

# Experiencias

## Mejorando la competencia matemática. Una experiencia de trabajo en el IES Pilar Lorengar

Aurora Domenech Penón

IES Pilar Lorengar de Zaragoza

[domenechaurora@gamail.com](mailto:domenechaurora@gamail.com)

Sergio Martínez-Juste

[sergiomj@unizar.es](mailto:sergiomj@unizar.es)

Universidad de Zaragoza

### 1. Introducción y contexto.

La experiencia que se presenta en este artículo se lleva a cabo en el IES Pilar Lorengar situado en el barrio La Jota de Zaragoza; comenzó durante el curso 2018-2019, centrada en 1º ESO en la asignatura de matemáticas y ha dado pie a continuar con un cambio metodológico hasta el día actual. El departamento estaba entonces formado por 8 personas con inquietudes cercanas en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En cursos anteriores, comentábamos frecuentemente la necesidad de mejorar la competencia matemática de nuestro alumnado. Es decir, la actitud positiva ante la resolución de problemas la capacidad de conjeturar, probar diferentes caminos dando sentido a los procesos y técnicas que ejecuta la perseverancia en la búsqueda de soluciones la capacidad de formalizar y demostrar las afirmaciones que hace

en el proceso de resolución, la utilización de un lenguaje adecuado y el dominio de diferentes formas de representación de los conceptos matemáticos, etc.

Tanto al analizar las pruebas iniciales, habituales a comienzos de curso, como al desarrollar ciertos contenidos en diversos cursos, observábamos que

En la frutería más cercana a casa tiene los siguientes precios



|                         |                           |                                 |                            |
|-------------------------|---------------------------|---------------------------------|----------------------------|
| 1kg de fresas cuesta 3€ | 3kg de patatas cuestan 5€ | Media docena de kiwis cuesta 2€ | 5kg de naranjas cuestan 4€ |
|-------------------------|---------------------------|---------------------------------|----------------------------|

A partir de estos precios contesta a las siguientes cuestiones:

1. Queremos comprar 5kg de fresas y 9kg de patatas, ¿cuánto pagaremos? (Escribe las operaciones que realizas)
2. La frutería nos asegura que 4 kiwis pesan un kilogramo.
  - a. Si queremos comprar 3kg de kiwis, ¿cuánto pagaremos? (Escribe las operaciones que realizas)
  - b. Díras que 1kg de kiwis cuesta .... (Escribe las operaciones que realizas o describe como has llegado al resultado)
3. Un vecino nos ha encargado comprar 15kg de patatas y nos da 30€.
  - a. ¿Cuánto dinero nos devolverán en la frutería? (Escribe las operaciones que realizas)
  - b. Díras que 1kg de patatas cuesta.... (Escribe las operaciones que realizas o describe como has llegado al resultado)
4. Para hacer un litro de zumo se necesitan 2kg de naranjas.
  - a. Si queremos hacer 10 litros de zumo, ¿cuánto dinero tendremos que pagar por las naranjas necesarias para hacerlo? (Escribe las operaciones que realizas)
  - b. Díras que 1kg de naranjas cuesta.... (Escribe las operaciones que realizas o describe como has llegado al resultado)
5. Con los datos que se dan plantea y resuelve un problema en el que se necesiten hacer, al menos, dos multiplicaciones y una resta.

Imagen 1. Extracto de la prueba inicial

éstos tendían a memorizar procesos mecánicos y repetitivos, pero no llegaban a desarrollar el sentido matemático que llevan asociado, y por ello, si la situación no se obtenía a través de un proceso algorítmico (resolver una ecuación, derivar una función, realizar una multiplicación de un número de tres cifras por otro de dos colocados convenientemente,...) les costaba relacionar la información de un enunciado con el proceso a realizar para responder a una cuestión concreta sobre él.

Como ejemplo, en la Imagen 1 se muestra un ejercicio de una de las actividades que conforman la prueba inicial. En la información que se muestra al alumnado solo aparece un precio unitario, el de las fresas, del resto de frutas deben averiguarlo a partir de la información dada en las imágenes. Se les pide una estimación del resultado con la información proporcionada y se les insiste en que intenten explicar cómo han llegado a la conclusión. Además, al final del ejercicio se les pide inventar el enunciado de un problema. En los resultados observamos que muchos no consiguen inventar un problema, y les cuesta explicar su razonamiento.

Todo ello nos lleva a cuestionarnos cómo introducir cambios en nuestra práctica docente, con el objetivo de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje y, así, conseguir que nuestros estudiantes mejoren su competencia matemática, dando mayor significado a los conceptos matemáticos empleados y a las técnicas utilizadas en la resolución de problemas, construyendo el conocimiento para que su educación matemática no se reduzca a repetición de métodos algorítmicos. Este cambio no podía producirse de un curso para otro, se debía ir haciéndolo de forma paulatina, de manera que pudiésemos ir a la vez planteando cambios y evaluando sus resultados. Había que elegir por dónde comenzar y cómo hacerlo.

¿Cómo empezamos, dónde acudimos? Si vamos a cambiar, empezemos por el primer curso y ya veremos a dónde llegamos. Queríamos cambiar la metodología. Acudimos a la investigación en didáctica, y se decidió llevar a cabo la metodología *lesson-study* (Lewis y otros, 2009) que estaba dando buenos resultados en otros países favoreciendo la codocencia en el aula y cuya idea fundamental es la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje y lleva asociado el trabajo de aula a través de la resolución de

problemas (Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste, 2021a, 2021b).

## 2. Proyecto

El proyecto concreto con el que comenzamos esta experiencia en el curso 18-19 se llamó “Cooperación docente: Metodología *lesson-study* para innovar en matemáticas”<sup>1</sup>. Los objetivos fueron:

- Implantar una metodología de trabajo cooperativo y observación dentro del aula entre los miembros del departamento.
- Trabajar en aula a través de la resolución de problemas.
- Formación específica en avances en la investigación didáctica y en las técnicas de investigación educativa para los miembros del departamento.
- Investigar el potencial de las unidades didácticas en 1º ESO.
- Elaborar unidades didácticas innovadoras que recojan los avances en la investigación.

Para ello, creamos un grupo de trabajo cooperativo con los ocho miembros del departamento en septiembre del 2018. Solicitamos un seminario de didáctica de las matemáticas para recibir formación específica externa sobre el número racional, proporcionalidad y probabilidad. Temas elegidos por su importancia en la comprensión de cara a otros bloques de contenidos en cursos superiores.

*Lesson-study* es una forma de trabajar en codocencia. Su particularidad es que uno de los docentes del grupo imparte la lección, mientras los demás docentes también están en el aula y observan. Esta forma de trabajo tiene cinco fases, reflejadas en el siguiente esquema:



Imagen 2. Fases de una *lesson-study*

<sup>1</sup> ORDEN ECD/321/2019, de 14 de marzo, por la que se resuelve la convocatoria a los centros docentes no universitarios sostenidos con fondos públicos de la Comunidad Au-

tónoma de Aragón para desarrollar proyectos de innovación educativa durante el curso 2018-2019. Boletín Oficial de Aragón, nº 66, 4 de abril de 2019, pp. 9025-9030.

Las dos primeras fases, definir el problema y diseñar la lección experimental, las trabajamos a partir del seminario de didáctica (que se amplía necesariamente con reuniones de departamento, recreos, correos y tertulias de café). Los docentes recibimos formación específica externa acerca del objeto matemático que queremos trabajar, y entre todos vamos lanzando, analizando y explorando actividades ricas, de suelo bajo y techo alto en las que todo estudiante puede comenzar entrando, hasta que la unidad está completada. Una vez realizada la unidad, ésta se lleva al aula y ahí comienzan las fases 3, 4 y 5.

En nuestro caso, la puesta en práctica de la unidad y la observación se hizo con dos profesores (los autores del artículo a los que nos referiremos con A y B) del grupo cooperativo y con dos grupos de 1ºESO, uno de 29 alumnos y otro de 28. Para ello, fueron necesarias dos cosas: la existencia de horas en el departamento (desdobladas) y la implicación del equipo directivo, creando huecos en el horario de un docente en las horas en las que el otro impartía la clase y viceversa. Ambos profesores entran juntos al aula. El docente A imparte la lección diseñada mientras que el docente B observa cómo lo hace A (fase 3), y tan importante o más, observa cómo lo reciben y cómo son las reacciones e intervenciones de los estudiantes. Estas observaciones son comentadas posteriormente entre los docentes A y B para introducir los cambios que se vean necesarios (fase 4); los cambios pueden ser o bien porque los estudiantes han demostrado algún tipo de dificultad no esperada y conviene redefinir algo de la propuesta, o bien porque las mismas intervenciones del alumnado nos dirigen a mejorar alguna de las actividades. Se reactualiza la propuesta (Fase 5) y volvemos a la fase 3, pero esta vez en el otro grupo y con cambio de roles entre profesores: B da la lección, A observa y luego se vuelve a revisar lo que ha sucedido, de forma que puede ser de nuevo modificada la actividad. Para la fase 5 se tendrán en cuenta no solo la observación

directa del aula, también pruebas escritas y producciones concretas de algunos estudiantes. Las fases 3, 4 y 5 son iterativas y van paulatinamente mejorando la propuesta didáctica (Imagen 3).

En el aula se trabaja a través de la resolución de problemas, es decir, proponemos una tarea a los estudiantes, normalmente trabajando en parejas, en las que se les introduce un concepto sin explicaciones teóricas previas (Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste, 2021a, 2021b). Tras un tiempo determinado por los docentes en función de la tarea, se hace una puesta en común en gran grupo sobre las respuestas de los estudiantes. Se establece en ese momento un debate entre ellos y con el docente, en el que afloran ideas preconcebidas, creencias sobre el concepto trabajado, errores.... Tras este debate conviene finalizar consolidando el concepto que se ha introducido e institucionalizándolo, si es necesario. Se minimizan así los tiempos de explicación expositiva del docente y se crea un diálogo de aula entre los estudiantes que, bien guiado por el docente sugiriendo preguntas, recogiendo respuestas..., es muy rico y potencia que el estudiante vaya construyendo su propio conocimiento, afianzando cosas que igual ya sabía pero sobre todo resolviendo ideas erróneas preconcebidas que podía tener, valorando así el error como una forma de aprendizaje y no una traba para el mismo.

### 3. Instrumentos y herramientas

De ese grupo de trabajo, y de este proyecto, se elaboraron dos unidades didácticas completas y una secuencia de cuatro sesiones que acabaría siendo posteriormente la base de otra unidad:

- Fracciones, de nueva creación. Propuesta para 16 sesiones. Basada en los trabajos de Escolano y Gairín (2005) sobre los modelos de medida para la enseñanza del racional.
- Proporcionalidad aritmética. Propuesta para 12 sesiones. Basada en la tesis doctoral de Martínez-Juste (2022), coordinador de este proyecto, puesta en práctica en otros centros en cursos anteriores, y enriquecida tras trabajar *lesson-study*.
- Probabilidad, de nueva creación. Propuesta de 4 sesiones. Basada en trabajos de Carmen Batabano y colaboradores (Díaz Godino y otros, 1996).

La experiencia supuso seguir con el seminario de didáctica durante tres cursos más, ampliando nuestra formación como docentes en los contenidos de Álgebra, Aritmética del Natural y Geometría; y también el

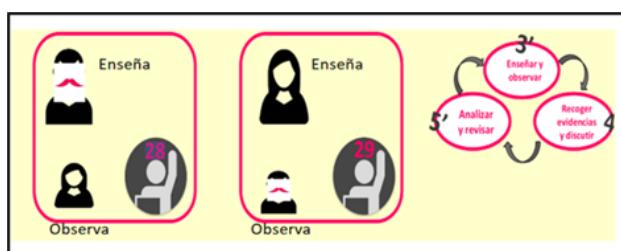


Imagen 3. Implementación en el IES Pilar Lorengar de una Lesson-study

**FRACCIONES...**

**MUCHO MÁS QUE PAPIROS Y Bu'S**

Depósito de agua.  
La parte azul es la cantidad de agua que queda: son  $\frac{8}{3}$  de litro.

¿Cómo representamos 1 litro?  
¿Cuántos litros caben en el depósito?

Y va de longitudes.....

El gráfico entero representa la distancia total a recorrer.  
La parte sombreada representa  $\frac{5}{4}$  de Km

¿Cómo se representa 1 km?  
¿Qué distancia total hay que recorrer?  
¿Cuántos km son  $\frac{2}{3}$  de la longitud total?

Imagen 4. Midiendo y trabajando razonamiento up and down

número de componentes del grupo de trabajo con incorporaciones de docentes de otros centros aumentando la riqueza en las aportaciones a la hora de elaborar propuestas didácticas. Se han completado así las siguientes unidades para 1º ESO: el número natural, fracciones, proporcionalidad, álgebra y números enteros, geometría y probabilidad. En las propuestas se trabajan los objetos matemáticos de forma menos “tradicional” que en los libros de texto. Por ejemplo, en la unidad didáctica<sup>2</sup> de fracciones (Domenech y Martínez-Juste, 2019a, 2019b), se introduce la fracción desde el concepto de medida y a través de la manipulación de materiales, se trabajan los “up and down” (Buforn y Fernández, 2014); Buforn y otros, 2018) (ver Imagen 4).

En la de proporcionalidad, se incide en la idea de condición de regularidad: aquello que ha de suceder para que supongamos que hay proporcionalidad (Imagen 5) y se trabajan problemas de comparación de magnitudes tanto con datos numéricos como sin ellos, frente a solo ejercicios sistemáticos de “falta un dato” o “regla de tres” (Martínez-Juste y otros,

2022), promoviendo el razonamiento de la relación entre las magnitudes frente una resolución puramente mecánica.

En Probabilidad (Domenech y Martínez-Juste, 2021), se parte de la experimentación (Imagen 6) y solo a través de los resultados obtenidos se institucionalizan después los conceptos.

Expertos en didáctica dicen que el conocimiento ha de empezar por los sentidos. Por ello en todas las unidades, hemos potenciado el uso de materiales manipulativos y la experimentación cuando ha sido posible: tiras de papel para medir en fracciones, políicos tanto en divisibilidad como en geometría; construcción de ruletas, dados y botellas opacas en probabilidad, geoplanos y polígonos regulares de foam en geometría y para trabajar patrones, y geógebra para el manejo de funciones lineales y cuadráticas.

El tipo de actividad propuesta en cada sesión no es neutro. Todas transmiten un mensaje y tienen un fin concreto. El docente que ha generado esa propuesta lo conoce y puede conducir la actividad en la dirección programada, pero igual no resulta tan claro para alguien ajeno a su elaboración. Es por ello por lo que los cursos 2022-2023 y 2023-2024 se forma un grupo de trabajo cuyo objetivo ha sido

3.- Sara, para hacer chocolate a la taza, mezcla 3 litros de leche con 0,9 kg de cacao. Pedro, en cambio, mezcla medio kilo de cacao con 1,5 litros de leche. ¿Qué chocolate tendrá un sabor más intenso?

Sara  
 $\frac{0,9}{3} = 0,3$  kg de cacao por l de leche.

M1: Volumen (l leche)  
M2: Peso (kg cacao).

CR: Por cada l de leche, deben haber los mismos kg de cacao.

El chocolate de Pedro tendrá un sabor más intenso por que en un l de leche hay más cantidad de cacao que en el de Sara.

Pedro  
 $\frac{0,5}{1,5} = 0,3$  kg de cacao por l de leche.

Imagen 5. Respuesta de un estudiante a un problema de comparación.

<sup>2</sup> La unidad didáctica completa es accesible a cualquier interesado que se ponga en contacto con los autores.



Imagen 6. Experimentando, observando y sacando conclusiones

crear guías didácticas de las unidades generadas para 1º ESO, que ofrecen a cualquier docente información para ponerla en práctica. En cada sesión se especifican objetivos, contenidos, competencias específicas, temporalización, metodología; la ficha para el estudiante y la explicación de cómo trabajarla (Imagen 7). Están completadas: el número natural, fracciones y proporcionalidad. En proceso: álgebra y geometría.

En los cursos siguientes también se reorganizaron y generaron materiales para enseñar a través de la resolución de problemas para 2º, 3º y 4º ESO conforme los alumnos del curso 18-19 iban avanzando de nivel. Lamentablemente la parte de codocencia disminuyó en el número de horas de observación por los recortes y la dificultad que generaba en jefatura de estudios en cuanto a realización de horarios.

#### 4. Valoración

La valoración global es altamente positiva. Como docentes nos hemos enriquecido a nivel profesional ganando formación específica y aprendiendo a colaborar como equipo. La observación mutua ha promovido la reflexión sobre nuestra práctica valorando la crítica constructiva realizada tras la observación. Además, hemos podido difundir el proyecto en diversos foros

profesionales lo que ha promovido el enriquecimiento del mismo (Martínez-Juste, 2020; Martínez-Juste y Domenech, 2019).

A nivel de aula observamos una mejora en la atención del alumnado en un entorno más distendido de trabajo, en el que todo alumno tiene alguna ocasión de tener éxito (aunque se considere "malo" en la materia) y también todo alumno tiene un momento de error (aunque se crea muy ducho en la materia), por lo que el escucharse y aprender los unos de los otros y compartir alternativas para llegar a una misma solución, ha hecho que el clima de clase sea más interactivo y productivo. Los alumnos han normalizado que puedan entrar dos o tres profesores un día para hacer una actividad, o que un profesor suyo que no es el habitual dé una día la clase, ya que el discurso que les llega es el mismo. Todo ello ha aumentado el protagonismo del alumno para aportar ideas, conjeturar y perseverar en la búsqueda de la solución. El nivel de registros del estudiante ha ido evolucionando y siendo más coherente en sus explicaciones combinando el uso de lenguaje numérico, gráfico o verbal tanto escrito como oral para su respuesta.

También en nuestra valoración hay lugar para la autocritica y para detectar puntos de mejora. A nivel de aula, el aprendizaje por construcción es lento, ya que las actividades requieren su tiempo para que sean efectivas, y eso supone en más de una ocasión tener que elegir qué es lo prioritario para trabajar reajustando la programación para que en el conjunto de los cursos se llegue a todos los contenidos. Es complejo hacer observación de aula cuando no hay

##### Esquema de la sesión:

Conviene comenzar esta sesión sin dedicar tiempo previo a corrección de tareas pendientes, ya que la propuesta es densa para los alumnos, y según el grupo puedes suceder que no dé tiempo a completarla entera.

##### • ACTIVIDAD:

En esta sesión se trabaja con tres grupos de problemas diferenciados.

##### ➤ Grupo de problemas 1,2 y 3

En el **problema 1** se pretende ahondar en la interpretación de la fracción desde el modelo de medida y los significados de los elementos que la componen en este modelo. Así, el alumnado debe entender que  $5/3$  Bu es un objeto que se ha construido con "5 piezas" de tamaño " $1/3$ " de unidad, para deducir que cada pieza es  $1/3$  de unidad. Posteriormente reconstruye la unidad uniendo 3 piezas de  $1/3$ . Por último debe dividir la unidad de forma distinta para construir la tira de  $3/4$  de unidad que se le solicita.

Ante posibles dificultades el docente intervendrá recordando el significado de la fracción como resultado de una medida e insistirá en que el numerador debe interpretarse como el número de piezas necesarias para cubrir el objeto. "Si este objeto mide  $5/3$  Bu, ¿cuántas piezas se han necesitado para construirlo?". Otras posibles preguntas para el andamiaje pueden ser: "¿Cuántos tercios necesitas para hacer una unidad?"; "¿Las piezas del objeto " $3/4$ " son igual de grandes que las que forman el objeto de  $5/3$ ?"

Imagen 7. Fragmento de la guía del tema Fracciones.

asignadas horas en el departamento para este tipo de proyectos, (hemos seguido entrando a observar en aula en nuestros cuando lo hemos creído conveniente y nuestros horarios lo han permitido) y para la jefatura de estudios del centro resulta también muy complejo establecer coincidencias horarias respetando las necesidades del resto de los departamentos. Entrar en un aula cambiando nuestra dinámica profesional personal, comporta salir de nuestra zona de confort y no siempre todos podemos o queremos en un momento determinado, sin embargo, por la experiencia, aquellos que lo han probado, repiten.

## 5. Conclusiones

Enseñar no es transferir conocimiento, sino crear las posibilidades para su propia producción o construcción (Freire, 1996). Nuestra experiencia ha estado en esa línea. Mejorar la competencia matemática de nuestros estudiantes es prioritario, lo era cuando comenzamos el proyecto y lo es, si cabe, más ahora con la introducción de las competencias específicas en los nuevos currículos (Beltrán-Pellicer y Alsina, 2022). Debemos ser capaces de conseguir que se involucren y emocionen en la participación y ganen comprensión en las actividades que les propongamos. Actividades ricas en las que todos pueden aportar y que con las preguntas adecuadas pueden ir construyendo el conocimiento. Dar tiempo a esas actividades y gestionarlas de forma que podamos sacarles el máximo provecho. Para ello es importante que los docentes no dejemos de formarnos. La observación en el aula es una forma muy enriquecedora de trabajar en la educación: aprender a observar al compañero nos enseña a mirar; dejarse observar nos enseña a reflexionar y mejorar nuestra práctica docente. Todo ello favorece la gestión del aula, la participación de los estudiantes y la mejora de su competencia matemática.

## 6. Referencias

- Beltrán-Pellicer, P. y Alsina, Á. (2022). La competencia matemática en el currículo español de Educación Primaria. *Márgenes Revista de Educación de la Universidad de Málaga*, 3(2), 31-58.
- Beltrán-Pellicer, P. y Martínez-Juste, S. (2021a). Enseñar a través de la resolución de problemas. *Suma*, 98, 11-21.
- Beltrán-Pellicer, P. y Martínez-Juste, S. (2021b). La resolución de problemas, mucho más que un eslogan. *Entorno Abierto*, 42, 13-16.
- Buform, A. y Fernández, C. (2014). La coordinación de la idea de unidad en la representación de fracciones impropias. *Actas del XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. CEAM, pp. 491-500.
- Buform, A., Llinares, S. y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista mexicana de investigación educativa*, 23(76), 229-251.
- Díaz, J., Batanero C. y M. J. Cañizares, M. J. (1996). Azar y probabilidad. Síntesis.
- Domenech, A. y Martínez-Juste, S. (2019a). Actividades de razonamiento "up and down" para trabajar las fracciones en 1º de ESO. *Entorno Abierto*, 29, 13-18.
- Domenech, A. y Martínez-Juste, S. (2019b). Actividades con fracciones en 1º de ESO: fracción como medida, sentido numérico, up and down e invención de problemas. *Actas JAEM "Un Atlántico que suma"* 19, pp. 328-347.
- Domenech, A. y Martínez-Juste, S. (2021). Acercándonos a la probabilidad en 1.º ESO. *Entorno Abierto*, 39, 7-11.
- Escolano, R. y Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1(1).
- Freyre, P. (1998). Pedagogía de la autonomía. *Educación*, 5(1), 67-74.
- Lewis, C., Perry, R. y Hurd, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: A theoretical model and North American case. *Journal of mathematics teacher education*, 12(4), 285-304.
- Martínez-Juste, S. (2020). Elaboración y consolidación de secuencias didácticas innovadoras de matemáticas en secundaria mediante el desarrollo de Lesson Studies. Libro de actas de CIMIE19: AMIE.
- Martínez-Juste, S. (2022). Diseño, implementación y análisis de una propuesta didáctica para la proporcionalidad en el primer ciclo de secundaria [Tesis doctoral], Universidad de Valladolid.
- Martínez-Juste, S. y Domenech, A. (2019). Lesson study para innovar en matemáticas. *Entorno Abierto*, 30, 7-10.
- Martínez-Juste, S., Oller-Marcén, A. M., Muñoz-Escobedo, J. M. y Beltrán-Pellicer, P. (2022). Sobre la regla de tres y la proporcionalidad aritmética. *La Gaceta de la RSME*, 25(2), 353-371.