

Métodos numéricos aplicados a la mecánica de fluidos



Alejandro López Nieto
Trabajo de fin del grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Introducción

Este trabajo es una introducción a las ecuaciones que modelan el comportamiento de los fluidos newtonianos incompresibles. A lo largo del mismo se irán introduciendo las herramientas para en última instancia poder resolver satisfactoriamente un problema de mecánica de fluidos y evaluar el resultado obtenido.

Sobran motivaciones para estudiar este tema que, habiendo nacido en la física y la ingeniería requiere de las herramientas más potentes de las matemáticas para estudiarse en detalle. Las ecuaciones de Navier-Stokes han demostrado tener la importancia suficiente para que algunos organismos premien el estudio de la existencia y unicidad de soluciones con cuantiosos premios. No es de extrañar teniendo en cuenta que tienen aplicaciones en campos que van desde la aeronáutica hasta medicina, pasando por la producción de energías renovables. La gran complejidad de este campo, unida al interés de la industria han hecho que se creen grupos de estudio dedicado en exclusiva al tema en los que personal de todas las ramas del conocimiento une fuerzas.

El primer capítulo del escrito pretende derivar las ecuaciones fundamentales de una manera que resulte asequible al lector. Una vez planteado el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes, se introducen algunos conceptos del análisis adimensional para poder llegar a las ecuaciones de Stokes, una linealización no dependiente del tiempo del sistema original que resulta más asequible para el estudio.

El segundo capítulo introduce la herramienta fundamental que utilizaremos a la hora de resolver la ecuación de Stokes. Se trata del método de elementos finitos, con una pequeña base de teoría de espacios de Hilbert y distribuciones, estaremos en disposición de hablar de la existencia y unicidad de soluciones de problemas elípticos y podremos al final introducir y hablar de la implementación del método de elementos finitos y de la convergencia del mismo.

Por último el capítulo tercero habla del planteamiento de las ecuaciones de Stokes como un problema de punto silla, estudia la existencia y unicidad de soluciones del mismo y la convergencia de los métodos de elementos finitos utilizando herramientas ya presentadas en el tema anterior. Al final se muestran los resultados obtenidos mediante computación para distintos espacios de elementos finitos. Todos los programas utilizados en este último punto serán además adjuntados en forma de anexo.

Índice general

Introducción	III
Summary	VII
1. Una introducción al modelo matemático	1
1.1. La derivación de las ecuaciones fundamentales	1
1.1.1. La conservación de la masa	1
1.1.2. Los fluidos incompresibles	2
1.1.3. La ecuación del movimiento	2
1.2. El número de Reynolds y la ecuación de Stokes	5
2. El método de los elementos finitos	7
2.1. La necesidad de nuevas soluciones	7
2.2. La derivada débil	8
2.3. La formulación débil del problema	10
2.4. Existencia y unicidad de solución	11
2.5. La discretización del problema variacional	13
2.6. Los elementos finitos	14
3. Elementos finitos en la ecuación de Stokes	19
3.1. La formulación débil del problema de Stokes	19
3.2. Existencia y unicidad de solución del problema variacional	20
3.3. Problema de Galerkin para la ecuación de Stokes	23
3.4. Un problema práctico	26
3.5. La implementación del método	29
A. Programas utilizados	33
Bibliografía	41

Summary

Abstract

The main goal of this text is to develop the ideas needed to solve the Stokes equation. To do so, we will first study the derivation of the main equations describing the motion of fluids, these are the well-known Navier Stokes equations. From there we will move on and obtain the Stokes problem that we want to study. Afterwards we will start to introduce the fundamental theory of finite element methods, these include the definition of weak derivatives, the concept of Sobolev spaces, the variational formulation of problems and some different types of domain decompositions. Once all these tools have been explained we will proceed to apply them to the Stokes problem and study its variational formulation, the well-posedness of the problem and the main ideas of mixed finite element methods. In the end we will be prepared to solve a specific real life problem using the MINI-element method, the results will be compared with those obtained using an unstable method.

The equations governing the motion of fluids

From now on we will consider Ω to be an open, bounded, connected subset of \mathbb{R}^n . The derivation of the Navier-Stokes equation system is based in the application of two basic physical laws:

1. The conservation of mass.
2. The conservation of momentum.

After some integration on manifolds we prove that the conservation of mass is equivalent to the fact that this equation holds at every point of Ω :

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Where ρ is the density function of the fluid, \mathbf{u} is the speed vector and $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$ denotes the *material derivative* operator. This equation is normally called *equation of mass*. From the definition of an incompressible fluid we get that it turns into

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ on } \Omega. \quad (1)$$

Navier-Stokes equations model the behaviour of incompressible newtonian fluids, thus this result holds. We already have one of the equations of our system.

The conservation of momentum comes from the expression

$$\int_{\tau} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \rho \, d\tau = \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S. \quad (2)$$

Where \mathbf{F}_V are the long-range forces on the fluid and \mathbf{F}_S are the surface forces. Long-range forces are those like gravity or electromagnetic forces, they can be considered as constants on the fluid since

they do not change a lot with distance. Surface forces appear when molecules interact with each other, they only affect neighbouring particles of fluid and are a much more delicate case.

After applying Newton's hypothesis we derive that for newtonian fluids equation (2) turns into:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}. \quad (3)$$

Where F is the long-range forces acceleration, p is the pressure and ν is the *cinematic viscosity* of the fluid. Equation (3) is usually called *equation of motion* together with (1) they form the Navier-Stokes equation system:

$$\begin{cases} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Navier-Stokes equations describe the behaviour of some of the most interesting fluids such as water and air. However, they are time dependent and not linear, because of this studying them is extremely complex. We will restrict ourselves to the case of slow flows in small spaces for fluids with a relatively high cinematic viscosity. In such flows viscous forces are much stronger than the inertial ones and the convective term of the material derivative $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ can be neglected.

Definition 1. *The Reynolds number is the index*

$$Re = \frac{\text{Inertial forces}}{\text{Viscous forces}}.$$

Flows with a very small Reynolds number are called Stokes flows.

The Navier-Stokes equations for a Stokes flow can be reduced to:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ on } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

this system of equations together with appropriate boundary conditions is the one we want to study. The Stokes equation system models the behaviour of several flows such as the movement of microorganisms swimming in a fluid or a lava flow.

The weak derivative

In this section we will deal with Dirichlet boundary value problems and apply the finite element method to some of them.

First of all we have to define the existence of solutions in the weak sense. Classical solutions of partial differential equations problems have strong requirements concerning the softness of the functions. For example, let us consider the following problem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ en } (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

A classical solution must fulfil $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. However, the problem stated in (6) models a real life phenomenon. It describes the deformation of an elastic string under a distribution of weights. In case we choose such a distribution to be discrete, physical intuition tells us that the solution does not even have to belong to $C^1(\Omega)$. Thus the requirements on solutions must be lowered.

We introduce the following concepts:

Definition 2. Given an open set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, we define $D(\Omega)$ as the space of infinitely differentiable functions from Ω into \mathbb{R} such that their support is compact, i.e.

$$D(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{supp}(f) \text{ is compact}\},$$

where the support of f is defined as $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$.

Definition 3. The dual space of $D(\Omega)$ is the space of distributions $D(\Omega)^*$. Any element in $D(\Omega)^*$ is called a distribution.

Definition 4. Given $T \in D(\Omega)^*$ and $f \in D(\Omega)$, we will write

$$T(f) = \langle T, f \rangle,$$

and define the derivative of T with respect to x_i as

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, f \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Iterating this definition, we can define higher order derivatives, given $\alpha \in \mathbb{N}^n$ a multi-integer. We can define the α -order derivative of T as

$$\langle D^\alpha(T), f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha f \rangle.$$

For every $f \in D(\Omega)$.

We can prove that for every $f \in L_2(\Omega)$ there exists a unique $T_f \in D(\Omega)^*$ such that $\langle T_f, g \rangle = \int_\Omega f g \, d\Omega$. Thus we can introduce the weak derivative of order α of a function in L_2 as the function $D^\alpha f$ such that:

$$\langle D^\alpha f, g \rangle = \langle f, D^\alpha g \rangle \text{ for every } g \in D(\Omega).$$

Definition 5. A Sobolev space of order $k \geq 0$ is a space of functions in $L_2(\Omega)$ such that their derivatives of up to k^{th} order lie in $L_2(\Omega)$ as well:

$$H^k(\Omega) = \{f \in L_2(\Omega) : D^\alpha f \in L_2(\Omega) \text{ for all } \alpha : |\alpha| \leq k\}.$$

Immediately from the definition we get that $H^{k+1}(\Omega) \subset H^k(\Omega)$.

Lemma 6. Consider the inner product on $H^k(\Omega)$ defined by:

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega (D^\alpha u)(D^\alpha v) \, d\Omega,$$

the pair $(H^k(\Omega), (\bullet, \bullet)_{H^k(\Omega)})$ is a Hilbert space.

Definition 7.

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)} = \{f \in H^1(\Omega) : f = 0 \text{ on } \Gamma\}.$$

The weak formulation of a general problem

The following result is called Green's formula:

Theorem 8. Given $u, v \in H^1(\Omega)$, it holds:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, d\Omega = \int_\Gamma u v n_i \, ds - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\Omega, \quad i = 1, \dots, n,$$

where n_i denotes the i^{th} component of the unit exterior normal vector on Γ .

Consider the next partial differential equation with Dirichlet boundary value

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \\ u = 0, \text{ on } \Gamma. \end{cases} \quad (7)$$

Multiplying both sides of the equation by a test function $v \in H_0^1$, integrating and using Green's formula we get to the weak form of the problem:

$$\begin{cases} \text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ so that:} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega \text{ for every } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (8)$$

The weak formulation of the Stokes problem

The Stokes equation system is the following one:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ on } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ on } \Gamma, \end{cases} \quad (9)$$

where Ω is an open set in \mathbb{R}^n , \mathbf{u} is the speed vector of the fluid and p is its pressure at each point. Vector functions will be written in bold from now on. We will restrict ourselves to the case of an homogeneous boundary value problem, this is, $u_0 = 0$.

In order for the boundary condition to be compatible with the problem, we derive from the second equation the following requirement:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$$

Which is trivially satisfied in the homogeneous case.

In case (\mathbf{u}, \bar{p}) solves the problem, then $(\mathbf{u}, \bar{p} + C)$ is a solution too $\forall C \in \mathbb{R}$. Thus we must normalize p with the condition $\int_{\Omega} p \, d\Omega = 0$.

Consider the test function spaces

$$V = H_0^1(\Omega)^n, \quad (10)$$

$$M = \left\{ q \in L_2(\Omega) : \int_{\Omega} q = 0 \right\} = L_{2,0}(\Omega). \quad (11)$$

We proceed as usual multiplying the first equation by $\mathbf{v} \in V$, the second by $q \in M$ and integrating both of them. After applying Green's formula we get the weak formulation of the Stokes problem:

$$\begin{cases} \text{Find } (\mathbf{u}, p) \in V \times M \text{ so that:} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (f, \mathbf{v})_{L_2(\Omega)} = l(\mathbf{v}), \text{ for all } \mathbf{v} \in V \text{ and } q \in M. \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

Where

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega, \quad (13)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega, \quad (14)$$

$$(f, \mathbf{v})_{L_2} = \int_{\Omega} f \mathbf{v} \, d\Omega.$$

Existence and uniqueness of solutions

Definition 9. Given a bilinear form $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ where V is a Hilbert space and $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ a linear form, we say that:

1. $a(\bullet, \bullet)$ is coercive or V -elliptic when $\exists \alpha > 0$ such that $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \forall v \in V$.
2. $a(\bullet, \bullet)$ is continuous when $\exists M_a > 0$ such that $a(u, v) \leq M_a \|u\|_V \|v\|_V \forall u, v \in V$.
3. $l(\bullet)$ is continuous when $\exists K > 0$ such that $l(v) \leq K \|v\|_V \forall v \in V$.

Definition 10. A bilinear form $b : V \times M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies the LBB condition if:

$$\begin{aligned} & \exists \beta > 0 \text{ such that:} \\ & \inf_{q \in M} \sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V \|q\|_M} \geq \beta. \end{aligned} \quad (15)$$

This is a compatibility condition between V and M

Theorem 11. Given a problem of the same form as the one in (12), if each one of the forms satisfies:

1. $a(\bullet, \bullet)$ is bilinear, coercive and continuous.
2. $b(\bullet, \bullet)$ is bilinear, continuous and satisfies the LBB condition.
3. $l(\bullet)$ is linear and continuous.

Then the problem has a solution in $V \times M$ and it is unique.

Lemma 12. Consider the form $b(u, q) = \int_{\Omega} q \nabla \cdot u \, d\Omega$ and functions $v \in (H_0^1(\Omega))^n$, $q \in L_{2,0}(\Omega)$. Then the LBB condition is satisfied.

Corollary 13. There exists a solution for the Stokes problem and it is unique.

The Galerkin problem

Consider the boundary value problem

$$\begin{cases} \text{Find } (u_h, p_h) \in V_h \times M_h \subset V \times M \text{ so that:} \\ a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = (f, v_h)_{L_2(\Omega)} = l(v_h), \\ b(u_h, q_h) = 0, \end{cases} \quad \text{for all } v_h \in V_h \text{ and } q_h \in M_h. \quad (16)$$

With the forms associated to the Stokes equations that we introduced in (13) and V_h, M_h finite dimensional Hilbert spaces. Problem (16) is the family of Galerkin problems associated to (12).

The idea of finite element methods is that the solution of these Galerkin problems converges to the one of (12). However we don't even know yet what an element is. In finite element methods we will use h -depending finite decompositions of our domain where h normally is the biggest diameter of the cells of the decomposition. Afterwards we define *appropriate* finite dimensional spaces of functions based on the division of the domain.

For this problem we have the following convergence result:

Theorem 14. Consider the Galerkin problem (16) with the conditions:

1. $a(\bullet, \bullet)$ is coercive.
2. The LBB condition is satisfied.

Then if (\mathbf{u}, p) is the solution for the variational Stokes problem and (\mathbf{u}_h, p_h) is the solution of the Galerkin problem, the following inequality holds:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V + \|p - p_h\|_M \leq c \left[\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V + \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M \right]. \quad (17)$$

This gives us a sense of convergence of our Hilbert spaces. A mixed finite element method will converge if

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\| \rightarrow 0, \quad \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\| \rightarrow 0.$$

For our purposes we will study triangulations as a particular case of domain decompositions.

Definition 15. Given Ω a closed flat polygon, the set $\tau = \{K_i\}_{i=1}^N$ is a finite triangulation of Ω if:

1. K_i is an euclidean triangle $i = 1, \dots, N$
2. $\cup_{i=1}^N K_i = \Omega$
3. $K_i \cap K_j$, $i \neq j$ is either the empty set, a complete edge of a triangle, or a vertex.

In finite elements we call each K_i triangle. h will be the maximum diameter taken over all the elements of the triangulation.

On a given triangulation of Ω we will consider the set of piecewise linear functions:

$$\begin{aligned} P_1 &= \{a_0 + a_1x + a_2y : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}, \\ W_h &= \{\mathbf{v} \in C^0(\overline{\Omega}) : v|_{K_i} \in P_1, i = 1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

The $P_1 - P_1$ finite element method applied to the Stokes equation in 2 dimensions consists in taking $V_h = W_h \times W_h$ and $M_h = W_h$ as our finite dimensional test function spaces. However, we can prove that this couple does not fulfil the LBB condition, thus the method does not converge to the solution of the problem.

Definition 16. Given a triangulation τ_h of Ω , we will consider the set of nodal linear functions. These are the linear functions with value 1 at a single vertex and 0 at the other vertices. Such functions are a basis of W_h defined on τ_h .

We proceed to extend the space V_h by defining the space B_3 .

Definition 17. Consider a triangulation τ_h of Ω and W_h defined on it in the usual way. Given a triangle $K_i \in \tau_h$, then ϕ_{α_i} , ϕ_{β_i} and ϕ_{γ_i} will be the nodal basis functions related to each vertex of K_i .

$$B_3 = \text{span} \{ \phi_{\alpha_i} \phi_{\beta_i} \phi_{\gamma_i} : K_i \in \tau_h \},$$

is the space of bubble functions defined on τ_h .

We will consider now the finite elements method with $V_h = (W_h \oplus B_3) \times (W_h \oplus B_3)$ applied to the Stokes problem. A mixed finite element method using these spaces is called the MINI-element method. It can be proved that this method satisfies the LBB condition and it is convergent. In fact (although it requires some deep functional analysis), we know that condition (14) holds and the method converges linearly in h with respect to the H^1 norm.

How the method works

Since speed is a vector function and both components are independent of each other in a general Stokes problem, we can consider each one of the components as a different equation. We can name each of the components u_h^x and u_h^y . We are working with finite dimensional spaces and this means that we can take a basis of V_h

$$\begin{aligned}\Phi_i^l &= (\phi_i^l, 0), i = 1, \dots, n_1; \\ \Phi_i^b &= (\phi_i^b, 0), i = 1, \dots, n_2; \\ \Phi_{N+i}^l &= (0, \phi_i^l), i = 1, \dots, n_1; \\ \Phi_{N+i}^b &= (0, \phi_i^b), i = 1, \dots, n_2;\end{aligned}$$

where n_1 is the number of vertices of our triangulation and n_2 the number of triangles. We can write the components of speed and the pressure as

$$u_h^x = \sum_{i=1}^{n_1} u_i^{x,l} \phi_i^l + \sum_{j=1}^{n_2} u_j^{x,b} \phi_j^b \quad u_h^y = \sum_{i=1}^{n_1} u_i^{y,l} \phi_i^l + \sum_{j=1}^{n_2} u_j^{y,b} \phi_j^b \quad p_h = \sum_{i=1}^{n_1} p_i \phi_i^l$$

Problem (16) with the choice of finite elements of the MINI-element method is then reduced to solving the following linear system

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & G_1 \\ 0 & A & 0 & 0 & G_2 \\ 0 & 0 & D & 0 & G_3 \\ 0 & 0 & 0 & D & G_4 \\ G_1^t & G_2^t & G_3^t & G_4^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_l^x \\ U_l^y \\ U_b^x \\ U_b^y \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Where $U_l^x = (u_i^{x,l})$, $U_b^x = (u_j^{x,b})$, $U_l^y = (u_i^{y,l})$, $U_b^y = (u_j^{y,b})$ and $P = (p_i)$. The matrices are computed as follows:

$$\begin{aligned}A &= (a_{ij}) = \int_{\Omega} \nabla \phi_j^l \cdot \nabla \phi_i^l \, d\Omega \quad i, j = 1, \dots, n_1; \\ D &= (d_{ij}) = \delta_{ij} \int_{\Omega} \nabla \phi_j^b \cdot \nabla \phi_i^b \, d\Omega \quad i, j = 1, \dots, n_2; \\ G^1 &= (g_{ij}^1) = \int_{\Omega} \phi_j^l \frac{\phi_i^l}{\partial x} \, d\Omega \quad i, j = 1, \dots, n_1; \\ G^2 &= (g_{ij}^2) = \int_{\Omega} \phi_j^l \frac{\phi_i^l}{\partial y} \, d\Omega \quad i, j = 1, \dots, n_1; \\ G^3 &= (g_{ij}^3) = \int_{\Omega} \phi_j^l \frac{\phi_i^b}{\partial x} \, d\Omega \quad i = 1, \dots, n_1 \text{ y } j = 1, \dots, n_2; \\ G^4 &= (g_{ij}^4) = \int_{\Omega} \phi_j^l \frac{\phi_i^b}{\partial y} \, d\Omega \quad i = 1, \dots, n_1 \text{ y } j = 1, \dots, n_2; \\ b^j &= (b_i^j) = \int_{\Omega} f \phi_i^l \, d\Omega \quad \text{para } i = 1, \dots, n_1 \text{ y } j = 1, 2, 5; \\ b^j &= (b_i^j) = \int_{\Omega} f \phi_i^b \, d\Omega \quad \text{para } i = 1, \dots, n_2 \text{ y } j = 3, 4.\end{aligned}$$

And the T vector represents the restriction we took for the uniqueness of p , thus

$$T = \left[\int_{\Omega} \phi_1^l, \dots, \int_{\Omega} \phi_{n_1}^l \right].$$

In order to impose the Dirichlet boundary conditions we will take each row B_i of the block matrix which corresponds to a node with a Dirichlet condition and change it into a vector with a 1 in the i^{th}

component and 0 in the rest. On the right hand side of the system we will change the i^{th} component of the b vector into the value at the boundary. After this procedure we are ready to solve the problem.

At the end of the thesis we will solve (9) with $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ and a not homogeneous boundary condition, namely

$$\mathbf{u}_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y = 1, \\ 0 & \text{at the rest of the boundary.} \end{cases}$$

The weak formulation of this problem is a little bit different since we are looking for a solution in a space which is slightly different from the space of test functions. However all the theory we have developed along the section still holds and we just have to re-check the variational formulation, it will change into

$$\begin{cases} \text{Find } (\mathbf{u}, p) \in V \times M \text{ such that:} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (f, \mathbf{v})_0, \quad \text{for all } (\mathbf{v}, q) \in V_0 \times M. \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, \end{cases} \quad (18)$$

Where

$$\begin{aligned} \Omega &= (0, 1) \times (0, 1), \\ V &= \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega) : \mathbf{v}(x, 1) = (1, 0), x \in [0, 1] \text{ y } \mathbf{v} = 0 \text{ at the rest of } \Gamma \}, \\ V_0 &= \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega) : \mathbf{v}|_\Gamma = 0 \}, \\ M &= \left\{ q \in L_2(\Omega) : \int_\Omega q \, d\Omega = 0 \right\}. \end{aligned}$$

V in this case can be seen as an affine translation of V_0 . As we said before the theoretical results are the same. After computing a MINI-element method we will see that results look very natural and are very similar to what we could expect.

Arguing in the same way we can also study the $P_1 - P_1$ method applied to (18). We already now that this is an unstable method and the results of computing it go against any physical intuition. The computational implementation of this method together with the MINI-element one can be checked at the end of the thesis. This was the ultimate goal of our work.

Capítulo 1

Una introducción al modelo matemático

1.1. La derivación de las ecuaciones fundamentales

Nuestro primer objetivo será entender las ecuaciones que modelan nuestro fenómeno estudiado, para ello necesitamos primero unas definiciones fundamentales.

Definición 1.1.1. *Un fluido es un conjunto de moléculas líquidas o gaseosas que se deforma continuamente cuando se le aplica una fuerza tangente a la superficie, el material “fluye” al ser sometido a esta fuerza. Esta característica resulta más evidente si se compara con qué le ocurre a un cuerpo sólido en esta situación.*

Definición 1.1.2. *Se llama elemento de fluido $\delta\tau$ a un entorno diferencial de una partícula de nuestro material. Hay que notar que nuestro elemento se desplazará con la partícula por lo que su posición dependerá del tiempo. De manera habitual consideraremos elementos de fluido con caras planas, cubos alrededor de puntos que se desplazarán con el tiempo.*

Definición 1.1.3. *Se llama elemento de superficie δS a un fragmento de superficie de tamaño tan pequeño como se quiera en la cercanía de un punto.*

1.1.1. La conservación de la masa

Consideraremos en general un dominio abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. La masa de fluido comprendida en un elemento del mismo es

$$\int_{\delta\tau} \rho \, dV.$$

Donde ρ es la densidad del material con el que trabajamos. Debemos tener en cuenta que como la densidad cambia con la temperatura en general no se tratará de una magnitud constante. El principio de conservación de la masa nos dice que la variación en el tiempo de la cantidad de materia en un elemento de fluido está determinada por la diferencia entre la masa que entre en el volumen y la que salga. Definiendo \mathbf{u} la velocidad del fluido en un punto e instante de tiempo, y \mathbf{n} el vector normal exterior unitario en la frontera de un elemento de volumen tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\delta\tau} \rho \, d\Omega = - \int_{\delta S} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (1.1)$$

Nótese que introducimos un signo negativo, éste indica la *dirección* de la variación de masa, es decir, si la masa aumenta o disminuye. Aplicando derivación bajo el signo integral y el teorema de la divergencia en (1.1) obtenemos la fórmula

$$\int_{\delta\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \, dV = 0.$$

Como esta relación es cierta para cualquier volumen contenido en Ω podemos afirmar que en general la ecuación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.2)$$

se cumple para todo punto \mathbf{x} y todo instante de tiempo t .

Definición 1.1.4. Se llama *derivada material* de una función cualquiera definida en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ al operador lineal

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla.$$

La derivada material puede observarse como el índice de variación de una función en el tiempo, siguiendo la corriente.

La ecuación (1.2) se llama *ecuación de continuidad* o de *conservación de la masa* y admite la expresión equivalente

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

1.1.2. Los fluidos incompresibles

Las ecuaciones de Navier-Stokes son conocidas por modelar el comportamiento de fluidos incompresibles, sin embargo, aún no sabemos qué quiere decir esto. Una manera intuitiva de ver cuando un fluido es incompresible es la siguiente. Sea τ el volumen de un elemento de fluido y consideraremos el *índice de expansión local*

$$r(\mathbf{x}, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{\delta\tau} \nabla \cdot \mathbf{u} \, dV \approx \nabla \cdot \mathbf{u}$$

Se entenderá entonces que un fluido es no compresible cuando este ratio del volumen instantáneo alrededor de todo punto tienda a 0, es decir, cuando se cumpla $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Esta no es una definición muy rigurosa, en general se dice que un fluido es incompresible cuando la densidad de un elemento de fluido no es dependiente de cambios en la presión. Se puede llegar a demostrar mediante un estudio más profundo que si asumimos que los cambios de temperatura en nuestro material son despreciables (lo cual se puede hacer en muchos casos), entonces la definición formal es equivalente a que

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0$$

Esto quiere decir que si vamos siguiendo una partícula cualquiera del fluido y estudiamos la densidad del material en un entorno a su alrededor, ésta será constante en el tiempo. En particular obtenemos de nuevo la condición $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ sustituyendo en (1.2). Esta condición será la primera de nuestras ecuaciones.

1.1.3. La ecuación del movimiento

La ley de conservación del momento (segunda ley de Newton) nos dará la segunda de nuestras ecuaciones, las fuerzas que actúan sobre una porción de nuestro fluido pueden separarse en general en

1. Fuerzas de volumen: se trata de las fuerzas que experimentan variaciones pequeñas con la distancia. Una consecuencia directa es que podemos considerar que una de estas fuerzas afecta por igual a todos los puntos de un elemento de fluido que estemos considerando, de modo que sobre dicho volumen la fuerza será directamente proporcional a la masa contenida por una aceleración constante. Ejemplos serían la gravedad o la fuerza electromagnética.

2. Fuerzas de superficie: se trata de las fuerzas con origen en la interacción molecular que decrecen muy rápidamente cuando aumenta la distancia. Se consideran despreciables a no ser que haya un contacto directo entre dos elementos. Si dos elementos de fluido están en contacto directo, la interacción se producirá sólo sobre las partículas que estén a una distancia corta de la frontera.

Considerando elementos con caras planas y considerando la distancia de penetración de las fuerzas pequeña en comparación con la superficie de una cara elemento, la fuerza ejercida sobre dicha cara será proporcional a la superficie de la misma $\Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) \delta S$, donde \mathbf{n} es el vector normal unitario exterior de la cara que consideramos.

Definición 1.1.5. *A la magnitud fuerza por unidad de superficie*

$$\Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) = \frac{\text{Fuerza ejercida sobre esta cara del elemento}}{\text{Área de dicha cara}}$$

se la llama *esfuerzo*.

La fuerza *aplicada* sobre nuestro elemento será de signo contrario a la normal exterior $\mathbf{F}_S = -\Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) \delta S$. Para determinar el esfuerzo sobre un elemento de superficie de un elemento de fluido que corresponde a un punto en un tiempo fijo definimos el tensor de tensiones $\sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$. σ_{ij} será la componente i del esfuerzo sobre un elemento de superficie con vector normal en la dirección j del espacio, así queda

$$\Sigma_i(\mathbf{n}) = \sigma_{ij} n_j.$$

Donde n_j es la componente j del vector normal unitario exterior con respecto a nuestro elemento de superficie δS . Podemos diferenciar los esfuerzos en función de la dirección de la normal de la superficie en la que actúan. Los esfuerzos en direcciones paralelas al sistema de referencia en el que trabajamos se llaman *normales* y sus valores se reflejan en la diagonal de la matriz σ . Los esfuerzos asociados con los valores de la matriz fuera de la diagonal se llaman *tangenciales*.

Consideraremos ahora el momento sobre un elemento de fluido, se trata de la cantidad

$$\int_{\tau} \rho \mathbf{u} \, d\tau.$$

La fuerza ejercida sobre dicho elemento se define como la variación del momento en el tiempo. Con una serie de deducciones se llega a la expresión

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{u} \, d\tau = \int_{\tau} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \rho \, d\tau = \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S.$$

Por la conservación del momento se tiene

$$\text{Fuerza ejercida} = \text{Fuerzas de volumen} + \text{Fuerzas de superficie},$$

y se llega a que

$$\int_{\tau} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \rho \, d\tau = \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S,$$

con $F_V = \int_{\tau} \mathbf{F} \rho \, d\tau$ y $F_S = \int_{\tau} \nabla \cdot \sigma \, d\tau$, desde el punto de vista de las componentes queda la expresión

$$\int_{\tau} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \rho \, d\tau = \int_{\tau} \mathbf{F} \rho \, d\tau + \int_{\tau} \nabla \cdot \sigma \, d\tau.$$

La igualdad es cierta para cualquier elección del volumen, por tanto tiene que ser que en todo punto de Ω se cumple la ecuación

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \sigma. \quad (1.3)$$

Esta ecuación es la que se suele denominar *ecuación del movimiento*. Sin embargo, para poder determinar el estado de un fluido a través de ella tenemos que entender mejor lo que son \mathbf{F} y σ .

\mathbf{F} representa la aceleración inducida por las fuerzas que hemos llamado de volumen. En la mayoría de los casos se trata sencillamente de la aceleración gravitatoria, constante en todo el fluido y no hay mayor problema, nos abstendremos de evaluar casos más generales.

El estudio del tensor de tensiones σ plantea una mayor dificultad. En un fluido estático se tiene $\sigma = -pI$, donde I representa el tensor identidad $d \times d$ con d la dimensión del espacio y p es la presión. Sin embargo, cuando el fluido está en movimiento no es cierto que la presión actuará sobre todos los elementos como una constante en todas las direcciones. Podemos dividir el esfuerzo en dos tipos según su origen:

1. Esfuerzo interno: Debido a la presión del fluido, se manifiesta cuando éste se mueve al cambiar la presión respecto a la que había en el estado de reposo. El tensor asociado a este esfuerzo viene dado por

$$\sigma_1 = -pI.$$

2. Esfuerzo viscoso: Se originan como respuesta a la deformación del fluido. Están estrechamente relacionados con la viscosidad μ , una magnitud que mide lo *espesos* que son los fluidos. La experiencia nos dice que cuesta más mover una masa de fluido más espeso, como puede ser la miel, que desplazar una masa de agua, esto va directamente ligado a la viscosidad. El origen de esta *oposición* del fluido al movimiento es puramente molecular, surge de las colisiones de moléculas de nuestro material que se producen cuando lo perturbamos. Se dice que un fluido es newtoniano cuando su esfuerzo viscoso satisface la siguiente relación (propuesta en su día por el propio Newton)

$$\sigma_2 = \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T).$$

Observación 1.1.6. A la forma $\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T$ se la llama también *tensor de deformación*, así que la característica de los fluidos newtonianos es que el tensor esfuerzo viscoso es una función lineal del tensor deformación.

Hay que decir que la familia de los fluidos newtonianos comprende a muchos de los fluidos *habituales* como el agua o el aire bajo condiciones de temperatura y presión normales.

Agrupándolo todo tenemos una expresión del tensor de esfuerzo en un fluido newtoniano

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = -pI + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T).$$

Si introducimos todo esto en la ecuación (1.3), obtenemos

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{F} - \nabla p + \mu(\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})).$$

En forma vectorial y teniendo en cuenta $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ se tiene que

$$\begin{cases} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Y así hemos llegado por fin al sistema de ecuaciones de Navier-Stokes (1.4) que modela el comportamiento de fluidos newtonianos incompresibles. Sin embargo el objetivo final de este trabajo es una linealización de este sistema que veremos en la sección siguiente.

Observación 1.1.7. A la magnitud $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ se la llama *viscosidad cinemática*, en contraposición a μ que suele ser la viscosidad *dinámica o absoluta*. Todas estas variables dependen del estado del fluido, entre otras cosas se ven afectadas por las temperatura pero en muchos casos se pueden considerar como constantes.

1.2. El número de Reynolds y la ecuación de Stokes

Hay que distinguir que podemos hablar de flujos y fluidos. Un fluido es el material concreto con el que estemos trabajando sea agua, aire o gel. El concepto de flujo es el de un fluido junto con las condiciones en que se encuentra, por ello podemos *clasificar* los flujos utilizando la siguiente definición.

Definición 1.2.1. Se llama número de Reynolds a la relación

$$Re = \frac{LU}{\nu}. \quad (1.5)$$

A un flujo con un número de Reynolds muy pequeño (cercano a cero) se le llama flujo de Stokes.

En (1.5) L y U son una longitud representativa del problema planteado (por ejemplo el diámetro del dominio) y una velocidad representativa (podría ser una velocidad constante en la frontera), con esto podemos permitirnos definir nuevas variables

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U} \quad \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L} \quad t' = \frac{tU}{L} \quad p' = \frac{p - p_0}{\rho U^2} \quad \text{donde } p_0 \text{ es una presión representativa para el problema}$$

Con estas nuevas variables podemos escribir (1.4) en forma adimensional. Dos flujos con las mismas condiciones iniciales y de contorno en forma adimensional y mismo número de Reynolds se llamarán *dinámicamente similares* y admitirán una misma solución en forma adimensional. Esto explica por qué el movimiento de sangre en una arteria principal y en un capilar siguen ecuaciones tan distintas y da una caracterización de los flujos de Stokes.

En general los flujos con números de Reynolds bajos son aquéllos tales que la velocidad y longitud características son pequeñas en comparación con las viscosidad cinemática.

Además de la definición (1.5), el número de Reynolds admite también la expresión

$$Re = \frac{\text{Fuerzas inerciales}}{\text{Fuerzas viscosas}}. \quad (1.6)$$

Hay que notar las consecuencias directas de (1.6) sobre los flujos de Stokes. En un flujo de este tipo las fuerzas viscosas dominarán a las inerciales. A causa de esto el término *convectivo* $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ que aparece en la derivada material de (1.3) se puede despreciar. Como resultado nuestro sistema de ecuaciones ha pasado a ser lineal y además de esto, por tratarse de un flujo lento, podemos considerar que será constante en el tiempo y conformarnos con resolver el sistema de ecuaciones estacionario (ajustando las constantes como nos convenga)

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{F}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Equipado con las condiciones de contorno que adecuadas.

Hemos llegado a nuestra meta, el sistema de ecuaciones de Stokes. Aunque por norma general este sistema es interesante por ser más sencillo de resolver que (1.4), de hecho resulta que sí que modela algunos ejemplos concretos como pueden ser microorganismos nadando, un flujo de lava, algunos polímeros viscosos o el comportamiento de la sangre en los capilares.

Capítulo 2

El método de los elementos finitos

Antes de nada hay que decir que con el objetivo de simplificar todo un poco y aliviar la carga de teoría, en adelante trabajaremos con problemas de ecuaciones en derivadas parciales con condiciones de contorno de tipo Dirichlet. Todo lo que está por desarrollarse a partir de ahora admite una extensión relativamente sencilla a condiciones de contorno de tipo Neumann tan sólo con un poco de trabajo y notación extra. El libro [B] es una excelente guía a este efecto.

2.1. La necesidad de nuevas soluciones

Dado un problema de ecuaciones en derivadas parciales, se tiene por norma general la formulación fuerte del mismo. Se conoce como *solución clásica* a aquella que es continua en la frontera de un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y con derivadas continuas del orden de la ecuación en el interior del abierto, por ejemplo:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Se trata de una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, por tanto a la solución clásica u de dicha ecuación se le exigirá $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, se puede ver que existen problemas físicos reales descritos por esta ecuación que admiten soluciones más relajadas.

Si consideramos el comportamiento de una cuerda elástica de extremos fijos al ponerle pesos, el fenómeno físico viene descrito por el siguiente problema de valor en el contorno:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{en } (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden y una solución clásica tendrá que ser C^2 en $(0, 1)$ y continua en $[0, 1]$. Si probamos a poner dos pesos en los puntos 0,4 y 0,6 la intuición física (y la realidad) nos da la solución mostrada en la Figura (2.1).

Si esta vez ponemos un único peso en el punto intermedio, la deformación de nuestra cuerda será algo como lo representado en la Figura (2.2).

Sin embargo, claramente, estas soluciones no son C^2 en el interior. Nuestros motivos para buscar nuevas soluciones están ahora más que justificados, y por tanto debemos plantear la formulación débil (variacional) del problema.

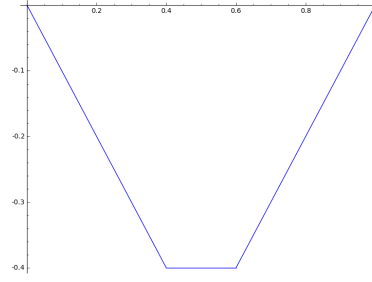


Figura 2.1: Deformación de una cuerda elástica por dos masas puntuales.

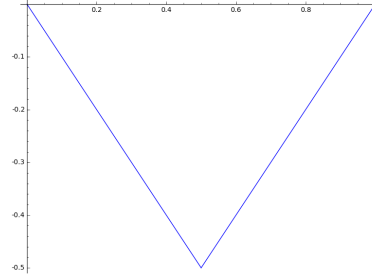


Figura 2.2: Deformación de una cuerda elástica por una única masa puntual.

2.2. La derivada débil

Definición 2.2.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, definimos $D(\Omega)$ como el espacio de funciones infinito diferenciables de Ω en \mathbb{R} con soporte compacto, i.e.

$$D(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{supp}(f) \text{ es compacto}\}$$

donde $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$.

Definición 2.2.2. Al espacio dual de $D(\Omega)$ se le llama espacio de distribuciones $D(\Omega)^*$.

Una vez introducido esto, podemos hablar de derivación en sentido débil.

Definición 2.2.3. Sea $T \in D(\Omega)^*$ y $f \in D(\Omega)$, escribimos

$$T(f) = \langle T, f \rangle,$$

y definimos la derivada de T respecto de la variable x_i como

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, f \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Iterando esta definición, sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multiíndice¹. Podemos definir la derivada de orden α de T

$$\langle D^\alpha(T), f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha f \rangle.$$

Donde se entiende que si $f \in D(\Omega)$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f \text{ con derivadas en el sentido habitual.}$$

¹Cada componente del vector indica el orden de derivación respecto de la variable correspondiente, además

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

Notemos que la derivada débil está bien definida dado que f es infinito derivable y las derivadas parciales conmutan.

Está claro que $D(\Omega) \subset L_2(\Omega)$, puesto que si aplicamos las propiedades del soporte compacto:

$$\int_{\Omega} |f|^2 \, d\Omega \leq M_f \|f\|_{\infty} < \infty \quad \forall f \in D(\Omega).$$

Existe una relación interesante entre $T \in D(\Omega)^*$ y $L_2(\Omega)$, dado que si $g \in D(\Omega)$ y $f \in L_2(\Omega)$, se tiene que

$$\int_{\Omega} |fg| \, d\Omega \leq \|f\|_2 \|g\|_2 < \infty$$

por la desigualdad de Hölder y es lineal por la linealidad de la integral, en otras palabras, la expresión anterior define un funcional lineal en $D(\Omega)$ y $L_2(\Omega)$ puede observarse como un subespacio de $D(\Omega)^*$ como sigue. Para todo $f \in L_2(\Omega)$ podemos encontrar una distribución T_f tal que

$$\langle T_f, g \rangle = \int_{\Omega} fg \, d\Omega \quad \forall g \in D(\Omega).$$

Además la aplicación que lleva la función f al funcional correspondiente T_f es inyectiva. Esto es una consecuencia del siguiente resultado de análisis funcional:

Teorema 2.2.4. *Sea Ω abierto en \mathbb{R}^n , entonces $D(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$ $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Se dejará sin demostración, ésta se halla en la página 109 de [Bre]. \square

Entonces si tenemos $f, f^* \in L_2(\Omega)$ tales que $\int_{\Omega} (f - f^*)g \, d\Omega = 0$ para todo $g \in D(\Omega)$, se sigue $f - f^* \in D(\Omega)^{\perp}$. Considerando L_2 con el producto interno $(f, g)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} fg \, d\Omega$. $(L_2, (\bullet, \bullet)_{L_2(\Omega)})$ es un espacio de Hilbert y se puede descomponer en un subespacio cerrado y su complemento ortogonal:

$$L_2(\Omega) = \overline{D(\Omega)} + D(\Omega)^{\perp} = \overline{D(\Omega)}.$$

Por tanto $D(\Omega)^{\perp} = 0$ y se tiene que efectivamente $f = f^*$. Ahora podemos entonces hablar de derivadas débiles para funciones en el espacio $L_2(\Omega)$. Por abuso de notación escribimos también $D^{\alpha}f$ para la derivada débil de orden $\alpha \in \mathbb{R}^n$ de $f \in L_2(\Omega)$, es decir, la función tal que

$$\langle f, D^{\alpha}g \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle D^{\alpha}f, g \rangle \quad \text{para todo } g \in D(\Omega).$$

Donde $D^{\alpha}g$ está tomada en el sentido habitual.

Definición 2.2.5. *Se llama espacios de Sobolev de orden k a los espacios de funciones $L_2(\Omega)$ tales que sus derivadas en sentido débil de hasta orden k se hallan también en $L_2(\Omega)$:*

$$H^k(\Omega) = \{f \in L_2(\Omega) : D^{\alpha}f \in L_2(\Omega) \text{ para todo } \alpha : |\alpha| \leq k\}.$$

De la definición se sigue inmediatamente que $H^{k+1}(\Omega) \subset H^k(\Omega)$.

Podemos generalizar estos espacios para $L_p(\Omega)$ con $p \neq 2$ pero no será necesario para los propósitos de este trabajo.

Observación 2.2.6. *Hemos observado ya que $D(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Por otro lado las funciones en $D(\Omega)$ son infinito diferenciables en el sentido habitual, en particular las derivadas habituales cumplen la condición de las derivadas en el sentido débil y pertenecen a $D(\Omega)$, por tanto*

$$D(\Omega) \subset H^1(\Omega).$$

Visto esto la siguiente definición tiene sentido.

Definición 2.2.7. ² *Definimos la clausura de $D(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$*

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)} = \{f \in H^1(\Omega) : f = 0 \text{ en } \Gamma\}.$$

²En el caso unidimensional podemos extender f por continuidad y definir así el valor en la frontera. Si f es una función vectorial hay que considerar la condición $f|_{\Gamma} = 0$ en el sentido de trazas como se presenta en la página 325 de [Bre], no entraremos en más detalle.

2.3. La formulación débil del problema

Sea el problema unidimensional con el que hemos empezado este mismo capítulo:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Lo pasaremos a formulación variacional. Para ello, multiplicamos la primera ecuación por una función test $v \in V$, espacio de funciones test que aun no vamos a especificar, e integramos la expresión sobre Ω . Como resultado obtenemos:

$$-\int_0^1 u'' v \, dx = \int_0^1 f v \, dx \quad (2.4)$$

si integramos el término izquierdo por partes

$$-\int_0^1 u'' v \, dx = -[u' v]_0^1 + \int_0^1 u' v' \, dx$$

considerando funciones test tales que $v(0) = v(1) = 0$, la expresión que nos queda para resolver es

$$\int_0^1 u' v' \, dx = \int_0^1 f v \, dx. \quad (2.5)$$

Para toda función test que valga 0 en los extremos, seguimos con la necesidad de definir cuales van a ser nuestros espacios de funciones test y soluciones. Si impusiésemos la condición de que la solución fuese C^1 estaríamos siendo muy exigentes puesto que en los ejemplos físicos vistos las derivadas primeras no son continuas. Aquí es donde emplearemos los espacios de Sobolev, por Hölder el término de la izquierda en (2.5) está bien definido para u', v' funciones L_2 . Si u, v, f son L_2 el término de la derecha estará también bien definido. En resumen, la ecuación (2.5) tiene sentido para $u, v \in H_0^1(0, 1)$.

Observación 2.3.1. *En particular las soluciones clásicas son soluciones en este nuevo sentido, hemos ampliado el espacio de soluciones y las gráficas (2.1) y (2.2) satisfacen sin problema las nuevas condiciones.*

Para dimensión mayor que uno, podemos plantear la fórmula de Green, ésta nos da una versión de la integración por partes en espacios de mayor dimensión.

Teorema 2.3.2. *Sean $u, v \in H^1(\Omega)$, entonces se tiene:*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, d\Omega = \int_{\Gamma} u v n_i \, ds - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\Omega, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde n_i es la i -ésima componente del vector normal exterior unitario en Γ . Se trata de una conclusión sencilla del teorema de la divergencia de Gauss.

Aplicando esto por ejemplo a la ecuación de Poisson homogénea en dimensión n llegamos a:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \\ u = 0, \text{ en } \Gamma, \\ -\int_{\Omega} v \Delta u \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \\ u = 0, \text{ en } \Gamma, \\ -\int_{\Omega} v \Delta u \, d\Omega = -\int_{\Gamma} v \nabla u \cdot n \, ds + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega. \end{cases}$$

Obtenemos así la formulación débil del problema:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que:} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.6)$$

En el caso de que u sea una función vectorial y las componentes de este vector sean independientes unas de otras, entonces resolver el problema es tan sencillo como hacerlo componente a componente. Hay que remarcar que esto no es algo que sea siempre posible.

2.4. Existencia y unicidad de solución

Definición 2.4.1. Sea una forma bilineal $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ con V un espacio de Hilbert y $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal, entonces se dice:

1. $a(\bullet, \bullet)$ es coerciva o V -elíptica cuando $\exists \alpha > 0$ tal que $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \, \forall v \in V$.
2. $a(\bullet, \bullet)$ es continua cuando $\exists M_a > 0$ tal que $a(u, v) \leq M_a \|u\|_V \|v\|_V \, \forall u, v \in V$.
3. $l(\bullet)$ es continua cuando $\exists K > 0$ tal que $l(v) \leq K \|v\|_V \, \forall v \in V$. A estas funciones nos referimos como funcionales lineales de V a lo largo del trabajo.

Lema 2.4.2. Sea V un espacio de Hilbert, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal simétrica, coerciva y continua y $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ funcional lineal, entonces son equivalentes:

1. $u \in V$ es solución de:

$$a(u, v) = l(v) \text{ para todo } v \in V.$$

2. $u \in V$ minimiza en V la expresión $\frac{1}{2}a(v, v) - l(v)$.

Demostración. Sea $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = l(v) \text{ para todo } v \in V.$$

Entonces, para todo $v \in V$

$$\frac{1}{2}a(u+tv, u+tv) - l(u+tv) - \left(\frac{1}{2}a(u, u) - l(u) \right) = \frac{1}{2}t^2 a(v, v) > 0 \text{ si } v, t \text{ son distintas de } 0.$$

Y por tanto u minimiza la expresión. Veamos el recíproco, sea $u \in V$ minimizando $\frac{1}{2}a(v, v) - l(v)$, entonces la función $F_v(t) = \frac{1}{2}a(u+tv, u+tv) - l(u+tv)$ tiene un mínimo en 0 para todo $v \in V$, necesariamente su derivada en el origen será 0 por ser éste un punto crítico.

$$\frac{F_v(t+h) - F_v(t)}{h} = \frac{1}{2}ha(v, v) + a(u+tv, v) + l(v).$$

Tomando $h \rightarrow 0$ y $t = 0$ nos queda $F_v'(0) = a(u, v) - l(v) = 0$ para todo $v \in V$

□

Teorema 2.4.3. Sea V un espacio de Hilbert real con producto interno asociado $\langle \bullet, \bullet \rangle_V$, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal coerciva y continua y $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal continua. Entonces el problema

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in V \text{ tal que:} \\ a(u, v) = l(v) \, \forall v \in V, \end{cases} \quad (2.7)$$

tiene solución única. Este resultado se conoce como teorema de Lax-Milgram. Un problema de este tipo se llama problema elíptico.

Demostración. Definimos los operadores

$$\begin{aligned} A_u : V &\rightarrow \mathbb{R} & A : V &\rightarrow V^* \\ v &\mapsto a(u, v), & u &\mapsto a(u, \bullet). \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de representación de Riesz se tiene que existen $\mathbf{x}_u, \mathbf{y} \in V$ tales que $A_u(v) = \langle \mathbf{x}_u, v \rangle_V$ y $l(v) = \langle \mathbf{y}, v \rangle_V$ para todo elemento $v \in V$. Además $\|A_u\|_V^* = \|\mathbf{x}_u\|_V$ y $\|l\|_V^* = \|\mathbf{y}\|_V$.

Podemos entonces considerar el operador que lleva cada elemento $u \in V$ a \mathbf{x}_u

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : V &\rightarrow V \\ u &\mapsto \mathbf{x}_u. \end{aligned}$$

De esta forma (2.7) admite la formulación equivalente:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in V \text{ tal que:} \\ \mathbf{x}(u) = \mathbf{y}. \end{cases} \quad (2.8)$$

La existencia y unicidad de solución es equivalente entonces a que $\mathbf{x} \in L(V, V)$ sea biyectivo³. Vemos la inyectividad, sea $v \in V$ tal que $\mathbf{x}(v) = 0$ entonces se tiene que:

$$\alpha \|v\|_V^2 \leq a(v, v) = A_v(v) = 0.$$

Por tanto por la coercividad de $a(\bullet, \bullet)$ debe ser $v = 0$ y el operador es inyectivo. Para ver que \mathbf{x} es suprayectiva veremos primero que $\mathbf{x}(V)$ es cerrado. Sea la sucesión $\{\mathbf{x}_{v_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a $\mathbf{y} \in V$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces:

$$\|\mathbf{x}_{v_m} - \mathbf{x}_{v_n}\|_V = \|\mathbf{x}(v_m) - \mathbf{x}(v_n)\|_{V^*} = \|a(v_m - v_n, \bullet)\|_{V^*} \geq \frac{a(v_m - v_n, v_m - v_n)}{\|v_m - v_n\|_V} \geq \alpha \|v_m - v_n\|_V.$$

Esto quiere decir que $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio de Hilbert. Entonces existe $v \in V$ límite de dicha sucesión cuando n tiende a infinito. $\mathbf{x}(v) \in \mathbf{x}(V)$ y se tiene por la continuidad de \mathbf{x} que $\mathbf{x}(v) = \mathbf{y}$, por tanto $\mathbf{x}(V)$ es cerrado. Nos falta ver que $\mathbf{x}(V)^\perp = 0$ y habremos completado el teorema.

Tomamos $v_0 \in \mathbf{x}(V)^\perp$, entonces:

$$\alpha \|v_0\|^2 \leq a(v_0, v_0) = (\mathbf{x}(v_0), v_0)_V = 0.$$

Y debe ser $v_0 = 0$. Como $\mathbf{x}(V)$ es cerrado, podemos hacer la descomposición

$$V = \mathbf{x}(V) \oplus \mathbf{x}(V)^\perp = \mathbf{x}(V).$$

Gracias a esto tenemos que \mathbf{x} es biyectiva y por tanto el problema tendrá solución y será única. \square

Observación 2.4.4. Se puede demostrar que para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definiendo el producto escalar en $H^k(\Omega)$

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} (D^\alpha u)(D^\alpha v) d\Omega,$$

el par $(H^k(\Omega), (\bullet, \bullet)_{H^k(\Omega)})$ es un espacio de Hilbert.

En particular para $k = 1$ como $H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$ se tiene que $H_0^1(\Omega)$ es cerrado y por tanto es Hilbert con el producto escalar inducido. Tomando entonces:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega, \quad (2.9)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f v d\Omega. \quad (2.10)$$

Vemos que el teorema de Lax-Milgram se puede aplicar al problema (2.6) y deducimos que tendrá solución y será única.

³ $\|\mathbf{x}(u)\|_V = \|\mathbf{x}_u\|_V = \|A_u\|_{V^*} \leq M_a \|u\|_V$ por tanto \mathbf{x} es continua.

2.5. La discretización del problema variacional

Una vez hemos conseguido plantear nuestro problema variacional queremos resolverlo mediante métodos numéricos. Para ello si el problema está planteado en un espacio de Hilbert V , nos restringiremos a un subespacio de dimensión finita $V_h \subset V$ donde h es un parámetro real, así nuestro problema (2.7) pasa a ser:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u_h \in V_h \text{ tal que:} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (2.11)$$

Al problema (2.11) se le llama normalmente problema de Galerkin. Nos interesa saber si las soluciones u_h en esta familia $\{V_h\}_h$ de espacios de Hilbert con dimensión $\dim V_h = N_h < \infty$ convergen realmente a la solución del problema inicial planteado (2.7).

Observación 2.5.1. *La familia de problemas (2.11) cumple las condiciones de Lax-Milgram y por tanto tiene solución única para todo h .*

Además de eso, si sustituimos u , solución de (2.7) en (2.11), se tiene que

$$a(u, v_h) - l(v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h, \quad \forall h. \quad (2.12)$$

La propiedad (2.12) se llama consistencia fuerte, el teorema de Lax-Richtmyer afirma que para métodos consistentes estabilidad y convergencia son características equivalentes, así que demostrando la convergencia para la familia $\{V_h\}_h$ demostramos también la estabilidad.

Para ver la convergencia del método que hemos planteado empleamos el lema de Céa.

Lema 2.5.2. *Bajo las hipótesis de (2.4.3), sean u la solución del problema (2.7) y u_h las soluciones de la familia de problemas planteados en (2.11), entonces se tiene:*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (2.13)$$

Demostración. Primero de todo notamos que

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u, v_h - u_h) - a(u_h, v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + l(v_h - u_h) - l(v_h - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \end{aligned}$$

Aplicando esto y la coercividad:

$$\alpha \|u - u_h\|^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq M_a \|u - u_h\| \|u - v_h\|$$

Y tenemos el resultado. □

Observación 2.5.3. *Esta cota se alcanza para un único elemento en V_h (debido a propiedades de los subconjuntos convexos cerrados en espacios Hilbert). Si además la forma $a(\bullet, \bullet)$ es simétrica ⁴, una consecuencia directa de (2.4.2) es que este elemento es la proyección ortogonal de u en V_h ; si queremos minimizar el error de nuestro método debemos aspirar a encontrarla.*

Para que nuestro método de elementos finitos converja necesitamos que la familia de espacios de dimensión finita converja al espacio total en el siguiente sentido:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V = 0 \quad \text{para todo } v \in V.$$

⁴Éste es un caso habitual, como sucede en (2.6).

Bajo qué condiciones esto se cumple se ve más adelante en este tema. Concretamente en el teorema (2.6.3) que, esencialmente, nos da la convergencia con unas condiciones bastante relajadas⁵ sobre la solución.

Por ser $\{V_h\}_h$ una familia de espacios de Hilbert de dimensión finita, podemos encontrar una base $\{\phi_i, i = 1, \dots, N_h\}$ para cada uno de ellos, así la solución de los problemas de Galerkin pasa a ser un problema del álgebra lineal $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_h^i \phi_i$, llamando:

$$a_{ij} = a(\phi_j, \phi_i), \quad (2.14)$$

$$l_i = l(\phi_i). \quad (2.15)$$

Con $A = (a_{ij})$, $\mathbf{u} = (u_h^i)$ y $L = (l_i)$ se obtiene el sistema:

$$A\mathbf{u} = L. \quad (2.16)$$

Así nuestro problema ha pasado a ser resolver un sistema lineal, a la matriz A se la llama matriz de rigidez del problema.

2.6. Los elementos finitos

El origen del nombre de este método numérico parte del concepto de elemento que vamos a definir. A la hora de encontrar las familias de subespacios de dimensión finita trabajaremos con descomposiciones finitas de nuestro dominio. Este puede llegar a ser un tema de gran complejidad en geometría, así que nos adaptaremos solamente a las necesidades finales de este trabajo e introduciremos casos sencillos en una y dos dimensiones.

Definición 2.6.1. Sea $\Omega = (a, b)$, sea la partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b$. A los intervalos $K_j = [t_{j-1}, t_j]$ para $j = 1, \dots, N$ se les llama elementos. Tomando $h = \max_{j=1, \dots, N} (t_j - t_{j-1})$ llamamos τ_h a dicha partición.

Una vez definidos los elementos en el caso de una dimensión podemos introducir espacios de funciones sobre ellos. Sea $P_r = \{a_0 + a_1x + \dots + a_rx^r : a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, r\}$, podemos considerar por ejemplo:

1. Las funciones P_1 sobre los elementos:

$$V_h = \{v \in C^0[a, b] : v|_{K_i} \in P_1, i = 1, \dots, N\}.$$

Una base de esta familia de funciones se ve en la Figura (2.3):

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= \begin{cases} \frac{t_1 - x}{t_1 - t_0} & \text{si } x \in K_1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \\ \phi_i(x) &= \begin{cases} \frac{x - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} & \text{si } x \in K_i \\ \frac{t_{i+1} - x}{t_{i+1} - t_i} & \text{si } x \in K_{i+1} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad : i = 1, \dots, N-1 \\ \phi_N(x) &= \begin{cases} \frac{x - t_{N-1}}{t_N - t_{N-1}} & \text{si } x \in K_N \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \end{aligned}$$

Se trata de un espacio vectorial de dimensión $N+1$ (sin imponer condiciones en los extremos), además está claro que $\frac{1}{h} \leq N$, por tanto la dimensión aumenta a medida que reducimos h .

⁵Realmente, para Ω con contorno suficientemente suave se tiene que $u \in H^2(\Omega)$, ver [Bre] página 298

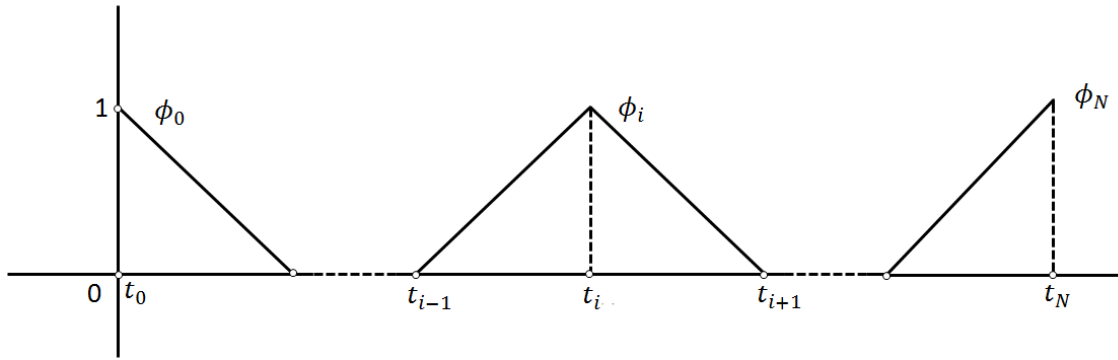


Figura 2.3: Funciones nodales para los elementos P_1 en un espacio de dimensión 1.

2. Otro ejemplo más general son las funciones P_r sobre los elementos

$$V_h = \{v \in C^0[a, b] : v|_{K_i} \in P_r, i = 1, \dots, N\}.$$

En general estos son espacios de dimensión $rN + 1$.

Teniendo esto en cuenta podríamos resolver ya (2.2). La formulación variacional es:

$$\begin{cases} \text{Sea } V_h^0 = \{v_h \in V_h : v_h(0) = v_h(1) = 0\}, \text{ encontrar } u_h \in V_h^0 \text{ tal que:} \\ \int_0^1 u'_h v'_h \, dx = \int_0^1 f v_h \, dx \text{ para todo } v_h \in V_h^0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Consideraremos por simplicidad el caso de elementos finitos P_1 sobre una partición en N segmentos de igual longitud h , la dimensión de V_h^0 es $N - 1$. Por tanto nuestra matriz de rigidez viene determinada por:

$$a_{i,j} = \int_0^1 \phi'_j(x) \phi'_i(x) \, dx = 0 \text{ si } |i - j| > 1, i, j = 1, \dots, N - 1 \quad (2.18)$$

$$a_{i,i} = \int_0^1 (\phi'_i)^2(x) \, dx = 2, i = 1, \dots, N - 1 \quad (2.19)$$

$$a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_{i+1}(x) \, dx = -1, i = 1, \dots, N - 1 \quad (2.20)$$

$$l_i = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) \, dx, i = 1, \dots, N - 1 \quad (2.21)$$

Y sabemos que los coeficientes de las funciones nodales en los extremos serán 0.

Queda una matriz tridiagonal, diagonal dominante (no en el sentido estricto) con todas las ventajas computacionales que esto implica.

Para ver la convergencia del método quedaría demostrar que los espacios de dimensión finita sobre los que trabajamos convergen en el sentido de que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V = 0 \text{ para todo } v \in V.$$

Esto se cumplirá, para ello nos basta con aplicar (2.6.3) puesto que se cumplen las hipótesis. Además en este caso el método convergerá linealmente con h en la norma H^1 .

A continuación extendemos el método de los elementos finitos de forma natural a dos dimensiones. Podemos definir también elementos en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mediante triangulaciones y divisiones del dominio en cuatriláteros y más formas poligonales. El caso de las triangulaciones es especial puesto que es el tipo de división que utilizaremos nosotros y además es uno muy común y estudiado. Para facilitar las cosas consideraremos únicamente dominios poligonales.

Definición 2.6.2. Sea Ω una porción poligonal cerrada de plano, llamamos a $\tau = \{K_i\}_{i=1}^N$ triangulación finita de Ω cuando:

1. K_i es un triángulo euclídeo $i = 1, \dots, N$
2. $\cup_{i=1}^N K_i = \Omega$
3. $K_i \cap K_j$, $i \neq j$ es vacío, un lado completo o un vértice.

En elementos finitos cada triángulo K_i se llama elemento. En el caso de las triangulaciones la magnitud h indicando el tamaño del espacio vectorial sobre el que trabajamos se toma como el diámetro máximo sobre todos los triángulos.

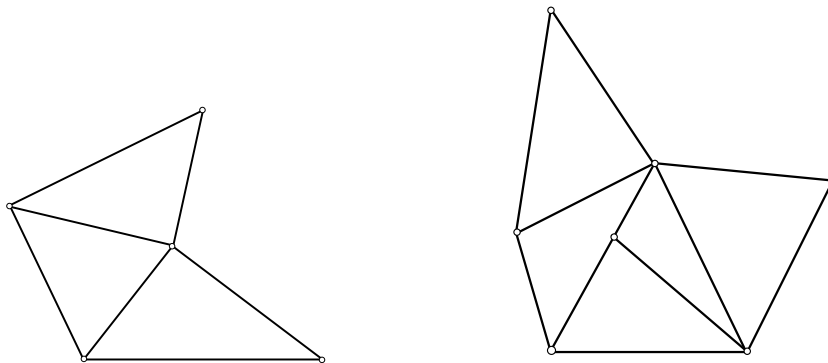


Figura 2.4: Ejemplos de triangulaciones aceptable (izquierda) y no admisible (derecha).

Podemos definir como antes espacios de funciones sobre estos nuevos elementos. Más adelante usaremos en concreto funciones de tipo P_1 sobre cada triángulo. Una base de esta familia de funciones serán las funciones nodales. Se tratará de interpoladores lineales con valor 1 en el nodo al que están asociados y 0 en los nodos vecinos. Entendemos que en una triangulación dos nodos (vértices de triángulos) son vecinos cuando existe un eje que los conecta. La dimensión del espacio de funciones P_1 sobre una triangulación será $|V|$ = Número de vértices de la triangulación. Si introducimos una condición de contorno de tipo Dirichlet, el espacio $P_{1,0} = \{v \in P_1 : v(i) = 0 \text{ para todo } i \text{ nodo Dirichlet}\}$ tiene dimensión $|V| - I$ con I = Número de nodos Dirichlet. En el caso de un problema en una dimensión el cálculo de la matriz de rigidez es relativamente sencillo, sin embargo, en dos dimensiones todo se vuelve más complejo. Para facilitar todo introducimos los conceptos de ensamblaje y elemento de referencia.

El elemento de referencia es un elemento que consideraremos como estándar, en el caso unidimensional bien puede ser el segmento $\hat{K} = [0, 1]$. Si estamos trabajando con una triangulación se suele tomar $\hat{K} = \{(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2 : \hat{x}, \hat{y} \geq 0 \text{ y } \hat{x} + \hat{y} \leq 1\}$. La idea es que el cálculo de integrales de las funciones nodales sobre este elemento es sencillo y el resultado estará relacionado con los elementos de nuestra triangulación por una transformación afín con una matriz B_K en la parte lineal. Así por ejemplo para el caso de la ecuación de Poisson (2.6) en dos dimensiones tenemos que calcular para el término de la izquierda

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i = \sum_K \int_K \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i.$$

Si consideramos elementos finitos P_1 , entonces las funciones nodales sobre el elemento de referencia son

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= 1 - \hat{x} - \hat{y}, \\ \hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}, \\ \hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{y}. \end{aligned}$$

Podemos entonces calcular la matriz de rigidez de este problema. Para ello utilizaremos la siguiente matriz auxiliar:

$$M = (m_{ij}) = \int_{\hat{K}} \nabla \hat{\phi}_j \cdot \nabla \hat{\phi}_i \text{ para } i, j = 1, 2, 3.$$

Se tratará de una matriz 3×3 conteniendo los valores de la matriz de rigidez sobre el elemento de referencia. Podemos utilizar esta matriz para calcular la matriz de rigidez del sistema completo. Sean \hat{x}, \hat{y} las coordenadas en el elemento de referencia y $(x, y) = F(\hat{x}, \hat{y})$ la transformación afín que lleva el elemento de referencia a un elemento genérico. Dicha transformación afín admite la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F_K(\hat{x}, \hat{y}) = a_K + B_K \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}.$$

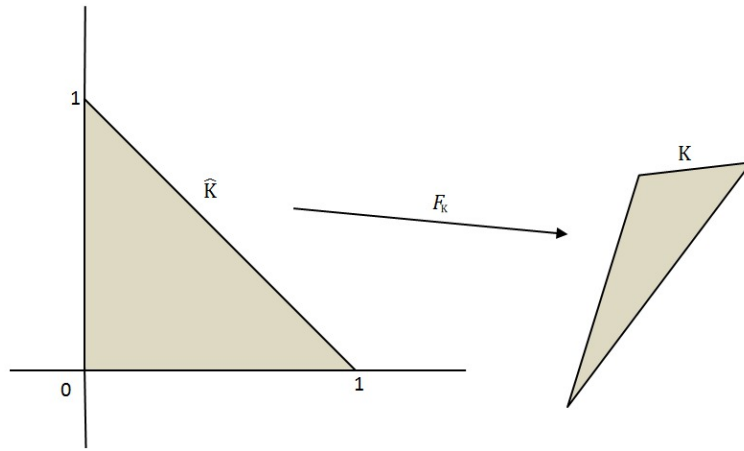


Figura 2.5: Transformación afín al elemento de referencia.

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i = \sum_K \int_K \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \\ &= \sum_K |\det B_K| \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial \phi_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x}, \frac{\partial \phi_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial \phi_i(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y} \right) \\ &= \sum_K |\det B_K| \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial \hat{\phi}_\alpha}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial \hat{\phi}_\alpha}{\partial \hat{y}} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\phi}_\beta}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial \hat{\phi}_\beta}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix} \\ &= \sum_K |\det B_K| \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial \hat{\phi}_\alpha}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial \hat{\phi}_\alpha}{\partial \hat{y}} \right) B_K^{-1} (B_K^{-1})^t \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\phi}_\beta}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial \hat{\phi}_\beta}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix} \\ &= \sum_K |\det B_K| \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial \hat{\phi}_\alpha}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial \hat{\phi}_\alpha}{\partial \hat{y}} \right) C_K \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\phi}_\beta}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial \hat{\phi}_\beta}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix} \\ &= \sum_K |\det B_K| \int_{\hat{K}} \left(C_K(1,1) \frac{\partial \hat{\phi}_\alpha}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\phi}_\beta}{\partial \hat{x}} + C_K(1,2) \frac{\partial \hat{\phi}_\alpha}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\phi}_\beta}{\partial \hat{y}} + C_K(2,1) \frac{\partial \hat{\phi}_\alpha}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{\phi}_\beta}{\partial \hat{x}} \right. \\ &\quad \left. + C_K(2,2) \frac{\partial \hat{\phi}_\alpha}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{\phi}_\beta}{\partial \hat{y}} \right). \end{aligned}$$

Construyendo las matrices

$$M^{xx} = (m_{ij}^{xx}) = \int_K \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial \hat{x}}, \quad M^{xy} = (m_{ij}^{xy}) = \int_K \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial \hat{y}}, \quad M^{yy} = (m_{ij}^{yy}) = \int_K \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial \hat{y}},$$

para $i, j = 1, 2, 3$ y teniendo en cuenta que $M^{xy} = (M^{yx})^T$ y C es simétrica la expresión superior queda:

$$a_{ij} = \sum_K |\det B_K| \left[C_{11} m_{\alpha\beta}^{xx} + C_{12} (m_{\alpha\beta}^{xy} + m_{\beta\alpha}^{xy}) + C_{22} m_{\alpha\beta}^{yy} \right].$$

Podemos aplicar por otro lado un procedimiento similar para el término de la derecha en la ecuación de (2.6), de este modo calculamos

$$b_i = \sum_K \int_K f \phi_i = \sum_K |\det B_K| \int_K \hat{f} \hat{\phi}_\alpha.$$

Donde $\hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) = f(F_K(\hat{x}, \hat{y}))$. Lo único que nos faltaría para acabar es introducir las condiciones de tipo Dirichlet en la frontera. Para ello, sea $i \in I$ nodo Dirichlet, sustituiremos a_{ij} por $\delta_{i,j}$, $j = 1, \dots, |V|$ y b_i por la condición de contorno en el nodo i que en este caso particular es 0.

Con esto se implementa fácilmente el método de los elementos finitos y ya tendríamos un algoritmo para en este caso resolver el problema (2.6) con elementos P_1 .

Para ver la convergencia aplicaríamos nuevamente el lema de Céa (2.5.2) seguido de (2.6.3). Además la velocidad de convergencia será lineal con h en la norma H^1 .

Se pueden definir elementos de muchos otros tipos y distintos espacios de funciones sobre ellos, sin embargo esto que hemos desarrollado servirá para los propósitos finales del trabajo. Con toda esta teoría que hemos venido estudiando hasta ahora hemos podido introducir las ideas fundamentales del método de elementos finitos y estamos ya en condiciones de resolver problemas elípticos de hasta dos dimensiones. Los casos de más dimensión aumentan la dificultad y complejidad pero se dejan intuir a través de las ideas introducidas. Sin embargo, nuestro objetivo es algo aún más complejo que esto. La ecuación de Stokes tiene por incógnitas dos funciones (velocidad del fluido y presión), esto empeora notoriamente la situación.

Teorema 2.6.3. *Sea el operador de interpolación $\Pi_h^r : V \rightarrow V_h$, donde V_h es el espacio de elementos finitos P_r sobre nuestra división regular⁶ de Ω τ_h . Entonces, si $r \geq 1$ y $m = 0, 1$ se tiene la acotación:*

$$|v - \Pi_h^r v|_{H^m(\Omega)} \leq Ch^{r+1-m} |v|_{H^{r+1}(\Omega)} \text{ para todo } v \in H^{r+1}(\Omega).$$

Donde $|\cdot|_{H^k}$ es la seminorma

$$|f|_{H^k} = \sqrt{\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} (D^\alpha f)^2 d\Omega},$$

equivalente en H_0^k a la norma habitual. Esto asegura la convergencia del método para la mayoría de las funciones que podamos imaginar. Además da una estimación de la velocidad de convergencia. Tendremos convergencia con orden h^{r+1-m} . Así pues cuanto más “grados de libertad” haya sobre el espacio de polinomios, mejor será nuestra convergencia.

Demostración. Puede verse en la página 93 de [Q] □

⁶No vamos a entrar en detalle respecto a lo que es un mallado regular, asumiremos que las divisiones del dominio que utilizamos son regulares. Para más información sobre este tema consultar la página 96 de [Q]

Capítulo 3

Elementos finitos en la ecuación de Stokes

3.1. La formulación débil del problema de Stokes

Planteamos el problema:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ en } \Gamma, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde esta vez Ω es un abierto de \mathbb{R}^n , \mathbf{u} representa la velocidad del fluido en un punto y p es la presión del fluido en un punto. Notemos que \mathbf{u} está escrito en negrita puesto que ahora la velocidad es una función vectorial. Resulta sencillo ver que a una solución clásica del problema se le exigirá $(\mathbf{u}, p) \in [C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})]^n \times C^1(\Omega)$. Por lo tanto sobran los motivos para querer hallar una formulación débil del problema. Para ello empezaremos trabajando con un problema con condiciones de contorno homogéneas:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma. \end{cases} \quad (3.2)$$

Consideraremos los espacios de funciones test

$$V = H_0^1(\Omega)^n, \quad (3.3)$$

$$M = \left\{ q \in L_2(\Omega) : \int_{\Omega} q = 0 \right\} = L_{2,0}(\Omega). \quad (3.4)$$

Aplicamos el procedimiento habitual a (3.1) multiplicando las correspondientes ecuaciones por funciones test $\mathbf{v} \in V$, $q \in M$ e integramos las dos ecuaciones.

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla p \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \, d\Omega, \quad (3.5)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = 0. \quad (3.6)$$

Aplicando la fórmula de Green obtenemos:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \Delta \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, ds = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega, \quad (3.7)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla p \, d\Omega = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) p \, ds = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega. \quad (3.8)$$

Donde \mathbf{n} es el vector normal unitario exterior y

$$\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} = \sum_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}.$$

Una de las primeras cosas que notamos es que si (\mathbf{u}, \bar{p}) es una solución del problema, entonces $(\mathbf{u}, \bar{p} + C)$ es también solución $\forall C \in \mathbb{R}$. Para evitar este pequeño contratiempo normalizaremos p con $\int_{\Omega} p \, d\Omega = 0$.

Observación 3.1.1. Además, para que el problema esté bien planteado, de la ecuación de incompresibilidad (3.6) se deriva que para que la condición en la frontera Dirichlet sea compatible debe cumplirse:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} \, ds = 0.$$

Esto quiere decir que se preserva la cantidad de fluido dentro de la región estudiada. El balance entre fluido que entra y sale de la región debe ser nulo.

3.2. Existencia y unicidad de solución del problema variacional

El problema variacional de Stokes tiene la forma:

$$\begin{cases} \text{Hallar } (\mathbf{u}, p) \in V \times M \text{ tales que:} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L_2(\Omega)} = l(\mathbf{v}), \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, \end{cases} \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in V \text{ y } q \in M. \quad (3.9)$$

Un problema del tipo de (3.9) se llama problema de punto silla. Para esta familia de problemas se tiene el siguiente resultado:

Lema 3.2.1. Sea el problema (3.9) con $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal simétrica, coerciva y continua con V un espacio de Hilbert, $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua y $b : V \times M \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal y continua. Sea $F(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v})$, entonces son equivalentes:

1. El problema del mínimo

$$F(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in V} F(\mathbf{v}) \text{ bajo la restricción } b(\mathbf{v}, q) = 0 \text{ para todo } q \in M.$$

2. \mathbf{u} es solución de (3.9).

Demostración. Tomamos $L(\mathbf{v}, q) = F(\mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q)$. Solucionar el problema de minimización planteado es lo mismo que calcular la solución de

$$\min_{\mathbf{v} \in V} \max_{q \in M} L(\mathbf{v}, q). \quad (3.10)$$

Si denotamos $L_{\mathbf{v},q}(t, h) = L(\mathbf{u} + t\mathbf{v}, p + hq)$ donde (\mathbf{u}, p) es una solución de (3.10). Entonces $(0, 0)$ es un punto crítico de $L_{\mathbf{v},q}(t, h)$ para todo $\mathbf{v} \in V$ y $q \in M$. Y por tanto las derivadas parciales de esta función respecto a cada componente en $(0, 0)$ son 0.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{\mathbf{v},q}}{\partial t}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L_{\mathbf{v},q}(t, 0) - L_{\mathbf{v},q}(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(a(\mathbf{u} + t\mathbf{v}, a(\mathbf{u} + t\mathbf{v}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{u})) - tl(\mathbf{v}) + tb(\mathbf{v}, p))}{t} \\ &= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial L_{\mathbf{v},q}}{\partial h}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L_{\mathbf{v},q}(0, h) - L_{\mathbf{v},q}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b(\mathbf{u}, p + hq) - b(\mathbf{u}, p)}{h} = b(\mathbf{u}, q) = 0. \quad (3.12)$$

Para todo $\mathbf{v} \in V$ y $q \in M$. Esto que hemos obtenido no son otra cosa que las ecuaciones que aparecen en el problema (3.9).

Para ver el recíproco, sea (\mathbf{u}, p) una solución de (3.9). Entonces si tenemos que

$$\mathbf{v} \in K = \{\mathbf{v} \in V : b(\mathbf{v}, q) = 0 \text{ para todo } q \in M\}.$$

se cumple que

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - F(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} (a(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{u})) + l(\mathbf{u}) - l(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0, \end{aligned}$$

y por tanto \mathbf{u} minimiza a F en K .

□

Viendo el problema desde este punto de vista podemos aprovecharnos de 2.4.3 para demostrar la existencia y unicidad de solución de (3.9). Cabe remarcar que probar este resultado para la función \mathbf{u} no tiene una gran dificultad, es en la otra variable de nuestro problema donde surgen los problemas como veremos ahora mismo.

Observación 3.2.2. $K = \{\mathbf{v} \in V : b(\mathbf{v}, q) = 0 \text{ para todo } q \in M\}$ es un espacio de Hilbert con el producto interior heredado (se ve que es cerrado, contiene a sus puntos de acumulación).

De esta observación se desprende por (2.4.3) que $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v}) = 0$ para todo $\mathbf{v} \in K$ tiene solución única en K . Queda entonces ver bajo que condiciones existe una única $p \in M$ tal que:

$$b(\mathbf{v}, p) = l(\mathbf{v}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ para todo } \mathbf{v} \in V. \quad (3.13)$$

En otras palabras, ver en qué casos existe una función $p \in M$ tal que el funcional lineal definido por $l(\bullet) - a(\mathbf{u}, \bullet) \in V^*$ puede ser expresado en la forma $b(\bullet, p) = l(\bullet) - a(\mathbf{u}, \bullet)$. La existencia y unicidad de soluciones de (3.9) queda entonces ligada a la de este nuevo problema. No se trata de un tema para nada evidente, pero se puede deducir la existencia de una condición que caracterizará los casos en que (3.13) tiene solución única.

Definición 3.2.3. Se dice que una forma bilineal $b : V \times M \rightarrow \mathbb{R}$ satisface la condición LBB cuando:

$$\begin{aligned} &\exists \beta > 0 \text{ tal que se cumple:} \\ &\inf_{q \in M} \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\| \|q\|} \geq \beta. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Se puede contemplar esta propiedad como una condición de compatibilidad necesaria entre los espacios de soluciones.

La condición LBB impone automáticamente unicidad para la solución (si existe) del problema (3.13). En efecto, sea $0 \neq p \in M$ tal que $b(\mathbf{v}, p) = 0$ para todo $\mathbf{v} \in V$, entonces si se cumple la condición LBB debe ser $p = 0$. De otra manera se tendría

$$\inf_{q \in M} \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\| \|q\|} \leq 0.$$

Por la linealidad en la segunda variable de la forma b si hay solución será única. Falta por ver entonces que, efectivamente, la solución existe. Sea $K^0 = \{f \in V^* \text{ tales que } f(\mathbf{v}) = 0 \text{ para todo } \mathbf{v} \in K\}$. Tenemos entonces el siguiente teorema.

Teorema 3.2.4. Definimos el operador

$$\begin{aligned} B : M &\rightarrow K^0 \subset V^* \\ p &\rightarrow b(\bullet, p). \end{aligned}$$

Entonces son equivalentes:

1. b cumple la condición LBB.

2. B es un isomorfismo lineal y se tiene $\|Bp\| \geq \beta\|p\|$ para todo $p \in M$.

Demostración. Asumiendo que b cumple la condición LBB, definimos el inverso de B en $B(M)$

$$B^{-1} : B(M) \rightarrow M.$$

El operador B es lineal y continuo por serlo también b , utilizando la condición LBB vemos que el inverso también es lineal continuo:

$$\|B(p)\| = \|b(\bullet, p)\| = \sup_{\mathbf{v} \neq 0} \frac{\|b(\mathbf{v}, p)\|}{\|\mathbf{v}\|} \geq \beta\|p\|.$$

Como B^{-1} es continuo y $M = B^{-1}(B(M))$ es cerrado, debe ser $B(M)$ cerrado. Definimos el operador dual de B como:

$$B^* : V^{**} \rightarrow M^* \\ f \rightarrow f(B(\bullet)).$$

Veremos ahora que $(\text{Ker } B^*)_0 = \{g \in V^* : fg = 0 \text{ para todo } f \in \text{Ker } B^*\} = K^0$.

Aplicando el teorema de representación de Riesz dos veces, sea $f \in \text{Ker } B^*$ y $g \in V^*$, entonces $fg = \langle \mathbf{u}_f, \mathbf{u}_g \rangle$ para dos elementos $\mathbf{u}_f, \mathbf{u}_g \in V$, se tiene que $f(B(p)) = \langle \mathbf{u}_f, \mathbf{u}_{B(p)} \rangle = 0$ para todo $p \in M$ y por tanto $\mathbf{u}_f \in K$. De hecho sea $\mathbf{u} \in K$, el funcional definido por $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_g \rangle$ pertenece claramente a $\text{Ker } B^*$.

Sea $g \in (\text{Ker } B^*)_0$, entonces $fg = \langle \mathbf{u}_f, \mathbf{u}_g \rangle = 0$ para todo $f \in (\text{Ker } B^*) = K$ por lo que se cumple $\mathbf{u}_g \in K^\perp$ y $g(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_g \rangle = 0$ si $\mathbf{v} \in K$, es decir, $g \in K^0$.

Sea $g \in V_0$, entonces $\mathbf{u}_g \in K^\perp$ y como $\mathbf{u}_f \in K$ para todo f de $(\text{Ker } B^*)_0$, está claro que $fg = \langle \mathbf{u}_f, \mathbf{u}_g \rangle = 0$.

Queda por demostrar ahora que $\overline{B(M)} = B(M) = (\text{Ker } B^*)_0 = K^0$. Para ello tenemos el siguiente resultado:

Lema 3.2.5. Sean E y F espacios de Banach y $B \in L(E, F)$ son equivalentes:

1. $B(E)$ es cerrado.
2. $B(E) = (\text{Ker } B^*)_0$.

Demostración. Sea $B(E)$ cerrado veremos que $\overline{B(E)} = (\text{Ker } B^*)_0$. Tomamos $f \in \text{Ker } B^*$, $g \in B(E)$ entonces $g = B(p)$ para algún $p \in E$ y $fg = 0$ por tanto $g \in (\text{Ker } B^*)_0$. Para ver $(\text{Ker } B^*)_0 \subset \overline{B(E)}$ aplicamos Hahn-Banach, en particular se deriva la existencia de un funcional lineal $l \in F^*$ tal que $l(x) = \inf_{y \in B(E)} \|x - y\|$. Se ve trivialmente que este funcional pertenece a $\text{Ker } B^*$, así que si $v \in (\text{Ker } B^*)_0$, necesariamente $l(v) = d(v, B(E)) = 0$ y así $v \in \overline{B(E)} = B(E)$.

El recíproco es trivial porque $(\text{Ker } B^*)_0$ es cerrado. Como M y V^* son espacios de Banach, se tiene el resultado. \square

Aplicando el resultado anterior tenemos una dirección del teorema, el recíproco se deriva automáticamente de la continuidad de B^{-1} . \square

Con todo esto podemos por fin enunciar un resultado de existencia y unicidad similar (y con motivos sobrados) al de Lax-Milgram en la sección anterior. En la demostración anterior hemos utilizado la condición LBB para demostrar la continuidad de un operador inverso, la propiedad LBB puede entonces ser observada como una especie de coercividad mixta.

Teorema 3.2.6. Sea el problema (3.9) con las condiciones:

1. La forma $a(\bullet, \bullet)$ es coerciva y continua.

2. $b(\bullet, \bullet)$ es continua y satisface la condición LBB.

Entonces existe una única solución (\mathbf{u}, p) para (3.9).

Tomando las formas:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega, \quad (3.15)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega. \quad (3.16)$$

Se puede escribir el problema de Stokes como un problema de punto silla. Así pues la existencia y unicidad de soluciones depende íntegramente de que se cumplan las condiciones de (3.2.6). La coercividad de $a(\bullet, \bullet)$ se comprueba de manera directa con la norma definida para $H^1(\Omega)$ en (2.4.4).

La demostración¹ de que se cumple la condición LBB es bastante más compleja y por desgracia no habrá tiempo de realizarla. Daremos por hecho que se cumple.

3.3. Problema de Galerkin para la ecuación de Stokes

Tomamos subespacios de dimensión finita, $V_h \times M_h$. Debemos buscar en particular familias de subespacios que cumplan (3.2.6). Si no es así veremos que el método será inestable y no convergerá.

Queremos ahora solucionar el problema:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } (\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times M_h \text{ tal que:} \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{L_2(\Omega)} \text{ para todo } \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0, \end{cases} \text{ para todo } q_h \in M_h. \quad (3.17)$$

La coercividad de $a(\bullet, \bullet)$ se cumple suponiendo que el problema variacional la cumpla en general. Si las familias de subespacios $\{V_h \times M_h\}_h$ cumplen la condición LBB se tiene existencia de una única solución.

Para ver la convergencia del método tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.3.1. *Sea el problema (3.17) con las condiciones:*

1. $a(\bullet, \bullet)$ es coerciva.
2. Se satisface la condición LBB.

Entonces se tiene que para (\mathbf{u}, p) solución del problema variacional de Stokes:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V + \|p - p_h\|_M \leq c \left[\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V + \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M \right]. \quad (3.18)$$

Se trata de una condición muy similar a la del lema de Céa.

Demostración. Observemos que siendo (\mathbf{u}, p) la solución de nuestro problema en $V \times M$ y (\mathbf{u}_h, p_h) la solución de la versión discreta del problema variacional, cualquier par de funciones $(\mathbf{u}_I, p_I) \in V_h \times M_h$ será solución de:

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_I, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h - p_I) = a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_I, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p - p_I), \\ b(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_I, q_h) = b(\mathbf{u} - \mathbf{u}_I, q_h). \end{cases} \text{ para todo } \mathbf{v}_h \in V_h, q_h \in M_h \quad (3.19)$$

¹Una idea de la misma se puede encontrar en las páginas 159-160 de [B].

Como trabajamos en un espacio de dimensión finita esto es equivalente a siendo $V_h = \text{span}\{\Phi_i\}$ con dimensión d_1 y $M_h = \text{span}\{\Psi_j\}$ con dimensión d_2 , si consideramos

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}) = \int_{\Omega} \nabla \Phi_j \cdot \nabla \Phi_i \, d\Omega \text{ matriz } d_1 \times d_1, \\ B &= (b_{ij}) = \int_{\Omega} \Phi_j \cdot \nabla \Psi_i \, d\Omega \text{ matriz } d_1 \times d_2, \\ F &= (F_i) = a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_I, \Phi_i) + b(\Phi_i, p - p_I) \text{ matriz } d_1 \times 1, \\ G &= (G_i) = b(\mathbf{u} - \mathbf{u}_I, \Psi_i) \text{ matriz } d_2 \times 1. \end{aligned}$$

Llamaremos f y g a los elementos de V^* y M^* con coordenadas en la base dual las componentes de F y G respectivamente.

Si denotamos como U y P a los vectores cuyas componentes son respectivamente las coordenadas de $u_h - u_I$ y $p_h - p_I$ respecto de las bases tomadas, entonces se cumple el sistema

$$\begin{cases} AU + BP = F, \\ B^T U = G. \end{cases} \quad (3.20)$$

Podemos escribir $U = U_f + U_g$ y $P = P_f + P_g$. Elegimos estos vectores de tal modo que

$$\begin{cases} AU_f + BP_f = F, \\ B^T U_f = 0, \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} AU_g + BP_g = 0, \\ B^T U_g = G. \end{cases} \quad (3.22)$$

Y llamamos $\mathbf{u}_f, \mathbf{u}_g, p_f$ y p_g a los elementos de V_h y M_h tales que sus coordenadas respecto de las bases dadas son U_f, U_g, P_f y P_g respectivamente. Si multiplicamos (3.21) por U_f^T , teniendo en cuenta que $U_f^T BP_f = P_f^T B^T U_f = 0$ y del hecho de que $a(\bullet, \bullet)$ es coerciva nos queda

$$\alpha \|\mathbf{u}_f\|_V^2 \leq \mathbf{u}_f^T A \mathbf{u}_f = U_f^T F \leq \|\mathbf{u}_f\|_V \|f\|_{V^*}.$$

Y por tanto

$$\alpha \|\mathbf{u}_f\|_V \leq \|f\|_{V^*}. \quad (3.23)$$

Sean M_a y M_b las constantes de continuidad de las formas a y b respectivamente, tenemos que

$$\|a(\bullet, \mathbf{u}_f)\|_{V^*} \leq \frac{M_a}{\alpha} \|f\|_{V^*} \quad (3.24)$$

La condición LBB restringida al espacio $V_h \times M_h$ puede escribirse como $\exists \beta > 0$ independiente de h tal que

$$\inf_{q_h \in M_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{\mathbf{v}_h^T B q}{\|\mathbf{v}_h\|_V \|q_h\|_M} \geq \beta.$$

Considerando la dualidad entre el espacio de matrices $d_1 \times 1$ y V_h^* , entonces está claro que

$$\|b(\bullet, q_h)\| = \sup_{0 \neq \mathbf{v}_h \in V_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_V} = \sup_{0 \neq \mathbf{v}_h \in V_h} \frac{\mathbf{v}_h^T B q}{\|\mathbf{v}_h\|_V} = \|B q\|_{V^*} \geq \beta \|q_h\|_M.$$

Es una definición equivalente de la condición LBB. Además $\alpha \|\mathbf{v}\|_V^2 \leq a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq M_a \|\mathbf{v}\|_V^2$, por tanto $\alpha \leq M_a$ y así obtenemos que

$$\|p_f\|_M \leq \frac{1}{\beta} \|b(\bullet, p_f)\|_{V^*} = \frac{1}{\beta} \|f - a(\bullet, \mathbf{u}_f)\|_{V^*} \leq \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{M_a}{\alpha}\right) \|f\|_{M^*} \leq \frac{2M_a}{\alpha\beta} \|f\|_{M^*}. \quad (3.25)$$

Ahora nos toca estudiar que sucede en la parte g del sistema, multiplicando los términos por \mathbf{u}_g^T se tiene la siguiente desigualdad

$$\alpha \|\mathbf{u}_g\|_V^2 \leq \mathbf{u}_g^T A \mathbf{u}_g = -\mathbf{u}_g^T B p_g = -p_g^T B^T \mathbf{u}_g = -p_g^T g \leq \|p_g\|_M \|g\|_{M^*}. \quad (3.26)$$

Por otro lado, aplicando la condición LBB como antes

$$\|p_g\|_M \leq \frac{1}{\beta} \|b(\bullet, p_g)\|_{V^*} = \frac{1}{\beta} \|a(\bullet, \mathbf{u}_g)\|_{V^*} \leq \frac{M_a}{\beta} \|\mathbf{u}_g\|_V. \quad (3.27)$$

Si combinamos (3.26) y (3.27), llegamos a

$$\|\mathbf{u}_g\|_V \leq \frac{M_a}{\alpha \beta} \|g\|_{M^*}. \quad (3.28)$$

Y una combinación de (3.27) y (3.28) nos da

$$\|p_g\|_M \leq \frac{M_a^2}{\alpha \beta^2} \|g\|_{M^*}. \quad (3.29)$$

Sumando por un lado (3.23) y (3.28) y por otro (3.25) y (3.29) y aplicando la desigualdad triangular se tiene el resultado:

$$\begin{cases} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_I\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V^*} + \frac{M_a}{\alpha \beta} \|g\|_{M^*}, \\ \|p_h - p_I\|_M \leq \frac{2M_a}{\alpha \beta} \|f\|_{V^*} + \frac{M_a^2}{\alpha \beta^2} \|g\|_{M^*}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Ahora bien, por la forma en que hemos construido f y g , podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \|f\|_{V^*} &\leq \|f\|_{V_h^*} \leq M_a \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|_V + M_b \|p - p_I\|_M, \\ \|g\|_{M^*} &\leq \|g\|_{M_h^*} \leq M_b \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|_V. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad triangular queda que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq C_1 \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V + C_2 \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M, \quad (3.31)$$

$$\|p - p_h\|_M \leq C_3 \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V + C_4 \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M. \quad (3.32)$$

Sumando las expresiones (3.31) y (3.32) y tomando c constante suficientemente grande tenemos nuestro resultado. □

Con toda esta teoría queda visto que todo método numérico que cumpla las condiciones de compatibilidad convergerá, nuevamente tendremos que encontrar las proyecciones ortogonales de la solución sobre los espacios de dimensión finita. Nuestro par de espacios de elementos finitos debe aspirar a crecer hacia el espacio total en el sentido de

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\| \rightarrow 0, \quad \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\| \rightarrow 0.$$

Sabiendo todo esto ya podemos permitirnos plantear el problema que vamos a resolver, se tratará de un rectángulo con condiciones de contorno de tipo Dirichlet. Así la velocidad en el contorno será cero en todos los lados de dicho cuadrado salvo en uno en el que será constante en una dirección tangente a la frontera.

3.4. Un problema práctico

Vamos a plantear el problema que queremos resolver:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } (\mathbf{u}, p) \in V \times M \text{ tal que:} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L_2(\Omega)}, \text{ for all } (\mathbf{v}, q) \in V_0 \times M. \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, \end{cases} \quad (3.33)$$

Donde se tiene:

$$\begin{aligned} \Omega &= (0, 1) \times (0, 1), \\ V &= \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) : \mathbf{v}(x, 1) = (1, 0), x \in [0, 1] \text{ y } \mathbf{v} = 0 \text{ en el resto de } \Gamma \}, \\ V_0 &= \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega) : \mathbf{v}|_{\Gamma} = 0 \}, \\ M &= \left\{ q \in L_2(\Omega) : \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Nos surge la duda de si este problema tendrá realmente solución y si en tal caso será única, por lo visto anteriormente tenemos claro que el caso Dirichlet homogéneo si que tiene solución única, tomamos así el par de problemas siguiente:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } (\mathbf{u}, p) \in V_0 \times M \text{ tal que:} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L_2(\Omega)}, \text{ para todo } (\mathbf{v}, q) \in V_0 \times M \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\begin{cases} \text{Encontrar } (\mathbf{u}, p) \in V \times M \text{ tal que:} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, \text{ para todo } (\mathbf{v}, q) \in V_0 \times M. \end{cases} \quad (3.35)$$

Sean $(\hat{\mathbf{u}}, p)$ solución de (3.34) que sabemos tiene solución única y $(\mathbf{u}_0, 0)$ solución de (3.35) que admite la solución

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, 1) &= (1, 0) \text{ si } x \in [0, 1], \\ \mathbf{u}(x, y) &= (0, 0) \text{ en el resto de } \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que $(\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_0, p)$ cumple:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= a(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + a(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L_2(\Omega)}, \\ b(\mathbf{u}, q) &= b(\hat{\mathbf{u}}, q) + b(\mathbf{u}_0, q) = 0, \\ \mathbf{u}(x, 1) &= \mathbf{u}_0 = (1, 0) \text{ si } x \in [0, 1], \\ \mathbf{u}(x, y) &= (0, 0) \text{ en el resto de } \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Por tanto \mathbf{u} es solución de (3.33) y se tiene además que es la única solución. En efecto, sea $\hat{\mathbf{u}}_0$ otra solución de (3.35), entonces $\mathbf{u}_0 - \hat{\mathbf{u}}_0$ es solución de:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } (\mathbf{u}, p) \in V_0 \times M \text{ tal que:} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, \text{ para todo } (\mathbf{v}, q) \in V_0 \times M. \end{cases} \quad (3.36)$$

Sabemos que $(0, p)$ es solución de este problema y además por Lax-Milgram es única, así que llegamos a lo que queríamos, $\mathbf{u}_0 = \hat{\mathbf{u}}_0$.

La convergencia de cualquier método será en este caso igual que en el homogéneo dado que la diferencia de soluciones del problema a resolver y del problema de Galerkin no homogéneo será una solución del problema (3.34), con todo esto podemos plantear el método de elementos finitos y ver la solución. Probaremos en primer lugar el método $P_1 - P_1$. Este método resultará ser inestable puesto que, como veremos en (3.4.1), no satisface la condición LBB. Sin embargo una pequeña ampliación de los subespacios de soluciones de las velocidades nos dará un buen método convergente llamado método del MINI-elemento.

Se trata de seleccionar las componentes de la velocidad en los espacios de funciones $P_1 \oplus B_3$ donde B_3 denota las funciones *burbuja* sobre cada uno de los elementos. En nuestro elemento triangular de funciones nodales en los vértices ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 la función burbuja es el producto de estas tres funciones $\Phi = \phi_1 \phi_2 \phi_3$, se trata de una función cúbica y considerando el elemento de referencia habitual para elementos triangulares tenemos la función burbuja de referencia

$$\hat{\Phi}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}\hat{y} - \hat{x}^2\hat{y} - \hat{x}\hat{y}^2.$$

Para una triangulación dada la dimensión del espacio B_3 tiene dimensión $|F| = \text{Número de caras (triángulos) de la triangulación}$. Los nodos para la velocidad y la presión sobre el elemento de referencia se reflejan en la figura (3.1). De esta forma tendremos 11 grados de libertad por elemento, en lugar de los 9 que tiene el método $P_1 - P_1$.

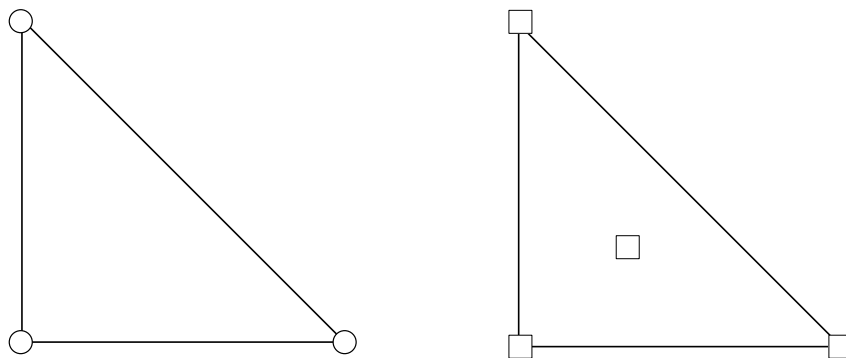


Figura 3.1: Nodos de presión (izquierda) y velocidades (derecha) sobre el elemento de referencia para el método MINI.

Proposición 3.4.1. *El método de elementos finitos $P_1 - P_1$ no cumple la condición LBB.*

Demostración. Consiste en ver que realmente existen elementos $p_h \in M_h$ tales que

$$\int_K p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, dK = 0 \text{ para todo } \mathbf{v}_h \in V_h, \quad (3.37)$$

para todo $K \in \tau_h$ triangulación con la que estamos trabajando.

En particular, en el algoritmo que utilizaremos para la simulación más adelante trabajaremos con una triangulación del tipo de la figura (3.2). Si $p_h = \sum_{i=1}^{|V|} p_i \phi_i$ y tomamos valores de $p_i = 1$ para i un nodo *cuadrado*, $p_i = -1$ para i un nodo *círculo* y $p_i = 0$ en los nodos *triángulo*, entonces se trata de un simple ejercicio de comprobación ver que, efectivamente, $0 \neq p_h \in M_h$ y cumple (3.37).

Estas familias de soluciones *falsas* carecen de significado físico. Son ellas las que perturban la solución *real* del problema y la hacen comportarse de forma errática, este hecho hace que se las llame *spurious modes* (modos falsos).

□

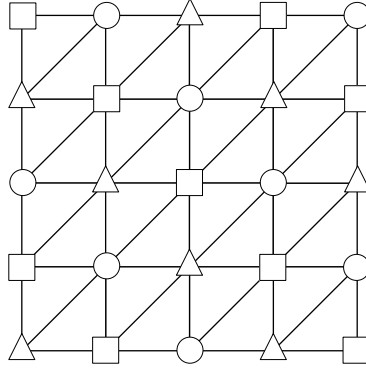


Figura 3.2: Spurious modes sobre una triangulación concreta.

Proposición 3.4.2. *El método del MINI-elemento cumple la condición LBB.*

Demostración. Para verlo utilizaremos una estrategia bastante habitual, se trata de hallar una proyección $\Pi_h : V \rightarrow V_h$ con las propiedades

$$b(\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}, q_h) = 0 \text{ para todo } \mathbf{v} \in V, q_h \in M_h, \quad (3.38)$$

$$\|\Pi_h \mathbf{v}\|_V \leq C \|\mathbf{v}\|_V \text{ para todo } \mathbf{v} \in V. \quad (3.39)$$

Si encontramos dicho operador y nuestros espacios totales V y M cumplen la condición LBB, automáticamente nuestros espacios de elementos finitos heredarán la propiedad, de (3.38), (3.39) y LBB en el espacio total se deriva

$$\beta \|q\|_Q \leq \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_V} \leq C \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{b(\Pi_h \mathbf{v}, q)}{\|\Pi_h \mathbf{v}\|_V}.$$

Ahora, restringiendo las normas en ambos lados se tendrá el resultado. En realidad nos bastará con definir Π_h como

$$\Pi_h \mathbf{v} = \Pi_1 \mathbf{v} + \Pi_2 (\mathbf{v} - \Pi_1 \mathbf{v}),$$

para $\Pi_i : V \rightarrow V_h$ tales que:

$$\begin{cases} \|\Pi_1 \mathbf{v}\|_V \leq c_1 \|\mathbf{v}\|_V \text{ para todo } \mathbf{v} \in V, \\ \|\Pi_2 (I - \Pi_1) \mathbf{v}\|_V \leq c_2 \|\mathbf{v}\|_V \text{ para todo } \mathbf{v} \in V, \\ b(\mathbf{v} - \Pi_2 \mathbf{v}, q_h) = 0 \text{ para todo } \mathbf{v} \in V, q_h \in M_h. \end{cases} \quad (3.40)$$

Es evidente que dicho operador cumplirá (3.38) y (3.39). La cuestión es entonces si podemos construir tal operador. En el caso del MINI-elemento lo definiremos como

1. Π_1 será el operador de Clément $\Pi_1 : V \rightarrow V_h$ tal que $\Pi_1 \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{|V|} \mathbf{v}(t_i) \Phi_i$, donde t_i son los nodos de la triangulación y Φ_i son funciones base de los polinomios de grado 1 sobre los triángulos. Se puede demostrar² que efectivamente si $V = H^1(\Omega)$, se cumple la condición $\|\Pi_1 \mathbf{v}\|_V \leq c_1 \|\mathbf{v}\|_V$ para todo $\mathbf{v} \in V$.
2. Π_2 será el operador $\Pi_2 : V \rightarrow (B_3)^2$ tal que se cumple $\int_{\Omega} (\Pi_2 \mathbf{v} - \mathbf{v}) \cdot q_h = 0$ para todo $q_h \in M_h$. La existencia de dicho operador se demuestra tomando funciones burbuja que tengan el mismo valor medio que \mathbf{v} sobre cada elemento, la unicidad se deduce rápidamente del hecho de que los espacios de funciones burbuja tienen dimensión 1 en cada triángulo K . Podemos también demostrar³ que $\|\Pi_2 \mathbf{v}\|_V \leq \|\mathbf{v}\|_V$.

²Este operador Π_1 no es otra cosa que Π_h^1 en (2.6.3), basta con tomar la desigualdad triangular inversa y sale el resultado.

³Página 471 [BBF]

Con estas dos proyecciones sobre el espacio de dimensión finita tenemos el resultado deseado puesto que el operador Π_h que componen cumple, efectivamente, las condiciones exigidas. Es más, se tiene la acotación ⁴:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V + \|p - p_h\|_M \leq ch(\|\mathbf{u}\|_{H^2(\Omega)} + \|p\|_{H^1}).$$

Esto quiere decir que la velocidad de convergencia en el método del MINI-elemento será lineal con h . \square

3.5. La implementación del método

Tenemos que la función velocidad tendrá dos componentes. Por ello consideraremos que $V_h = W_h \times W_h$ y entonces podemos tomar funciones base $\Phi_i, i = 1, \dots, 2N$ donde $N = |V| + |F|$ será la dimensión del espacio $W_h = P_1 \oplus B_3$ y tomamos esta base como

$$\begin{aligned} \Phi_i^l &= (\phi_i^l, 0), i = 1, \dots, |V|; \\ \Phi_i^b &= (\phi_i^b, 0), i = 1, \dots, |F|; \\ \Phi_{N+i}^l &= (0, \phi_i^l), i = 1, \dots, |V|; \\ \Phi_{N+i}^b &= (0, \phi_i^b), i = 1, \dots, |F|; \end{aligned}$$

donde las funciones $\{\phi_i^l\}_{i=1}^{|V|}$ conforman una base de P_1 y $\{\phi_i^b\}_{i=1}^{|F|}$ conforman una base de B_3 . Podemos entonces *juntar* nuestra variable bidimensional en una única variable con dimensión doble, aplicando esto queda

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } (u_h^x, u_h^y, p_h) \in W_h \times W_h \times M_h \text{ tales que:} \\ \int_{\Omega} \nabla u_h^x \cdot \nabla v_h^x \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u_h^y \cdot \nabla v_h^y \, d\Omega - \int_{\Omega} p_h \frac{\partial v_h^x}{\partial x} \, d\Omega - \int_{\Omega} p_h \frac{\partial v_h^y}{\partial y} \, d\Omega = 0, \\ \int_{\Omega} q_h \frac{\partial u_h^x}{\partial x} \, d\Omega + \int_{\Omega} q_h \frac{\partial u_h^y}{\partial y} \, d\Omega = 0, \text{ para todo } v_h^x, v_h^y \in V_h^0 \text{ y } q_h \in M_h. \end{array} \right. \quad (3.41)$$

A su vez podemos diferenciar los valores en el espacio lineal P_1 de los del espacio de burbujas B_3 . Sabiendo todo esto tenemos entonces que calcular:

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}) = \int_{\Omega} \nabla \phi_j^l \cdot \nabla \phi_i^l \, d\Omega, i, j = 1, \dots, |V|; \\ D &= (d_{ij}) = \delta_{ij} \int_{\Omega} \nabla \phi_j^b \cdot \nabla \phi_i^b \, d\Omega, i, j = 1, \dots, |F|; \\ G^1 &= (g_{ij}^1) = \int_{\Omega} \phi_j^l \frac{\partial \phi_i^l}{\partial x} \, d\Omega, i, j = 1, \dots, |V|; \\ G^2 &= (g_{ij}^2) = \int_{\Omega} \phi_j^l \frac{\partial \phi_i^l}{\partial y} \, d\Omega, i, j = 1, \dots, |V|; \\ G^3 &= (g_{ij}^3) = \int_{\Omega} \phi_j^l \frac{\partial \phi_i^b}{\partial x} \, d\Omega, i = 1, \dots, |V| \text{ y } j = 1, \dots, |F|; \\ G^4 &= (g_{ij}^4) = \int_{\Omega} \phi_j^l \frac{\partial \phi_i^b}{\partial y} \, d\Omega, i = 1, \dots, |V| \text{ y } j = 1, \dots, |F|; \\ b^j &= (b_i^j) = \int_{\Omega} f \phi_i^l \, d\Omega \text{ para } i = 1, \dots, |V| \text{ y } j = 1, 2, 5; \\ b^j &= (b_i^j) = \int_{\Omega} f \phi_i^b \, d\Omega \text{ para } i = 1, \dots, |F| \text{ y } j = 3, 4. \end{aligned}$$

⁴A la hora de considerar la norma en V tomamos la extensión *natural* al producto de la norma H^1 , esto es, $\|(v_1, v_2)\|_{H^1 \times H^1} = \sqrt{\|v_1\|_{H^1}^2 + \|v_2\|_{H^1}^2}$. La demostración del resultado está en la página 471 [BBF]

Utilizando el mecanismo de ensamblado y elementos de referencia explicado en el tema anterior podemos calcular cada una de esas matrices. En el problema de Stokes el cálculo de los vectores b_i es por norma general sencillo. La función f es en muchos casos una constante puesto que, como vimos en la teoría de (1.1), f no es otra cosa que la aceleración debida a las fuerzas de largo alcance. No debemos olvidar que el sistema saldrá singular dado que p_h viene definida más una constante, para resolver este contratiempo hay que añadir entonces la condición

$$\int_{\Omega} p_h \, d\Omega = \sum_{i=1}^{|V|} p_i \int_{\Omega} \phi_i \, d\Omega = 0.$$

Integrada con la fila

$$T = (T_i) = \int_{\Omega} \phi_i \, d\Omega \text{ para } i = 1, \dots, |V|.$$

El sistema a resolver queda entonces:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & G_1 \\ 0 & A & 0 & 0 & G_2 \\ 0 & 0 & D & 0 & G_3 \\ 0 & 0 & 0 & D & G_4 \\ G_1^t & G_2^t & G_3^t & G_4^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_l^x \\ U_l^y \\ U_b^x \\ U_b^y \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donde las componentes de los vectores U_l^x y U_l^y son las coordenadas con respecto de la base del espacio de funciones P_1 de \mathbf{u}_h^x y \mathbf{u}_h^y las soluciones de las componentes de velocidad del problema en el espacio vectorial de dimensión finita. U_b^x y U_b^y son las coordenadas respecto de la base de B_3 de \mathbf{u}_h^x y \mathbf{u}_h^y respectivamente. P es el vector de componentes las coordenadas respecto de la base del espacio de funciones P_1 de p_h solución de la presión del problema de dimensión finita.

En el caso del método $P_1 - P_1$ el sistema sería sencillamente

$$\begin{pmatrix} A & 0 & G_1 \\ 0 & A & G_2 \\ G_1^t & G_2^t & 0 \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_l^x \\ U_l^y \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos programar ambos métodos de elementos finitos de manera relativamente simple, los resultados para $f = 0$ se pueden observar en las figuras (3.3) y (3.4).

En el caso inestable de la Figura (3.3), está claro que la solución de la presión desafía cualquier intuición física puesto que la experiencia nos dice que un fluido se desplaza de mayor a menor presión (un buen ejemplo lo encontramos en el tiempo atmosférico), llama además la atención que los valores se disparan en la cercanía de la esquina $(1, 1)$ pero puede tratarse de un problema de precisión aritmética. También se observa un comportamiento más irregular en la parte derecha de la gráfica de velocidades. Hay que decir que se han representado los vectores velocidad normalizados para que fueran más fáciles de apreciar. La simulación se ha llevado a cabo sobre una triangulación de un mallado 31×31 del tipo de (3.2), esto quiere decir que $h = \frac{\sqrt{2}}{30}$.

En la gráfica de la velocidad estable de la Figura (3.4) se puede observar en que el fluido gira alrededor de un punto en el interior de la caja, lo cual parece algo bastante natural. Por otro lado si cotejamos ambos gráficos de velocidad y presión, la presión es superior en el extremo izquierdo e inferior en el derecho y el fluido se desplaza de izquierda a derecha. Esto también es natural puesto que los fluidos tienden a ocupar zonas de bajas presiones. El valor 0 de la presión en el resto de la gráfica parece tener sentido. Por lo tanto, nuestra solución numérica parece algo consistente desde el punto de vista físico. En cuanto al tipo de división del dominio utilizada, hemos usado una triangulación de un mallado 31×51 , algo parecido a (3.2) pero de mayores dimensiones, h asociada

a esta triangulación será $h = \frac{\sqrt{34}}{1500}$. El código se ha escrito en *Matlab* y se encuentra en la sección (A). Podemos decir que hemos cumplido nuestro objetivo final: conseguir las herramientas para resolver este problema concreto y así hacerlo.

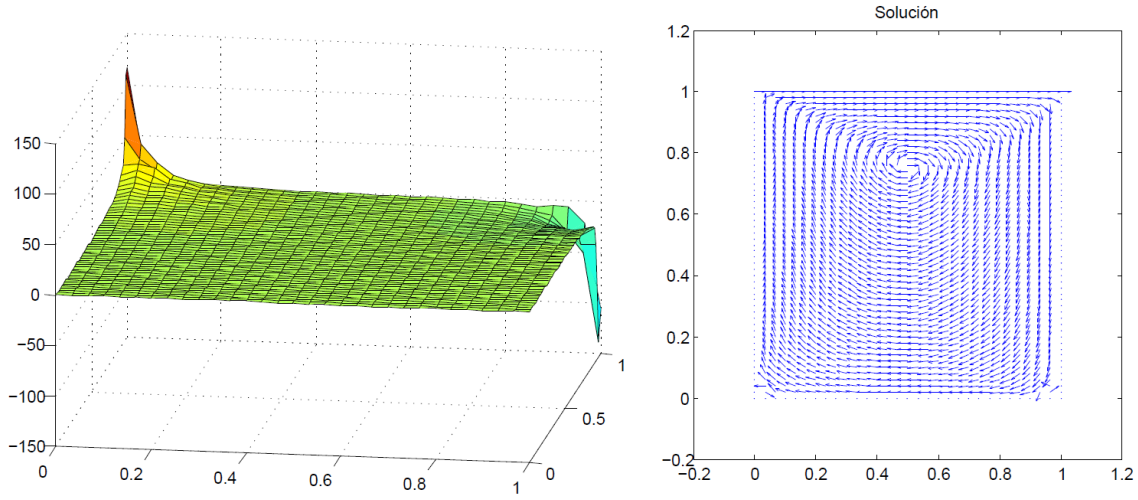


Figura 3.3: Gráficos de presión y velocidades con el método MINI.

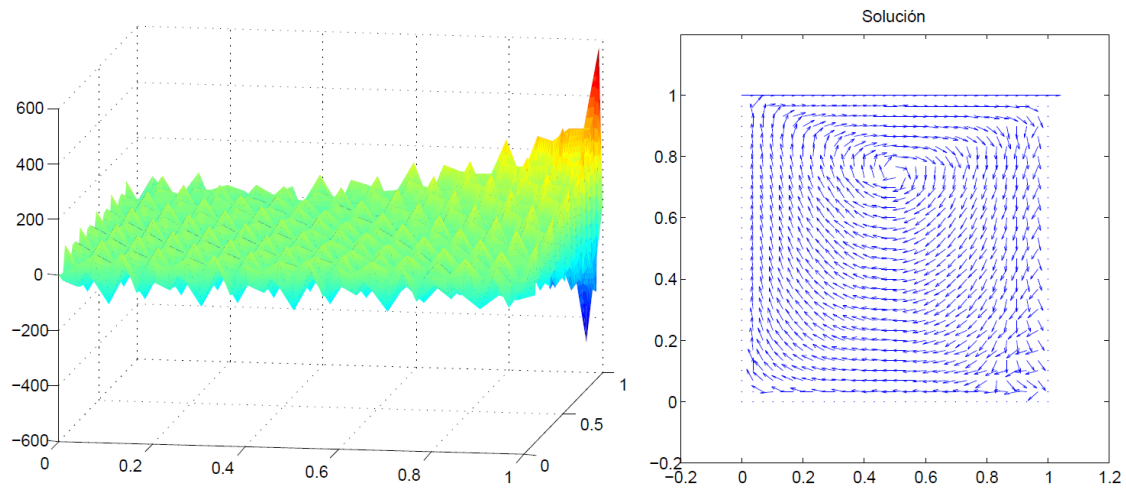


Figura 3.4: Gráficos de presión y velocidades en el método $P_1 - P_1$ inestable.

Apéndice A

Programas utilizados

Programa principal para el método del MINI-elemento.

```
[mxx,myy,mxy]=matriz2;
ns1 = 30;           % Subdivisiones en la direccion x
ns2 = 50;           % Subdivisiones en la direccion y.
d = 3;             % Grados de libertad de la parte lineal por elemento.
nt = (ns1+1)*(ns2+1); % Numero total de vertices.

[globales ,x,y,nel]=gen2(ns1,ns2);

coord=zeros(nt,2);
mx=zeros(d,d);
my=zeros(d,d);
mx(1,:)= -1/6;
mx(2,:)= -mx(1,:);
my(1,:)=mx(1,:);
my(3,:)= -my(1,:);
a=zeros(nt,nt);
g1=zeros(nt,nt);
g2=zeros(nt,nt);
g3=zeros(nel,nt);
g4=zeros(nel,nt);
m=zeros(nel,nel);
A=zeros(3*nt+2*nel+1,3*nt+2*nel);
b=zeros(3*nt+2*nel+1,1);
nodos=zeros(1,3);
c=zeros(2,2);
v=zeros(1,2);
mk=zeros(d,d);
rk=zeros(d+1,d);
nk=zeros(1,1);
lk=zeros(d,1);
t=zeros(1,nt);
sol=zeros(3*nt+2*nel,1);
coord = [x;y]';

% Ensamblado

for k=1:nel
    nodos=globales(k,:);
    [c,C,deter]=InvDet(coord(nodos,:));
    mk=deter*(c(1,1)*mxx+c(1,2)*(mxy+mxy')+c(2,2)*myy);
    a(nodos,nodos)=a(nodos,nodos)+mk;
    nk=deter*(c(1,1)+c(1,2)+c(2,2))/180;
    m(k,k)=m(k,k)+nk;
    rk(1:3,:)=deter*(C(1,1)*mx+C(1,2)*my);
    g1(nodos,nodos)=g1(nodos,nodos)+rk(1:3,:);
```

```

rk(1:3,:) = deter*(C(2,1)*mx+C(2,2)*my);
g2(nodos,nodos) = g2(nodos,nodos) + rk(1:3,:);
rk(4,:) = deter*(C(1,1)*[-1/120,1/120,0;]+C(1,2)*[-1/120,0,1/120;]);
g3(k,nodos) = g3(k,nodos) + rk(4,:);
rk(4,:) = deter*(C(2,1)*[-1/120,1/120,0;]+C(2,2)*[-1/120,0,1/120;]);
g4(k,nodos) = g4(k,nodos) + rk(4,:);
t(nodos) = t(nodos) + 1.0/6*deter;
end
G1=g1.';
G2=g2.';
G3=g3.';
G4=g4.';

% Construimos la matriz por bloques

A(1:nt,1:nt)=a;
A(nt+1:2*nt,nt+1:2*nt)=a;
A(2*nt+1:2*nt+nel,2*nt+1:2*nt+nel)=m;
A(2*nt+nel+1:2*nt+2*nel,2*nt+nel+1:2*nt+2*nel)=m;
A(2*nt+1:2*nt+nel,2*nt+1+2*nel:3*nt+2*nel)=g3;
A(2*nt+nel+1:2*nt+2*nel,2*nt+1+2*nel:3*nt+2*nel)=g4;
A(1:nt,2*nt+1+2*nel:3*nt+2*nel)=g1;
A(nt+1:2*nt,2*nt+1+2*nel:3*nt+2*nel)=g2;
A(2*nt+1+2*nel:3*nt+2*nel,1:nt)=G1;
A(2*nt+1+2*nel:3*nt+2*nel,nt+1:2*nt)=G2;
A(2*nt+1+2*nel:3*nt+2*nel,2*nt+1:2*nt+nel)=G3;
A(2*nt+1+2*nel:3*nt+2*nel,2*nt+nel+1:2*nt+2*nel)=G4;
A(3*nt+2*nel+1,2*nt+2*nel+1:3*nt+2*nel)=t;

% Introducimos condición Dirichlet en la dirección x

% 0 en [0,1]x{0}
for k=1:(ns1+1)
    for i=1:3*nt+2*nel
        A(k,i)=0;
    end
    b(k)=0;
    A(k,k)=1;
end

% 0 en {0}x[0,1]
for k=1:ns1+1:ns2*ns1+ns2+1
    for i=1:3*nt+2*nel
        A(k,i)=0;
    end
    b(k)=0;
    A(k,k)=1;
end

% 0 en {1}x[0,1]
for k=ns1+1:ns1+1:nt
    for i=1:3*nt+2*nel
        A(k,i)=0;
    end
    b(k)=0;
    A(k,k)=1;
end

% 1 en [0,1]x{1}
for k=ns2*ns1+ns2+1:nt
    for i=1:3*nt+2*nel
        A(k,i)=0;
    end

```



```

    end
    b(k)=1;
    A(k,k)=1;
end

% Introducimos condición Dirichlet en la dirección y

% 0 en [0,1]x{0}
for k=1:(ns1+1)
    for i=1:3*nt+2*nel
        A(nt+k,i)=0;
    end
    b(nt+k)=0;
    A(nt+k,nt+k)=1;
end

% 0 en {0}x[0,1]
for k=1:ns1+1:ns2*ns1+ns2+1
    for i=1:3*nt+2*nel
        A(nt+k,i)=0;
    end
    b(nt+k)=0;
    A(nt+k,nt+k)=1;
end

% 0 en {1}x[0,1]
for k=ns1+1:ns1+1:nt
    for i=1:3*nt+2*nel
        A(nt+k,i)=0;
    end
    b(nt+k)=0;
    A(nt+k,nt+k)=1;
end

% 1 en [0,1]x{1}
for k=ns2*ns1+ns2+1:nt
    for i=1:3*nt+2*nel
        A(nt+k,i)=0;
    end
    b(nt+k)=0;
    A(nt+k,nt+k)=1;
end

% Resolvemos sistema
sol=A\b;

% Dibujamos la solución
X=reshape(coord(:,1),ns1+1,ns2+1);
vx=reshape(sol(1:nt),ns1+1,ns2+1);
Y=reshape(coord(:,2),ns1+1,ns2+1);
vy=reshape(sol(nt+1:2*nt),ns1+1,ns2+1);

% Normalización de las velocidades
for i=1:ns1+1
    for j=1:ns2+1
        k=norm([vx(i,j) vy(i,j)]);
        if k<0.00000001
            vy(i,j)=0;
            vx(i,j)=vy(i,j);
        else
            vy(i,j)=vy(i,j)/k;
            vx(i,j)=vx(i,j)/k;
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end
Z=reshape( sol(2*nt+2*nel+1:3*nt+2*nel), ns1+1, ns2+1);

% Gráfica de la presión
surf(X,Y,Z)
pause

% Gráfica de velocidades
h=quiver(X,Y,vx,vy);
axis square
shading interp
title(' Solución ')

```

Programa principal para el método $P_1 - P_1$.

```

[mxx,myy,mxy]=matriz2;
ns1  = 30;           % Subdivisiones en la direccion x
ns2  = 30;           % Subdivisiones en la direccion y.
d    = 3;           % Grados de libertad por elemento.
nt   = (ns1+1)*(ns2+1); % Numero total de vertices.

[ globales ,x,y,nel]=gen2(ns1 , ns2 );

mx=zeros(d,d);
my=zeros(d,d);
mx(1,1:3)=-1/6;
mx(2,:)=mx(1,:);
my(1,:)=mx(1,:);
my(3,:)=my(1,:);
mx=-mx;
my=-my;
coord=zeros(nt,2);
a=zeros(nt,nt);
g1=zeros(nt,nt);
g2=zeros(nt,nt);
m=zeros(nel,nel);
G1=zeros(nt,nt);
G2=zeros(nt,nt);
A=zeros(3*nt+1,3*nt);
b=zeros(3*nt+1,1);
nodos=zeros(1,3);
c=zeros(2,2);
mk=zeros(d,d);
lk=zeros(d,1);
t=zeros(1,nt);
sol=zeros(3*nt,1);
coord = [x;y]';

% Ensamblado
for k=1:nel
    nodos=globales(k,:);
    [c,C,deter]=InvDet(coord(nodos,:));
    mk=deter*(c(1,1)*mxx+c(1,2)*(mxy+mxy')+c(2,2)*myy);
    a(nodos,nodos)=a(nodos,nodos)+mk;
    t(nodos)=t(nodos)+1.0/6*deter;
end

for k=1:nel
    nodos=globales(k,:);
    [c,C,deter]=InvDet(coord(nodos,:));

```

```

        mk=deter*(C(1,1)*mx+C(1,2)*my);
        g1(nodos,nodos)=g1(nodos,nodos)+mk;
        mk=deter*(C(2,1)*mx+C(2,2)*my);
        g2(nodos,nodos)=g2(nodos,nodos)+mk;
    end

G1=g1.';
G2=g2.';
A(1:nt,1:nt)=a;
A(nt+1:2*nt,nt+1:2*nt)=a;
A(1:nt,2*nt+1:3*nt)=g1;
A(nt+1:2*nt,2*nt+1:3*nt)=g2;
A(2*nt+1:3*nt,1:nt)=G1;
A(2*nt+1:3*nt,nt+1:2*nt)=G2;
A(3*nt+1,2*nt+1:3*nt)=t;

% Introducimos condición Dirichlet

% Condiciones de contorno sobre la componente x de la velocidad

% 0 en [0,1]x{0}
for k=1:(ns1+1)
    for i=1:3*nt
        A(k,i)=0;
    end
    b(k)=0;
    A(k,k)=1;
end

% 0 en {1}x[0,1]
for k=ns1+1:ns1+1:nt
    for i=1:3*nt
        A(k,i)=0;
    end
    b(k)=0;
    A(k,k)=1;
end

% 0 en {0}x[0,1]
for k=1:ns1+1:ns2*ns1+ns2+1
    for i=1:3*nt
        A(k,i)=0;
    end
    b(k)=0;
    A(k,k)=1;
end

% 0 en en [0,1]x{0}
for k=1:(ns1+1)
    for i=1:3*nt
        A(k,i)=0;
    end
    b(k)=0;
    A(k,k)=1;
end

% 1 en [0,1]x{1}
for k=ns2*ns1+ns2+1:nt
    for i=1:3*nt
        A(k,i)=0;
    end
    b(k)=1;
end

```

```

        A(k,k)=1;
    end

    % Condiciones de contorno sobre la componente y de la velocidad

    % 0 en [0,1]x{0}
    for k=1:(ns1+1)
        for i=1:3*nt
            A(nt+k,i)=0;
        end
        b(nt+k)=0;
        A(nt+k,nt+k)=1;
    end

    % 0 en {1}x[0,1]
    for k=ns1+1:ns1+1:nt
        for i=1:3*nt
            A(nt+k,i)=0;
        end
        b(nt+k)=0;
        A(nt+k,nt+k)=1;
    end

    % 0 en en [0,1]x{0}
    for k=1:ns1+1:ns2*ns1+ns2+1
        for i=1:3*nt
            A(nt+k,i)=0;
        end
        b(nt+k)=0;
        A(nt+k,nt+k)=1;
    end

    % 0 en [0,1]x{1}
    for k=ns2*ns1+ns2+1:nt
        for i=1:3*nt
            A(nt+k,i)=0;
        end
        b(nt+k)=0;
        A(nt+k,nt+k)=1;
    end

    % Resolvemos sistema

    sol=A\b;

    X=reshape(coord(:,1),ns1+1,ns2+1);
    vx=reshape(sol(1:nt),ns1+1,ns2+1);
    Y=reshape(coord(:,2),ns1+1,ns2+1);
    vy=reshape(sol(nt+1:2*nt),ns1+1,ns2+1);
    Z=reshape(sol(2*nt+1:3*nt,:),ns1+1,ns2+1);

    % Normalización de las velocidades
    for i=1:ns1+1
        for j=1:ns2+1
            k=norm([vx(i,j) vy(i,j)]);
            if k<0.00000001
                vy(i,j)=0;
                vx(i,j)=vy(i,j);
            else
                vy(i,j)=vy(i,j)/k;
                vx(i,j)=vx(i,j)/k;
            end
        end
    end

```

```

    end
end

% Gráfica de presión
surf(X,Y,Z)
shading interp
pause

% Gráfica de velocidades
h=quiver(X,Y,vx,vy);
axis([-0.2    1.2    -0.2    1.2])
title(' Solución ')

```

Programa auxiliar gen2 que genera la malla.

```

% Programa para generar mallas 2D.

function [ globales ,x,y,nel]=gen2(ns1,ns2)

nel  = ns1*ns2*2;           % Numero total de elementos.
nt   = (ns1+1)*(ns2+1);
aux  = zeros(nt,1);

% En el siguiente bucle creamos la matriz de conectividad.

for j = 1:ns2
    ind = 1+(j-1)*(ns1+1);
    for i = 1:2:2*ns1-1
        elem = i + (j-1)*2*ns1;
        globales(elem,1:3)= [ind,ind+1,ind+ns1+1];
        ind = ind+1;
    end
    ind = ns1+(j-1)*(ns1+1)+3;
    for i = 2:2:2*ns1
        elem = i + (j-1)*2*ns1;
        globales(elem,1:3)= [ind,ind-1,ind-ns1-1];
        ind = ind+1;
    end
end

% En el siguiente bucle definimos las coordenadas de los nodos de la malla.

x1 = 0;
x2 = 1;
y1 = 0;
y2 = 1;
h1 = (x2-x1)/ns1;
h2 = (y2-y1)/ns2;

for j = 1:ns2+1
    for i = 1:ns1+1
        nodo = (j-1)*(ns1+1) + i;
        x(nodo) = h1*(i-1) + x1;
        y(nodo) = h2*(j-1) + y1;
    end
end

% Dibujamos la malla de triangulos.

for i=1:2:nel
    nodos = globales(i,:);
    hold on
    fill(x(nodos),y(nodos),'w')

```

```

    x1 = int2str(i);
    x2 = int2str(nodos(1));
    text(x(nodos(1))+ 0.35*h1,y(nodos(1))+0.25*h2,x1,'Color',[1 0 0]);
    text(x(nodos(1))+0.1*h1,y(nodos(1))+0.1*h2,x2,'Color',[0 0 0]);
end
for i=2:2:nel
    nodos = globales(i,:);
    hold on
    fill(x(nodos),y(nodos),'w')
    x1 = int2str(i);
    text(x(nodos(1))- 0.25*h1,y(nodos(1))-0.25*h2,x1,'Color',[1 0 0]);
end
pause
hold off

return

```

Programa auxiliar *matriz2* que contiene matrices de rigidez en el elemento de referencia.

```

function [mxx,myy,mxy] = matriz2

mxx=[0.5      -0.5      0.;
     -0.5      0.5      0.;
      0.        0.      0.];
myy=[0.5      0.      -0.5;
      0.        0.      0.;
     -0.5      0.      0.5];
mxy=[0.5      0.      -0.5;
     -0.5      0.      0.5;
      0.        0.      0.];

return

```

Programa auxiliar *InvDet* que calcula la matriz de transformación afín, su determinante, su inversa traspuesta y el producto de su inversa por su inversa traspuesta.

```

function [c,C,deter]=InvDet(v)
% Calcula c=B_k^{-1}(B_k^{-1})^T y deter=abs(detB_k)
M=[v(2,1)-v(1,1),v(3,1)-v(1,1);v(2,2)-v(1,2),v(3,2)-v(1,2)]; % Matriz de la
                                                                    % transformación afin
deter=det(M);
M=inv(M);
C=M';
deter=abs(deter);
c=M*M';
return

```

Programa auxiliar *pf* que calcula el promedio de la función f sobre el elemento de referencia.

```

function prom=pf(v)
% Calcula el promedio de la funcion f (f=0)
prom = 0;
return

```

Bibliografía

- [B] D. Braess, *Finite elements: theory, fast solvers, and applications in elasticity theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [BA] G.K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
- [BBF] D. Boffi, F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed finite element methods and applications*, Springer, Berlin, 2013.
- [Bre] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2010.
- [ESW] H. Elman, D. Silvester, A. Wathen, *Finite elements and fast iterative solvers: with applications in incompressible fluid dynamics*, Oxford University Press, Norfolk, 2006.
- [LB] M.G. Larson, F. Bengzon, *The finite element method: theory, implementation, and applications*, Springer, Berlin, 2013.
- [Q] A. Quarteroni, *Numerical models for differential problems*, Springer, Milano, 2009.

