

**Más allá de la Relatividad Especial: de sistemas  
microscópicos a sistemas macroscópicos  
Problema del balón de fútbol (Soccer ball problem)**

Trabajo de fin de grado realizado por el estudiante  
**Alfredo SERRANO JIMÉNEZ**

bajo la supervisión del profesor  
**José Luis CORTÉS AZCOITI**  
(Departamento de Física Teórica, Universidad de Zaragoza)

Grado de Física, 4º  
Universidad de Zaragoza

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Conceptos previos</b>	<b>5</b>
2.1. DSR (Doubly Special Relativity) . . . . .	5
2.2. Principio de la localidad relativa . . . . .	6
<b>3. Problema del balón de fútbol (Soccer ball problem): introducción teórica</b>	<b>10</b>
<b>4. Posibles soluciones al problema del balón de fútbol</b>	<b>11</b>
4.1. Cuerpos microscópicos y macroscópicos: leyes de conservación . . . . .	11
4.2. Sistemas compuestos en DSR, acotados según el número de constituyentes microscópicos . . . . .	13
4.3. Estados de muchas partículas y la densidad de energía como cota . . . . .	15
4.4. Aproximación geométrica: localidad relativa y elección de coordenadas . . . . .	17
4.5. Detección directa y efectos cuánticos sobre observables macroscópicos. El centro de masas (CM)	22
4.6. El problema del espectador y la longitud de coherencia . . . . .	26
4.7. El 'funcionamiento' de un balón. Propuesta de interpretación física . . . . .	30
<b>5. Consideraciones finales</b>	<b>31</b>
<b>6. Índice de abreviaturas</b>	<b>32</b>

# 1. Introducción

El problema de la Gravedad Cuántica (QG) surge a raíz de la unificación de dos partes de la Física: la Mecánica Cuántica (parte cuántica) y la Relatividad General (parte gravitatoria). La Mecánica Cuántica queda incorporada, de forma más detallada y precisa, en la Teoría Cuántica de Campos, formalismo usado para describir las interacciones entre partículas elementales despreciando efectos gravitatorios, y que se formula en un espacio-tiempo plano (minkowskiano). La Relatividad General, por su parte, estudia la influencia gravitatoria de la materia (partículas y cuerpos macroscópicos) desde un punto de vista clásico, ignorando sus propiedades cuánticas (especialmente significativas en el caso de las partículas).

Por separado, son teorías exitosas: aunque ambas posean ingredientes comunes, como la existencia del espacio-tiempo, su forma de enfocarlos es distinta según el ámbito de aplicación de cada teoría. La Teoría Cuántica de Campos se ciñe al ámbito microscópico; la Relatividad General, a escalas macroscópicas. Las dos permiten aproximaciones complementarias a la fenomenología y a los experimentos con una gran fiabilidad. El problema surge al mezclar ambas visiones. Como decimos, una de las teorías ignora efectos considerados en la otra y viceversa. De hecho, al juntar ambas, llegamos a resultados aparentemente contradictorios, según nuestra perspectiva actual, uno de los cuales estudiaremos con detalle en este trabajo. [1]

Así, cabe preguntarse cómo es esta teoría de la QG. Podemos buscar pistas mediante un análisis fenomenológico (fenomenología de la QG) [2]. Según las principales hipótesis y argumentos, la Gravedad Cuántica se manifestaría, a escalas de energía  $E$  bajas (como las accesibles en experimentos de laboratorio en la actualidad), en forma de correcciones ínfimas, prácticamente nulas, a las teorías que utilizamos habitualmente. Dichas correcciones serían del orden del cociente  $(E/E_P)^m$ , con  $m > 1$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) y  $E_P \sim 10^{28}$  eV la energía de Planck. Por tanto, los efectos gravitatorios a nivel cuántico resultan ser despreciables (y viceversa).

En cambio, a escalas de energías superiores, como las del Universo primitivo, cuando  $E \sim E_P$ , los efectos de QG se manifiestan y son igualmente relevantes. Procesos como colisiones de partículas a esas energías no pueden ignorar los efectos gravitatorios y viceversa. Analizar esas situaciones permitiría obtener resultados fenomenológicos que apoyasen unas u otras teorías. Sin embargo, nuestra tecnología actual nos impone limitaciones que impiden reproducir procesos a este régimen de energías.

El problema de QG se puede abordar bajo diferentes enfoques, especialmente según el tratamiento de la gravedad desde un punto de vista relativista (interacciones gravitatorias o estructuras espacio-temporales) o de partículas (gravitón como bosón mediador). Esto nos lleva a distinguir entre varias aproximaciones.

En primer lugar, tenemos el régimen de agujero negro cuántico, que se basa en suponer que aparece una energía  $E \sim E_P$  en una región muy pequeña, de orden de la longitud de Planck  $r \sim l_P = \sqrt{\hbar G_N} \sim 10^{-35}$  m, como consecuencia de un proceso de colisión entre dos partículas que intercambian entre sí una energía  $E \sim E_P$ . Tal concentración de energía llevaría a la aparición de un agujero negro planckiano, de tiempo de vida del orden del tiempo de Planck  $t_P \sim 10^{-44}$  s. Si queremos calculamos el valor de  $r$ , la obstrucción que encontramos es que, como nunca hemos podido reproducir experimentalmente un fenómeno de colisión de esas características, no sabemos cómo calcularlo.

Ingenuamente, podemos intentar estimar  $r$  aplicando la Mecánica Cuántica, pues la región donde se localiza esa energía es del orden de  $l_P$ , es decir, muy pequeña, y por tanto aparecerían fenómenos cuánticos. Otra posibilidad nos la proporciona la Relatividad General, pues la densidad de energía por unidad de volumen que se concentra en esa región es del orden de  $E_P/l_P$ , es decir, muy grande. Cuánticamente,  $r$  se caracteriza según la longitud de onda Compton,  $r = r_c$ ; según el enfoque relativista,  $r$  es del tamaño del radio de Schwarzschild,  $r = r_s$ . Sus expresiones son diferentes:

$$r_c \sim \frac{\hbar}{M} \quad r_s \sim G_N M \sim \frac{l_P^2 M}{\hbar}$$

con  $G_N$  la constante de gravedad newtoniana y  $M$  la masa acumulada en dicha región. De este modo, en general, obtenemos resultados para  $r$  diferentes si aplicamos una u otra fórmula.

Sin embargo, cuando se tiene  $\hbar/M \sim l_P$  (régimen de agujero negro cuántico), concuerdan las predicciones de ambas expresiones, es decir,  $r_c \simeq r_s \sim l_P$ , lo que conlleva que los efectos de QG son relevantes. Aunque se conjetura sobre la posibilidad de estudiar este régimen en ciertos agujeros negros, o en otros que se evaporan -si existe la radiación de Hawking realmente-, no existen evidencias experimentales al respecto.

A continuación, consideremos la aproximación según la Física de Partículas, partiendo de que la interacción gravitatoria viene mediada por el hipotético gravitón. Daría lugar a correcciones a grandes distancias, en las que la gravedad se puede caracterizar según la interacción newtoniana. Las correcciones al potencial newtoniano [6, 7],

$$\Delta V_{Newton} \sim \frac{\hbar G_N^2 M}{r^3} = \frac{l_P^2}{r^2} V_{Newton}$$

serían muy pequeñas (del orden de  $10^{-58} V_{Newton}$  para escalas de longitud no inferiores a  $\sim 10^{-6}$  m, cota típica mínima para el tratamiento newtoniano de la gravedad).

Después, se tiene el régimen del espacio-tiempo cuántico, según el que la geometría espacio-temporal no es clásica (espacio-tiempo no plano) y los puntos del espacio-tiempo están cuantizados, como si se tratase de un teselado. En este sentido, ha habido propuestas de experimentos que podrían ser sensibles a la escala fundamental del espacio-tiempo (ST) cuántico, como comentaremos más adelante (por ejemplo, el experimento pensado indicado en [3] y brevemente comentado en la subsección 4.5.). Existen, además, enfoques adicionales, como considerar una Mecánica Cuántica en un espacio-tiempo curvo.

¿Cómo se ha desarrollado, hasta ahora, la fenomenología de la QG? Históricamente, la QG comienza a tratarse de forma indirecta, investigándose el límite clásico de la QG. Las primeras referencias a marcos de coexistencia entre gravedad y Mecánica Cuántica se remontan a los estudios de Chandrasekhar sobre las enanas blancas [8, 9], desarrollados en los años 30, en los que se combinan propiedades cuánticas (principio de exclusión de Pauli, principalmente) y gravitatorias. Ya en los años 70-80, en los experimentos COW (por los primeros en llevar a cabo ese tipo de experimentos: Colella, Overhauser y Werner) [10], se busca estudiar el efecto del campo de gravedad terrestre en experimentos de interferometría de materia, tratándose de obtener la ecuación de Schrödinger bajo la influencia de dicho campo. En los años 80, Anandan y otros autores [11, 12] estudian cómo pueden ser los efectos gravitatorios sobre los estados cuánticos.

Por otra parte, aparecen argumentos relacionados con la caracterización de un espacio-tiempo cuantizado a pequeñas distancias, introduciéndose, con ello, el análisis a escalas de Planck. Ya en 1965, Mead [13] plantea el posible ensanchamiento de las líneas espectrales asociado a tomar  $l_P$  como escala mínima de longitud (mínima incertidumbre en longitud). En los años 80 y principios de los 90, aparecen estudios sobre los efectos de la escala de Planck en la coherencia en estados cuánticos, como por ejemplo uno sobre violaciones de la simetría CPT inducidas a esa escala [14, 15]. Otras propuestas destacadas versan sobre la teoría de cuerdas no crítica [14, 15] y sobre posibles violaciones en Mecánica Cuántica (formalismo "primary-state-diffusion") [16].

Pero todos estos son trabajos preliminares. La verdadera fenomenología de QG surge a mediados de los 90, cuando comienzan a plantearse ciertas hipótesis en las que la magnitud del efecto de QG contemplado depende de un cierto parámetro adimensional libre, que suele ser el cociente entre  $l_P$  y una escala de longitudes del fenómeno analizado. Estos enfoques no permiten avanzar en la resolución del problema de QG (no se mejora la sensibilidad del fenómeno hasta la escala de Planck), pero sí sirven de base para establecer la fenomenología desarrollada en los años posteriores. De hecho, entre 1997 y 2000, se plantean ciertos fenómenos astrofísicos en los que se podrían observar (no realizar experimentalmente) efectos de QG como por ejemplo el de los rayos cósmicos de ultra alta energía (UHECR) [17, 18], que comentaremos brevemente en el apartado 2.1, o los asociados a GRB's (estallidos de rayos gamma) [19, 20] o blazares [19, 20].

Estamos destacando la importancia de la escala de Planck como escala característica para que los efectos de QG sean relevantes. Hay diferentes argumentos a favor de esta idea. Dos de los más significativos son, quizás, los que indicamos a continuación. Uno de ellos se basa en la combinación de las constantes fundamentales  $\hbar$ ,  $c$  y  $G_N$ , que nos indican efectos cuánticos, relativistas y gravitatorios respectivamente. Y es que podemos relacionarlas mediante un parámetro con dimensiones de energía,

$$\sqrt{\frac{\hbar c^5}{G_N}} \sim 10^{28} \text{ eV} \sim E_P$$

que es del orden de la energía de Planck. Esa combinación de efectos nos reproduce un marco con los ingredientes de una teoría cuántica de la gravedad (de la QG), y la escala de energías que reproducen es la escala de Planck.

Otro argumento destacado sería el de la no unitariedad de la Teoría Cuántica de Campos (QFT) efectiva para la interacción gravitatoria [21]. Una QFT efectiva consiste en una QFT que introduce ciertos efectos suprimidos por una escala de alta energía en el formalismo. La unitariedad, que se verifica en la mayor parte de dichas QFT efectivas, nos da un criterio de escalas de colapso de QFT's. Para la interacción gravitatoria, la no unitariedad de su QFT se produce a escalas de energía  $E \sim E_P$ , en consonancia con lo comentado en estas líneas.

Hemos hablado de escalas típicas y de argumentos, pero no tenemos (todavía) evidencias experimentales sólidas en relación con la QG. A nivel experimental, hay que recordar que buscamos efectos muy pequeños en orden de magnitud (del orden de  $(l_P/l_{char})^m$ , con  $l_{char}$  la escala de longitudes del fenómeno y  $m > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ). Esto dificulta el tratamiento experimental de la QG, pero también simplifica la búsqueda de las condiciones favorables para los experimentos al ser éstas muy restrictivas y especiales. En el laboratorio, suponiendo  $m = 1$ , podemos llegar, en el caso más optimista, a que ese cociente sea del orden de  $\sim 10^{-16}$ . En el terreno astrofísico-observacional, como hemos comentado antes-, en contextos como los sugeridos a finales del pasado siglo, el caso más favorable, con  $m = 1$ , nos lleva a obtener  $l_{char} \sim 10^{-27}$  m, con lo que el cociente  $l_P/l_{char}$  es del orden de  $\sim 10^{-8}$ . Esto conlleva que podemos detectar, en ese tipo de fenómenos, energías  $E \sim 10^{-8} E_P = 10^{11} \text{ GeV} = 10^{20} \text{ eV}$  (la energía máxima de los UHECR). Otra alternativa esperanzadora se basa en la amplificación de efectos muy pequeños, un método planteado para estudiar, por ejemplo, el decaimiento del protón [1].

Lo que sí es claro es que el problema de la QG nos llevará a un cambio de paradigma teórico sustancial, del tipo del que se tuvo al pasar de la Mecánica Clásica a la Mecánica Cuántica. Existen bastantes aproximaciones

a una teoría de la QG, siendo de las más destacadas teorías como la de la Loop Quantum Gravity (LQG), la Teoría de Cuerdas Crítica o aproximaciones basadas en técnicas de renormalización perturbativa. Las ideas más destacadas comparten elementos en común como la ruptura, a escala planckiana, de simetrías espacio-temporales clásicas (Lorentz y Poincaré), de la simetría CPT o la decoherencia y las modificaciones en el principio de incertidumbre de Heisenberg.

Lo que es claro es que acabaremos convergiendo a la teoría de la QG a partir de teorías e hipótesis parciales, tal y como se hizo al construir la Mecánica Cuántica, por ejemplo (teoría de Planck, modelo atómico de Bohr, principio de exclusión de Pauli, etc.). Esas teorías nos permitirían ir resolviendo subproblemas de la QG. Sobre uno de ellos girará el trabajo en sí: el problema de cómo modificar la relación de dispersión relativista,

$$E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2$$

con  $\mathbf{p}$  el trimomento de la partícula o sistema de partículas y  $m$  su masa. Las correcciones asociadas a efectos de QG dependen de  $E_P$  (o de  $m_P \sim 10^{-5}g$ , masa de Planck), y resultan ser, para átomos y partículas, despreciables, mientras que llegan a ser sustancialmente grandes para la materia usual (como por ejemplo un balón de fútbol). El problema de compatibilizar una modificación de la relación de dispersión relativista con los regímenes macroscópico y microscópico al mismo tiempo, conocido como *soccer ball problem* (problema del balón de fútbol), es el que nos ocupará en lo que sigue.

En el segundo punto de este trabajo, comentamos algunos conceptos teóricos previos de utilidad para contextualizar y entender mejor el problema del balón de fútbol y algunas de sus propuestas de solución, conceptos desarrollados en el marco de la investigación en QG. En el tercer apartado, nos centraremos en este problema en sí, introduciéndolo brevemente. En la cuarta sección, discutiremos diferentes propuestas de solución, planteadas en los últimos años (este problema, aún sin resolver, es de bastante actualidad en el marco de la fenomenología de la QG), entre las que figuran propuestas de diferentes autores así como dos propuestas nuevas planteadas en este trabajo (los últimos dos apartados). Finalmente, en el punto final, reflejamos diferentes consideraciones finales a modo de conclusión.

Para facilitar la comprensión de este trabajo, añadimos al final un índice de abreviaturas (nótese que ya nos ha aparecido alguna en esta introducción). Asimismo, hemos dado una lista de referencias bibliográficas, artículos prácticamente en su totalidad, para que el lector que así lo desee pueda profundizar en la comprensión de los temas tratados.

## 2. Conceptos previos

### 2.1. DSR (Doubly Special Relativity)

El SBP surge, de manera natural, en teorías que van más allá de la relatividad especial. Una de la teorías de ese grupo más estudiadas en el marco de la investigación sobre QG es la teoría de la relatividad especial doble o deformada (Double -o Deformed- Special Relativity, o DSR por sus siglas en inglés), planteada por primera vez en referencias como [17, 23, 24, 25]. Esta teoría consiste en modificar la acción del grupo de Lorentz en el espacio de momentos  $\mathcal{P}$ , de forma que, preservando el principio de relatividad o de equivalencia de los sistemas inerciales, nos aparezcan *dos escalas invariantes* en lugar de una sola -la velocidad de la luz en el vacío  $c$ , invariante en SR-. El otro invariante para todo observador sería la energía de Planck  $E_P$  (o bien la longitud de Planck  $l_P$ ).

Pero vayamos al principio. ¿De dónde viene el interés por una teoría de tales características? Tal y como destacan diferentes autores [22, 25, 26], posiblemente hay dos motivaciones fundamentales. Por un lado, una motivación teórica, basada en las hipótesis de QG que hablan de una cuantización del espacio-tiempo a escala de Planck, como hemos comentado en la introducción. Esa escala marca el umbral en el que la invariancia Lorentz es violada y deja de tener validez (por encima de  $E_P$  o por debajo de  $l_P$ , pues ambas marcan la escala de aparición de los efectos de QG, como hemos discutido en la introducción). En estas condiciones, la geometría del ST deja de ser suave para convertirse en una geometría discreta y cuantizada (podemos imaginarlo pensando en la típica venda con agujeros, en la que los nodos de la red serían los puntos del ST permitidos). Otro argumento teórico en favor de ir más allá de SR es el que nos dan la QG y la teoría de cuerdas, en relación con la no conmutatividad del ST [25].

Por otro lado, existe una motivación experimental, basada en la existencia de consecuencias fenomenológicas (observables) que podrían mostrar la necesidad de ir más allá del marco de SR. Un ejemplo típico de esta última motivación es el caso de los rayos cósmicos de ultra alta energía (UHECR), partículas -fundamentalmente protones- que se producen en galaxias activas lejanas y que se observan a partir de los procesos que originan al cruzar por la atmósfera terrestre [17]. Los protones que conforman estos UHECR se desplazan hacia nosotros si poseen una energía  $E_{prot} < E_{GZK}$ , con  $E_{GZK}$  el límite de Greisen-Zatsepin-Kuzmin (GZK), que es una energía umbral. Si tienen una energía mayor que esta energía umbral,  $E_{prot} > E_{UHECR}$ , los protones reaccionan con la radiación del fondo cósmico de microondas (CMBR) y dejan de propagarse por el espacio, de forma que no los podemos detectar. El valor del límite GZK calculado en el marco de SR es de  $E_{GZK} \approx 5 \cdot 10^{19} eV$ , que es próximo a la máxima energía de los UHECR observados,  $\sim 10^{20} eV$ , como hemos dicho en el apartado 1. Si hubiera observaciones de rayos cósmicos más allá de la escala de energías provenientes de fuentes suficientemente alejadas de nosotros, nos encontraríamos con una contradicción.

Una manera de escapar de esta contradicción consistiría en modificar la relación de dispersión de SR a escala  $L_P$ , tal y como se plantea en [20]:

$$E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2 + \alpha E^3 + \dots \quad \text{donde } \alpha \sim l_P$$

Esta idea ya sugiere que estos efectos se explican yendo más allá de la SR, de forma que la relación de dispersión de SR sufre modificaciones. Hay dos posibilidades fundamentales de ir más allá de SR [27]: o bien se olvida el principio de relatividad y se supone que existe un sistema de referencia privilegiado, o bien se preserva ese principio y se modifica la acción del grupo de Lorentz en el espacio de momentos  $\mathcal{P}$ , y, por extensión, se modifica la invariancia Poincaré. Esta última posibilidad, fundamento de DSR, nos permite no renunciar al principio de relatividad.

Cuando hablamos de que el grupo de Lorentz actúa de forma diferente sobre  $\mathcal{P}$ , nos referimos a que modificamos las transformaciones de Lorentz usuales de SR incluyendo términos no lineales. Esto lleva asociados los cambios en la relación de dispersión (hablamos de relación de dispersión modificada (MDR)), como lo es, por ejemplo, la arriba indicada), lo que conduce, asimismo, a cambios en las leyes de conservación a partir de una ley de composición modificada (MCL), que en adelante denotaremos por  $\oplus$ .

Pero existe un problema: en SR, no existen escalas de longitudes invariantes, sino que existe contracción de longitudes en función del observador  $O$  bajo la acción del grupo de Lorentz (transformaciones de Lorentz en SR). Este hecho es el que nos obliga a redefinir las transformaciones de Lorentz introduciendo la escala de Planck como escala invariante... y, de esta forma, llegamos a las teorías de DSR. Decimos teorías, pues, tal y como se muestra en [25], se puede definir más de una teoría DSR (pues las no linealidades en la ley de composición o en la relación de dispersión modificadas no están sujetas a ninguna restricción especial adicional a su dependencia con la escala de Planck).

El principio de relatividad se preserva en el marco de DSR. Esto se cumple si las transformaciones de Lorentz modificadas preservan la propiedad de grupo [25]. En SR, el grupo de transformaciones lineales compatible con la cinemática es el grupo de Lorentz con 6 generadores independientes -3 para rotaciones y otros 3 para boosts-. Para que el grupo de Lorentz sea aplicable en DSR, exigimos que la acción del grupo de Lorentz sea no lineal.

Pero sí aparecen modificaciones en los conmutadores de los generadores del grupo de Lorentz con operadores traslación, o lo que es lo mismo, deformaciones en el grupo de Poincaré.

Ahora bien, ¿cómo obtenemos las transformaciones de Lorentz no lineales? El procedimiento usual consiste en definir, en el espacio de momentos  $\mathcal{P}$ , variables auxiliares (o pseudovariables) para la energía  $E = p_0$  y el trimomento  $\mathbf{p} = p_\mu$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ ,  $\epsilon$  y  $\pi$  respectivamente. Las transformaciones invertibles  $U$  que nos conectan  $E$  y  $\mathbf{p}$  con las pseudovariables son no lineales. Las pseudovariables transforman linealmente bajo la acción del grupo de Lorentz -transformaciones  $T$ -, como en SR, tras lo que se aplica  $U^{-1}$  sobre las variables auxiliares transformadas  $\epsilon'$  y  $\pi'$ , lo que nos lleva a  $E'$  y  $\mathbf{p}'$ , las variables físicas de  $\mathcal{P}$  transformadas no linealmente. Aunque volveremos a comentarlo en alguna de las propuestas de solución del SBP, merece la pena mostrar un esquema conceptual, donde  $p = (E = p_0, \mathbf{p})$  y  $\pi = (\epsilon = \pi_0, \boldsymbol{\pi})$ :

$$\begin{array}{ccc}
 p & \rightarrow & p' = U^{-1}(\pi') = U^{-1}[T(\pi)] = U^{-1}[T[U(p)]] = [U^{-1}TU](p) \equiv \tilde{\tau}(p) \quad (\tilde{\tau} \text{ tr. no lineal}) \\
 \downarrow U(p_0; p) & & \uparrow U^{-1}(\epsilon'; \boldsymbol{\pi}') \\
 \pi \equiv U(p) & \rightarrow & \pi' = T(\pi) \quad (T \text{ transformación lineal})
 \end{array}$$

Ahora bien, el marco de DSR nos introduce algunos problemas conceptuales [25], entre los que, como hemos dicho al principio, está el SBP. Por otra parte, como se indica en [22], este procedimiento utilizado para construir transformaciones de Lorentz no lineales en  $\mathcal{P}$  no es tan directo al aplicarlo a los cuadvectores del ST. En SR, el grupo de Lorentz es el único que deja invariante la métrica de Minkowski con el origen de coordenadas como escalar de Lorentz (no cambia al aplicarle una transformación de Lorentz). Así, la aditividad en la energía y el momento es consecuencia de la invariancia traslacional local. La introducción de la MCL en el marco de DSR implica que la invariancia traslacional se realiza de forma diferente a SR. Entre sus posibles propuestas de realización, la más consistente formulada hasta ahora es la de la localidad relativa, que nos será de utilidad para otra propuesta de solución del SBP y que desarrollamos de manera resumida en el siguiente subapartado.

## 2.2. Principio de la localidad relativa

El principio de localidad relativa surge al plantearnos si realmente existe, o no, un espacio-tiempo, y si éste es un invariante universal, i.e., si todos los observadores comparten el mismo espacio-tiempo. Tal y como se planteó en SR, el espacio-tiempo (ST) se define como un marco absoluto, de forma que existe siempre simultaneidad en la localización de eventos: incluso observadores muy alejados entre sí ubican un evento cualquiera (por ejemplo, una colisión de partículas) en el mismo suceso o punto del ST. Esta nueva hipótesis nos lleva a que la localidad se convierte en un concepto relativo al observador, y supone un marco en el que, como explicaremos más adelante, el SBP es evitable. Rescataremos una idea que el físico Max Born introdujo por primera vez en los años 40 para resolver el problema de las divergencias en el ultravioleta en el marco de la electrodinámica clásica, aunque sin éxito [28]: la existencia de un espacio de momentos curvo con una posición extremal (origen  $p = 0$ ).

Tal y como Einstein postuló, los sucesos se identifican dando coordenadas espacio-temporales a eventos distantes mediante el envío y la posterior recepción de pulsos de luz. [29] Así, midiendo parámetros de los cuantos de luz como su energía  $\hbar\omega$  como la dirección de incidencia, construimos una proyección del espacio-tiempo. Pero esta información que medimos, en particular la de la energía de los fotones recibidos, parece ser menos esencial y, por lo tanto, 'no relevante' en comparación con la localización de sucesos... sin un motivo aparente.

Pero algunos autores [30] plantean un cambio de paradigma en el que el espacio de momentos cuadrdimensional  $\mathcal{P}$  juega un papel más fundamental que el espacio-tiempo. En efecto, sirviéndonos de una aproximación en la que los efectos cuánticos y gravitatorios son despreciables -tomando  $\hbar, G_N \rightarrow 0$ -, pero manteniendo su cociente como una escala invariante, la masa de Planck  $M_P = \sqrt{\hbar/G_N}$ , a la que asociamos la aparición de nuevos fenómenos. Adicionalmente, nuestra suposición implica que la longitud de Planck tiende a cero,  $l_P = \sqrt{\hbar G_N} \rightarrow 0$ , luego no influirán efectos asociados a un espacio-tiempo cuántico en nuestro tratamiento. Como  $M_P \neq 0$  y  $l_P = 0$ , esto nos sugiere que, como planteábamos, el espacio de momentos es más fundamental.

Vamos a considerar un observador  $O$ , con sus correspondientes detectores de energía  $E$  y el trimomento  $\mathbf{p}$  de las partículas, y con un reloj con el que mide su tiempo propio. El observador puede tomar dos tipos de medidas de cuatrimomentos en  $\mathcal{P}$ : sobre partículas individuales, lo que le permite determinar la métrica, y sobre muchas partículas, para obtener la conexión. Suponemos que existe, para cada detector, una coordenada preferente en el espacio de momentos  $\mathcal{P}$ , que llamamos  $k_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , que miden la energía y el [tri]momento con respecto al estado fundamental, origen de  $\mathcal{P}$ , que tomamos como  $k_\mu = 0$  por comodidad y que está bien definido.

Discutimos brevemente la determinación de la métrica y de la conexión según lo recién indicado:

*Métrica* La métrica nos permite determinar la distancia entre puntos en  $\mathcal{P}$ .  $O$  mide la masa relativista de una partícula de cuatrimomento  $p$  en su entorno,  $m \equiv E(p_\mu = 0)$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ , como la geodésica desde la partícula al origen o posición del observador:

$$D^2(p) \equiv D^2(p, 0) = m^2$$

Además,  $O$  puede determinar la energía cinética  $T$  de una partícula de cuatrimomento  $p'$  local al (en las inmediaciones del) observador, moviéndose respecto a éste. (El concepto de localidad lo precisaremos después). La medida de  $T$  define la distancia geodésica entre la partícula de cuatrimomento  $p$  y la partícula de cuatrimomento  $p'$  (supuesto que  $O$  percibe la partícula con  $p$  en reposo respecto a la partícula con  $p'$ ). Si ambas son de igual masa, es decir, si  $D(p) = D(p') = m$ , esa geodésica tiene la ecuación

$$D^2(p, p') = -2mT$$

Ambos tipos de medida nos permiten construir una métrica en  $\mathcal{P}^3$ , definida según

$$dk^2 = h^{\mu\nu} dk_\mu dk_\nu$$

*Conexión* La conexión define el camino más directo (recto) entre dos puntos. Una propiedad matemática relevante que usamos es que el álgebra determina la conexión  $\Gamma$  de una variedad dada [30]. Por ello, para obtener la conexión y sus variables asociadas (torsión y curvatura), caracterizaremos la ley de composición de los cuatrimomentos para partículas en interacción (habiendo un número  $n_1$  de partículas inicialmente y  $n_2$  partículas al final). En general, la ley de composición de cuatrimomentos modificada es no aditiva, y, por tanto, no lineal. Esto viene asociado a la idea de que  $\Gamma$  es no trivial. Para dos partículas de cuatrimomentos  $p^A$  y  $p^B$ , esto lo denotamos como

$$p'_\mu = (p^A \oplus p^B)_\mu$$

Y podemos definir la antípoda de un momento,  $\ominus p$  como el momento que cumple que

$$(\ominus p) \oplus (p \oplus q) = q$$



A partir de esta álgebra modificada, obtenemos parámetros característicos de la geometría de  $\mathcal{P}$  como son la propia conexión  $\Gamma_\rho^{\mu\nu}$ , la torsión  $T_\rho^{\mu\nu}$  y la curvatura  $R_\sigma^{\mu\nu\rho}$ , cuyas definiciones generales son, para partículas que interactúan con cuádrimomentos iniciales  $p_\mu$ ,  $q_\mu$  y  $r_\mu$

$$\text{Conexión: } \Gamma_\rho^{\mu\nu}(0) = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial q_\nu} ((p \oplus q)_\rho) |_{p,q=0} \quad \text{Torsión: } T_\rho^{\mu\nu}(0) = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial q_\nu} [(p \oplus q)_\rho - (p \oplus q)_\rho] |_{p,q=0}$$

$$\text{Curvatura: } R_\sigma^{\mu\nu\rho}(0) = 2 \frac{\partial}{\partial p_{\{\mu}} \frac{\partial}{\partial q_{\nu\}}} \frac{\partial}{\partial r_\rho} [(p \oplus q) \oplus r - p \oplus (q \oplus r)]_\sigma |_{p,q=0}$$

(Las llaves en los superíndices, en la definición de curvatura, indican antisimetrización) La torsión da información sobre la asimetría en la ley de composición modificada, mientras que la curvatura caracteriza la falta de asociatividad en dicha ley.

Para calcular esos parámetros fuera del origen, se define un transporte paralelo en  $\mathcal{P}$ , algo en lo que no es necesario profundizar aquí.

En general, una ley de composición modificada no ha de ser necesariamente asociativa, algo justificado por la diferencia entre procesos que, para la ley de composición aditiva usual  $+$ , concuerdan. Es decir, por ejemplo, un proceso con partículas entrando con cuádrimomentos iniciales  $p$ ,  $q$  y  $r$  cumple que  $(p \oplus q) \oplus r \neq p \oplus (q \oplus k)$ . Esto conlleva que existe *curvatura en el espacio de momentos*  $\mathcal{P}$ , algo que matemáticamente es consistente al ser  $R \neq 0 \Leftrightarrow (p \oplus q) \oplus r \neq p \oplus (q \oplus k)$ .

En este sentido, un análisis dinámico [30] justifica un cambio de paradigma: cuando un observador  $O$  se encuentra en la posición espacio-temporal en que ocurre un evento de interacción, o en un entorno muy cercano, todas las líneas de mundo implicadas en la interacción convergen al mismo evento (al mismo punto) en el espacio-tiempo. Sin embargo, cuando la interacción ocurre a una distancia suficientemente grande del  $O$ , el observador  $O'$  allí situado observa la interacción ocurriendo en un conjunto distante de sucesos, dispersados a lo largo de una cierta región del espacio-tiempo, centrada en el punto donde verdaderamente ocurre el evento interactivo. Es decir,  $O'$  percibe una separación aparente de eventos que corresponden a la misma interacción. Esta idea clave sobre la localización de sucesos en el espacio-tiempo asociada a la curvatura de  $\mathcal{P}$  es la base del principio de localidad relativa [30]:

**Principio de la localidad relativa** La física tiene lugar en el espacio de fase  $\mathcal{P}$  y no existe una proyección global invariante que describa los procesos en el espacio-tiempo. A partir de sus medidas, observadores locales pueden construir descripciones de partículas moviéndose e interactuando en un espacio-tiempo, pero diferentes observadores construyen distintos espacio-tiempos, que son porciones de  $\mathcal{P}$  dependientes del observador.

La relatividad en la localización de eventos tiene otras implicaciones. Por un lado, que las traslaciones en las coordenadas espacio-temporales dependen de la energía y del momento de las partículas con las que interacciona la partícula en traslación, a causa de la no linealidad de las leyes de conservación y de la consecuente curvatura en  $\mathcal{P}$ . Esto lleva a que las coordenadas locales para un observador  $O$  se mezclen con la energía y el momento al trasladarse a la posición distante de un observador  $O'$ . Por otro lado, como nos dice el enunciado del principio, el espacio-tiempo se hace local para cada observador.

Aún no hemos precisado nada sobre la geometría concreta del espacio de momentos, sino que hemos dado definiciones generales sobre sus parámetros, como la curvatura o la torsión. Y es que diferentes principios físicos imponen restricciones a la geometría de  $\mathcal{P}$  [30]:

1. *Principio de correspondencia* SR describe bien los procesos con momentos  $|\mathbf{p}| \ll m_0$ , con  $m_0$  una escala que, a priori, coincidiría con la masa de Planck  $M_P$  según lo ya discutido en el marco de QG.
2. *Principio de equivalencia débil*: El álgebra (ley de composición modificada) y la geometría de  $\mathcal{P}$  no están influidos por el tipo o las características de las partículas.
3. *Principio de equivalencia fuerte*: Se verifica la relación entre masa y energía relativista,  $E = mc^2$  ( $E = m$  si  $c = 1$ ).
4. *Máxima simetría*: Este principio, el más restrictivo de los cuatro, indica que la geometría de  $\mathcal{P}$  es homogénea e isótropa, así como la invariancia Lorentz y traslacional de  $\mathcal{P}$ .

¿Qué implica cada principio?

1.  $\Rightarrow \mathcal{P}$  tiene una métrica lorentziana,  $g^{\mu\nu}(p) dp_\mu dp_\nu$ . Esto conlleva que  $\Gamma$ ,  $T \propto M_P^{-1}$ , así como que  $R \propto M_P^{-2}$ .

2.  $\Rightarrow$  La ley de composición  $\oplus$  no depende de propiedades de las partículas como la carga o el espín, siendo la misma para todo tipo de partículas.

Además, para partículas idénticas -concretamente bosones- se verifica, si su estadística no cambia, que no podemos ordenarlos mediante la ley de composición, es decir, el orden no influye en la composición modificada. A raíz de esto, el producto es simétrico, lo que implica que la conexión no tiene torsión:  $T = 0$ .

3.  $\Rightarrow$  La conexión y la métrica están relacionadas, de forma que la conexión es compatible con la métrica.
4.  $\Rightarrow$  Existe una única geometría dual fija asociada a  $\mathcal{P}$ , que es la geometría plana correspondiente a un ST local a cada observador y en el que se cumple la localidad relativa. De este modo, para cada evento de interacción, existe una familia de observadores locales para los que la interacción es local, i.e., la miden en un único suceso espacio-temporal.

Por otra parte, garantizamos la compatibilidad del espacio de momentos curvo  $\mathcal{P}$  con la invariancia Lorentz y con la SR mediante una elección apropiada de coordenadas (cumpliendo con las restricciones de arriba). El que el espacio de momentos sea curvo, con presencia de un punto extremal (nuestro origen de coordenadas), implica que, al contrario que en el espacio-tiempo plano de SR, existen sistemas de coordenadas privilegiados para caracterizarlo. Esta idea es crucial no solo en este caso, sino también para escapar del SBP, como veremos posteriormente en una de las propuestas de solución al problema. En concreto, existe un sistema de coordenadas muy especial en torno al origen  $p = 0$ : el de coordenadas normales de Riemann, que cumple que la distancia al origen  $D(p)$  es la de SR, es decir,

$$D^2(p) = p_0 - \mathbf{p} = m^2$$

En este sistema, la información sobre la curvatura del espacio de momentos está codificada en la ley de composición modificada. Asimismo, la hipótesis de homogeneidad hecha en (4.) permite extender las coordenadas de un sistema coordinado cualquiera a todo  $\mathcal{P}$ , con lo que los generadores del grupo de Lorentz satisfacen el álgebra de Lorentz como en SR.

Así pues, hemos definido un cambio de paradigma equivalente al vivido al pasar de la noción de espacio absoluto a la de espacio-tiempo: al hacer no lineal la ley de composición aditiva de velocidades, preservando el principio de relatividad, surge una escala invariante, la velocidad de la luz  $c$ , que caracteriza esas deformaciones no lineales. Como consecuencia de la existencia de este invariante, podemos intercambiar distancias y tiempos, lo que da lugar a la mezcla de coordenadas espaciales y temporales y a la aparición del espacio-tiempo. La simultaneidad de sucesos en el espacio-tiempo se convierte en un concepto relativo a los observadores.

En este nuevo cambio de paradigma, las no linealidades sobre la ley de composición de momentos en interacciones, manteniendo el principio de relatividad, aparece una nueva escala invariante para medir las deformaciones, referida a los momentos: la masa de Planck  $M_P$  (a priori).  $M_P$ , en combinación con  $\hbar$ , permite el intercambio de distancias y momentos, lo que conlleva la mezcla de coordenadas espacio-temporales con coordenadas del espacio de momentos, i.e., con energías y momentos. Esto implica que el espacio de momentos es absoluto, mientras que el espacio-tiempo local pasa a depender del observador. Así, desaparece la simultaneidad en la localización de sucesos en el espacio-tiempo para observadores suficientemente distantes entre sí, asociada a la noción de espacio-tiempo absoluto.

### 3. Problema del balón de fútbol (Soccer ball problem): introducción teórica

El problema del balón de fútbol (soccer ball problem -SBP-) es un problema que surge a la hora de definir, de forma consistente, estados de muchas partículas (régimen macroscópico) a partir de las variables energía y momento para las partículas constituyentes (régimen microscópico) cuando éstas transforman bajo transformaciones de Lorentz no lineales (modificadas). El SBP viene asociado a la composición de los cuádrimomentos (energías y momentos) correspondientes a un número  $N$  de constituyentes microscópicos fundamentales de un sólido macroscópico, para un valor de  $N$  suficientemente elevado. Al contrario de lo que sucede en SR, donde la energía y el momento totales se obtienen como la suma de energías y momentos de los constituyentes, en teorías basadas en una acción modificada del grupo de Lorentz bajo la conservación de un principio de relatividad en  $\mathcal{P}$ , como DSR, esto no resulta tan claro (véase 2.1. para el caso de DSR).

Y es que los resultados de la energía  $E$  y el trimomento  $\mathbf{p}$  obtenidos en esas teorías, mediante una relación de dispersión modificada (MDR) o mediante una ley de conservación definida a partir de una ley de composición modificada (MCL) distinta de la suma,  $\oplus \neq +$ , resultan contradictorios con lo que nosotros observamos. En una MDR, donde nos aparecen términos correctores proporcionales a la escala de Planck, este problema se adivina de forma intuitiva. Si tomamos la masa de Planck en unidades 'cotidianas',  $M_P \sim 10^{-5} g$  como escala de energía para caracterizar las no linealidades, en una relación de dispersión de la forma

$$E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2 + \lambda \frac{E^3}{M_P} + \dots$$

con  $\lambda$  un número, es sencillo ver que un objeto microscópico tiene energías  $E \ll M_P$  en varios órdenes de magnitud, de forma que la energía obtenida como resultado es igual a la obtenida según la relación de dispersión relativista,

$$E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2$$

salvo una corrección no lineal varios órdenes de magnitud menor, y, por tanto, despreciable. En cambio, un objeto macroscópico, como por ejemplo un balón de fútbol -de ahí el nombre del problema- posee fácilmente energías  $E > M_P$ , de tal forma que el término de corrección deja de ser despreciable. Esa corrección hace que la energía total del objeto macroscópico calculada según la MDR sea diferente de la  $E$  calculada mediante la relación de dispersión relativista, cuyo resultado concuerda con nuestras observaciones. Decimos entonces que aparece el SBP. (La conclusión es equivalente si, en el término que involucra el factor  $1/M_P$ , en vez de  $E^3$ , nos aparece el momento  $\mathbf{p}^3$  o términos de unidades de  $[E]^3$  que nos envuelvan productos de  $E$  y  $\mathbf{p}$ )

Otra forma de detectar el SBP consiste en tomar una ley de composición modificada (MCL) para cuádrimomentos  $p = (E, \mathbf{p})$  [22], que puede ser, para dos cuádrimomentos  $p^1, p^2$ :

$$p^1 \oplus p^2 = p^1 + p^2 + \omega \frac{1}{M_P} p^1 p^2 + \dots$$

(hablaremos de MCLs con más detalle al discutir soluciones al SBP). En esta expresión,  $\omega$  son coeficientes numéricos de orden uno (es un cuádrivector con un factor numérico por componente). Pues bien, iterando esta composición de momentos para un número  $N$  de miembros suficientemente elevado, la cantidad de términos correspondientes a la composición aditiva,  $p^1 + p^2$  en la definición de arriba, va creciendo de manera proporcional a  $N$ , mientras que el número de términos no lineales proporcionales a  $M_P^{-1}$  va creciendo con  $N^2$  al involucrarnos productos de parejas de cuádrimomentos diferentes. De nuevo, en el régimen macroscópico ( $N$  suficientemente elevado), el cuádrimomento total deja de concordar con el resultado que nosotros podemos medir, con el que sí coincide (prácticamente) el cuádrimomento total obtenido como suma de cuádrimomentos,  $p^1 + p^2 + \dots + p^N$ .

Así pues, el SBP obliga a que, de alguna forma, el formalismo de una teoría que vaya más allá de SR incluya, de manera natural, alguna diferenciación analítica entre los regímenes microscópico y macroscópico, por ejemplo a partir de una supresión de la escala  $M_P$  en un factor proporcional a una potencia  $b$  del total de constituyentes,  $(N^b M_P)^{-1}$ . Las teorías de DSR, por ejemplo, incluyen esta posibilidad de diferenciación de regímenes, aunque no está clara su implementación [17]. Esto conlleva que algunas propuestas de solución al SBP vengan del marco de DSR. Éstas y otras propuestas de solución del SBP son las que pasaremos a discutir en el apartado 4 de este trabajo.

## 4. Posibles soluciones al problema del balón de fútbol

### 4.1. Cuerpos microscópicos y macroscópicos: leyes de conservación

Una propuesta de solución del SBP se basa en las leyes de conservación modificadas para sistemas microscópicos (partículas individuales o sistemas de pocas partículas) y macroscópicos (sistemas de muchas partículas, de  $N \gg 1$  partículas), obtenidas a partir de la MCL. Y es que la introducción de efectos de QG hace no lineales las leyes de conservación de la energía  $E$  y del trimomento  $\mathbf{p}$ , así como la MCL. De acuerdo con el tratamiento de [Giovanni], podemos plantearnos dos soluciones sencillas, dependientes de la escala de Planck a primer orden (correcciones  $\sim l_P$ ). Ambas leyes de composición que propondremos se cumplen para todo sistema de referencia inercial si se verifican para uno solo de ellos. Esto nos conducirá a decir que la conservación de cuatrimomentos (de energías y momentos) se convierte en un *proceso estadístico*, obteniéndose diferentes posibles expresiones para una misma ley de conservación. Algunas de ellas coincidirán con las de las leyes de conservación en SR, y otras incorporarán las modificaciones dependientes de la escala de Planck. El promedio de esas expresiones, para un elevado número de interacciones entre partículas microscópicas 2 a 2, tenderá a las leyes de conservación relativistas. [26]

Intuitivamente, comenzamos a implementar los efectos de QG a partir de la definición de las siguientes posibles leyes de composición, para una colisión entre partículas del tipo  $A + B \rightarrow C + D$ , en lo que podríamos llamar una ley de conservación monocanal (tenemos una única expresión posible de la ley para energías y otra para trimomentos):

$$E_A + E_B - c l_P \mathbf{p}^A \mathbf{p}^B - E_C - E_D + c l_P \mathbf{p}^C \mathbf{p}^D = 0$$

$$\mathbf{p}^A + \mathbf{p}^B - l_P \frac{E_A \mathbf{p}^B + E_B \mathbf{p}^A}{c} - \mathbf{p}^C - \mathbf{p}^D + l_P \frac{E_C \mathbf{p}^D + E_D \mathbf{p}^C}{c} = 0$$

donde nos aparece la velocidad de la luz en el vacío,  $c$ . La adición de términos del tipo  $E_i \mathbf{p}^j$ ,  $i, j = A, B, C, D$  es no conmutativa, como vemos.

Sin embargo, bajo álgebras del tipo  $[x^\mu, t = x^0] = i l_P x^\mu$ ,  $[x^\mu, x^\nu] = 0$  ( $\mu, \nu = 1, 2, 3$ ), se favorece la aparición de leyes de conservación *multicanal*:

$$E_A + E_B - E_C - E_D = 0$$

$$\mathbf{p}^A \oplus \mathbf{p}^B \oplus (\ominus \mathbf{p}^C) \oplus (\ominus \mathbf{p}^D) = 0$$

donde estamos definiendo una MCL:

$$\mathbf{k} \oplus \mathbf{q} \equiv \mathbf{k} + \mathbf{q} + l_P E_k \mathbf{q}$$

donde el subíndice de  $E_k$  hace referencia al trimomento  $\mathbf{k}$  situado a la izquierda de  $\oplus$ , cuya energía asociada aparece como ese factor, y donde introducimos la antípoda de un momento  $\mathbf{p}$ ,  $\ominus \mathbf{p}$ , como

$$\ominus \mathbf{p} \equiv -\mathbf{k} - l_P E_k \mathbf{k}$$

Esta definición de la ley de composición implica que la relación entre trimomentos es no lineal, de modo que, en la relación de dispersión, nos aparecen 24 posibles leyes de conservación (*canales*), asociadas a las 24 posibles permutaciones de los trimomentos  $\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b, \ominus \mathbf{p}^C, \ominus \mathbf{p}^D$ . En este sentido, la 'ley de conservación' multicanal no es una ley de conservación bien definida. Sólo cuando se verifica que  $E_i, \mathbf{p}^i \ll |l_P|^{-1}$ ,  $i = A, B, C, D$ , los 24 canales colapsan a una única expresión, que coincide con la ley de conservación monocanal definida en el contexto de SR.

Fijémonos ahora en la ley de composición  $\oplus$  que hemos definido antes. Dicha ley, que refleja la aparición de los efectos de QG, nos muestra una no conmutatividad, en el sentido de que, dados  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$ , se tiene  $\mathbf{p} \oplus \mathbf{q} \neq \mathbf{q} \oplus \mathbf{p}$ . Por tanto, es relevante el escoger el orden de los trimomentos a uno y otro lado de  $\oplus$ . Esto se tiene incluso para partículas idénticas, siendo necesario distinguirlas según sus momentos (al tratarlos de forma no simétrica, teniendo que escoger el orden de trimomentos, lo que nos lleva a distinguirlas). Pero la 'ley de conservación' multicanal nos evita la aparición de esta aparente paradoja, pues la 'ley de conservación' multicanal no es una ley de conservación única, como en SR, sino que los posibles canales surgidos a partir de las posibles permutaciones de trimomentos se pueden ver como relaciones de conservación diferentes. Así, el resultado final es diferente a una ley de conservación al uso como en SR.

Estas leyes de conservación (en particular, la ley multicanal) están asociadas, por la existencia de un principio de relatividad, a relaciones de dispersión deformadas (MDRs) del tipo

$$E^2 = p^2 c^2 + c l_P E p^2$$

Pero nos surge un problema: mientras esta relación de dispersión nos da resultados que concuerdan con los del régimen microscópico (partículas fundamentales individuales o formando sistemas de pocos componentes), existen contradicciones cuando la aplicamos a sistemas macroscópicos (sistemas de  $N \gg 1$  partículas).

En el trabajo [26], se plantea una posible solución a esta paradoja. Para ello, nos centramos nuevamente en la ley de composición modificada  $\oplus$  y en las leyes de conservación asociadas a la misma,

$$E_A + E_B - E_C - E_D = 0$$

$$\mathbf{p}^A \oplus \mathbf{p}^B \oplus (\ominus \mathbf{p}^C) \oplus (\ominus \mathbf{p}^D) = 0$$

La ley de conservación de energías es igual que en el caso de SR. Sin embargo, el cambio viene al hablar del momento total del sistema de muchas partículas,  $\mathbf{P}$ , mediante la ley de conservación que incluye la de composición modificada  $\oplus$ . Este concepto deja de estar bien definido, operativamente hablando, a causa de la no conmutatividad de  $\oplus$ . Esto es, el momento total de un sistema de  $N$  partículas deja de ser una magnitud conservada tal que siempre es igual para las partículas entrantes como para las salientes en un proceso físico como una colisión. Esto conlleva la aparición de diferentes expresiones posibles para la ley de conservación para momentos (los llamados *canales*) con una cierta probabilidad.

Así, para un sistema de dos partículas  $A$  y  $B$  (o  $C$  y  $D$ , por ejemplo), tenemos parte de los canales coincidiendo con la ley de conservación de momentos de SR,  $\mathbf{p}^A + \mathbf{p}^B = 0$ , mientras que, en el resto,  $\mathbf{p}^A + \mathbf{p}^B \neq 0$  al aparecer términos adicionales dependientes de la escala de Planck (como veremos enseguida en un ejemplo). En esta última situación, la composición modificada de trimomentos no cumple la misma relación de dispersión que una partícula por la aparición de esas correcciones. En otras palabras: la conservación del momento se convierte en un *proceso estadístico*, pudiendo tomar un conjunto de valores con una cierta probabilidad. Dichos valores diferentes nos muestran la conservación de un mismo proceso de colisión.

En este sentido, dados dos objetos macroscópicos (por ejemplo, dos balones de fútbol, compuestos por un múltiplo del número de Avogadro,  $N_A$ , de partículas cada uno), si hacemos que colisionen entre sí, se producirán colisiones (en el sentido de procesos 2 a 2, en una aproximación sencilla) que involucren parejas de partículas, cada una perteneciente a un balón de fútbol. Cada colisión 2 a 2 puede manifestarse, en la ley de conservación de momentos, como uno de 24 posibles canales o relaciones entre los momentos iniciales y finales, de los cuales tenemos:

- 8 canales (la mayoría):  $\mathbf{p}^1 + \mathbf{p}^2 = 0$
- 4 canales:  $\mathbf{p}^1 + \mathbf{p}^2 + l_P \frac{E}{c} (\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^2) = l_P \frac{E}{c}$
- 4 canales:  $\mathbf{p}^1 + \mathbf{p}^2 - l_P \frac{E}{c} (\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^2) = l_P \frac{E}{c}$
- 4 canales:  $\mathbf{p}^1 + \mathbf{p}^2 + l_P \frac{E}{c} (\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^2) = -l_P \frac{E}{c}$
- 4 canales:  $\mathbf{p}^1 + \mathbf{p}^2 - l_P \frac{E}{c} (\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^2) = -l_P \frac{E}{c}$

En este sentido, si el número total de procesos 2 a 2 que intervienen en el sistema es muy elevado, como en la situación de dos balones de fútbol, el canal que observaremos será el promedio de todos los canales manifestados en todos los procesos 2 a 2, que, como es obvio, convergerá al resultado correspondiente a la mayoría de los canales iguales,

$$\langle \mathbf{p}^1 + \mathbf{p}^2 \rangle = 0$$

que es lo que corresponde al resultado que observamos en SR para cuerpos macroscópicos. Nótese que las correcciones presentes en varios de los posibles canales son a primer orden de la escala de Planck,  $l_P$ .

## 4.2. Sistemas compuestos en DSR, acotados según el número de constituyentes microscópicos

En esta propuesta que veremos a continuación, Magueijo y Smolin proponen la aplicación de una cota planckiana a un objeto macroscópico completo que es diferente que la que se aplica para un constituyente microscópico [25]. En concreto, ellos sugieren que, si consideramos que las correcciones no lineales a la MDR vienen divididas por la energía de Planck  $E_P$ ,

$$E^2 = m^2 + p^2 + \lambda E^3 \quad , \text{ donde } \lambda = E_P^{-1}, \lambda \sim \pm l_P$$

entonces *la cota escala con el número  $N$  de constituyentes de un objeto macroscópico*, como  $(NE_P)^{-1} = (\lambda/N)$ . De este modo, el aumento de los términos no lineales conforme crece el número de constituyentes viene suprimido por una escala cada vez mayor, y esto nos evita que, por ejemplo en la MDR, las correcciones a escala de Planck dominen sobre el resto de términos, de modo que el SBP desapareciera.

Trabajamos en el marco de DSR (apartado 2.1.), sirviéndonos del esquema conceptual de las variables  $(E, \mathbf{p})$  y sus variables auxiliares que vimos en el esquema conceptual de la página 5 para cuadvectores, en el apartado 2.1. Utilizamos la misma notación que figura en ese esquema conceptual, en particular para las transformaciones de Lorentz modificadas entre variables, así como para las transformaciones entre  $E$  y  $\mathbf{p}$  con sus correspondientes variables auxiliares.

Las transformaciones  $U$  dependen del parámetro  $\lambda = E_P^{-1}$  antes comentado, además de de la energía  $E = p^0$ , de forma que  $U \sim U(p^0, \lambda)$ . Generalmente,  $U$  no es unitaria, como sí sucede con la  $T$  del grupo de Lorentz en SR. Interesa, asimismo, que  $U$  sea singular, para que presente divergencias en  $\lambda = E_P^{-1}$ , dando lugar a dos regímenes diferentes gravitatorios como hemos comentado en la introducción sobre DSR. Además,  $U$  está sujeta a ciertas condiciones. En primer lugar,  $p$  es tal que  $E < E_P$  o  $\mathbf{p} < E_P$ , es decir,  $U$  no es una aplicación de la recta real ( $E \in [0, \infty]$ ) en la recta real, luego no es invertible más que en un subespacio del espacio de momentos  $\mathcal{P}_{inv} \subset \mathcal{P}$ . Asimismo, la imagen de  $U$  debe contener el intervalo  $[0, \infty]$  también, para que no exista violación del principio de relatividad (al actuar las transformaciones lineales  $T$  en este intervalo). Por último, como, en SR, la única energía invariante relativista es  $E_\infty = \infty$ , exigimos que, para su máximo equivalente en el espacio  $\mathcal{P}$ ,  $E_P$ , se cumpla  $U(E_P) = \infty$ .

Por otra parte, la métrica modificada (invariante asociado a la nueva acción del grupo de Lorentz en  $\mathcal{P}$ ) presenta una expresión que, de forma muy general, es:

$$\|p\|^2 = \eta^{\mu\nu} U(p_\mu) U(p_\nu)$$

donde recuperamos el caso de SR si  $U(p_\alpha) = p_\alpha$ ,  $\alpha = \mu, \nu$ . Esta métrica deformada nos conduce a una relación de dispersión de la forma mostrada al principio de la página, o, en general, a una expresión

$$[U(p)_0]^2 - [\mathbf{U}(p)]^2 = m^2 \quad \text{donde } U(p)_0 = E f_1(E, \lambda), \quad \mathbf{U}(p) = \mathbf{p} f_2(E, \lambda)$$

de forma que se cumple que  $U \circ (p^0, p^\mu) = U \circ (E, \mathbf{p}) = (E f_1, \mathbf{p} f_2)$ .

Ahora bien, este tratamiento realizado para el caso de partículas individuales, ¿qué generalización tiene para el caso de sistemas compuestos de dos o más partículas? No resulta trivial aplicar las nuevas leyes de transformación, dado que esto nos conduce a inconsistencias. Y es que, si definimos una ley de composición modificada (MCL) para cuadrimentos (energías y momentos), recordando que  $U(p^i) \equiv U(p_0, \lambda; p^i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , tenemos, para un conjunto de  $N = 2$  partículas:

$$P^{(12)} = U^{-1}(p_0, \lambda)[U(p_0, \lambda; p^1) + U(p_0, \lambda; p^2)]$$

o, en general, para un sistema de  $N$  componentes ( $\sum_+$  sirve para indicar aditividad en la ley de composición, i.e., la suma usual  $+$  de términos),

$$P^{(1\dots n)} = U^{-1}(p_0, \lambda) \left[ \sum_{+, i=0}^N U(p_0, \lambda; p^i) \right]$$

Pero esto implica que un sistema de  $N$  componentes transforma como cada cuadrimento individual  $p_i$ , satisfaciendo las mismas relaciones de dispersión pero con una masa  $M^{(1\dots n)} = \sum_{+, i=1}^n m_i$ . Con la definición de  $\tilde{\tau}$  dada antes, si un sistema de  $n$  componentes cumple que su energía total es  $E^{(1\dots n)} \ll E_P$ ,  $E^{(1\dots n)}$  no puede exceder, en ningún caso,  $E_P$ . Esto supone una contradicción con lo observado en la naturaleza: cualquier objeto macroscópico (como un balón de fútbol) posee una energía  $E > E_P$ .

Una posible forma de solucionar esta inconsistencia se basa en *modificaciones de los umbrales/cotas* que aparecen en las transformaciones. Es decir, que las transformaciones inversas  $U^{-1}$  no dependen de  $\lambda$ , sino de

$\lambda/N$  para un sistema de  $N$  partículas, de forma que la ley de composición para los cuadrimentos de  $N$  partículas es:

$$P^{(1\dots n)} = U^{-1} \left( p_0, \frac{\lambda}{N} \right) \left[ \sum_{i=0}^n U(p_0, \lambda; p^i) \right]$$

Esta MCL es conmutativa y no asociativa. Además, si  $E^i \ll E_P = \lambda^{-1}$ , la energía y el momento  $E$  y  $\mathbf{p}$  se convierten en cantidades aproximadamente aditivas, de forma que tendemos a la ley de composición aditiva de SR. Por último, si un constituyente de un sistema de  $n$  componentes es planckiano ( $m^i = \infty$  para algún  $i$ ),  $M^{(1\dots n)} = \infty$ ; esto conlleva que todas las partículas del sistema son también planckianas y que el sistema alcanza su máxima energía posible,  $E_{\text{máx}} = NE_P$ .

En general, la MCL se puede escoger de diferentes maneras, de forma que se respete la condición de que  $\lambda$  vaya dividida -limitada- por el número total de partículas del sistema en  $U^{-1}$

$$P^{(1\dots N)} = U^{-1} (p_0, g(n, \lambda)) \left[ \sum_{+,i=0}^N U(p_0, \lambda; p_i) \right]$$

Otra forma de denotar esta MCL para cuadrimentos individuales que estamos usando es  $\oplus$ , como ya hemos indicado:

$$P_{(1\dots n)} = p^1 \oplus p^2 \oplus \dots \oplus p^N$$

Asimismo, la transformación  $\tilde{\tau}$  obtenida en el esquema de la página 5 se convierte, para el cuadrimento total del sistema de partículas, en:

$$\tilde{\tau}(p_{(1\dots N)}) = [U^{-1}(p^0, \lambda/N)TU(p^0, \lambda/N)](p_{(1\dots N)})$$

En cuanto a la MDR de la forma general mostrada antes bajo el parámetro umbral  $\lambda$ , los cuadrimentos individuales (de partículas individuales) las satisfacen de forma que su energía total cumple que  $E_i \ll \lambda^{-1} = E_P$ . En cambio, los sistemas de  $N$  componentes satisfacen las mismas relaciones de dispersión, pero dependiendo del umbral modificado  $\lambda/N$ , y su energía total ha de verificar que  $E^{(1\dots N)} \ll NE_P$ . La cota  $E_P$  se incrementa en una cantidad igual al número total de constituyentes, de forma que los sistemas macroscópicos cumplen la misma condición que las partículas microscópicas y se resuelve el SBP. Este tratamiento, asimismo, trae otra consecuencia importante: la distinción entre los regímenes microscópico y macroscópico.

Adicionalmente, la distinción macroscópico-microscópico se realiza en nuestro formalismo suponiendo clásicas las partículas, pero éstas son cuánticas en un marco de QG. Concretamente, son excitaciones de campos cuánticos a las que corresponde asociar un espacio de Fock. La forma de adaptar el formalismo aquí detallado al marco cuántico depende fundamentalmente de reemplazar la ley de composición aditiva utilizada en nuestro marco usual de Mecánica Cuántica por la ley de composición modificada  $\dot{+}$ . No detallamos más al respecto, aunque puede consultarse algún ejemplo de hamiltonianos libre y de interacción modificados en [25].

### 4.3. Estados de muchas partículas y la densidad de energía como cota

Otra de las aproximaciones al SBP consiste en ver, nuevamente en el marco de DSR, una dependencia de los efectos de QG con el volumen, lo que llevaría a considerar la *densidad de energía como cota superior* [32], en lugar de energías o masas de Planck. En el contexto de DSR, ya las partículas microscópicas perciben efectos de QG, y no tenemos ninguna incongruencia en la escala, pues su energía es  $E \ll m_P$ . En cambio, para objetos macroscópicos, la energía resulta ser mucho mayor que la escala  $E \gg m_P$ , de forma que nos aparece nuevamente el SBP. Tenemos, pues, un problema derivado de la cota de energía, solucionable si definimos una densidad de energía  $\rho_{max}$  tal que todos los objetos cumplan

$$\frac{E}{V} \ll \rho_{max} = \frac{M_P}{l_P^3}$$

y, como  $V$  aumenta también para objetos macroscópicos, la densidad de energía asociada no se dispararía, de forma que esa condición se cumpliría.

El punto de partida, nuevamente, se basa en jugar con cuadrimomentos (que ahora funcionarán como variables auxiliares)  $p_\mu = (p_0 = E, \mathbf{p})$  y con cuadvectores de onda  $k_\mu = (k_0 = \omega, \mathbf{k})$ , en el sistema natural de unidades ( $c = \hbar = 1$ ). Inicialmente, consideramos una serie de transformaciones entre ellas.  $p_\mu$  se relaciona con  $k_\mu$  mediante una transformación general, que definimos como

$$p \rightarrow k = F(p) = (E f(p), \mathbf{p} g(p))$$

$$p = G(k) \leftarrow k$$

siendo necesario que al menos una de las componentes de  $k_\mu$  involucre la escala de Planck, para así poder implementar los efectos de QG.

En este caso, definimos la relación de dispersión modificada (MDR) en el espacio de momentos:

$$m^2 = [G(k)]^2$$

mientras que asumimos que  $p_\mu$  verifica la relación de dispersión relativista usual.

Relacionamos ahora cuadvectores  $p$  y  $p'$ , por un lado, y  $k$  y  $k'$  por otro. Asumimos que, en el espacio de cuadrimomentos, por un lado, actúan las transformaciones de Lorentz,  $L$ , de forma que se verifica que  $p'_\mu = L p_\mu$  y se preserva la invariancia Lorentz:  $E^2 - \mathbf{p}^2 = E'^2 - \mathbf{p}'^2$ . En cambio, las transformaciones en el espacio de cuadvectores de onda son modificadas: las llamaremos  $\tilde{L}$ . Reproducimos un cuadro explicativo de transformaciones con distinta notación en este caso, pero que es análogo al visto en la página 5, en la sección 2.1.:

$$p = G(k) \leftrightarrow p' = L(p)$$

$$\updownarrow \qquad \qquad \updownarrow$$

$$k = F(p) \leftrightarrow k' = F(p') = F'(L(p)) = F(L(G(k))) \equiv \tilde{L}(p)$$

siendo  $\tilde{L}(k)$  una transformación no lineal en el espacio de momentos al ser  $F$  una transformación no lineal. Una consecuencia de este hecho es que el espacio de momentos presenta una cierta curvatura asociada a una métrica dependiente de la energía, como se ve al integrar a todos los posibles valores de  $k$  y al relacionar esa integral con la correspondiente a los cuadrimomentos:

$$\int d^4 k = \int \left| \frac{\partial F}{\partial p} \right| d^4 p$$

siendo  $|\partial F / \partial p| = \sqrt{g(E)}$ , con  $g(E)$  la métrica, que depende de la energía.

Esta discusión es la correspondiente a sistemas de partículas individuales, pero... ¿qué pasa con sistemas de muchas partículas? Podemos estudiar un caso sencillo: el sistema de dos partículas. Una pregunta que podemos hacernos es qué cantidades permanecen conservadas, dados sus cuadrimomentos y cuadvectores de ondas  $p^i$  y  $k^i$ ,  $i = A, B$ , respectivamente. Podemos plantearnos que se conserva la ley de composición aditiva (usual) de ambas cantidades,  $P_{AB}$  o  $K_{AB}$ , ya que, en DSR, se puede construir más de una cantidad conservada:

$$P^{AB} = p^A + p^B \qquad K^{AB} = k^A + k^B$$

Sin embargo, la cantidad  $P^{AB}$  no nos aporta información relevante para nuestro problema al ser una suma usual de cuadrimomentos que transforman linealmente según Lorentz. Por su parte, es fácil ver que  $K^{AB}$  no transforma apropiadamente, pues hemos definido las transformaciones  $\tilde{L}(k^i) = k'^i$  como no lineales ( $\tilde{L}(k^i)$  es función sólo de  $k^i$ , no de la suma  $k^i + k^j$ ), y esto implica que:

$$K'^{AB} = \tilde{L}(K^{AB}) = \tilde{L}(k^A + k^B) \neq \tilde{L}(k^A) + \tilde{L}(k^B) = k'^A + k'^B$$



Dar por válida una ley de composición de esta forma nos conduciría a que, si tomásemos dos vectores de ondas diferentes,  $k^C$  y  $k^D$ , tales que su suma fuese  $k^C + k^D = K^{AB} = k^A + k^B$ , tendríamos que

$$K'^{AB} = \tilde{L}(k^A + k^B) = \tilde{L}(k^C + k^D), \text{ pero } \tilde{L}(k^A) + \tilde{L}(k^B) \neq \tilde{L}(k^C) + \tilde{L}(k^D)$$

Así las cosas, buscaremos otra alternativa.

Como ambas leyes de composición presentan inconsistencias con nuestro marco teórico, nos preguntarnos por una MCL en el espacio de funciones de onda, cuyas transformaciones asociadas son no lineales,

$$K^{AB} = k^A \oplus k^B = F(p^A + p^B)$$

Estudiemos cómo transforma: teniendo en cuenta que, como hemos visto antes,  $F \circ L \circ G = \tilde{L}$ :

$$K'^{AB} = \tilde{L}(k^A \oplus k^B) = F\{\tilde{L}[G(k^A \oplus k^B)]\} = F[\tilde{L}(p^A + p^B)] = F(p'^A + p'^B) = k'^A \oplus k'^B$$

de forma que la transformación de  $K^{AB}$  bajo la nueva MCL está bien definida.

Esta MCL nos lleva a nuevas leyes de conservación modificadas. En efecto, considerando un proceso del tipo  $A + B \rightarrow C$ , con  $K^{AB}$  el vector de ondas de la partícula C, tenemos la siguiente ley de conservación:

$$k_A \oplus k_B = k_{AB} \quad \Rightarrow \quad k_A \oplus k_B - k_{AB} = 0$$

donde el vector de ondas  $K^{AB}$  pertenece a un espacio de fases  $\epsilon_{AB}$  que engloba a los espacios de fases de las partículas A y B,  $\epsilon_A$  y  $\epsilon_B$ , respectivamente. Tenemos que tener en cuenta que  $k^A \in \epsilon_A$  y  $k^B \in \epsilon_B$ , respectivamente, de forma que la suma no aditiva pertenece al espacio  $\epsilon_{AB}$  y nos permite construir ese espacio de fases conjunto. Ya para tres o más partículas, la suma no aditiva nos conduce a canales de adición, como hemos comentado antes.

Ahora bien, esta suma no aditiva nos lleva a que existe una cota superior debida a la no linealidad de la transformación  $F$  del espacio de momentos. Hay que recordar que, en las teorías de DSR, definimos una composición de la recta real en ella misma, lo que nos restringe a un subespacio caracterizado por los estados de energía menor que la escala de Planck,  $E < E_P$  (o bien, si trabajamos con unidades naturales,  $E \approx M$ , de forma que  $M < M_P$ ). Este límite superior es fácilmente excedido por sistemas de muchas partículas, puesto que la suma no aditiva de energías arbitrariamente grandes transforma en una suma no aditiva de energías arbitrariamente grandes, de forma que tenemos SBP. Luego suponer que la suma no aditiva es de igual naturaleza para sistemas de dos o tres partículas, por ejemplo, y para sistemas de  $N \gg 1$  partículas no es consistente con lo que observamos.

Un intento de desarrollar una Teoría Cuántica de Campos que incluya la existencia de una MDR y de una MCL [32] nos lleva a una nueva idea para solucionar el SBP. En vez de comparar la energía de un objeto macroscópico con  $E_P$ , pasamos a comparar *densidades de energía*  $\rho$  de un objeto macroscópico por unidad de volumen  $V$  con la energía  $E_P$  por unidad de volumen planckiano  $l_P^3$ :

$$\rho = E/V \ll M_P/l_P^3$$

sería la condición límite para los regímenes macroscópico ( $E \ll E_P \approx M_P$ ) o microscópico ( $E \gg E_P \approx M_P$ ). Así, para sistemas microscópicos, de muy pequeño volumen, se cumple esta condición al ser su masa muy pequeña también. En cambio, al aumentar la masa  $M$  de un sistema de muchas partículas, como también aumenta su volumen (proporcional a  $l^3$ , con  $l$  una escala de longitud para el objeto), la densidad de energía  $\rho$  suele disminuir, luego la condición se respeta. Por otra parte,  $\rho$  es una cantidad intensiva, de forma que la adición de nuevas partículas no nos modifica prácticamente su valor si  $\rho \ll M_P^4$  [32].

Ahora bien, si aplicamos este planteamiento de forma teórica a la fenomenología, encontramos discrepancias. Un ejemplo consiste en el estudio de los fotones emitidos en estallidos de rayos gamma (GRBs). Al calcular la densidad de energía asociada a estos fotones, y al compararla con los resultados experimentales, se encuentran discrepancias de 57 órdenes de magnitud entre ambos resultados. (En este ejemplo, se asume que todos los sistemas de referencia tienen igual importancia, es decir, que no hay un sistema preferencial, conservándose la invariancia Lorentz). En concreto, el resultado calculado es 57 órdenes de magnitud menor ( $\sim 10^{-76} M_P/l_P^3$ ), lo que lo haría inobservable. Resumiendo, tenemos una hipótesis teóricamente consistente basada en DSR, pero cuyos efectos serían muy difícilmente observables a nivel fenomenológico actualmente.

#### 4.4. Aproximación geométrica: localidad relativa y elección de coordenadas

Otra posible propuesta de resolución del SBP se basa en una aproximación geométrica al problema, a partir del principio de localidad relativa (véase sección 2.2. del trabajo). En este sentido, la aparición de un espacio de momentos curvo  $\mathcal{P}$  invariante da lugar a cambios no lineales en las relaciones de dispersión y en las leyes de conservación, que caracterizan la métrica y la conexión del espacio, respectivamente. Estos cambios están asociados a una acción no lineal del grupo de Lorentz en  $\mathcal{P}$ .

Las relaciones de dispersión modificadas (MDR) las obtiene un observador dado al medir la distancia entre una partícula y el origen del espacio de momentos con respecto a una métrica lorentziana  $g^{\mu\nu}(p)dp_\mu dp_\nu$ ,  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  (recordemos que  $\mathcal{P}$  es el espacio dual al espacio-tiempo). Presentan la forma general  $D^2 = m^2$ , de acuerdo con el formalismo empleado al hablar de la localidad relativa. Haciendo uso de nuestra libertad de elección de coordenadas, podemos escoger unas en las que la métrica de Lorentz sea la suma de la de Minkowski y de términos proporcionales a potencias inversas de  $M_P$ ,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \frac{E}{M_P}(\eta^{\mu\nu} - \eta^{00})$$

y, por tanto, en las que podemos expandir, en la vecindad del origen de  $\mathcal{P}$ ,  $p = 0$ , la MDR como:

$$D^2(p) = D^2(p, 0) = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - \lambda \frac{E}{M_P} \mathbf{p}^2 + \dots = E^2 - \mathbf{p}^2 - \lambda \frac{E}{M_P} \mathbf{p}^2 + \dots = m^2$$

con  $\lambda$  un número.

Por su parte, la conexión en  $\mathcal{P}$  está asociada a una ley de composición modificada (MCL)  $\oplus$ , como ya hemos comentado anteriormente. Ésta determina leyes de conservación modificadas. Así, para un proceso  $A + B \rightarrow C$ , por ejemplo, se tiene la ley de conservación de momentos  $p_\mu^A \oplus p_\mu^B = p_\mu^C$ . Nuevamente, eligiendo coordenadas apropiadas, podemos expandir la composición  $\oplus$  introduciendo la escala de Planck

$$p_\mu^A \oplus p_\mu^B = p_\mu^A + p_\mu^B - \Lambda_\mu^{\alpha\beta} \frac{1}{M_P} p_\alpha^A p_\beta^B + \dots$$

con  $\Lambda_\mu^{\alpha\beta}$  coeficientes numéricos adimensionales dependientes de la conexión,  $\Lambda_\mu^{\alpha\beta} = M_P \Gamma_\mu^{\alpha\beta}$

El problema que encontramos respecto a este tratamiento es que nos sirve para el régimen microscópico únicamente, pero... ¿son estas fórmulas consistentes con la caracterización de objetos macroscópicos compuestos por un número muy grande de partículas o constituyentes fundamentales? (Es decir, el SBP de nuevo). En esta alternativa, la idea clave consiste en la elección de un *sistema de coordenadas apropiado* para 'evitar' el SBP [33]. Al igual que en una variedad curva (no plana) existen sistemas de coordenadas privilegiados para su caracterización (por ejemplo, las coordenadas esféricas en el caso de una geometría esférica), hacemos uso de esta noción al decir que el SBP nos aparece por no escoger las coordenadas adecuadas para caracterizar la geometría no trivial de  $\mathcal{P}$ . Esto nos permitirá aumentar la cota de  $M_P$  a  $NM_P$  para un objeto de  $N$  componentes, que, cuando  $N \rightarrow \infty$ , nos dará  $(NM_P)^{-1} \rightarrow 0$ .

En efecto, una primera aproximación ingenua nos da pistas de esta modificación. El asunto consiste en tomar un objeto macroscópico, por ejemplo un balón de fútbol, y definirlo como un sistema de  $N \gg 1$  componentes que, por simplicidad, suponemos de igual masa  $m$  y cuadrimomento  $p_\mu$ . A priori, podemos pensar que la masa y el cuadrimomento (energía y trimomento totales) del balón son, respectivamente, la composición aditiva de masas y momentos individuales de los constituyentes,

$$M_{SB} = Nm \quad P_\mu^{SB} = Np_\mu$$

aunque esta 'aditividad' no ha de cumplirse necesariamente en general, es decir, el caso más general será el de que  $p_{SB}$  venga de una composición no aditiva, algo que discutiremos después en más profundidad.

Sustituyendo la expresión de  $M_{SB}$  en la relación de dispersión desarrollada en potencias inversas de  $M_P$  -hasta primer orden-, nos aparecen las modificaciones en el umbral, que aumenta hasta  $NM_P$ :

$$N^2 \left( E^2 - p^2 - \lambda \frac{E}{M_P} \mathbf{p}^2 + \dots \right) = N^2 m^2 \quad \Rightarrow \quad E_{SB}^2 - P_{SB}^2 - \lambda \frac{E_{SB}}{NM_P} P_{SB}^2 + \dots = M_{SB}^2$$

Aplicando la definición 'ingenua' de  $P_{SB}$  a la ley de conservación modificada, para balones de fútbol A y B (en lugar de partículas) con  $N$  componentes y momentos iguales para cada constituyente,  $p_\mu^A$  y  $p_\mu^B$  respectivamente ( $P_\mu^m = Np_\mu^m$ ,  $m = A, B$ ), obtenemos:

$$P_\mu^A \oplus P_\mu^B = P_\mu^A + P_\mu^B - \frac{1}{NM_P} \Lambda_\mu^{\alpha\beta} P_\alpha^A P_\beta^B + \dots$$

de forma que el término no lineal de la ley de composición va dividido por  $NM_P$  también.

Vamos a considerar ahora un caso más general, donde el momento total de un balón de fútbol no es la composición aditiva de los momentos de los constituyentes y donde tiene relevancia la elección de coordenadas, como sucede en la localidad relativa. El sistema de coordenadas escogido deberá reproducir el límite de SR: el origen de coordenadas ha de estar en  $p = 0$  y, en cuanto a la MDR y a la MCL, se recuperan sus expresiones en SR cuando  $M_P \rightarrow \infty$ . Las expresiones más generales de ambas son, respectivamente, las que hemos visto al principio de la página,

$$D^2(p) = E^2 - \mathbf{p}^2 - \lambda \frac{E}{M_P} \mathbf{p}^2 + \dots = m^2 \quad p_\mu^A \oplus p_\mu^B = p_\mu^A + p_\mu^B - \frac{1}{M_P} \Lambda_\mu^{\alpha\beta} p_\alpha^A p_\beta^B + \dots$$

Pero existen sistemas de coordenadas para los que estas relaciones se modifican de forma especial. De nuevo, tenemos que escoger sistemas de coordenadas especiales para la métrica y para la conexión, de acuerdo con la localidad relativa.

1. Métrica: Un ejemplo típico de coordenadas que concuerdan con el límite de SR, como hemos comentado, son las coordenadas normales de Riemann (las geodésicas desde el origen a la partícula observada son líneas rectas), en las que la MDR es igual a la relación de dispersión de SR, luego la información sobre la curvatura del espacio de momentos debe venir codificada en la MCL en este caso:  $D^2(p) = E^2 - \mathbf{p}^2$
2. Conexión: Un sistema coordinado especialmente útil es el de las coordenadas de conexión normales, donde las geodésicas que conectan diferentes partículas son rectas, incluso si la conexión es no métrica, es decir, si la métrica y la conexión no concuerdan (si no existe dependencia mutua entre ambas). En este sistema de coordenadas  $\hat{p}$ , la particularidad es que los momentos paralelos componen aditivamente,  $p\hat{p} \oplus q\hat{p} = (p+q)\hat{p}$ . Asimismo, las coordenadas tienen la siguiente expresión si desarrollamos hasta orden  $M_P^{-1}$ :

$$\hat{p}_\mu = f_\mu(p) = p_\mu + \frac{1}{2M_P} \Lambda_\mu^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + \dots$$

mientras que ley de composición modificada es, en estas coordenadas y desarrollando en potencias inversas de  $M_P$ , análoga a la expresión general:

$$f(f^{-1}(\hat{p}) \oplus f^{-1}(\hat{q})) = \hat{p}_\mu + \hat{q}_\mu - \frac{1}{M_P} \Lambda_\mu^{\alpha\beta} \hat{p}_\alpha \hat{q}_\beta + \dots$$

Ambos sistemas de coordenadas son compatibles cuando la conexión es métrica, es decir, cuando  $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$ . De este modo, las geodésicas asociadas a la métrica y a la conexión en los sistemas de coordenadas especiales concuerdan, lo que nos permitirá formular nuestro tratamiento del SBP.

Pasemos ahora a analizar diferentes situaciones: un caso ideal, en el que los componentes de los balones no experimentan fluctuaciones de ningún tipo, y otro, en el que asumimos movimiento cuasirígido (caso de pequeñas fluctuaciones).

### A. Caso ideal (sin fluctuaciones en los momentos de los constituyentes)

Planteamos la situación de la siguiente forma. Sean dos balones de fútbol A y B, de igual número de partículas  $N$ , las cuales suponemos de igual masa  $m$  y cuadrimomentos  $p^\mu$  por simplicidad. Modelizamos cada uno de estos balones como 'nubes de partículas' desplazándose por el espacio de momentos curvo en direcciones paralelas o coincidentes y mismo sentido, de tal forma que las distancias entre las partículas son lo suficientemente pequeñas para que hablemos de objetos macroscópicos cohesionados. Obviamente, al considerar interacciones entre partículas, entra en juego la conexión a través de la MCL para establecer las nuevas leyes de conservación. Como los sistemas coordinados especiales que hemos escogido son compatibles por lo antes comentado, y hemos dicho que la métrica es la de SR, toda la información sobre la curvatura del espacio de momentos, y, por tanto, la modificación en el umbral de valor  $NM_P^{-1}$  nos deberá aparecer en la MCL. (Figura 1)

Modelizamos las interacciones entre los balones A y B como un conjunto de interacciones 2 a 2 entre parejas de componentes, uno de una pelota y el otro de la otra. Los procesos interactivos son de esta forma: una partícula de un balón, por ejemplo el A, emite un fotón que absorbe una partícula del otro balón, el B en este caso. Para ello, asumimos que los componentes fundamentales son átomos. Luego hay que definir, en términos de la MCL, las relaciones de conservación de cuadrimomentos para cada proceso: si llamamos  $k$  al cuadrimomento del fotón y  $p$  y  $p'$  los cuadrimomentos de los átomos, nos queda

$$\text{Emisión de } \gamma \text{ por un átomo de A: } p_\mu = p'_\mu \oplus k_\mu \quad \text{Absorción de } \gamma \text{ por un átomo de B: } p_\mu \oplus k_\mu = p'_\mu$$

y, si despejamos  $k_\mu$ , podemos hallar la ley de conservación entre los cuadrimomentos de los átomos de A y B,

$$[((\ominus p'^A)_\mu \oplus p_\mu^A) \oplus p_\mu^B] = p_\mu^B$$

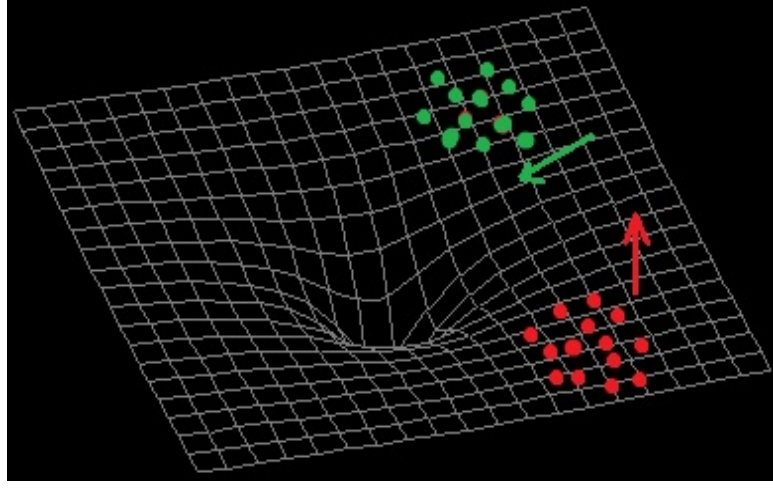


Figura 1: Representación idealizada de dos sistemas de partículas moviéndose por  $\mathcal{P}$  en el caso ideal (en el marco de la propuesta de solución basada en la localidad relativa). A sería una agrupación de partículas, por ejemplo las rojas; B sería la otra (o viceversa)

donde  $\ominus$  es la antípoda de  $p$ , ya definida al hablar de localidad relativa (apartado 2.2.), que admite desarrollo en potencias inversas de  $M_P$  como vemos a continuación -hasta primer orden-,

$$(\ominus p)_\mu = -p_\mu - \frac{1}{M_P} \Lambda_\mu^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + \dots$$

Si tenemos una ley de conservación de cuádrimomentos para los objetos macroscópicos A y B igual que la expresada unas líneas más arriba para los dos átomos en interacción de A y B, nos aparecería el SBP al no haber alteración en la escala  $M_P^{-1}$ . Es por ello necesario que definamos una MCL no trivial.

La ley de conservación modificada puede generalizarse a todas las parejas de un átomo de A y otro de B, con cuádrimomentos  $p_\mu^{i,j} = p_\mu^i \forall i, i = A, B; j = 1, \dots, N$ , pues hemos supuesto iguales los cuádrimomentos de los constituyentes para cada balón. Nos queda la siguiente expresión:

$$[(\ominus p'^{A,i})_\mu \oplus p_\mu^{A,i}] \oplus p_\mu^{B,i} = p_\mu^{B,i}$$

y, si expandimos en potencias inversas de  $M_P^{-1}$ , truncando a primer orden (aplicando el desarrollo de  $\hat{p} \oplus \hat{q}$  arriba indicado), llegamos a

$$p_\mu^{A,i} + p_\mu^{B,i} - \frac{1}{M_P} \Lambda_\mu^{\alpha\beta} p_\alpha^{A,i} p_\beta^{B,i} + \dots = p_\mu^{A,i} + p_\mu^{B,i} - \frac{1}{M_P} \Lambda_\mu^{\alpha\beta} p_\alpha^{A,i} p_\beta^{B,i} + \dots$$

Como indicábamos, tomamos ahora una MCL de forma general, de modo que la composición de momentos microscópicos en el balón es diferente de la suma usual, al menos a priori:

$$P^A = \sum_{\oplus, i} p^{A,i} = p^{A,1} \oplus (p^{A,2} \oplus (\dots \oplus p^{A,N}) \dots)$$

pero, bajo la utilización de coordenadas de conexión normales, como hemos supuesto iguales los cuádrimomentos de los constituyentes de cada balón por separado, estos componen aditivamente, y se verifica que  $P_\mu^j = N p_\mu^j, j = A, B$ . Esto nos conduce a un resultado revelador si vamos al desarrollo de la ley de conservación de los cuádrimomentos  $p^{i,j}$  hasta orden  $M_P^{-1}$  expresado arriba y multiplicamos a ambos lados por  $N$ :

$$P_\mu^A + P_\mu^B - \frac{1}{NM_P} \Lambda_\mu^{\alpha\beta} P_\alpha^A P_\beta^B + \dots = P_\mu^A + P_\mu^B - \frac{1}{NM_P} \Lambda_\mu^{\alpha\beta} P_\alpha^A P_\beta^B + \dots$$

$$\mathbf{P}_\mu^A + \mathbf{P}_\mu^B = \mathbf{P}_\mu^A + \mathbf{P}_\mu^B - \frac{1}{NM_P} \Lambda_\mu^{\alpha\beta} (\mathbf{P}_\alpha^A \mathbf{P}_\beta^B - \mathbf{P}_\alpha^B \mathbf{P}_\beta^A)$$

de forma que obtenemos una modificación del umbral en un factor  $N$  y nos desaparece el SBP. De hecho, cuando  $N \gg 1$  ( $N \rightarrow \infty$ ), recuperamos las leyes de conservación de SR.

Es interesante ver que el tomar átomos como componentes fundamentales de cada balón de fútbol no parece ser descabellado. En efecto, teniendo en cuenta que  $N \sim N_A \sim 10^{23}$  al menos, y que  $M_P \sim 10^{-5}g$ ,

$1/NM_P \sim 10^{-18} \simeq 0$ , de forma que obtenemos los resultados usuales de SR para la conservación de energía y momento.

### B. Caso de movimiento cuasirrígido: aproximación perturbativa (pequeñas fluctuaciones en los momentos de los constituyentes)

En este caso, el cuadrimento de cada constituyente  $p^{i,j}$  se modifica en una pequeña variación  $\delta p^{i,j}$ . Insistimos, esa variación ha de ser lo suficientemente pequeña para que el objeto macroscópico  $i$ , el balón, mantenga su cohesión interna sin desintegrarse. Así, nuestro punto de partida es:

$$p_\mu^{i,j} = p_\mu^i + \delta p_\mu^{i,j} \equiv \bar{p}_\mu^i + \delta p_\mu^{i,j}$$

donde adoptamos la notación  $\bar{p}_\mu^i$  para dejar claro que lo que coincidía con el cuadrimento de cada partícula del objeto  $i$  en el caso ideal -sin fluctuación- es realmente un cuadrimento promedio para cada constituyente en esta situación. Impondremos, por simplicidad, la igualdad de este cuadrimento promedio para todas las partículas.

De forma consistente, el cuadrimento del balón de fútbol de  $N$  componentes pasa a ser, si componemos los cuadrimentos de los constituyentes de forma aditiva ('naivamente'):

$$P_\mu^{i,adit} = \sum_{+,j=1}^N p_\mu^{i,j} = \sum_{+,j=1}^N (\bar{p}_\mu^i + \delta p_\mu^{i,j}) = N\bar{p}_\mu^i$$

donde nos hemos servido de la propiedad de que, en coordenadas normales, los cuadrimentos promedio, iguales para todo  $j$ , componen aditivamente por ser paralelos, y donde hemos impuesto que la suma de todas las fluctuaciones sobre los constituyentes se anula, i.e.,  $\sum_{+,j=1}^N \delta p_\mu^{i,j} = 0$ .

Vamos a considerar, de nuevo, la situación general en que la ley de composición de cuadrimentos no es aditiva:

$$P_\mu^{i,gen} \equiv P_\mu^i = \sum_{\oplus,j=1}^N p_\mu^{i,j} = \sum_{\oplus,j=1}^N (\bar{p}_\mu^i + \delta p_\mu^{i,j}) = (\bar{p}_\mu^i + \delta p_\mu^{i,1}) \oplus [(\bar{p}_\mu^i + \delta p_\mu^{i,2}) \oplus [\dots \oplus (\bar{p}_\mu^i + \delta p_\mu^{i,N})] \dots]$$

donde, aplicando la expansión de la ley de composición modificada -MCL- en potencias inversas de  $M_P$  definida antes, se obtiene que

$$P_\mu^i = \sum_{+,j=1}^N \bar{p}_\mu^{i,j} - \frac{1}{M_P} \Lambda_\mu^{\alpha\beta} \sum_{+,j=1}^N \sum_{+,k=1}^j (\bar{p}_\alpha \delta p_\beta^{i,k} + \delta p_\alpha^{i,j} \bar{p}_\beta^i + \delta p_\alpha^{i,j} \delta p_\beta^{i,k}) + \dots$$

$$P_\mu^i = P_\mu^{i,adit} - \frac{1}{M_P} \Lambda_\mu^{\alpha\beta} \sum_{+,j < k}^N (\bar{p}_\alpha \delta p_\beta^{i,k} + \delta p_\alpha^{i,j} \bar{p}_\beta^i + \delta p_\alpha^{i,j} \delta p_\beta^{i,k}) + \dots = P_\mu^{i,adit} + \text{tno. fluctuación}$$

Es preciso que la suma en los índices  $j$  y  $k$  no sea simétrica, como mostramos en el último paso, es decir, que la suma sobre  $k$  no sea hasta  $N$  como la de  $j$ , pues eso nos implicaría que el último término a la derecha de la igualdad, dependiente de  $M_P^{-1}$  -que llamaremos el término de fluctuación-, se anularía, llevándonos al resultado  $P_\mu^i = P_\mu^{i,adit}$ . Esto sería lo buscado para  $N \gg 1$ , pero, si esa suma a  $j$  y  $k$  fuese simétrica (no asimétrica), entonces el término de fluctuación, al no aparecer, no podría introducirnos la información nueva que caracteriza el caso de movimiento cuasirrígido.

Al evaluar la diferencia entre los cuadrimentos del balón obtenidos componiendo no aditiva y aditivamente,  $P_\mu^i - P_\mu^{i,adit}$ , en [34], Hossenfelder afirma, bajo la suposición de que el sistema experimenta sólo fluctuaciones termales y sirviéndose de un modelo de random walk (RW), que  $\delta p_\gamma^{i,l} \propto T\sqrt{N}$ ,  $l = j, k$ , siendo la dependencia  $\sqrt{N}$  para cada componente del trimomento. Como tenemos tres componentes, el término de fluctuación para las tres va con  $T(\sqrt{N})^3$ - y se obtiene que

$$P_\mu^i \propto -\frac{1}{M_P} \Lambda_\mu^{\alpha\beta} \sum_{+,j < k}^N (\bar{p}_\alpha \delta p_\beta^{i,k} + \delta p_\alpha^{i,j} \bar{p}_\beta^i + \delta p_\alpha^{i,j} \delta p_\beta^{i,k}) \approx -\frac{N^{3/2} T}{M_P} \Lambda_\mu^{\alpha\beta} \bar{p}_\mu^i = -\frac{1}{M_P} \Lambda_\mu^{\alpha\beta} N^{1/2} T P_\mu^{i,adit}$$

de modo que el término de fluctuación excede en gran medida el término promedio sin fluctuación  $P_\mu^{i,adit}$  para  $N \gg 1$ , y es trivial ver que nos reaparece el SBP al considerar estas fluctuaciones termales, así como que nuestra MCL definida es contradictoria con la Física que observamos (véase [34]).

El tratamiento desarrollado en [35] permite escapar a esta obstrucción indicando un aparente error en el procedimiento de [34]: el desarrollo perturbativo se debe truncar a un orden superior de potencias inversas de

$M_P$ , no a orden  $M_P^{-1}$ , sino a orden  $M_P^{-2}$ . Esto conlleva la aparición de términos nuevos que, una vez evaluados convenientemente, nos dan un resultado consistente en el caso sin fluctuación: que, a  $N \gg 1$ , las correcciones respecto a la masa de Planck tienden a anularse. Eso sí, para que esto se cumpla, hay que imponer simplemente nuevas condiciones a las geometrías del espacio de momentos  $\mathcal{P}$  válidas. Esto conlleva que este problema se dé en otras variedades; simplemente consideramos las que llevan implícita esta anulación del término de fluctuación y 'dejamos de lado' las otras.

Como observación final, hemos apuntado que  $N$  es una cantidad igual al número total de partículas en cada balón, al suponerlos formados por el mismo número de componentes. Ahora bien, no es claro el papel que juegan estas interacciones internas entre parejas de átomos de cada balón. De esta forma, cabe la posibilidad de que  $N$  no coincida con el total de componentes, sino que sea proporcional al número total de interacciones.

## 4.5. Detección directa y efectos cuánticos sobre observables macroscópicos. El centro de masas (CM)

Hasta el momento, hemos estado considerando propuestas de solución del SBP basadas en una búsqueda de huellas asociadas a un espacio-tiempo cuántico a escala planckiana a partir de efectos o manifestaciones indirectas. Un ejemplo de ello sería la propuesta de estudio de la geometría no trivial (curva) del espacio de momentos  $\mathcal{P}$  y su influencia sobre la cuantización del ST vista en el marco de la localidad relativa (secciones 2.2. y 4.4 del trabajo).

Sin embargo, un paradigma alternativo considerado en los últimos dos años se basa en buscar esos efectos asociados a la cuantización del ST a escala de la longitud de Planck,  $L_P$ , mediante la observación directa de determinados efectos sobre cuerpos macroscópicos. Dos de los primeros ejemplos en este sentido vienen indicados en las referencias [5] y [3] y tienen como ingrediente esencial el análisis del movimiento del CM de un objeto macroscópico al que un fotón  $\gamma$  de baja energía ha transferido parte de su momento, todo ello en un contexto no relativista (en el que las velocidades son aditivas y las leyes de conservación de cuádrimomentos son las de la Mecánica Clásica). En particular, nos serviremos de la conservación de los momentos,  $\mathbf{p}$ . En [5], Pikovski y otros autores analizan el movimiento del CM de un oscilador mecánico. En [3], Bekenstein sugiere otra situación cuyo punto clave es también el movimiento del CM de un objeto macroscópico.

Vamos a centrarnos brevemente en el planteamiento de Bekenstein, en [3]. Se plantea cómo medir experimentalmente las posibles irregularidades del ST a escalas planckianas, un efecto de la cuantización del ST propuesto por el astrofísico Wheeler como 'espuma cuántica' (quantum foam) [4]. Bekenstein se pregunta si este efecto se puede determinar en el laboratorio usual, y, por tanto, si podemos reproducir fenómenos de QG mediante experimentos apropiadamente diseñados en ese contexto. Su respuesta es que sí, aunque aplicando leyes de conservación.

Para verlo, argumenta que, a nivel de partículas, en el mundo microscópico, no podemos localizar exactamente una partícula en una posición del orden de la escala de Planck (longitud de Planck  $l_P$ ) con nuestra tecnología, pues se necesitaría comunicar un momento a la partícula de valor  $\mathbf{p} \geq \hbar/l_P \sim 10^{19}$  GeV, de acuerdo con el principio de incertidumbre de Heisenberg (recordemos que, actualmente, se ha llegado a escalas de energía de casi 10 TeV =  $10^5$  GeV, 13 órdenes de magnitud menor). Asimismo, detectar un desplazamiento del CM de un objeto macroscópico,  $\Delta X_{CM} \sim L_P$  de forma directa nos obligaría a ser capaces de detectar escalas de tiempos  $\tau$  más pequeñas que  $10^{-32}$  s. Por ello, la manera de escapar a esta obstrucción consistiría en medir  $\Delta X$  sin necesidad de localizar exactamente al CM en sus posiciones inicial y final, para lo que sería útil aplicar la conservación del trimomento.

En este sentido, Bekenstein propone un experimento pensado consistente en enviar un fotón  $\gamma$  de baja energía ( $\gamma$  óptico) a través de un bloque dieléctrico y evaluar, a partir de dicha ley de conservación (en un contexto no relativista, insistimos), el desplazamiento  $\Delta X_{CM}$ . Mediante una configuración apropiada del sistema, se podrían detectar  $\Delta X_{CM} \approx L_P$  (incluso contando perturbaciones externas, ruidos, etc. sobre el sistema [3]).

Ahora bien, tenemos que recordar que, mientras el marco usual de SR funciona cuando  $\Delta X_{CM} \gg l_P$ , y no hay impedimentos a la traslación de  $\gamma$  por el bloque, esto no es así cuando  $\Delta X_{CM} \approx l_P$ , pues las fluctuaciones cuánticas se hacen muy grandes y significativas. Conceptualmente, esto se puede concebir como que, a escalas del orden de  $l_P$ , aparece un paisaje de agujeros negros de masa  $M_P$  y de diámetro  $D_{BH} \sim l_P$  que se forman y desaparecen en una escala de tiempos planckiana  $t_P \sim 10^{-44}$  s. Estos agujeros negros planckianos sí deben tener una influencia significativa de tipo dinámico sobre el movimiento del CM, ya que su densidad de masa no es despreciable en comparación con la masa  $M$  del bloque. Asumiendo que éste último se mueve durante un tiempo  $\tau \gg t_P$ , atraviesa multitud de estos agujeros negros. Pero, según plantea Bekenstein, si  $\Delta X_{CM} \ll l_P$ , es decir, si el CM se desplaza una distancia mucho menor que la escala de Planck, no atravesaría agujeros negros distintos y, por tanto, no experimentaría efectos de QG en su desplazamiento.

Sin embargo, las partículas (en concreto, los  $\gamma$  enviados) sí que sufren estos efectos cuánticos, ya que su longitud de onda Compton es mucho más grande que  $l_P$  (el CM de un objeto macroscópico tendría una longitud de onda Compton mucho menor que  $l_P$ ) si  $\Delta X_{CM} \ll l_P$ . Por tanto, existe una cierta probabilidad de que, en nuestro ejemplo particular, los  $\gamma$  no puedan atravesar el bloque, en consonancia con una cierta 'rugosidad' del ST a escala de Planck -la confirmación de la existencia de la 'espuma cuántica'. El momento del fotón rechazado  $\mathbf{p}_\gamma$  no sería comunicado a los agujeros negros planckianos al requerirse que el vacío gravitatorio sea homogéneo a escalas de longitud  $l_{bloque}$  -una de las dimensiones del bloque atravesada por el fotón en línea recta- o incluso a la escala dada por la longitud de onda del fotón  $\lambda$ , ambas mucho mayores que  $l_P$ . Por tanto, no habría transferencia de energía a los agujeros negros. Pero esto no es lo relevante para nuestra discusión. La idea esencial es la de que *los efectos de QG afectan al régimen microscópico, pero influyen en mucha menor medida al movimiento del CM de un objeto macroscópico.*

Sin embargo, Amelino-Camelia va más allá, como explica en [36]. En el campo de la fenomenología de la QG, tradicionalmente se ha pensado que, si los efectos de un ST cuántico a escala  $l_P$  afectan a partículas microscópicas, necesariamente han de influir también sobre las propiedades de objetos macroscópicos (lo que

incluye al CM). Pero este argumento inductivo falla al menos en el caso del CM. En determinados modelos de cuantización del ST a escala de Planck (planteados mediante álgebras de conmutadores no triviales), puede probarse que estos efectos cuánticos sobre el CM desaparecen [36].

En primer lugar, vamos a definir los observables posición y momento para el CM de un objeto macroscópico de  $N$  componentes. Bastará con utilizar sólomente las coordenadas espaciales en nuestro argumento. Tomamos las definiciones usuales (no relativistas, donde la ley de composición es la suma usual +):

$$\begin{aligned} \text{Posición del CM:} \quad X &= \frac{1}{N} \sum_{+,n=1}^N x_n & Y &= \frac{1}{N} \sum_{+,n=1}^N y_n & Z &= \frac{1}{N} \sum_{+,n=1}^N z_n \\ \text{Momento del CM:} \quad P_x &= \frac{1}{N} \sum_{+,n=1}^N p_{x,n} & P_y &= \frac{1}{N} \sum_{+,n=1}^N p_{y,n} & P_z &= \frac{1}{N} \sum_{+,n=1}^N p_{z,n} \end{aligned}$$

No resulta descabellado servirnos del citado argumento inductivo para extrapolar la manifestación de fenómenos de QG del régimen microscópico al macroscópico. Por ejemplo, en Mecánica Cuántica no relativista (espacio-tiempo clásico), sabemos que la incertidumbre al medir la posición de una partícula es exactamente la misma que cuando medimos la del CM de un objeto macroscópico. En efecto, definíamos el conmutador de Heisenberg como  $[a, p_a] = i\hbar$ ,  $a = x, y, z$ . Es muy sencillo demostrar que, para el CM de un objeto macroscópico, obtenemos el mismo resultado. Así, si consideramos la dirección  $x$  por simplicidad, tenemos que  $[x, p_x] = i\hbar$ . En el CM, se demuestra de forma sencilla que  $[X, P_X] = i\hbar = [x, p_x]$  (lo mismo vale para los ejes  $y, z$ ), en favor del modo de proceder inductivo.

Pero, como decimos, este paradigma ha de cambiar, al menos al hablar del CM de objetos macroscópicos, en un contexto de QG. Vamos a ver cómo, en tres ejemplos de modelos de cuantización del ST, se suprimen, en gran medida, los efectos de QG para el CM:

#### a. No conmutatividad del ST basada en un álgebra de Lie

Este modelo es muy popular en la literatura de QG, al ser actualmente el único en el que se plantea esta diferencia de efectos para los regímenes microscópicos y macroscópicos. Un espacio de momentos  $\mathcal{P}$  que es curvo o presenta no linealidades puede tener como dual un ST basado en un álgebra de Lie [33]. En este ST, las leyes de conservación para energías y momentos son no lineales, con correcciones para la energía y momento de un objeto macroscópico (CM) menores que para sus propios constituyentes microscópicos. Esto se manifiesta en cambios sobre la escala de longitudes asociada al álgebra de Lie, que llamamos  $l_L$ .

Para verlo, partimos de la expresión general de un álgebra de Lie adaptado a nuestro problema:

$$[r^\mu, r^\nu] = i l_L \theta^{\mu\nu}{}_\rho r^\rho \quad \text{donde } r^1 = x, r^2 = y, r^3 = z$$

aunque podemos usar, por simplicidad, un ejemplo más sencillo:

$$[x, y] = i l_L r^\mu \quad \text{donde } \mu = 1, 2, 3$$

Aplicando la definición de los observables  $X, Y, Z$  del CM (no hace falta usar los observables momento del CM):

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left[ \frac{1}{N} \sum_{+,m=1}^N x_m, \frac{1}{N} \sum_{+,n=1}^N y_n \right] = \frac{1}{N^2} \sum_{+,m=1}^N \sum_{+,n=1}^N [x_m, y_n] = \frac{1}{N^2} \sum_{+,m=1}^N \sum_{+,n=1}^N \delta_{mn} i l_L r^\mu = \frac{1}{N^2} i l_L \sum_{+,n=1}^N r_n^\mu \\ [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] &= i \frac{l_L}{N} \mathbf{R}^\mu \quad \text{donde } R^\mu = \frac{1}{N} \sum_{+,n=1}^N r_n^\mu \end{aligned}$$

Vemos cómo, en efecto,  $l_L$  es reescalado para un sistema macroscópico en un factor  $1/N$ . De esta forma, la no conmutatividad es más débil para las coordenadas del CM que para las de las partículas microscópicas

#### b. No conmutatividad de Moyal

Esta imagen de un ST cuántico se caracteriza por presentar conmutadores independientes de las coordenadas. Requeriremos de las definiciones de las posiciones y momentos del CM. Los conmutadores dependen de una escala de longitudes  $l_M$  como

$$[r^\mu, r^\nu] = i l_M^2, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3$$

Centrémonos en el conmutador  $[x, y] = i l_M^2$ . Para el CM, obtenemos también un decrecimiento de esa escala de longitudes según  $N$ :

$$[X, Y] = \left[ \frac{1}{N} \sum_{+,m=1}^N x_m, \frac{1}{N} \sum_{+,n=1}^N y_n \right] = \frac{1}{N^2} \sum_{+,m=1}^N \sum_{+,n=1}^N [x_m, y_n] = \frac{1}{N^2} \sum_{+,m=1}^N \sum_{+,n=1}^N \delta_{mn} i l_M^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{+,n=1}^N i l_M^2$$



$$[X, Y] = \frac{1}{N^2} iN l_M^2 \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{i} \left( \frac{\mathbf{l}_M}{\sqrt{N}} \right)^2$$

En este caso, el reescalado viene con un factor  $N^{-1/2}$  en vez de  $N^{-1}$ , pero la idea de fondo de la disminución de efectos cuánticos sobre el CM sigue reflejándose claramente.

### c. Conmutadores de Heisenberg modificados

Esta imagen se caracteriza por llevar implícita la idea de que es imposible localizar exactamente a una partícula en un punto dado. En Mecánica Cuántica, si queremos localizar exactamente una partícula en una posición  $\mathbf{r}$  ( $\delta\mathbf{r} = 0$ ), la incertidumbre en su momento es máxima (divergente,  $\delta\mathbf{p} \rightarrow \infty$ ). Pues bien, usando conmutadores de Heisenberg modificados, es imposible localizar exactamente a una partícula en un punto, de forma que  $\delta\mathbf{r} \neq 0 \forall \delta\mathbf{p}$ . Matemáticamente, esto se deriva de la forma general de un conmutador de Heisenberg modificado [37, 38]

$$[r^\mu, p_\mu] = i\hbar(1 - \lambda' p_\mu + \lambda^2 p_\mu^2) \quad , \quad \mu = 1, 2, 3$$

donde tenemos dos escalas de longitud diferentes,  $\lambda$  y  $\lambda'$ . El que  $\lambda^2 \neq 0$  conlleva que siempre exista una incertidumbre en la posición aún cuando  $\delta\mathbf{p}_\mu \rightarrow \infty$ .

Nuevamente, consideramos por simplicidad el conmutador  $[x, p_x]$ . Al considerar el sistema CM, tenemos:

$$\begin{aligned} [X, P_x] &= \left[ \frac{1}{N} \sum_{+,m=1}^N x_m, \frac{1}{N} \sum_{+,n=1}^N p_{x,n} \right] = \frac{1}{N^2} \sum_{+,m=1}^N \sum_{+,n=1}^N [x_m, p_{x,n}] = \frac{1}{N^2} \sum_{+,m=1}^N \sum_{+,n=1}^N \delta_{mn} i\hbar(1 - \lambda' p_\mu + \lambda^2 p_\mu^2) \\ [X, P_X] &= i\hbar \left[ 1 - \frac{\lambda}{N} P_x + \frac{\lambda^2}{N^2} P_x^2 + \frac{\lambda^2}{N} \sum_{+,n=1}^N \left( p_{x,n}^2 - \frac{P_x^2}{N^2} \right) \right] \end{aligned}$$

En principio, esta expresión nos da un reescalado de  $\lambda'$  con  $1/N$ , pero no nos dice nada de si existe una reducción sobre la escala  $\lambda$ . Esto es así por el último término a la derecha de esta última igualdad, dependiente de  $\lambda$ :  $i\hbar\lambda^2 N^{-1} \sum_{+,n=1}^N \left( p_{x,n}^2 - \frac{P_x^2}{N^2} \right)$ , que puede ser considerablemente grande sobre todo cuando las temperaturas son muy elevadas (hablamos de ultra altas temperaturas). Eso se debe a que la diferencia que va entre paréntesis puede ser muy elevada al involucrarnos componentes del trimomento de los diferentes constituyentes microscópicos del objeto macroscópico,  $p_{x,n}$  en nuestro ejemplo, que pueden adquirir correcciones por fluctuaciones térmicas muy elevadas cuanto mayor sea la temperatura del objeto macroscópico,  $T$ . Este término puede añadir, pues, una contribución adicional al valor del conmutador, de tal forma que no escale como  $1/N$ . Sin embargo, parece descabellado regresar directamente al paradigma de que los efectos de un ST cuantizado son iguales a niveles microscópicos y macroscópicos, tal y como Amelino-Camelia apunta en [36].

Y es que, en el caso particular de que  $i\hbar\lambda^2 N^{-1} \sum_{+,n=1}^N \left( p_{x,n}^2 - \frac{P_x^2}{N^2} \right) \approx 0$  (caso de movimiento cuasirrígido o de fluctuaciones sobre los valores medios de los trimomentos -en nuestro caso particular- de los constituyentes muy pequeñas), las fluctuaciones del ST cuántico son más débiles sobre el CM, como vemos al aparecer también el reescalado de  $\lambda$  explícitamente:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{P}_X] \approx i\hbar \left[ \mathbf{1} - \frac{\lambda}{N} \mathbf{P}_x + \frac{\lambda^2}{N^2} \mathbf{P}_x^2 \right]$$

donde  $\lambda^2$  queda reescalado por un factor  $N^{-2}$ , o, equivalentemente,  $\lambda$  es reducida en un factor  $1/N$ .

En cierto modo, estos resultados (que se han aplicado sólo a tres de los muchos posibles modelos de un ST cuantizado a una cierta escala de longitudes) pueden resultar descorazonadores en cuanto a la detección de efectos de QG en cuerpos macroscópicos y de forma directa. Estamos afirmando que el CM de un objeto macroscópico sufre efectos debidos a un ST cuántico en mucha menor medida que una partícula microscópica, hasta el punto de que esos efectos son prácticamente despreciables. Pero aún quedan motivos para la esperanza: puede haber otros observables macroscópicos que sí manifiesten claramente modificaciones en un régimen de QG respecto de sus valores o propiedades en un marco de SR.

Otro comentario a realizar es el siguiente. Toda esta discusión se ha hecho bajo la suposición implícita de que los grados de libertad del CM del objeto macroscópico están desacoplados, en su totalidad, de los grados de libertad internos de los constituyentes. Queda sin resolver, en este momento, la pregunta de cómo serían exactamente los reescalados en el caso de que existiesen tales acoplos entre grados de libertad, así como la dependencia de los reescalados con dichos acoplos.

Además, este análisis nos vuelve a llevar al problema de qué podemos definir por partícula microscópica fundamental, entendida como el objeto que experimenta los efectos de QG en su máxima intensidad: si es un

átomo, un quark, etc. Y un nuevo problema que sugiere nuestra discusión es el siguiente: la distinción que hemos apreciado, a partir del reescalado de cada escala de longitudes con  $N$ , entre los regímenes microscópico y macroscópico no está presente en las leyes de la Mecánica en un contexto clásico e incluso de SR. Esta discusión, caso de ser cierta, nos induciría a formular nuevas leyes de la Mecánica que recojan, de forma explícita, cómo los efectos de un ST cuántico cambian según la composición ( $N$  de constituyentes) de los objetos.

## 4.6. El problema del espectador y la longitud de coherencia

Llegados a este punto, vayamos más allá de los balones de fútbol. Para ello, vamos a considerar un proceso de interacción cualquiera, por ejemplo una colisión entre partículas, en el marco relativista usual, en SR. ¿Influyen en el proceso grados de libertad correspondientes a partículas o a sistemas *externos* al evento de interacción? Es decir, dado ese evento, ¿es necesario conocer la energía y el trimomento de una partícula que pasa cerca de él sin interactuar, o incluso del Universo, por ejemplo, para poder establecer consistentemente las leyes de conservación que nos den cuenta del proceso? <sup>1</sup>

La cinemática de SR es consistente con la idea de que esos grados de libertad externos están desconectados de los grados de libertad intrínsecos al proceso de interacción y no influyen. Es decir, las leyes de conservación de SR son tales que basta con conocer los grados de libertad del sistema relevantes (en este caso las partículas que entran y salen del evento de colisión en el ST) para caracterizar el sistema o el proceso de forma consistente (no necesitamos conocer, por ejemplo, la energía y el momento del Universo). De forma que podemos discutir esa interacción sin necesidad de conocer la energía y el momento de otros sistemas externos, que están, pues, desacoplados del sistema de partículas entrantes y salientes de nuestro evento interactivo. Ésta es la llamada situación de cinemática universal, o simplemente situación universal, pues esas leyes de conservación son las mismas en cualquier punto del ST y en presencia de cualquier sistema externo desacoplado.

Ahora bien, cuando vamos más allá de SR, ¿sigue siendo posible que nos olvidemos de otras energías y momentos externos? No, pues, más allá de SR, hemos visto que existen correcciones al cuadrimomento total de un sistema de partículas que dependen de los productos de los cuadrimomentos de distintos componentes ya para un sistema de  $N = 2$  partículas,

$$p_\mu \oplus q_\mu = p_\mu + q_\mu - \Lambda_\mu^{\alpha\beta} \frac{1}{M_P} p_\alpha q_\beta + \dots$$

con  $\Lambda_\mu^{\alpha\beta}$  un cierto factor numérico. En este caso, el umbral viene dado por la masa de Planck  $M_P$  (aunque podríamos tomar  $E_P$  dividiendo o  $l_P$  multiplicando como umbrales, pero tomamos esta definición de MCL para este subapartado). De este modo, dependiendo de qué grados de libertad externos influyen en el evento de interacción, las leyes de conservación cambian de una u otra manera (situación no universal).

Esto nos lleva a formular el **problema del espectador** como el problema en que la suma de dos cuadrimomentos puede depender de uno o más cuadrimomentos correspondientes a sistemas externos a un evento dado. [22, 39] Su existencia nos llevaría a una situación absurda: la de que, dado un proceso cualquiera, no podamos establecer leyes de conservación de la energía y el momento si no conocemos los cuadrimomentos de otras partículas externas al proceso cuyos cuadrimomentos no cambian (que llamamos *espectadores*). ¡Incluso podría ser necesario saber cuál es el cuadrimomento de todo el Universo!

Para ver la influencia de un espectador sobre un proceso físico dado, vamos a considerar un proceso de desintegración ( $A$ ) de una partícula con cuadrimomento inicial  $k$  en dos partículas con cuadrimomentos  $p$  y  $q$ . Suponemos que hay un espectador ( $B$ ), de cuadrimomento  $l$  que no se modifica. (Figura 2)

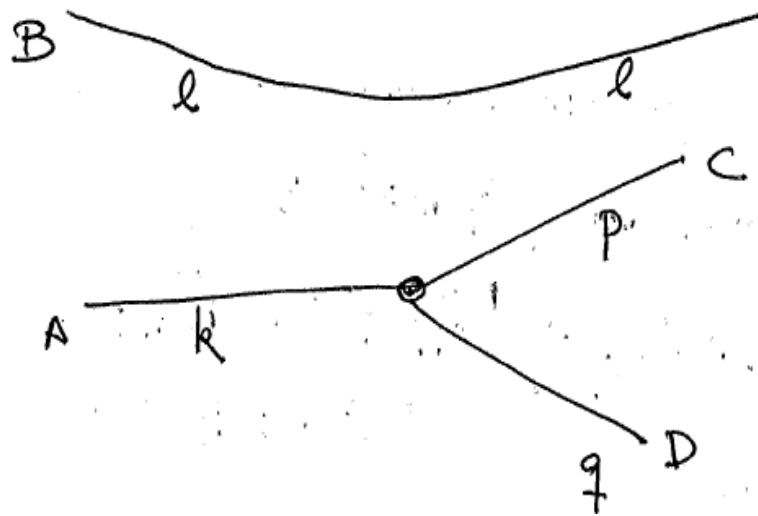


Figura 2: Proceso de desintegración ( $A$ ) afectado por el espectador ( $B$ )

<sup>1</sup>Agradezco al profesor José Manuel Carmona por sus explicaciones y su información detallada, de gran utilidad a la hora de redactar este apartado

Estudiamos la ley de conservación de cuádrimomentos del proceso (A) cuando no se tiene en cuenta el espectador y cuando sí se considera:

$$\text{Sin espectador: } (\ominus k) \oplus p \oplus q = 0$$

$$\text{Con espectador: } (\ominus k) \oplus (\ominus l) \oplus p \oplus q \oplus l = 0$$

donde el símbolo  $\ominus$  se usa para denotar a la antípoda de un cuádrimomento -para pasar cuádrimomentos componiendo en un lado de la igualdad al otro-. Generalmente,  $(\ominus k) \oplus p \oplus q \neq (\ominus k) \oplus (\ominus l) \oplus p \oplus q \oplus l$  en un marco de no universalidad. En efecto, si desarrollamos la ley de conservación para el proceso con espectador:

$$\begin{aligned} & (\ominus k) \oplus (\ominus l) \oplus p \oplus q \oplus l = (\ominus k) + (\ominus l) + p + q + l \\ & = (-k) + (-l) + p + q + l - \Lambda_{ab} \frac{1}{M_P} (-k)(-l) - \Lambda_{ac} \frac{1}{M_P} (-k)p - \Lambda_{ad} \frac{1}{M_P} (-k)q - \Lambda_{ae} \frac{1}{M_P} (-k)l - \\ & \quad - \Lambda_{bc} \frac{1}{M_P} (-l)p - \Lambda_{bd} \frac{1}{M_P} (-l)q - \Lambda_{be} \frac{1}{M_P} (-l)l - \Lambda_{cd} \frac{1}{M_P} pq - \Lambda_{ce} \frac{1}{M_P} pl - \Lambda_{de} \frac{1}{M_P} ql \end{aligned}$$

con  $\Lambda_{ij}$ ,  $i, j = a, b, c, d, e$ ;  $i \neq j$  los coeficientes numéricos correspondientes a cada acoplo y las letras de la a a la e indicando la posición de cada cuádrimomento en la igualdad inicial. No tenemos acoplos dependientes de un mismo cuádrimomento, es decir,  $\Lambda_{ii} = 0$  al considerar que los acoplos aparecen entre cuádrimomentos diferentes. Pues bien, por un lado, el que  $l$  sea espectador implica que los coeficientes numéricos  $\Lambda_{ib} = \Lambda_{ie}$  y  $\Lambda_{bi} = \Lambda_{ei}$ ,  $i = a, c, d$ . Esto conlleva la cancelación de los términos que van con  $\Lambda_{ab}$  y  $\Lambda_{ae}$ :

$$\Lambda_{ab} \frac{1}{M_P} (-k)(-l) + \Lambda_{ae} \frac{1}{M_P} (-k)l = \Lambda_{ab} \frac{1}{M_P} [(-k)(-l) + (-k)l] = 0$$

así como que  $\Lambda_{ce} = \Lambda_{cb}$  y  $\Lambda_{de} = \Lambda_{db}$ . Por otra parte, como

$$(\ominus l) \oplus l = (-l) + l - \Lambda_{be} \frac{1}{M_P} (-l)l$$

el correspondiente término se cancela, ya que  $(\ominus l) \oplus l = 0$ , como se deduce del proceso (B): la partícula de cuádrimomento inicial  $l$  mantiene ese mismo cuádrimomento tras la interacción (A) por ser espectador. Así, llegamos al resultado

$$\begin{aligned} & (\ominus k) \oplus (\ominus l) \oplus p \oplus q \oplus l = \\ & = (-k) + p + q - \Lambda_{ac} \frac{1}{M_P} (-k)p - \Lambda_{ad} \frac{1}{M_P} (-k)q - \Lambda_{bc} \frac{1}{M_P} (-l)p - \Lambda_{bd} \frac{1}{M_P} (-l)q - \Lambda_{cd} \frac{1}{M_P} pq - \Lambda_{cb} \frac{1}{M_P} pl - \Lambda_{db} \frac{1}{M_P} ql = \\ & = \left[ (-k) + p + q - \Lambda_{ac} \frac{1}{M_P} (-k)p - \Lambda_{ad} \frac{1}{M_P} (-k)q - \Lambda_{cd} \frac{1}{M_P} pq \right] - \Lambda_{bc} \frac{1}{M_P} (-l)p - \Lambda_{cb} \frac{1}{M_P} pl - \Lambda_{bd} \frac{1}{M_P} (-l)q - \Lambda_{db} \frac{1}{M_P} ql \\ & (\ominus k) \oplus (\ominus l) \oplus p \oplus q \oplus l = (\ominus k) \oplus p \oplus q - \Lambda_{bc} \frac{1}{M_P} (-l)p - \Lambda_{cb} \frac{1}{M_P} pl - \Lambda_{bd} \frac{1}{M_P} (-l)q - \Lambda_{db} \frac{1}{M_P} ql \end{aligned}$$

donde, obviamente, aplicamos la ley de conservación de la desintegración de (A),

$$(\ominus k) \oplus p \oplus q = (-k) + p + q - \Lambda_{ac} \frac{1}{M_P} (-k)p - \Lambda_{ad} \frac{1}{M_P} (-k)q - \Lambda_{cd} \frac{1}{M_P} pq$$

. La ecuación sombreada unas líneas más arriba lleva a que  $(\ominus k) \oplus p \oplus q \neq (\ominus k) \oplus (\ominus l) \oplus p \oplus q \oplus l$  al tenerse, en general, que  $\Lambda_{bc} \neq \Lambda_{cb}$ ,  $\Lambda_{bd} \neq \Lambda_{db}$ , lo que nos muestra la influencia del espectador.

Incluso, en el caso universal (en el que  $\Lambda_{bc} = \Lambda_{cb}$ ,  $\Lambda_{bd} = \Lambda_{db}$ ) no se cumple, en general, que  $\Lambda M_P^{-1} pl = \Lambda M_P^{-1} lp$ , de forma que estos términos no cancelan. Esto lo vemos recordando que estamos con productos escalares de cuádrimomentos, de forma que

$$\left. \begin{array}{l} \Lambda \frac{1}{M_P} lp \quad \text{incluye} \quad \sigma_1 \frac{1}{M_P} l_0 p_\mu + \sigma_2 \frac{1}{M_P} l_\mu p_0 \\ \Lambda \frac{1}{M_P} pl \quad \text{incluye} \quad \sigma_1 \frac{1}{M_P} p_0 l_\mu + \sigma_2 \frac{1}{M_P} p_\mu l_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{esos términos no coinciden si } \sigma_1 \neq \sigma_2$$

con  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  números. De esta forma, se mantiene la presencia de acoplos no nulos entre cuádrimomentos de la interacción y el cuádrimomento del espectador.

Ahora bien,  $(\ominus k) \oplus (\ominus l) \oplus p \oplus q \oplus l$  es sólo uno de los posibles canales del proceso con la influencia del espectador. Otros posibles canales sí que coinciden con la ley de conservación modificada del proceso (A): en concreto, se verifica que, incluso en el caso no universal,

$$(\ominus l) \oplus l \oplus (\ominus k) \oplus p \oplus q = (\ominus k) \oplus p \oplus q \oplus (\ominus l) \oplus l = (\ominus k) \oplus p \oplus q = 0 \quad \text{ya que } (\ominus l) \oplus l = 0$$

aunque la MCL  $\oplus$  es no asociativa. Esto implica que, cinemáticamente, es posible encontrar leyes de conservación del proceso ( $A$ ) en las que aparecen espectadores cuyo cuadrimomento  $l$  no se modifica si existe la ley de conservación del proceso ( $A$ ) que implica a los cuadrimomentos  $k, p, q$ . Tenemos que postular que la dinámica hace que dos canales sean iguales a las leyes de conservación para el proceso ( $A$ ) sin espectadores,  $(\ominus k) \oplus p \oplus q$  y que el resto de posibles canales no coincidan con esta ley de conservación.

En el caso concreto de esos dos canales, una forma de interpretar esa situación es que la partícula con cuadrimomento  $l$  está demasiado alejada de la región donde se produce la desintegración. Pero este caso nos obliga a imponer que, en los canales en los que aparecen dependencias con  $l$ , i.e. con el espectador, tengamos elementos de matriz nulo. Es decir, si la partícula ( $B$ ) está muy alejada de la interacción ( $A$ ), aquellos canales de la ley de conservación de cuadrimomentos en que aparece dependencia con el espectador (por ejemplo, el canal  $(\ominus k) \oplus (\ominus l) \oplus p \oplus q \oplus l$ ) deben llevar asociados elementos de matriz nulos, para que los únicos canales de desintegración que queden sean los que coincidan con  $(\ominus k) \oplus p \oplus q$ . Por lo tanto, existe una dependencia de la dinámica con las permutaciones de los momentos  $l$  y  $\ominus l$ , que permite solucionar el problema del espectador.

Algo parecido sucede en SR: al interactuar partículas con cuadrimomentos  $p$  y  $q$ , tenemos que combinar la cinemática con la dinámica, de forma que los cuadrimomentos finales  $p'$  y  $q'$  cumplen que  $p' = p$  y  $q' = q$  si las partículas están suficientemente alejadas entre sí, de forma que en el proceso de scattering aparece sólo esa solución. Si están, por contra, cerca la una de la otra,  $p' \neq p$  y  $q' \neq q$  y decimos que ambas se han influido, es decir, que han interactuado entre sí. (Figura 3)

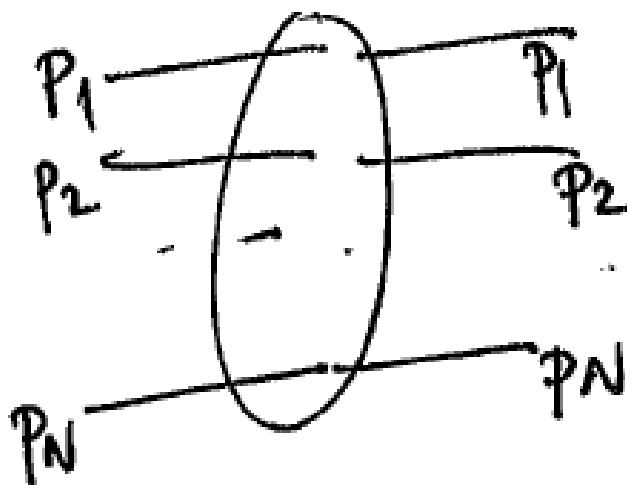


Figura 3: Situación de un balón de fútbol cuyos constituyentes microscópicos son espectadores entre sí

En general, el problema del espectador desaparece al existir restricciones sobre los grados de libertad externos al sistema considerado (en nuestro caso, el proceso de desintegración), de forma que parte de los grados de libertad componen no aditivamente con los grados de libertad internos del sistema e influyen en su dinámica, mientras que el resto no se acoplan al sistema y no generan términos de acoplo no nulos en las leyes de conservación. Aunque podrían formularse otros criterios, el que aquí hemos propuesto se basa en el concepto de *longitud de coherencia*  $L_C$ : aquellos espectadores alejados a una distancia  $d > L_C$  no influyen en el sistema (en el ejemplo anterior, el caso en que ( $B$ ) está suficientemente alejado de ( $A$ )). Únicamente los espectadores a  $d \leq L_C$  se acoplan con el sistema e influyen en él mediante términos no lineales.

Ahora bien, ¿qué tiene que ver el SBP con el problema del espectador? Resulta que el problema del espectador está estrechamente ligado al SBP: todas las propuestas de solución del SBP resuelven de forma implícita el problema del espectador. Sin embargo, posiblemente ésta sea una de las primeras propuestas de solución del problema del espectador planteada de forma explícita. Pero, como vamos a ver, el resolver el problema del espectador puede llevar también a soluciones del SBP.

De hecho, la introducción de la noción de *longitud de coherencia*  $L_C$  también permite solucionar el SBP. Cuando imponemos que, dentro de un objeto macroscópico, los constituyentes funcionan como espectadores entre ellos, las correcciones por acoplos de cuadrimomentos diferentes en las leyes de conservación modificadas son despreciables. En ese caso, el cuadrimomento total del objeto macroscópico es, en buena aproximación, igual a la composición aditiva de cuadrimomentos de los constituyentes, lo que soluciona el SBP en términos de la MCL.

Para que los constituyentes se comporten como espectadores sin acoplos entre ellos, se deben verificar dos condiciones. La primera es que la longitud de coherencia ha de ser realmente pequeña en comparación con los órdenes de magnitud de las distancias más pequeñas entre constituyentes del sistema macroscópico. La segunda

es que las posibles interacciones internas entre componentes han de ser despreciables, para que así lo sean también las correcciones sobre la composición aditiva de los cuadrimentos de los constituyentes. Esto nos conduce a una conclusión interesante: sólo podemos definir el cuadrimento total de un objeto macroscópico de forma consistente cuando sus componentes no interactúan entre ellos. En este sentido, el SBP aparece como una manifestación de que hemos intentado computar el cuadrimento de un objeto macroscópico con sus componentes interactuando de forma no despreciable.

Para estudiar esta idea de que el cuadrimento total  $P$  sólo se puede definir de forma consistente, vamos a considerar un sistema de  $N$  partículas microscópicas constituyendo un objeto macroscópico. De acuerdo con nuestra argumentación, vemos ese objeto como una especie de 'proceso' en el que los cuadrimentos de entrada son iguales a los cuadrimentos de salida. [FIGURA 3 JOSÉ MANUEL]. Hay dos formas de ver ese proceso:

1. A partir de la composición de todas las representaciones (o espacios vectoriales) de una partícula, independientes entre sí:

$$S_{total} = S_1 \otimes S_1 \otimes \dots (N) \dots \otimes S_1 \Rightarrow \text{Ley de composición: } [(\ominus p_1) \oplus p_1] + [(\ominus p_2) \oplus p_2] + \dots + [(\ominus p_N) \oplus p_N] = 0$$

2. A partir de un único espacio vectorial  $S_N$  de  $N$  partículas, en las que los únicos canales con elementos dinámicos de matriz no nulos (i.e. los únicos canales que pueden aparecer en el sistema) son los del tipo

$$(\ominus p_1) \oplus p_1 \oplus (\ominus p_2) \oplus p_2 \oplus \dots + (\ominus p_N) \oplus p_N = 0$$

siendo ambas perspectivas totalmente equivalentes, tal y como hemos visto antes para el problema del espectador.

Y, de esta forma, cuando todos los constituyentes son espectadores que no interactúan entre ellos, el cuadrimento total del objeto macroscópico de  $N$  componentes,  $P$ , es, en buena aproximación, igual al cuadrimento total calculado en SR:

$$P = p_1 + p_2 + \dots + p_N + \text{términos de acoplo no lineales} \approx p_1 + p_2 + \dots + p_N = P_{SR}$$

una definición bien formulada siempre que el objeto macroscópico evolucione libremente, sin interactuar con otros objetos macroscópicos.

Esta discusión sobre el SBP y la longitud de coherencia se completaría una vez estudiada la relación de dispersión modificada (MDR) que cumple esta definición de  $P$ . Asimismo, es preciso ver que, cuando el número de constituyentes  $N \rightarrow \infty$ , esta MDR tiende a la relación de dispersión de SR. Este estudio no lo realizamos en nuestra discusión.

Otra consecuencia interesante de este punto de vista es que, al aparecer el SBP como consecuencia de interacciones no despreciables entre los componentes del cuerpo macroscópico, esto nos indica que, más allá de SR, los componentes interactúan entre sí de forma intensa. De este modo, las correcciones no lineales que aparecen en la MCL y en las leyes de conservación son muy significativas en comparación con los órdenes de magnitud de los cuadrimentos de los constituyentes o de su composición aditiva. Esto nos ofrece pistas sobre la existencia de nuevas interacciones entre partículas microscópicas, cuya 'huella' nos la dan, precisamente, esos términos correctores. Vamos a discurrir sobre esta posible interpretación en el subapartado siguiente.

## 4.7. El 'funcionamiento' de un balón. Propuesta de interpretación física

Para completar nuestro análisis sobre el SBP, vamos a intentar 'zambullirnos' en el interior de un balón de fútbol. Nos preguntamos qué se cuece realmente en su interior. Y es que hemos planteado el problema en sí y varias posibles soluciones... pero no nos hemos preguntado por las *implicaciones físicas* asociadas al problema.

Volvamos a considerar la MCL para cuádrimomentos que hemos estado manejando a lo largo de las distintas discusiones:

$$p_\mu \oplus q_\mu = p_\mu + q_\mu - \Lambda_\mu^{\alpha\beta} \frac{1}{M_P} p_\alpha q_\beta + \dots$$

La dependencia con la escala de Planck se introduce a partir de un acoplo entre los cuádrimomentos de los constituyentes, y son las contribuciones proporcionales a los acoplos las que escalan más rápido que los cuádrimomentos individuales, dando lugar a las discrepancias teóricas correspondientes al SBP.

Aunque existen otras posibles soluciones al SBP basadas en decir que éste no existe en realidad (algún comentario al respecto puede leerse en [22]), vamos a suponer que el SBP aparece de verdad (las posibles soluciones planteadas en este trabajo toman como premisa que el SBP existe en realidad en QG). ¿Cómo podemos interpretar los acoplos entre los cuádrimomentos de los constituyentes? O, de otra forma, ¿cómo *funciona realmente* un balón de fútbol en su interior?

Vamos a plantear una propuesta en este sentido. En el régimen de SR, no se observan esos términos correctores en la ley de composición aditiva ni en las leyes de conservación, en concordancia con nuestras observaciones. Únicamente en el régimen de QG (más allá de SR) 'percibimos' estas correcciones. Además, las correcciones involucran parejas de cuádrimomentos, algo que podemos asociar con una *interacción de naturaleza diferente* a aquellas a las que estamos acostumbrados. Esa interacción es significativa únicamente cuando vamos más allá de SR, mientras que, en nuestra física cotidiana, su efecto es sencillamente despreciable.

¿Qué naturaleza posee esta nueva interacción? Podemos pensar que sea un nuevo tipo de interacción fundamental mediada por un bosón gauge desconocido. Sin embargo, puede resultar contradictorio que un bosón gauge tenga diferente energía en un mismo proceso, según si éste viene caracterizado por las leyes de conservación de SR o por las de QG (modificadas), pues nos da un efecto despreciable en SR y demasiado grande en QG (y los cuádrimomentos de cada constituyente por separado son los mismos en ambos casos).

En lugar de eso, podemos imaginar esa 'interacción' nueva como debida a un efecto de curvatura del ST provocado por cada constituyente. Uno de los constituyentes, por ejemplo el de cuádrimomento  $p$ , distorsionaría el ST a su alrededor, curvándolo de manera sensible cuando vamos más allá de SR, en el marco de QG. Si estamos en una situación de SR, ese efecto de curvatura se haría despreciable. Lo mismo sucedería para  $q$ . Si  $p$  y  $q$  forman un sistema de dos componentes ligadas entre sí, estarían muy próximas la una de la otra, afectándose mutuamente a través de ese ST curvado por cada una. Es decir,  $p$  afectaría a  $q$  y viceversa, generando un acoplo no despreciable que ha de tenerse en cuenta en la MCL. De esta forma, lo que hemos llamado 'interacción' podría considerarse realmente como un fenómeno análogo al entrelazamiento cuántico para fotones, una especie de fenómeno de *entrelazamiento cuántico de la materia*. Aunque nos hemos centrado en la MCL, las contribuciones adicionales que aparecen en la MDR también serían explicadas, desde un punto de vista de interpretación física, con nuestro argumento.

En este tipo de justificación, la escala de Planck ( $M_P$  en la MCL dada arriba) sigue manteniendo un papel de escala reguladora; en este caso, de en qué condiciones esa curvatura del ST que se induce un constituyente a otro y viceversa comienza a ser grande en comparación con el orden de magnitud de los cuádrimomentos individuales. Además, la dependencia con el producto de cuádrimomentos sugiere que, según la naturaleza de los constituyentes, su cuádrimomento será mayor o menor, y la curvatura del ST asociada cambiará. No curvarán el ST de igual forma un sistema de dos quarks que uno de dos átomos. Como la escala de Planck es la misma para ambos, el cálculo de ese término corrector (o de su orden de magnitud) podría permitirnos incluso discernir qué tipo de componentes microscópicos puede tener un sistema macroscópico dado. Computar esto para diferentes objetos macroscópicos podría darnos el orden de magnitud del término de acoplo para una composición dada. Comparando ese valor con el calculado para un cuerpo macroscópico de iguales características podría darnos una prueba de consistencia de esta idea, si es que la diferencia entre ambos resultados es bastante pequeña (en comparación con sus órdenes de magnitud).

## 5. Consideraciones finales

Hemos visto, de una manera no demasiado profunda, en qué consiste exactamente el SBP. Este problema, muy actual en la investigación en QG, se basa en la disparidad de resultados teóricos que observamos, en un régimen macroscópico, al aplicar unas leyes de conservación y una relación de dispersión modificadas mediante la inclusión de correcciones dependientes de la escala de Planck, en un contexto alejado del marco de SR. Hemos explorado algunas propuestas de solución en este trabajo, en las que se plantea desde que la ley de conservación modificada presenta diferentes posibles formas (canales) para un mismo proceso hasta cómo la elección de coordenadas y la imposición de restricciones a la geometría, en una aproximación geométrica como la que nos da el marco de localidad relativa, puede permitir escapar a este problema.

Quedan, a lo largo del trabajo, diferentes incógnitas abiertas que no hemos tocado. Por ejemplo, cuál es la partícula microscópica más fundamental en nuestro formalismo, de forma que podamos modelizar el resto de cuerpos como sistemas de ese tipo de constituyentes. ¿Es un átomo? ¿Es un nucleón? ¿Es un quark o un leptón? Hasta ahora no hemos discernido cuál es esa partícula fundamental. Quizás el concepto de partícula microscópica fundamental dependa de a qué sistema (un átomo, un nucleón, una molécula, una enana blanca, etc.) estemos aplicando la MDR y las leyes de conservación modificadas, es decir, de si las modificaciones asociadas a la escala de Planck son grandes o pequeñas en comparación con los órdenes de magnitud de los cuadrimentos de los constituyentes que forman ese sistema.

Tampoco sabemos cómo pueden ser realmente las expresiones de la MDR o de la MCL en un contexto de DSR, es decir, cuáles son, de entre todas las posibles, las ecuaciones modificadas que nos reproducen coherentemente los resultados que estamos observando, en el marco de la investigación experimental (a partir de observaciones astrofísicas en Física de Altas Energías, etc.). O bien cuáles son las clases de geometrías que, en el marco de la aproximación perturbativa hecha en el apartado 4.4.b, son compatibles realmente con términos de fluctuación más pequeños que los promedios de los cuadrimentos (hemos llegado, como mucho, a segundo orden en teoría de perturbaciones, hasta orden  $M_P^{-2}$ , pero no hemos ido más allá). O qué interpretación matemática y física tienen tales restricciones sobre la geometría asociadas a los diferentes órdenes en teoría de perturbaciones, en ese mismo apartado. O incluso hasta qué punto la interpretación física que hemos desarrollado para los acoplos de cuadrimentos en la MCL (cómo 'funciona' un balón de fútbol por dentro) es correcta o no...

Es evidente que muchas de estas cuestiones siguen abiertas, fundamentalmente por la falta de pruebas de QG de que disponemos actualmente. Las condiciones físicas que pretendemos determinar (mediciones a escalas de la energía o de la longitud de Planck) están totalmente fuera de nuestro alcance en la actualidad, por mucho que existan propuestas experimentales según las que podamos medir efectos de QG incluso en el laboratorio [3, 5]. No cabe duda de que, mientras no avancemos en la resolución de nuestros detectores (por ejemplo, generando energías más elevadas que  $\approx 10$  TeV en un acelerador de partículas) o en la identificación y detección de efectos de amplificación de fenómenos de QG como los propuestos para medir el decaimiento del protón, por ejemplo, aún quedarán muchas incógnitas abiertas.

Incluyendo la del problema del balón de fútbol... *Porque, increíblemente, un balón de fútbol alberga en su interior muchos más secretos de los que aún imaginamos.*

Como comentario final, quisiera agradecer a los profesores José Luis Cortés y José Manuel Carmona, del área de Física Teórica, por su apoyo y ayuda en la realización de este trabajo, en la explicación de conceptos nuevos para mí y en el interés que han mostrado en las discusiones que hemos mantenido sobre todos estos conceptos.



## 6. Índice de abreviaturas

Listamos, a continuación, una serie de abreviaturas que aparecen a lo largo del trabajo, para que el lector que lo requiera pueda recurrir a ella.

SBP: Soccer ball problem (Problema del balón de fútbol)

QG: Quantum gravity (Gravedad Cuántica)

SR: Relatividad especial

DSR: Doubly/ Deformed special relativity (Relatividad especial deformada/doble)

QFT: Quantum field theory (Teoría Cuántica de Campos)

MDR: Modified dispersion relation (Relación de dispersión modificada)

MCL: Modified composition law (Ley de composición modificada)

ST: Espacio-tiempo

CM: Centro de masas

RW: Random walk

## Referencias

- [1] Amelino-Camelia G., 'Quantum-Spacetime Phenomenology', *Living Rev. Relativity* 16 (2013), 5; págs. 7 a 23, [arXiv:gr-qc/0806.0339]
- [2] Amelino-Camelia, G., 'Are We at the Dawn of Quantum-Gravity Phenomenology?', (2000) [arXiv:gr-qc/9910089] (citas en págs. 9, 17, 20, 23, 58, y 66)
- [3] Bekenstein, J., 'Is a tabletop search for Planck scale signals feasible?' (2012). [arXiv:gr-qc/1211.3816]
- [4] Wheeler, J.A., 'Geometrodynamics', Academic Press, New York (1962)
- [5] Pikovski, I; Vanner, M.R.; Aspelmeyer, M; Kim, M.S.; Brukner, C, 'Probing Planck-scale physics with quantum optics', *Nature Phys.* 8 (2012), pág. 393
- [6] Akhundov, A.A.; Bellucci, S.; Shiekh, A., 'Gravitational interaction to one loop in effective quantum gravity', *Phys. Lett. B*, 395, págs. 16 a 23 (1997). [arXiv:gr-qc/9611018]
- [7] Donoghue, J.F., 'Leading quantum correction to the Newtonian potential', *Phys. Rev. Lett.*, 72, págs. 2996 a 2999 (1994). [arXiv:gr-qc/9310024 [gr-qc]]
- [8] Chandrasekhar, S., 'The maximum mass of ideal white dwarfs', *Astrophys. J.*, 74, págs. 81 a 82 (1931)
- [9] Chandrasekhar, S., 'The highly collapsed configurations of a stellar mass (Second paper)', *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 95, págs. 207 a 225 (1935)
- [10] Colella, R.; Overhauser, A.W.; Werner, S.A.; 'Observation of gravitationally induced quantum interference', *Phys. Rev. Lett.*, 34, págs. 1472 a 1474 (1975)
- [11] Anandan, J., 'Gravitationally coupled electromagnetic systems and quantum interference', *Class. Quantum Grav.*, 1, L51 (1984)
- [12] Anandan, J., 'Relativistic thermoelectromagnetic gravitational effects in normal conductors and superconductors', *Phys. Lett. A*, 105, págs. 280 a 284 (1984)
- [13] Mead, C.A., 'Observable Consequences of Fundamental-Length Hypotheses', *Phys. Rev.*, 143, págs. 990 a 1005 (1966)
- [14] Ellis, J.R., Hagelin, J.S., Nanopoulos, D.V. and Srednicki, M., 'Search for Violations of Quantum Mechanics', *Nucl. Phys. B*, 241, págs. 381 a 405 (1984)
- [15] Ellis, J.R., Lopez, J.L., Mavromatos, N.E. and Nanopoulos, D.V., 'Precision tests of CPT symmetry and quantum mechanics in the neutral kaon system', *Phys. Rev. D*, 53, págs. 3846 a 3870 (1996) [arXiv:hep-ph/9505340]
- [16] Percival, I.C., 'Quantum Spacetime Fluctuations and Primary State Diffusion', *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 451, págs. 503 a 513 (1995)
- [17] Amelino-Camelia G., 'Doubly special relativity', *Nature* 418 (2002), págs. 34 a 35, [arXiv:gr-qc/0207049]
- [18] Amelino-Camelia, G.; Ellis, J.R.; Mavromatos, N.E.; Nanopoulos, D.V.; Sarkar, S., 'Potential Sensitivity of Gamma-Ray Burster Observations to Wave Dispersion in Vacuo', *Nature*, 393, págs. 763 a 765 (1998) [arXiv:astro-ph/9712103]
- [19] Aloisio, R.; Blasi, P.; Ghia, P.L.; Grillo, A.F., 'Probing the structure of space-time with cosmic rays', *Phys. Rev. D*, 62, 053010 (2000) [arXiv:astro-ph/0001258]
- [20] Amelino-Camelia, G.; Piran, T., 'Planck-scale deformation of Lorentz symmetry as a solution to the UHE-CR and the TeV-gamma paradoxes', *Phys. Rev. D*, 64, 036005 (2001) [arXiv:astro-ph/0008107]
- [21] Han, T.; Willenbrock, S., 'Scale of quantum gravity', *Phys. Lett. B*, 616, págs. 215 a 220 (2005) [hep-ph/0404182]
- [22] Hossenfelder, S., 'The Soccer-Ball Problem' *SIGMA* 10, 074 (2014) [arXiv:gr-qc/1403.2080]
- [23] Amelino-Camelia, G., 'Testable scenario for relativity with minimum length', *Phys. Lett. B* 510 (2001), págs. 255 a 263, [arXiv:hep-th/0012238]

- [24] Magueijo, J.; Smolin, L., 'Lorentz invariance with an invariant energy scale', Phys. Rev. Lett. 88 (2002), [arXiv:hep-th/0112090]
- [25] Magueijo, J.; Smolin, L., 'Generalized Lorentz invariance with an invariant energy scale' Phys. Rev. D 67 (2003), 044017 [arXiv:gr-qc/0207085]
- [26] Amelino-Camelia, G., 'Status of Relativity with observer-independent length and velocity scales', AIP Conf. Proc. 589, págs. 137-150 (2001) [arXiv:gr-qc/0106004]
- [27] Carmona J.M.; Cortés, J.L.; Mazón, D.; Mercati, F., 'About locality and the relativity principle beyond special relativity', Phys. Rev. D 84 (2011), 085010 [arXiv:hep-th/1107.0939]
- [28] Born, M., 'A Suggestion for Unifying Quantum Theory and Relativity', Proc. R. Soc. Lond. A, 165, págs. 291 a 303 (1938)
- [29] Einstein, A., 'Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annalen der Physik 17, 891 (1905)
- [30] Amelino-Camelia, G.; Freidel, L.; Kowalski-Glikman, J.; Smolin, L., 'The principle of relative locality', Phys. Rev. D 84 (2011), 084010 [arXiv:hep-th/1101.0931]
- [31] Magueijo, J.; Smolin, L., 'Gravity's Rainbow', Class. Quant. grav. 21, págs. 1725 a 1736 (2004) [arXiv:gr-qc/0305055]
- [32] Hossenfelder, S., 'Multi-Particle States in Deformed Special Relativity', Phys. Rev. D 75 (2007), 105005, [arXiv:hep-th/0702016]
- [33] Amelino-Camelia, G.; Freidel, L.; Kowalski-Glikman, J.; Smolin, L., 'Relative locality and the soccer ball problem', Phys. Rev. D 84 (2011), 087702 [arXiv:1104.2019]
- [34] Hossenfelder S., 'Comment on 'Relative locality and the soccer ball problem' ', Phys. Rev. D 88 (2013), 028701 [arXiv:1202.4066]
- [35] Amelino-Camelia, G.; Freidel, L.; Kowalski-Glikman, J.; Smolin, L., 'Noisy soccer balls', Phys. Rev. D 88 (2013), 028702 [arXiv:1307.0246]
- [36] Amelino-Camelia, G., 'Challenge to Macroscopic Probes of Quantum Spacetime Based on Noncommutative Geometry' (2013) [arXiv:gr-qc/1304.7271]
- [37] Kempf, A.; Mangano, G; Mann, R.B., 'Hilbert Space Representation of the Minimal Length Uncertainty Relation', Phys. Rev. D52 (1995), pág. 1108 [arXiv:hep-th/9412167]
- [38] Ali, A.F.; Das, S.; Vagenas, 'The Generalized Uncertainty Principle and Quantum Gravity Phenomenology', E.C. Phys. Lett. B678 (2009), pág. 49
- [39] Girelli, F.; Livine, E.R., 'Physics of deformed special relativity: relativity principle revisited', (2004) [arXiv:gr-qc/0412004]