modelo - Barr Generar modelo Suc	iciones <u>M</u> rijih lico esti cimetes as . .,Torcar cursor, reterencia a opjetr labeje de reji la x2 -rjih x >2 1 apoyes como carga delo as 	ata 福山 Age ata analysis (a, in casa ata ata ata ata ata ata ata ata ata
ramientas <u>Erble Cr</u> Virtenas de transfernad Hano de transfernad Seleccionar plano de . Reji la Multip (car separación de r importar reacciones en Contectas linenschartas Comprobación pausi: Comprobación pausi: Comprobación del no Eliminar cargas Cenerar modelo - Barr Generar modelo Suo Generar modelo Suo	ntiones Milia los estrinentes es alto zar cursor, ectorencia a objeti labejo de rejuta k2 ejita >2 a apoyos como carga ola deta as efficies este barnas	Agritane Age das (二) in casa auxiliares. (二) 「つうこう」 (二) 「つうこう (二) 「つうこう」 (二) 「つうこう」 (二) 「つうこう (二)
Annieuties <u>Polote Cu</u> Sizeena de tracacio, rei di Seleccioner plano de s Reil la Muit picar separación Dinidio separación de r Importar reacciones er Conectas linensiba ras Comprebación de iro eliminar cargas Cenecor modelo - Bar Generar modelo - Suo Generar modelo - Suo Generar seperir ties de Ceneror corgas	ictorries Milità licu esti riurnelles as a)forzar cursor, referencia a objeti labejo de rejulta k2 ejilita 52 n apoyes como carga a)a delo as ertides syle formas	/egitane Agesta c, in ess auxiliares. 中学 家 女 化、 中学 家 可 化、 中学 家 の の の の の の の の の の の の の の の の の の
sentieulas <u>Polos Cr</u> Sistema de tracació, re di Seleccionar plano de c Seleccionar plano de c Seleccionar plano de c Selita Multiplicar separación de n Importar reacciones en Conectar lineavibartas Comprebación plausis Comprebación plausis Comprebación del no Eliminar cargas Cencior modelo - Barr Generar modelo Sue Senterar modelo Sue Cencior congas Conventir carga en nuo	ktorres Mink los editioneles as as a)forzer cursor, rotoronda o opjati tabojo de reji la k2 jili k32 a pojos conto carga bla delo as entides syle blaritas co/finical en carga superficiel	「中国 and Age data た。 in case auxiliances ・ ドラ 「衣 有 夜 余、 ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・
Remientatione de tracación de la Seleccionar plano de la Rejilla Multip ricar separación Dividir separación de la Compretación de la Compretación plausie Compretación del mo Eliminar cargas Cencier modelo - Barr Senerar modelo - Barr Cencier modelo - Barr Cencier modelo - Barr Cencier modelo - Barr Cencier modelo - Barr Cencier corgas Convertor carga en rus Definir daga en rus	ktiones Mink less editioneles as a, lo zar cursor, reterencia a o opjeti iabeje ide reji la k2 	「田田田」 Agendes :e, in cas auxiliances ・ 田田 田田 :e, in cas auxiliances ・ 田田 田田 ・ 一 一 香 中田 ・ 田田 ・ 田田 田田 田田 田田 田田 田田 田田 田田 田田 田田

Una vez hecho esto, seleccionamos todas las barras y clicando botón derecho elegiremos *Generar superficies desde barras-Generar*.

Obtendremos el resultado de la imagen inferior, habiendo terminado ya la configuración del modelo.

P R	Editar línea Editar barra intro	
X	Eiminar ínea Eiminar alemento Supr	
	Dividir barra Crear nudo "en línea"	
X	Conectar barras Alaroar barra	
1 I	Definir barra paralela Extruir barra en superficie	
50	Ectruir barra en rejilla Generar superficies cesde barra	
Ű.	Invertir orientación de barra	
		3
a a		-

Vamos a definir los apoyos, colocaremos uno en cada uno de los 6 nudos de los extremos.

57 F	RFEM 5.02	.0053 (64b	it) Tria	al - [Abolla	dura-barra	*]
	Archivo	<u>E</u> dición	Ver	Insertar	<u>C</u> álculo	R
1.9	- 9	1 - 17	-   🔄		P= - 9	× ‡
	23	9 🖬 🕻	181	Vuevo apoj	o en nudo	5

Pulsamos el botón Nuevo apoyo en nudo.

Impedimos el desplazamiento y el giro en todos los sentido menos el giro en Y.



Ya tenemos nuestro modelo correctamente definido.

# 2.-INTRODUCCIÓN DE CARGAS

Vamos a proceder a introducir la carga.



#### Pulsamos el botón Nueva carga en línea.

ann de carge est etter	nit 10	Descripción do caso do carga	וטפי	R3592Y			
Cital Componente	1	Cerce pervanente	• 2				
	Server framen de salute						
	Caxesia de	(15)1	81 1000 ( LNE				
	10 feite	ale .					
	Fees proso						
	There is						
	'a0; ei	ž100 K					
	31						
		원H					
		<u>a</u>					
L Å	· Sueisa						
	1		· 6				

Se abre la pantalla para configurar los casos de carga. Al ser un modelo experimental lo dejaremos como esta, desactivando el peso propio de la barra.

Aceptamos y se abre la ventana para configurar la carga.

Seleccionamos una carga lineal uniforme de 10 kN y la aplicamos.

1° m	Defenseries	Color B	and the second		Frend to an UE on the
	iverare ida e	71	neca mani.		Dishibutito de carga "Loitoute"
	C Lista de línes	av	7	\$ (B) (B)	~P
ipude Larga		Dielricución de Carga	Direcció de carga		
Suetza     Momenzo		Puntual.     Incell     relevida a la londitud     rel de li neer		0+ 0+ 0:	i <del>.</del>
	Uniforme     Tropozoiod     Cuettenguer	Cilebel reletida a la longitud real de li teet	⊖×L ⊖yl ⊛zl		
		O L'aidhéine O Vailabhe	Gilbel rolo ida a lo longitud proyestasa de línea	O XF O YF O ZF	Directión de carga "Diocal II."
					X I X
	() (kNar)	<i>k</i> ,	Cit Ini		
	the letter	5. T	52 m		
9		Distancia Distancia Degua sol inela	rzibiliya on (s ne la fungiku ditotal de		The falles of
Emontano					
				v 👼	
					4.0

Aceptamos y veremos la carga aplicada en el punto deseado.



# 3.-CÁLCULO



Como deseamos analizar las posibles inestabilidades en esta barra, vamos al módulo específico que DLUBAL tiene para este fin: RF-STABILITY.

Ponemos 8 como número de valores propios y pulsamos calcular.

A1 And so de establised	▼ 1.1 Datos genera es			
Datos se entrada	General			
Datos concrolos	Várrero de veloces propos inferiores (vectores propios para pandec) para calcular 8 👘	Ar álsás de establidad: ® Análais de valo res propios		
	Boscar vectores propies del factor de carga critica:	C Cargo no emeri sala para el falo de la estructura.		
	(W. (W) = J	Mátodo por Lanczoo		
	importar esfuerzos atales, efectos no ineciles y	C kalces para di pelinarile caractarisaza		
	Caso / completellor ce career	C Mátado da Itaración de subcapiano		
	CC1 - Carga permanente 🔹	© Métrido de Revarión TCR		
		Tpo de maluiz:		
	Construction of the state	e Estándar		
	Activar division también para barras rectas .	Matrix unitad (para la comprovación y de e misación de la exactitud)		
	X-ctivar pretencado nicla mínimo para cables y	Normalizadón de modos normales:		
	PlActivar modificaciones de noidez desde REEM	Tal que max {use uss uz} = 1		
	T American enfligence av les histales des	💮 Tal que nex (luis u ys uz) dx) o ys ez) - 1		
	Caso / combinació de carga:	$\bigcirc$ Deste la rigidez geométrice tel que ( $\downarrow \downarrow \uparrow$ , (Ko, $\neg \mu \gamma = 1$ Análisis de estabilid		
	CU1 Carga pormanente +	de valores propios		
		Conflouración para cráfico		
	Colsuar motos de condeo para modelas nectables de menera que sea posíble la comprotación de los cousos de inestabilidad gráficamente	Motorer gins forcinges loopies de barras diece:           o+:         0.200 ⊕ []		
	Comentane			
		-		

## 4.3.2.2. Análisis gráfico de los resultados

En las imágenes que aparecen a continuación se puede apreciar el efecto de abolladura dependiendo del número de rigidizadores colocados.

## **RIDIGIZADORES A 6m**


## 4.3.2.3. Análisis numérico de los resultados.

En el siguiente cuadro observamos el valor del factor de carga crítica para cada distancia entre rigidizadores.

DISTANCIA ENTRE RIDIGIZADORES	a/d	Factor de carga crítica	Peso del modelo (kg)
6	8	6,15	352.81
3	4	6,75	358,83
2	2,66	6,99	364,85
1	1,33	7,28	382,92
0,50	0,66	9,07	419,04

Se observa que el aumento importante del factor de carga crítica se mantiene estable mientras la relación a/d esta en los valores por encima de 2.

Es cuando este valor llega al valor de 1,33 cuando el factor de carga crítica aumenta considerablemente, mas aun cuando llega a 0,66. En el gráfico inferior podemos observar esta tendencia.



Se ha incorporado la columna de peso del modelo para hacer notar que el incremento de kg de acero y en consecuencia de coste económico no es significativo para el aumento de resistencia que conlleva.

# 4.3.3. Abolladura frente a cargas puntuales. Carga transmitida de un ala a otra

## DESCRIPCIÓN DEL MODELO

De nuevo vamos a emplear el modelo de los puntos anteriores, con la diferencia sus condiciones de contorno, ya que contará con un apoyo justo debajo de la zona en la que se aplica la carga.

El modelo quedará según aparece en la imagen inferior.



Las comprobaciones a realizar que se llevan a cabo en este punto son según normativa y elementos finitos mediante el programa DLUBAL.

## 4.3.3.1. Cálculos según normativa de aplicación CTE

El CTE establece una expresión genérica para la resistencia del alma frente a cargas concentradas, sea cual sea el modo de transmisión de dicha carga. Dicha expresión era de la forma :

$$F_{b,Rd} = \frac{t_w f_y L_{ef}}{\chi_{M1}}$$

Donde Lef es un coeficiente de minoración obtenido a partir del valor que la Norma aplica para la carga crítica de abolladura (Fcr), que viene dada por

$$F_{cr} = 0.9 \cdot k_F \cdot E \cdot \frac{t^3}{d}$$

La diferenciación entre uno y otro tipo de inestabilidad de entre los 3 casos posibles ya conocidos para este tipo de carga viene dada por el valor de kF y por el de un factor *ly* utilizado para determinar la esbeltez relativa. Para el caso de carga (o reacción) transferida de un ala al otra a través del alma estos parámetros vienen dados por:

$$\begin{split} k_{F} &= 3.5 + 2 \cdot \left(\frac{d}{a}\right)^{2} = 4.625 \\ \ell_{y} &= s_{s} + 2 \cdot t \cdot \left(1 + \sqrt{m_{1} + m_{2}}\right) = 255.69 \text{ mm} \leq a \\ m_{1} &= \frac{f_{yf} \cdot b_{f}}{f_{yw} \cdot t_{w}} \\ m_{1} &= \begin{cases} 0.02 \cdot \left(\frac{d}{t_{f}}\right) & \text{si} \end{cases} \}_{f} > 0.5 \\ 0 & \text{si} \end{cases} \}_{f} > 0.5 \\ lower the set of the set$$

En los cálculos anteriores se hace necesaria una primera iteración con m2=0 para determinar el valor de , ya que su cálculo requiere del empleo del parámetro ly que depende directamente de m2.

## 4.3.3.2. Cálculo mediante DLUBAL-Elementos finitos

## 1.-MODELADO



Abrimos un nuevo archivo y lo llamamos Abolladura cargas puntuales-EF y aceptamos.

Pulsamos el botón Nuevas barras simples.

aminad	las		Paramétrica - Pared delgada			Faramétrica - Maciza			Paramétrica - Vadera						
I	Γ	Т	L	I	Τ	Γ	T		T	4	I				
0	0	C	4	Sec	c ór sin	nëtrica er		I	0	0		H		ų.	
l	2	~	1	L	I	Τ	I		Ш	I	T	T	T	Π	F
				0	$\overline{\Delta}$	Π	Π	T	Ł	L	-	I	T	国	I
Armada	5				D	Π	Π	1	11	-	•				
II	I	T	-	[]	Í	+	•				I		033	I	
Т	I	I	I		İ	1	5	10				H			
I	İ	[]	IZ	T	C	Ę	L					Nonal	cada - Ma	idera	
••	T			Σ	0								II		
s								Definido	po elus	neriti		Program	a de ser	iou-s	
								0	X			E	1		

Vamos al apartado Sección y elegimos para el inicio de barra, en el apartado Parametrica-Pared delgada, la primera de las opciones, Sección simétrica en I.

Tipa de sección	Parametros		
IIII	h 305.1 🗄 🛙 [ar]		
	hr 100.3 0 10m]	H	b l
	sind		-
LITI	[ 1		r a
	二 a [1][[[]]]		
	1		۲.
ппти	I	+	-5
T÷I	=	+	
<u>+</u>	_		anna _t
- 1 1 .	6		
тгг	-		
	<u> </u>		र स
0 3		0 2	<u>e</u> e e
		Victor al	
0	3	4 Amm\$2.5 [Pt 1031]	× 5
Gerupe de levendes	= (A)	an an east the family	(ম) ব
	2 EM	25 /54/120/5/17/0	

En el menú introducimos los datos de nuestra sección según el croquis.

General Uppiones Longitudes elicace	s   Modificar ng dez	
Barra núm.		
1		
Excentricidad de barra		
linguns		
División de la carra	Crear nueva excentricidad de parra.	
Ninguna	• 🎦 💌	
Adoyo elástico de barra		
Ninguna	- 🎦 🐨	
No linealidad de barra		
Ning_na	• 🛅 💌	
Forma de sección variable		
Linea 🔻		
Correntario		
	•	

Aceptamos y vamos a la pestaña opciones, donde seleccionaremos una nueva excentricidad para la barra, con el fin de que apoye en su ala inferior.



Aceptamos e introducimos las coordenadas de origen de la barra (0,0,0). Aceptamos e introducimos las coordenadas del final de la barra (1,0,0).



#### Ya tenemos nuestra barra.

Ahora vamos a convertir en el modelo en superficies para proceder al análisis por elementos finitos.

Para ello vamos a Herramientas-Generar superficies desde barras-Configuración. Colocaremos placas frontales en ambos bordes como ridigizadores, según aparece en la siguiente imagen.



Una vez hecho esto, seleccionamos todas las barras y clicando botón derecho elegiremos *Generar superficies desde barras-Generar*.

Obtendremos el resultado de la imagen inferior, habiendo terminado ya la configuración del modelo.



Se definen los apoyos, se va a colocar un apoyo intermedio para representar el caso de cargas puntuales según aparece en la normativa.

Se gira el modelo de manera que veamos la parte inferior del mismo, para ello mantenemos pulsados a la vez en la rueda del ratón scroll y el botón derecho y desplazamos el ratón hasta que esté en la posición deseada.

Se seleccionan una a una, las 3 líneas del ala inferior y inferior. Pulsando botón derecho sobre ellas elegiremos la opción de dividir en n nudos intermedios, en este caso 9 nudos.

ínea núm.				
17	(V)			
Nétodo de división				
Dividir línea mediant intermedios	e nuevos nudos	Y	×	
Situar nuevos nudos dividida	en la línea sin			and the second second
Número de		Olympic and	1-1-	Nuevos nudos
nudos intermedios:	3 🚓	C	A V	1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.
La numeración empieza	con	1.14	A	L
Núm.				
Nud <u>o</u> : 0	Continua			
Línca: 0++	Continua			
Barra. 0 +	Continua			
		1	Acentar	Cancelar
ubollabura cortante Barra, CC J acian** <u>M</u> édulos adiciona és * -	≓ Editartinea. ¥ Elminarimea ≩ Desconcomerpolitinee	-		
Abbiladura opriance Borra, CC prioner <u>Effo</u> ules adicione et Gráficamente n nudos internecios Oblamía.	Ed lar finea.     Ed lar finea     Ed lar finea     Ed lar finea     Dividir linea     Crear nuco 'en finea'     Ref nanienho ze mulla de Ef	e GF		
Abbilacura opriante Borra, CC pointe: Lifdulos adicionales di Gráncamente n nudos internecios Distanuia.	Editar finea  Editar finea  Editar finea  Cresonooner politice  Dividin inea  Crear nuco i'en finea  Ref namiento de multa de EF  Aurgar finea	- GT		
Abolladura opriance Borra, CC priones <u>M</u> édulos adirione es gráficamente n nudos internecios Distantia.	Editar finea  Editar finea  Editar finea  Crear nuco "en finea"  Ref naniento re mulla de Ef  Aurgar finea  Editar finea paralela	- 6		
Abbiladura opritante Borra, CC pcione: Lifriules adiritora es Gránicamente n nudos internet-ot Distantia.	Editar finea  Editar finea  Crear nuco ren tinea  Crear nuco ren tinea  Ref namiento de malla de FF  Ausyar inea  Editar finea epatala  Editar finea epatala  Editar finea en superficio			
Abbilacura osrtanse Borra, CC pcione: El fidulos adirionales Gráncamente n nudos internecios Distancia.	Editar finea  Editar finea  Conconcer politice  Dividin linea  Crear nuco fien finea  Ref namiento de molto de EF  Aurgar finea  Editar finea paratela  Editar finea paratela  Editar finea paratela  Funea in ontentadán da finea			
Abbilacura osrtanse Borra, CC pcione: Effoldes adirionales Gráncamente n nudos internecios Distancia.	Editar finea  Editar finea  Crear nuco i en finea  Crear nuco i en finea  Alergar finea  Editar finea postala  Editar finea postala  Editar finea postala  Manyar finea constala  Crear nuco en superficie  Crear huseo en superficie	* * * *		
Abolladura osrtanse Borra, CC prioner <u>M</u> édulos adirionales Grántomente n nu dos internecios Distantias	Editar finea  Editar finea  Editar finea  Editar finea  Editar finea  Crear nuco ren tinear  Alargar inea  Editar finea paratela  Editar finea paratela  Editar finea paratela  Envectin viteritatión de finea  Crear huseo en superficie  Editar nucco en superficie	= • • • •		
Abbilactura opritante Borra, CC polone: <u>Effo</u> tulos additionales Gráncamente n nuclos internecios Distantia.	Editar finea     Editar finea     Editar finea     Encomponent politice     Dividin linea     Crean rupo field finea     Crean rupo field finea     Editar finea postiela     Editar finea postiela     Encomponent addin del finea     Crean ruporticle     Elimitiar nucco en superficie     Elimitiar nucco en superficie     Elimitiar nucco en superficie     Elimitiar nucco en superficie     Elimitiar nucco en superficie     Elimitiar nucco en superficie	* 67 * 57 *		
Abbilactura opritante Borra, CC polone: Efficielo sadiritona es Gránicamente n nuclos internecios Distantia.	Editar finea     Editar finea     Editar finea     Editar finea     Editar finea     Editar finea     Editar finea     Editar finea     Crear nuco fan finea     Aergar finea     Editar finea postala     Editar finea postala     Editar finea postala     Editar finea postala     Editar finea postala     Editar finea postala     Editar finea postala     Editar finea postala     Editar finea postala     Editar finea postala     Editar finea postala     Editar finea postala     Editar finea postala     Editar finea postala     Editar finea postala     Editar finea postala     Editar finea postala     Editar finea postala     Editar finea postala			
Abolladura osotante Barra, CC priener: <u>Médulos adiciona et</u> C Gráncamente n nu dos internecios Obtanita.	Editar finea     Editar finea     Editar finea     Descenciones politice     Descenciones politice     Cean rubo circi finea     Refinamiento de molte de FF     Assyar finea     Editor filme paraleta     Editor infere paraleta     Entrución de linea en superficie     Entrución de linea     Crean huseo en superficie     Elimenar nuisco en superficie     Elimenar nuisco en superficie     Elimenar nuisco en superficie     Elimenar nuisco en superficie     Elimenar nuisco en superficie     Elimenar nuisco en superficie     Elimenar nuisco en superficie     Directar superficie     Directar superficie     Directar superficie     Directar superficie     Directar superficie	= * >		
Abolladura osotante Barra, CC priener Médulos adiciona et C Gráncamente n nu dos internecios Distantia.	Editer fines     Editer fines     Enditer ines     Descencence politice     Descence on politice     Cean rubor en fines     Refinamiento de malla de FF     Alargar ines     Enditer infrae paralala     Enditer infrae paralala     Inversit outentación de fines     Teres husco en superficie     Etemphan nucco en superficie     Etemphan nucco en superficie     Etemphan nucco en superficie     Etemphan nucco en superficie     Mover, Soular     Vinas     Vinas			
Abolladura osotante Barra, CC polener Médulos adiciona et C Gráncamente naudos internecios Distantia.	Editer finea         Editer finea         Descencence politice         Childs linea         Chernologican linea'         Refinamiento de mello de FF         Alargar linea         Entration de linea en superficie         Inversit intendizión de finea         Crear nucleo de linea en superficie			
Abellacura esetante Barra, CC Inciene: Médules adicionales C Grâncamente Innudes internete os Distantia.	Editar finea     Editar finea     Editar finea     Esconconer politice     Cean rubo'ren finea'     Refinamiento de mello de FF     Asrgar inea     Entrucion de linea en superficie     Inversit interfination de finea     Cean rubo de superficie     Inversit interfination de finea     Cear rubo de superficie     Inversit interfination de finea     Cear rubo de superficie     Mover/Joular     Lination     Mover/Joular     Lination     Mover/Joular     Lination     Mover/Joular     Lination     Mover/Joular     Lination     Mover/Joular			
Aboliacura osotante Barra, CC poiene: <u>Médules adiciona et</u> Grâncamente naudos entorneo os Distantia.	Editer finea       Editer finea       Descencement polifice       Childs lisea       Crean ruccion in neal       Refinamiento de wella de FF       Alargar linea       Definición de linea en superficie       Interaction de linea en superficie	- - - - - - - - - - - - - - - - - - -		

Ya tenemos nuestra las líneas divididas en segmentos de 0,1m y vamos a colocar 3 apoyos centrales en cada una de las 3 líneas.

57 R	FEM 5.02	.0053 (64b)	it) Tria	I - [Abolla	dura-barra*]
-	<u>A</u> rchivo	<u>E</u> dición	Ver	Insertar	<u>C</u> álculo <u>R</u> e
1.9	- 9	1 - 7	-   🛃		🚰 - 🎢 🕯
:	23	<b>9</b> 🖬		luevo apoj	/o en nudo

Pulsamos el botón Nuevo apoyo en nudo.

Impedimos el desplazamiento y el giro en todos los sentidos menos el giro en Y.

Vamos girando el modelo hasta que tengamos colocados los 9 apoyos, nos debe de quedar como en la imagen inferior.



Ya tenemos nuestro modelo correctamente definido.

## 2.-INTRODUCCIÓN DE CARGAS

Vamos a proceder a introducir la carga, antes de nada vamos a dividir la línea del ala superior en 5 tramos de 0,2 metros cada uno. En el central será donde apliquemos la carga.

Pulsamos el botón Nueva carga en línea.



Se nos abre la pantalla para configurar los casos de carga. Al ser un modelo experimental lo dejaremos como esta, desactivando el peso propio de la barra.

Em	Referencia a	En les Jinea	s nún.		Lips de corps "Fueros" Listeración de cares "Listeración"
	® Là cos ⊘ Usla de lincas			<u>s (m (=</u>	~P
pe da carga	literate a	uin de cerge	Orientatio de carge		
ie Jeros 3 Marrichio	S) Pars S) Trap S) Case S) Para S) Vec	us me kondel kondu koku vita	Tendi Herdia als organo in dirotta also regitar diritta also regitar nel de trea Notar Media als organo mujerteta acolome	0. 07 07 08 08 08 08 08 08 08 08 08 08 08 08 08	least do an Body"
anamétros de cary Intranto 21	99 En Joshi EFF (Kshi)	A B B Distances relations Carga sobre la frost	<u>해가</u> 1개 <u>해가</u> 50 haten % Congtuctotalice		
omentario				- (43)	E State
10-20-20					

Aceptamos y se abre la ventana para configurar la carga.

Seleccionamos una carga puntual de valor 100kN en el eje Z y la aplicamos en el segmento central.



Aceptamos y veremos la carga aplicada en el punto deseado.

## 3.-CÁLCULO

arga	as puntuales EF2, CC1]	
Mó	dulos adicionales Ve <u>n</u> ta	a Ayuda
000	Módulo actual	
	Proyectos de acero	・   器 😝 尊 豊 岸 🎾 🏷 中 🖄 🗙 🕯
	Proyectos de hormigón	· * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
	Proyectos de madera	•
	Proyectos de aluminio	*
	Dinámica	•
	Uniones	>
	Cimentaciones	·
	Estabilidad	RF-STABILITY Análisis de estabilidad
	Torres	•
	Otros	*
	Módulos externos	•

Como deseamos analizar las posibles inestabilidades en esta barra, vamos al módulo específico que DLUBAL tiene para este fin: RF-STABILITY.

Ponemos 8 como número de valores propios y pulsamos calcular.

Al Andisis de establicad	- 1.1 Datos generales			
Datos de entrada	General	Mélodo de calculo	N	
Dates centrales	Váriero de velor es propos inferiores (vectores propios para pandec) para calcular 8 👘	Ar áisis de estabildad:		
	Buscar vectores propias del factor de caroa crítica:	🙃 Carge nic ener tada pera el falo de la 👘 👘	<b>K</b>	
	T#:	Metoda de valores procios:		
	Importar esfuerzos atolas, efectos no inceles y	Cittaices para el poinemo característica		
	deformaciones iniciales de Caso / completación de cargas	🕐 Métado de iteración de sucespacio		
	CC1 - Carga permanente v	© Nétodo de iteración TCG	Page (	
		Tpo de mabiz:		
	Cpciones	@ Estándar		
	Vonsiderar efectos favorables debidos a tracción	🕑 Malca protad (para la comprodeción y rietermitación de la 👘 💋		
	Activar division también para barras rectas 🕠 👘	exallod)	2 C	
	😨 Activar pretensado nidal mínimo para cables y	Normalización de modos normales		
	membranas	🛞 Tal que jui – 1	18///	
	Activar modificaciones de no dez desde IRHEM	Tal que max {ug uy; uz} = 1		
	Acregar ecfuerzos axies hidales de:	C Tal que max {ux; ux; ux; qx; qx; qz} - 1		
	Сево / combineción de carga:	🖗 Desde la rigidez geométrice tel que (ug) T. (Kis) (ug) – 1 Análisis	de estabilidad	
	CC1 Carga permanente *	por al m de valor	es propios	
		Configuración para cráfico		
	Concur mate de pandro para modelar, nesteletes de marera que sea poste la comproteción de los courses de inesteluitad guáficamente	Matter gine terrinoaes locales te barras desce q.: 0.300 ⊕ []		
	Comentane			
		·		

#### 4.-RESULTADOS

La primera ventana que obtenemos en resultados es la de los factores de carga crítica, en este caso es de 7,87. Es decir que la carga crítica será:  $100 \ge 7,87 \ge 0.2 = 157,4 \text{ kN}.$ 

Archivo Configuración Ayuda				
CA1 - Análiss de estabilidad 🛛 👻	2.1 Factores	s de carga crítica		
Datos de entrada		A	B	C
- Datos generales Resultados - Factores de carga crítica	Modo ruúni,	Factor de carga crítica † [·]	Factor de mayoración α [-]	Mensaje
	1	7.874	1.145	
- Longitudes de pandeo y cargas	2	10 888	1 101	
- Vectores propios nor nuco	3	6.917	1.053	
Vectores propios por barra	4	24 011	1 043	
···· Vectores propios por superficie	5	28.838	1.036	
	6	31.972	1.032	
	7	33.653	1.031	
	8	44.583	1.023	

Si pulsamos gráfico podremos ver los efectos producidos para cada valor propio.



## 4.3.3.3. Comparativa de resultados

En este epígrafe se comparan los resultados obtenidos en cada método de cálculo con el fin de ver las diferencias entre ellas y poder sacar las conclusiones pertinentes.

	CTE DB SE-A	DLUBAL ELEMENTOS FINITOS
F <sub>cr</sub> (kN)	107	157

Puede observarse en la tabla anterior como el valor de la carga previsto por el análisis lineal de elementos finitos de DLUBAL es muy superior al cálculo según el CTE y del modulo de abolladura que calcula según Eurocodigo.

Podemos concluir que las normativas quedan ampliamente del lado de la seguridad.

## 4.3.4. Abolladura frente a cargas puntuales, efecto de la colocación de rigidizadores

En este epígrafe se va analizar cómo influye la colocación de rigidizadores así como la longitud de la carga puntual aplicada.

Por ello se van a estudiar 9 modelos, en los que el numero de rigidizadores variará entre 1 y 3 y la longitud de la carga puntual aplicada adoptará valores de 0mm-250mm-500mm.

Los cálculos se van a llevar a cabo según la normativa CTE-SE-A y mediante elementos finitos con el programa DLUBAL.

## **DESCRIPCIÓN DEL MODELO**

Para este análisis vamos a adoptar un modelo similar al patrón anterior, pero modificando sus dimensiones.

En las imágenes inferiores puede apreciarse en modelo empleado.



## 4.3.4.1. CÁLCULOS SEGÚN NORMATIVA DE APLICACIÓN CTE

El caso que vamos a analizar se corresponde con el modo A de transferencia de cargas, según la imagen inferior.

Las formulas a emplear según el apartado 3 del epígrafe 6.3.3.5 del DB SE-A son:

$$\begin{split} F_{b,Rd} &= \frac{t_w f_y L_{ef}}{\chi_{M1}} & F_{cr} = 0.9 \cdot k_F \cdot E \cdot \frac{t^3}{d} & t_F = \frac{0.5}{J_F} \le 1 \\ k_F &= 6 + 2 \left(\frac{d}{a}\right)^2 & L_{ef} = t_F \cdot \ell_y & \ell_y = s_s + 2 \cdot t \cdot \left(1 + \sqrt{m_1 + m_2}\right) \\ m_2 &= \begin{cases} 0.02 \cdot \left(\frac{d}{t_f}\right) & \text{si} & J_f > 0.5 \\ 0 & \text{si} & J_f \le 0.5 \end{cases} & m_1 = \frac{f_{yf} \cdot b_f}{f_{yw} \cdot t_w} \end{split}$$

## $\underline{\text{CASO 1 } S_s=0}$

Introduciendo todos los parámetro relacionados en una hoja Excel confeccionada para procesar las fórmulas vistas anteriormente obtenemos los siguientes resultados:

	a/d 1	a/d 2	a/d 3
Ss	0	0	0
а	1000	2000	3000
d	1000	1000	1000
tw	12	12	12
tf	60	60	60
fyf	215	215	215
bf	800	800	800
fyw	235	235	235
tw	12	12	12
E	210000	210000	210000
	1	1	1
Kf	8,00	6,50	6,22
m1	60,99	60,99	60,99
m2	0,33	0,33	0,33
ly	1.059,73	1.059,73	1.059,73
ly real	1.000,00	1.059,73	1.059,73
f	0,99	1,13	1,16
Xf	0,50	0,44	0,43
Lef	503,16	466,89	456,81
Fcr	2612736	2122848	2032128
Fb,Rd	1.236,34	1.147,22	1.122,44

## <u>CASO 2 S<sub>s</sub>=250</u>

Introduciendo todos los parámetro relacionados en una hoja Excel confeccionada para procesar las fórmulas vistas anteriormente obtenemos los siguientes resultados:

	a/d 1	a/d 2	a/d 3
Ss	250	250	250
а	1000	2000	3000
d	1000	1000	1000
tw	12	12	12
tf	60	60	60
fyf	215	215	215
bf	800	800	800
fyw	235	235	235
tw	12	12	12
E	210000	210000	210000
е	1,05	1,05	1,05
Kf	8,00	6,50	6,22
m1	60,99	60,99	60,99
m2	0,33	0,33	0,33
ly	1.309,73	1.309,73	1.309,73
ly real	1.000,00	1.309,73	1.309,73
f	0,99	1,26	1,29
Xf	0,50	0,40	0,39
Lef	503,16	519,05	507,84
Fcr	2612736	2122848	2032128
Fb,Rd	1.236,34	1.275,39	1.247,84

## <u>CASO 2 S<sub>s</sub>=500</u>

Introduciendo todos los parámetro relacionados en una hoja Excel confeccionada para procesar las fórmulas vistas anteriormente obtenemos los siguientes resultados:

	a/d 1	a/d 2	a/d 3
Ss	500	500	500
а	1000	2000	3000
d	1000	1000	1000
tw	12	12	12
tf	60	60	60
fyf	215	215	215
bf	800	800	800
fyw	235	235	235
tw	12	12	12
E	210000	210000	210000
е	1,05	1,05	1,05
Kf	8,00 6,50		6,22
m1	60,99	60,99	60,99
m2	0,33	0,33	0,33
ly	1.559,73	1.559,73	1.559,73
ly real	1.000,00	1.559,73	1.559,73
f	0,99	1,38	1,41
Xf	0,50	0,36	0,36
Lef	503,16	566,43	554,19
Fcr	2612736	2122848	2032128
Fb,Rd	1.236,34	1.391,79	1.361,73

## **COMPARATIVA DE RESULTADOS**

En la siguiente tabla se resumen los resultados para cada uno de los casos analizados.

	a/d	Kf	Fcr	ly	Lef	Fb,rd
	1	8,00	2.612.736	1.000,00	503,16	1.236,34
S0	2	6,50	2.122.848	1.059,73	466,89	1.147,22
	3	6,22	2.032.128	1.059,73	456,81	1.122,44
	1	8,00	2.612.736	1.000,00	503,16	1.236,34
S250	2	6,50	2.122.848	1.309,73	519,05	1.275,39
	3	6,22	2.032.128	1.309,73	507,84	1.247,84
	1	6,22	2.612.736	1.000,00	503,16	1.236,34
S500	2	6,50	2.122.848	1.559,73	519,05	1.391,79
	3	6,22	2.032.128	1.559,73	554,19	1.361,73

## 4.3.4.2. Cálculo mediante DLUBAL Elementos finitos

Vamos a desarrollar el proceso en el programa para uno de los 9 casos, el resto de llevan a cabo de manera análoga.

#### 1.-MODELADO

Abrimos un nuevo archivo y lo llamamos Abolladura ridigizadores S250AB1 y

aceptamos.

57	<b>RFEM 5.02</b>	.0053 (64b	it) Tria	- [Abolla	dura-barra	]
	Archivo	Edición	Ver	Insertar	<u>C</u> álculo	Ke
1	9/ 1	1- 37	- 1 3	8.0	P×1 - 9	<u>ex</u> <u>p</u>
1	] 🗃 🗐 .	S Nueva:	barras	simples	CE 17	
him	enador de	orovactor	Datos		n	¥. 1

#### Pulsamos el botón Nuevas barras simples.



Vamos al apartado *Sección* y elegimos para el inicio de barra, en el apartado *Parametrica-Pared delgada*, la primera de las opciones, *Sección simétrica en I*.



General Opciones Longitudes elicaces	Modficar igidez	
Barra nùrt.		T
1		
Excentricidad de barre		
linguns	- 12 2	
División de la parta	Crear nueva excentricidad de barra.	
Ninguna	• 10	
Apoyo elástico de barra		
Ninguna	- 🛅 🕞	
No linealidad de barra		
Ninguna	• (1) (2)	
Forma de sección variable		
Linea 👻		
<u></u>		
Comentario		
	- 19	

En el menú introducimos los datos de nuestra sección según el croquis.

Aceptamos y vamos a la pestaña opciones, donde seleccionaremos una nueva excentricidad para la barra, con el fin de que apoye en su ala inferior.

yudo num. Linea r	iúm. Barra nú <u>m</u> .
2	1
Coordenadas	Modo de entrada
K: 0.000 🚔 [m]	Nudo / punto
Y: 0.000 🌻 [m]	🕐 Earr <u>a</u> / línea
Z: 0.000 🔶 [m]	Distancia
SC actual © Origen de rejila © Újimo nudo	%           Lig         ****           Perpendicular mentera la bai         %           Manual en plano de trabajo         %           x:         ****           Longitud         ****
<u> </u>	L: 0.000 🔃 [m]
	Intervalo ΔL·

Aceptamos e introducimos las coordenadas de origen de la barra (0,0,0).

Aceptamos e introducimos las coordenadas del final de la barra (1,0,0).

Repetimos esta operación 3 veces para generar 3 barras de 1 m. de longitud.



Ya tenemos nuestra barra.

Ahora vamos a convertir en el modelo en superficies para proceder al análisis por elementos finitos. Para ello vamos a Herramientas-Generar superficies desde barras-Configuración.

Colocaremos placas frontales en ambos bordes como rigidizadores, según aparece en la siguiente

imagen.



Una vez hecho esto, seleccionamos todas las barras y clicando botón derecho elegiremos Generar superficies desde barras-Generar

Obtendremos el resultado de la imagen inferior, habiendo terminado ya la configuración del modelo.

	1 mar		and the second second				
		and the second s				13	
-							
				***			1
N. N							
					*****		
	1 the second						
4				-			
-				1000	-		
		0.000			~~~~~		-
				-		- Andrews	
9	Editar línea						
-	Editor borro	Inte					
	Cullal Dalla		0				
(	Eiminar ínea						
\$	Eiminar elemento	Sur	)r				
		200					
	Dividir barra		•				
	Crear nudo "en línea"		¥.				
	Conectar barras						
	Alargar barra						
	Definir barra paralela						
1	Extruir barra en superficie						
+	Extruit barra en rejilla						
1	Exclusi parta en rejina						
	Generar superficies desde barra						
2	and the second and a second second						
È	Invertir orientación de barra						
È	Invertir orientación de barra		_				

Vamos a definir los apoyos, colocaremos uno en cada uno de los 6 nudos de los extremos.



Pulsamos el botón Nuevo apoyo en nudo.

Impedimos el desplazamiento y el giro en todos los sentido menos el giro en Y.



Ya tenemos nuestro modelo correctamente definido.

## 2.-INTRODUCCIÓN DE CARGAS

Vamos a proceder a introducir la carga, la longitud de la misma va a ser de 250 mm.



Pulsamos el botón Nueva carga en línea.



Se abre la pantalla para configurar los casos de carga. Al ser un modelo experimental lo dejaremos como esta, desactivando el peso propio de la barra.

Aceptamos y se abre la ventana para configurar la carga.

Seleccionamos una carga variable y configuramos la carga según la imagen inferior.



Aceptamos y veremos la carga aplicada en el punto deseado.



## 3.-CÁLCULO



Como deseamos analizar las posibles inestabilidades en esta barra, vamos al módulo específico que DLUBAL tiene para este fin: RF-STABILITY.

RF-STABILITY - [Abolladura-barra] Archivo Configuración Ayoda LA1 Andigo do ostobiload 🔫 1.1 Datos generales atos se entrada Datos cenerales General Mélodo de calculo Ar álsis Je establidad: Várrero de valores propos inferiores (vectores propios para pandeo) para calcular **F-STABILITY** 8 4 Análisis de valores propios Carge no enertada pera el falo de la estructura. 1 Buscar vectores propius del factor de carga critica: te: 1 Metodo de valores propios Método por Lanczoc Importar esfuerzos axeles, efectos no inecies y deformaciones iniciales de C Naices para el pointmio característico 🕐 Mátado da itoración de subespacio Caso / complinación de carga: 🗇 Método de iteración IOS CC1 - Carga permanente Tpo de nabiz: SereicqC 🖲 Estándar Vansiderar efectos favorables debidos a tracción C Malco mital (para a componeción y de emitación de la exactivo) Anàlisis de Activar division tamb on part barras rootas ... 1 Normalización de modos normales Activar pretensado nicial mínimo para cables y R 🖲 Tal que juj - L Activar modificaciones de no dez desde IN-EM Tal que max (uig uis uz) - 1 🕘 Tal que max (que uns uz) gx) ont oz) - 1 🗌 Agregar ecfuerzos axies hidales de: Análisis de estabilidad por al método de valores propios n Deste la rigidez geométrice tel que (L g T. (Kis), (ug) – 1 Caso / contrinación de carga: CU1 Carga permanente Conflouración para cráfico Celouar modos de condeo para modelos mestables de menera que sea posible la comprotación de las causas de inestabilidad gráficamente Mostrar giros torsinnales locales de harras desce Q₄: 0.200 ♣ []  $\backslash \mathbb{N}$ Comentano Cilludo Caribal Gálco Augular Conudar

Ponemos 4 como número de valores propios y pulsamos calcular.

#### 4.-RESULTADOS

	a/d	Fb,rd (kN)
	1	3.488
S0	1,5	2.380
	3	2.317
	1	3.627
S250	1,5	2.429
	3	2.359
	1	4.036
S500	1,5	2.570
	3	2.478

En la tabla inferior vemos los resultados obtenidos para cada uno de los casos analizados:

Vemos que cuanto menor sea a/d mayor es Fb,d y que cuanto mayor es el valor de Ss, mayos es el valor de Fb,rd.

## ANALISIS GRÁFICO DE LOS RESULTADOS

Ahora vamos a comparar los resultados gráficos según una misma  $S_{\rm s}$  y una misma a/d.

Se puede apreciar que la forma de la abolladura es la misma para todos los  $S_{s}$ , lo que varían son los valores a los que aparece dicha abolladura.

<u>Casos con  $S_s=0$ </u>

Vector prophi-u (-) RF STABLEY CA11 A télés a de establidad -Vector prophinit - 2017 CC









## Comparación gráfica de los resultados para un mismo A/B.

### Casos con A/B=1



## Casos con A/B=1,5

Vector problo - u j.; PF-STADE Tri CA1 - Análisis de estabilidad Vector problo núm, 1 - 6130,68



## Casos con A/B=1

Vector propio - u J-H- STAEILITY CAT - Análisis de establidad Vert is propins d'in 1 - 5466-33



#### **4.3.4.3.** COMPARATIVA DE RESULTADOS CTE-DLUBAL

En el cuadro inferior podemos ver las diferencias entre los resultados obtenidos aplicando la normativa y mediante el cálculo con el programa DLUBAL.

Se aprecia claramente que el valor de Fcr calculados según la normativa quedan claramente del lado de la seguridad, en la columna de diferencia en %, observamos que esta la diferencia se dobla para los a/d=1.

También se aprecia que mientras a efectos de la normativa el cálculo de Fcr no varía para el valor de Ss, mientras que en el cálculo mediante elementos finitos sí que lo hace.

	a/d	CTE Fcr (kN)	CTE F <sub>b,Rd</sub> (kN)	DLUBAL (kN)	DIFERENCIA (kN)	DIFERENCIA (%)
	1,00	2.613	1.236	3.488	876	25,10
S0	1,50	2.123	1.147	2.380	257	10,80
	3,00	2.032	1.122	2.317	285	12,29
	1,00	2.613	1.236	3.627	1.015	27,97
S250	1,50	2.123	1.275	2.429	306	12,61
	3,00	2.032	1.248	2.359	327	13,87
	1,00	2.612,74	1.236	4.036	1.423	35,26
S500	1,50	2.122,85	1.392	2.570	447	17,39
	3,00	2.032,13	1.362	2.478	446	17,98

Queda comprobada la correcta adaptación del modelo a las variaciones de Ss y a/d, produciéndose el aumento de la carga crítica ante incrementos de Ss, y descensos de la relación a/d.

## ANEXO I. EXTRACTOS, FIGURAS Y TABLAS DEL CTE DB SE-A

#### 1.1 Ámbito de aplicación y consideraciones previas

- 1 Este DB se destina a verificar la seguridad estructural de los elementos metálicos realizados con acero en edificación. No se contemplan, por tanto, aspectos propios de otros campos de la construcción (puentes, silos, chimeneas, antenas, tanques, etc.).Tampoco se tratan aspectos relativos a elementos que, por su carácter específico, requieren consideraciones especiales.
- 2 Este DB se refiere únicamente a la seguridad en condiciones adecuadas de utilización, incluidos los aspectos relativos a la durabilidad, de acuerdo con el DB-SE. La satisfacción de otros requisitos (aislamiento térmico, acústico, resistencia al fuego) quedan fuera de su alcance. Los aspectos relativos a la fabricación, montaje, control de calidad, conservación y mantenimiento se tratan, exclusivamente, en la medida necesaria para indicar las exigencias que se deben cumplir en concordancia con las hipótesis establecidas en el proyecto de edificación.

#### I. PANDEO DE EULER

#### 6.3.2 Compresión

- 1 La resistencia de las barras a compresión, N<sub>c,Rd</sub>, no superará la resistencia plástica de la sección bruta, N<sub>pl,Rd</sub>, calculada según el apartado 6.2, y será menor que la resistencia última de la barra a pandeo, N<sub>b,Rd</sub>, calculada según se indica en los siguientes apartados.
- 2 En general será necesario comprobar la resistencia a pandeo en cada posible plano en que pueda flectar la pieza. Este DB no cubre el fenómeno de pandeo por torsión, que puede presentarse en piezas, generalmente abiertas con paredes delgadas, en las que el eje de la barra deformada no queda contenido en un plano.
- 3 Como capacidad a pandeo por flexión, en compresión centrada, de una barra de sección constante, puede tomarse

$$N_{b,Rd} = \chi \cdot A \cdot f_{yd}$$

siendo

- A área de la sección tranversal en clases 1, 2 y 3, o área eficaz A<sub>ett</sub> en secciones de clase
   4.
- $f_{yd}$  resistencia de cálculo del acero, tomando  $f_{yd} = f_y / \gamma_{M1}$  con  $\gamma_{M1} = 1,05$  de acuerdo a 2.3.3
- χ coeficiente de reducción por pandeo, cuyo valor puede obtenerse en los epígrafes siguientes en función de la esbeltez reducida y la curva de pandeo apropiada al caso.

#### 6.3.2.1 Barras rectas de sección constante y axil constante

1 Se denomina esbeltez reducida  $\overline{\lambda}$ , a la raíz cuadrada del cociente entre la resistencia plástica de la sección de cálculo y la compresión crítica por pandeo, de valor

$$\overline{\lambda} = \sqrt{\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{f}_{y}}{\mathbf{N}_{cr}}}$$
$$\mathbf{N}_{cr} = \left(\frac{\pi}{\mathbf{L}_{k}}\right)^{2} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{I}$$

(6.18)

(6.17)

siendo

- E módulo de elasticidad;
- I momento de inercia del área de la sección para flexión en el plano considerado;
- L<sub>K</sub> longitud de pandeo de la pieza, equivalente a la distancia entre puntos de inflexión de la deformación de pandeo que la tenga mayor. Para los casos canónicos se define en la tabla 6.1 en función de la longitud de la pieza. Para condiciones diferentes para la carga axial o la sección se define en apartados posteriores.

2 El coeficiente  $\chi$  de reducción por pandeo, para valores de la esbeltez reducida  $\overline{\lambda}_k \ge 0,2$ , se obtiene de:

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \left(\lambda_k\right)^2}} \le 1$$
(6.19)

donde

$$\phi = 0.5 \cdot \left[ 1 + \alpha \cdot \left( \overline{\lambda}_{k} - 0.2 \right) + \left( \overline{\lambda}_{k} \right)^{2} \right]$$
(6.20)

- α es el coeficiente de imperfección elástica, que adopta los valores de la tabla 6.3 en función de la curva de pandeo (véase tabla 6.2). Esta representa la sensibilidad al fenómeno dependiendo del tipo de sección, plano de pandeo y tipo de acero, de acuerdo a la table 6.2.
- 3 Los valores del coeficiente  $\chi$  se pueden obtener directamente de la figura 6.3 o de la tabla 6.3. en función de la esbeltez reducida y del coeficiente de imperfección, respectivamente.

Tabla 6.1 Eolígitud de pandeo de barras canonicas						
Condiciones de extremo	biarticulada	biempotrada	empotrada articulada	biempotrada desplazable	en ménsula	
Longitud L <sub>k</sub>	1,0 L	0,5 L	0,7 L	1,0 L	2,0 L	

Tabla 6.1 Longitud de pandeo de barras conónicas

		Tine de ecore	0005	COFF		50
Tipo de sección		Tipo de acero	\$235 a	1 5355	54	50
		Eje de pandeo	У	z	У	z
Perfiles laminados en I	h/h > 1.2	t < 40 mm	а	b	a.	a.
	110 - 1,2	1240	c.	5		
tr.	40 mm	< t≤ 100 mm	b	С	а	а
h yy	h/b ≤ 1,2	$t \le 100 \text{ mm}$	b	с	а	a
	t>	100 mm	d	d	с	с
Perfiles armados en I						
	t:	≤ 40 mm	b	С	b	С
	t	> 40 mm	С	d	С	d
Agrupación de perfiles laminados soldados						
			с	с	с	с
ubos de chapa simples o agrupados						
$\cap \cap \cap$	laminado	os en caliente	а	а	ao	ao
	conform	nados en frío	с	С	С	С




	Curva de pandeo				
sbeltez reducida	a	a	b	C	d
Coeficiente (α) de imperfección	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76
≤ 0,20	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,30	0,99	0,98	0,96	0,95	0,92
0,40	0,97	0,95	0,93	0,90	0,85
0,50	0,95	0,92	0,88	0,84	0,78
0,60	0,93	0,89	0,84	0,79	0,71
0,70	0,90	0,85	0,78	0,72	0,64
0,80	0,85	0,80	0,72	0,66	0,58
0,90	0,80	0,73	0,66	0,60	0,52
1,00	0,73	0,67	0,60	0,54	0.47
1,10	0,65	0,60	0,54	0,48	0,42
1,20	0,57	0,53	0,48	0,43	0,38
1,30	0,51	0,47	0,43	0,39	0,34
1,40	0,45	0,42	0,38	0,35	0,31
1,50	0,40	0,37	0,34	0,31	0,28
1,60	0,35	0,32	0,31	0,28	0,25
1,80	0,28	0,27	0,25	0,23	0,21
2,00 (1)	0,23	0,22	0,21	0,20	0,18
2,20 (1)	0,19	0,19	0,18	0,17	0,15
2,40 (1)	0,16	0,16	0,15	0,14	0,13
2,70 (2)	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11
3.00 (2)	0.11	0.10	0.10	0.10	0.09

## Tabla 6.3 Valores del coeficiente de pandeo ( $\chi$ )

## II. PANDEO LATERAL

### 6.3.3 Flexión

#### 6.3.3.1 General

- 1 Una viga sometida a momentos flectores dentro de su plano, puede pandear lateralmente en caso de que la separación entre apoyos laterales supere un determinado valor. En estos casos, será necesario efectuar una verificación de la seguridad frente a pandeo lateral.
- 2 En la determinación de la resistencia frente a pandeo lateral de una viga también se tendrá en cuenta la interacción con la abolladura de las chapas comprimidas
- 3 No será necesaria la comprobación a pandeo lateral cuando el ala comprimida se arriostra de forma continua o bien de forma puntual a distancias menores de 40 veces el radio de giro mínimo. No obstante, en estos casos se deberá asegurar una rigidez y una resistencia adecuadas de los apoyos laterales.

### 6.3.3.2 Pandeo lateral

1 Si existe la posibilidad de que una viga pandee lateralmente, debe comprobarse que  $M_{Ed} \le M_{b,Rd}$ ; donde  $M_{Ed}$  es el valor de cálculo del momento flector y  $M_{b,Rd}$  el valor de cálculo de la resistencia frente a pandeo lateral.  $M_{b,Rd}$  se podrá determinar de acuerdo con la relación:

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} W_y \frac{r_y}{\gamma_{M1}}$$
(6.31)

siendo

Wy módulo resistente de la sección, acorde con el tipo de ésta, es decir:

Wy: Wpl,y para secciones de clases 1 y 2

Wy: Welly para secciones de clase 3

Wy: Wcf,y para secciones de clase 4

χ<sub>LT</sub> factor de reducción para el pandeo lateral

El factor de reducción XIT se podrá determinar a partir de la expresión

$$\chi_{1+} = \frac{1}{\phi_{1+} + \sqrt{\phi_{1+}^2 - \overline{\lambda}_{LT}^2}} < 1$$
(6.32)

donde

$$\phi_{L1} = 0.5 \left| 1 + \alpha_{L1} \left( \lambda_{LT} - 0.2 \right) + \left( \bar{\lambda}_{LT} \right)^2 \right|$$
(6.33)

siendo

 $\overline{\lambda}_{II}$  esbeltez relativa frente al pandeo lateral

aLT factor de imperfección, obtenido de la tabla 6.6

Elemento	Límites	Curva de pandeo	$\alpha_{LT}$
Perfil laminado con sec- ción en doble T	h/b ≤ 2	а	0,21
	h/b > 2	b	0,34
Elemento armado con sección en doble T	h/b ≤ 2	С	0,49
	h/b > 2	d	0,76
Elementos con otras sec- ciones	i <del>n</del>	d	0,76

Tabla 6.6 Factor de imperfección au

La esbeltez relativa frente al pandeo lateral se determinará según la relación

$$\overline{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y f_y}{M_{cr}}}$$
(6.34)

donde

- M<sub>cr</sub> momento crítico elástico de pandeo lateral. El momento crítico elástico de pandeo lateral se determinará según la teoría de la elasticidad, por ejemplo de acuerdo con 6.3.3.3.
- 2 En el caso de perfiles laminados o de perfiles armados equivalentes cuando  $\overline{\lambda}_{LT} \le 0.4$  se podrá utilizar un valor de  $\chi_{LT}=1$ .
- 3 Los apoyos laterales del ala comprimida deberán dimensionarse con capacidad para resistir los esfuerzos a que van a estar sometidos. Los esfuerzos originados por las fuerzas de desvío del soporte comprimido de una viga recta de canto constante podrán determinarse de acuerdo con 5.4.1.5.

### 6.3.3.3 Momento crítico elástico de pandeo lateral

- 1 en la mayoría de los casos prácticos es admisible un cálculo simplificado del momento crítico elástico de pandeo lateral, a pesar de las diferencias en las condiciones de apoyo, la introducción de las cargas y la distribución de los momentos flectores.
- 2 En los casos en los que los apoyos en los extremos de una barra impidan su deformación por torsión, y si la carga actúa en el eje de la barra, el momento crítico elástico de pandeo lateral se podrá determinar según la ecuación:

$$M_{CR} = \sqrt{M_{LW}^2 + M_{LW}^2}$$
(6.35)

siendo:

- M<sub>LTv</sub> componente de M<sub>CR</sub> que representa la resistencia por torsión uniforme de la barra (S. Venant)
- MLTw componente de MCR que representa la resistencia por torsión no uniforme de la barra.
- 3 La componente M<sub>LTv</sub> del momento critico elástico de pandeo lateral se podría determinar a partir de la ecuación:

$$M_{LTv} = C_1 \frac{\pi}{L_C} \sqrt{GI_T EI_Z}$$
(6.36)

siendo:

- C1 factor que depende de las codiciones de apoyo y de la ley de momentos flectores que soliciten y la viga
- L<sub>c</sub> longitud de pandeo lateral (distancia entre apoyos laterales que impidan el pandeo lateral)
- G módulo de elasticidad transversal
- E módulo de elasticidad
- IT constante de torsión uniforme
- Iz momento de inercia de la sección respecto al eje z

Para las vigas con secciones esbeltas (apartado 5.2.3) se adoptará  $M_{LTv}=0$ .

4 La componente M<sub>LTw</sub> del momento crítico elástico de pandeo lateral viene determinada por la carga crítica elástica de pandeo del soporte comprimido del perfil. Este soporte está formado por el ala comprimida y la tercera parte de la zona comprimida del alma, adyancente al ala comprimida. La componente M<sub>LTw</sub> se podrá determinar a partir de la ecuación;

$$M_{LTw} = W_{el,y} \frac{\pi^2 E}{L_C^2} C_1 i_{f,z}^2$$
(6.37)

siendo

- W<sub>el,y</sub> módulo resistente elástico de la sección, según el eje de fuerte inercia, correspondiente a la fibra más comprimida
- i<sub>f,z</sub> radio de giro, con respecto al eje de menor inercia de la sección, del soporte formado por el ala comprimida y la tercera parte de la zona comprimida del alma, adyacente al ala comprimida

Las características mecánicas de la sección del soporte comprimido arriba mencionado se determinarán para la sección eficaz.

5 El factor C<sub>1</sub> tiene en cuenta las condiciones de apoyo y la ley de momentos flectores que solicitan la viga. Los valores indicados en la tabla 6.7 son válidos para tramos de vigas en cuyos extremos el giro torsional esté totalmente coaccionado y a lo largo de los cuales el momento flector varia linealmente

Condiciones de apoyo y tipo de solicita- ción	Diagrama de momentos flectores	C <sub>1</sub>
	¥∕=+1	
		1
	Ψ=+3/4	1,14
	Ψ=+1/2	1,32
/ М — ΨМ \		1,56
	Ψ=0	1,88
	Ψ=1/4	2,28
	Ψ=-1/2	2,7
	Ψ=-3/4	2,93
	Ψ-1	2,75

Tabla 6.7 Valor del factor C<sub>1</sub> correspondiente a los valores del factor  $k_{\phi}$  (k<sub>w</sub>=1)

- 3 Para definir las Clases 1, 2 y 3 se utilizan en los elementos comprimidos de las secciones los límites de las tablas 5.3 y 5.4. Como cada elemento comprimido de una sección (ala o alma) puede pertenecer a clases diferentes, se asignará a la sección la clase menos favorable. Se consideran de Clase 4 los elementos que sobrepasan los límites para la Clase 3.
- 4 Las reglas del presente DB también son aplicables a los perfiles conformados en frío y de chapas plegadizas. El espesor, t, de estos elementos se deberá elegir teniendo en cuenta las condiciones de transporte, de puesta en obra y de utilización, así como los riesgos de deformaciones locales. Suponiendo que la protección contra la corrosión esté asegurada, se deberá respetar un espesor mínimo de 0,75 mm (espesor neto del acero, sin la capa de protección).
- 5 Para evitar ondulaciones no deseadas, las esbelteces geométricas de los elementos planos que forman la sección transversal de un perfil conformado en frío o de chapa plegada deberán limitarse según las indicaciones de la tabla 5.5.



Tabla 5.3 Límites de esbeltez para elementos planos, apoyados en dos bordes, total o parcialmente comprimidos

Factor de reducción  $\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$ 

	1		, ,	
Solicitación	Elemento plano	Límit	e de esbeltez: c/t má	iximo
Compresión + Tracción -	Bonde	Clase 1	Clase 2	Clase 3
Compresión	fy + fy	9ε	10 ε	14 ε
Flexocompresión; borde libre com- primido	f <sub>y</sub> γ, f <sub>y</sub> γ, f <sub>y</sub> (y)	<u>9ε</u> α	<u>10ε</u> α	$21\epsilon\sqrt{k_{\sigma_1}}$
Flexocompresión; borde libre trac- cionado	fr + - fr - fr fr + fr	$\frac{\vartheta\epsilon}{\alpha^{1/5}}$	$\frac{10\epsilon}{\alpha^{15}}$	21ε√k <sub>σ2</sub>

Tabla 5.4 Límites de esbeltez para elementos planos, apoyados en un borde y libre el otro, total o parcialmente comprimidos.

Geometría

Coeficientes de abolladura  $k_{\sigma_1} y k_{\sigma_2}$  en función de  $\psi$ , siendo  $\psi$  la relación de las tensiones en los bordes (compresión positiva):

para 1≥ ψ ≥-3
para 1≥ ψ ≥0
para 0≥ γ ≥-1

Factor de reducción  $\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$ 

## **III. ABOLLADURA**

### 6.3.3.4 Abolladura del alma por cortante

### No es preciso comprobar la resistencia a la abolladura del alma en las barras en las que se cumpla:

$$\frac{d}{t} < 70 \cdot c$$
 (6.36)

ni en aquellas en las que, disponiendo de rigidizadores en sus extremos (e intermedios, en su caso), se cumpla:

$$\frac{d}{t} < 30 \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{k_{\tau}} \tag{6.37}$$

siendo

1

d, t dimensiones del alma (altura y espesor);

$$\varepsilon - \sqrt{\frac{f_{ref}}{f_y}}$$
 con  $f_{ref}$  = 235 N/mm<sup>2</sup>.

k<sub>τ</sub> es igual:

- 
$$k_1 = 4 + \frac{5.34}{\left(\frac{a}{d}\right)^2}$$
 Si existen rigidizadores separados una distancia ak\_1 = 5.34 Si existen rigidizadores separados una distancia  $a \ge d$ 

• 
$$k_{c} = \frac{4}{5,34 + \frac{4}{\left(\frac{a}{d}\right)^{2}}}$$
 Si existen rigidizadores separados una distancia  $a \ge d$ 

### Si existen rigidizadores sólo en las secciones extremas

2 La inercia I<sub>s</sub> de la sección formada por el rigidizador más una anchura de alma a cada lado del rigidizador igual a 15 t<sub>w</sub>e, con relación a su fibra neutra, paralela al plano del alma, ha de ser:

$$|_{s} \ge 1.5 \cdot \frac{d^{3}t^{3}}{a^{2}}$$
 si  $\frac{a}{d} < \sqrt{2}$  (6.38)

$$I_s \ge 0.75 \cdot d \cdot t^3$$
 si  $\frac{a}{d} \ge \sqrt{2}$  (6.39)

3 La resistencia del alma a abolladura por cortante se obtiene de:

$$V_{b,Rd} = \frac{d \cdot t \cdot \tau_{b}}{\gamma_{M1}}$$
(6.40)

siendo

$$\begin{split} \tau_{b} &= \frac{f_{\gamma}}{\sqrt{3}} & \overline{\lambda}_{w} \leq 0,8 \\ \tau_{b} &= \frac{f_{\gamma}}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 - 0,625 \cdot \left(\overline{\lambda}_{w} - 0,8\right)\right) & \text{si} & 0,8 < \overline{\lambda}_{w} < 1,2 \\ \tau_{b} &= \frac{f_{\gamma}}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{0,9}{\overline{\lambda}_{w}}\right) & 1,2 < \overline{\lambda}_{w} \end{split}$$

donde

$$\lambda_{\rm w} = \frac{{\rm d}/{\rm t}}{37.4\varepsilon\sqrt{\rm k_{\tau}}}$$

. . .

4 Cada rigidizador intermedio se dimensionará como un soporte solicitado por el esfuerzo de compresión:

$$N_{Ed} = V_{Ed} - V_{b,Rd}$$

(6.41)

siendo

V<sub>Ed</sub> valor de cálculo del esfuerzo cortante

V<sub>b,Rd</sub> valor de cálculo de la resistencia a abolladura por cortante

En caso de existir cargas exteriores que puedan actuar directamente sobre el rigidizador, éstas se añadirán al valor de N<sub>Ed</sub>. La sección resistente incluirá el rigidizador mas una anchura de alma a cada lado del rigidizador, igual a 10 t<sub>w</sub>c. La verificación de la seguridad estructural del rigidizador se llevará a cabo de acuerdo con los métodos del apartado 6.3.2, utilizando la curva de pandeo c con una longitud de pandeo de 0,8 d.

#### 6.3.3.5 Cargas concentradas

3 La resistencia de cálculo del alma frente a cargas concentradas viene dada por:

$$F_{b,Rd} = \frac{f_y \cdot t_w \cdot L_{ef}}{\gamma_{M1}}$$
(6.43)

siendo

$$\mathsf{L}_{\mathsf{ef}} = \chi_{\mathsf{F}} \cdot \ell_{\mathsf{y}} \tag{6.44}$$

$$\chi_{\mathsf{F}} = \frac{0,5}{\lambda_{\mathsf{F}}} \le 1 \tag{6.45}$$

$$\lambda_{\Gamma} = \sqrt{\frac{\ell_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{y}}}{\mathsf{F}_{cr}}} \tag{6.46}$$

$$\mathbf{F}_{\alpha} = \mathbf{0}, \mathbf{9} \cdot \mathbf{k}_{\mathsf{F}} \cdot \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{t}^3}{\mathsf{d}} \tag{6.47}$$

Los valores de  $\ell_y$  y de k<sub>F</sub> dependen del caso considerado, de entre los representados en la figura 6.6:

- Caso a): carga (o reacción) aplicada a un ala y equilibrada por cortantes en el alma.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{\mathsf{F}} &= \mathbf{6} + 2 \left(\frac{d}{a}\right)^2 \\ \ell_{\mathbf{y}} &= \mathbf{s}_{\mathsf{s}} + 2 \cdot \mathbf{t} \cdot \left(1 + \sqrt{m_1 + m_2}\right) \leq a \end{aligned}$$

- Caso b): carga (o reacción) transferida de un ala al otro a través del alma. En caso de haber cortantes, se considera la fuerza concentrada de mayor valor de las dos.

$$\begin{aligned} k_{F} &= 3,5 + 2 \left(\frac{d}{a}\right)^{2} \\ \ell_{y} &= s_{s} + 2 \cdot t \cdot \left(1 + \sqrt{m_{1} + m_{2}}\right) \leq a \end{aligned}$$

 Caso c): carga (o reacción) aplicada a un ala cerca de una sección extrema no rigidizada y equilibrada por un cortante en la otra sección.

$$k_{F} = 2 + 6 \left( \frac{s_{s} + c}{d} \right) \le 6$$
$$\ell_{y} = Min(\ell_{y1}, \ell_{y2}, \ell_{y3})$$

viniendo cada coeficiente dado por las expresiones:

$$\begin{split} m_1 &= \frac{f_{yf} \cdot b_f}{f_{yw} \cdot t_w} \\ m_2 &= \begin{cases} 0,\!02 \! \left( \frac{d}{t_f} \right) & \!\! \text{si} \, \lambda_F > 0,\! 5 \\ 0 & \!\! \text{si} \, \overline{\lambda}_F \leq 0,\! 5 \end{cases} \text{ (cabe aproximar } \overline{\lambda}_F \, \text{con la obtenida usando } m_2 = 0 \text{ para aproximar } \ell_y \text{ )} \end{cases}$$

$$\begin{split} \ell_{y1} &= \ell_{eff} + t_f \sqrt{m_1 + m_2} \\ \ell_{y2} &= \ell_{eff} + t_f \sqrt{\frac{m_1}{2} + \left(\frac{\ell_{eff}}{t_f}\right)^2 + m_2} \\ \ell_{y3} &= s_s + 2 \cdot t_f \left(1 + \sqrt{m_1 + m_2}\right) \\ \ell_{eff} &= \frac{k_F \cdot E \cdot t^2}{2 \cdot f_v \cdot d} \leq s_s + c \end{split}$$

donde

- s<sub>S</sub> longitud de la entrega rígida de la carga (véase la figura 6.7);
- t<sub>w</sub> espesor del alma;
- t<sub>f</sub> espesor del ala;
- fyw tensión de límite elástico del alma;
- fyb tensión de límite elástico del ala;
- E módulo de elasticidad;
- d canto del alma.



Figura 6.6 Modos de transferencia de cargas concentradas o reacciones



Figura 6.7 Ancho de la entrega rígida de una carga sobre un ala

# **6.-AGRADECIMIENTOS**

Tras todas estas teorías, normativas y simulaciones, llega el momento de agradecer todo el apoyo recibido, tiempo dedicado y conocimiento aportado por parte del director de este proyecto, el Dr. Sergio Puértolas.

Gracias a mi familia por el apoyo y el empuje que me han dado en esta larga trayectoria universitaria. En especial a mis padres, Conchi y José Luis, por su empeño y tenacidad en la necesidad de formarme cuando yo aún no era consciente de tal necesidad.

A mis hermanos, Sara, Pablo y Pili, por la ayuda recibida en el presente proyecto.

A mi compañera y su hijo por la fuerza que me aportan en todo momento.

Mi más sincero agradecimiento a la universidad, por todo el conocimiento recibido y que de tan solida base me sirve en mi trayectoria profesional.