Propiedades espectrales de operadores integrales en espacios de funciones holomorfas

Jaime Arto Alseda

Trabajo de fin de máster

Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Luciano Abadías Ullod

5 de junio de 2025

Resumen

Los espacios de Fock son espacios de funciones enteras cuyas integrales (o supremos) respecto de cierto peso gaussiano son finitas. En 2012, K. Zhu publicó la primera monografía sobre ellos, llamada *Analysis on Fock spaces* [25]. En 2024, O. Blasco publicó un artículo titulado *Boundedness and compactness of Hausdorff operators on Fock spaces* [5], donde estudia condiciones que caracterizan la compacidad y acotación de los operadores de Hausdorff, definidos para una medida positiva μ como

$$\mathscr{H}_\mu f(z) \int_0^\infty \frac{1}{t} f\left(\frac{z}{t}\right) \,\mathrm{d}\mu(t).$$

Bajo esas condiciones, el operador de Hausdorff se puede expresar como

$$\mathscr{H}_\mu f(z) = \int_{[0,\infty)} T(s) f(z) \,\mathrm{d}\nu(s),$$

donde ν es la medida imagen de μ a través de un cambio de variable, y $(T(s))_{s\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo de operadores.

La teoría de semigrupos proporciona potentes herramientas para el estudio de problemas como este. Por ejemplo, el estudio espectral del operador $\mathscr{H}_\mu$ se puede reducir al estudio del espectro del generador infinitesimal A del semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$, gracias al cálculo funcional. En particular, el teorema de la transformación espectral asegura que, bajo ciertas condiciones,

$$\widetilde{\sigma}(\mathscr{H}_\mu f) = \widetilde{\sigma}(\mathscr{L}\nu(A)) = \mathscr{L}\nu(\widetilde{\sigma}(A)),$$

donde $\widetilde{\sigma}(A)$ denota el espectro extendido de A, y $\mathscr{L}\nu$ denota la transformada de Laplace de ν. Resultados análogos (o muy similares) son también válidos para el espectro puntual y el espectro esencial.

Tras desarrollar brevemente la teoría de integración vectorial de Bochner, estudiar las principales propiedades de los semigrupos fuertemente continuos, y hallar los distintos tipos de espectro del generador A, utilizaremos los resultados que nos brinda el cálculo funcional para hallar las propiedades espectrales del operador integral $\mathscr{H}_\mu$ sobre el espacio de funciones holomorfas F^p_α. Estos resultados son originales, y estamos en proceso de elaboración de un artículo de investigación que enviaremos a publicar en los próximos meses.

Abstract

Fock spaces are spaces of entire functions whose integrals (or supremums) with respect to certain gaussian wheigh are finite. In 2012, K. Zhu published the very first monograph on Fock spaces, entitled *Analysis on Fock Spaces* [25]. In 2024, O. Blasco published the paper *Boundedness and compactness of Hausdorff operators on Fock spaces* [5], where he studies conditions that characterize compacity and boundedness of Hausdorfff operadors, defined for a positive measure μ as

$$\mathscr{H}_\mu f(z) \int_0^\infty \frac{1}{t} f\left(\frac{z}{t}\right) \mathrm{d}\mu(t).$$

Under those conditions, the Hausdorff operator can be expressed as

$$\mathscr{H}_\mu f(z) = \int_{[0,\infty)} T(s) f(z) \, \mathrm{d}\nu(s),$$

where μ is the image measure of μ through a change of variables, and $(T(s))_{s\geq 0}$ is a strongly continuous operator semigroup.

Operator semigroup theory provides us with powerful tools that can be used to approach this kind of problems. Specifically, the spectral study of $\mathscr{H}_\mu$ can be reduced to that of the intinitesimal generator A of the aforementioned semigroup, thanks to functional calculi. In particular, the spectral mapping theorem guarantees that, under some conditions,

$$\widetilde{\sigma}(\mathscr{H}_\mu f) = \widetilde{\sigma}(\mathscr{L}\nu(A)) = \mathscr{L}\nu(\widetilde{\sigma}(A)),$$

where $\widetilde{\sigma}(A)$ stands for the extended spectrum of A and $\mathscr{L}\nu$ is the Laplace transform of the measure ν. Analogous (or similar) results hold for the point and essential spectrum.

After having developed the theory of vector-valued integration, having studied the main results concerning strongly continuous semigroups, and having found the diferent kinds of spectra of the generator A, we will use the results that functional calculi provides us in order to establish spectral properties of the integral operator $\mathscr{H}_\mu$ on the holomorphic function space F^p_α. Those results are original, and we are in the process of writing a research article that will be sent to publication in the upcoming months.

Índice general

Resumen III

Abstract V

Introducción IX

1. Integración vectorial **1**
- 1.1. Espacios normados y de Banach . . . 1
  - 1.1.1. Los teoremas fundamentales del análisis funcional . . . 4
- 1.2. Integración vectorial . . . 4
  - 1.2.1. Funciones medibles . . . 4
  - 1.2.2. La integral de Bochner . . . 6
  - 1.2.3. Propiedades de la integral de Bochner. . . . 9

2. Generalidades de semigrupos **13**
- 2.1. Motivación y definición . . . 13
- 2.2. Semigrupos uniformemente continuos . . . 17
- 2.3. El teorema de la transformación espectral . . . 18

3. Semigrupos fuertemente continuos **21**
- 3.1. Definición y caracterización . . . 21
- 3.2. Generadores . . . 23
  - 3.2.1. Propiedades . . . 24
- 3.3. Propiedades espectrales . . . 28
  - 3.3.1. Teoremas de la transformación espectral . . . 32
- 3.4. Los teoremas de Hille-Yosida . . . 32

4. Operadores de Hausdorff en espacios de Fock **35**
- 4.1. Espacios de Fock. Resultados básicos . . . 35
- 4.2. Operador de Hausdorff . . . 43
  - 4.2.1. Representación de Hille-Phillips del operador de Hausdorff . . . 46
  - 4.2.2. Propiedades espectrales del generador infinitesimal . . . 51

5. Cálculo funcional y teoremas espectrales **59**
- 5.1. Cálculo funcional abstracto . . . 59
- 5.2. Cálculo funcional para operadores sectoriales . . . 61
  - 5.2.1. Operadores sectoriales . . . 61
  - 5.2.2. Cálculo funcional natural . . . 62
- 5.3. Cálculo funcional de Phillips para semigrupos . . . 72
- 5.4. Teoremas de la transformación espectral . . . 74
- 5.5. Aplicación al operador de Hausdorff sobre espacios de Fock . . . 79

Introducción

El objetivo último de este trabajo es el estudio espectral del operador de Hausdorff

$$\mathscr{H}_\mu f(z) = \int_0^\infty \frac{1}{t} f\left(\frac{z}{t}\right) \mathrm{d}\mu(t),$$

donde μ es una medida positiva sobre los borelianos de $(0,\infty)$, en los espacios de Fock F^p_α definidos como

$$F^p_\alpha = \{f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}) \mid \|f\|_{p,\alpha} < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\frac{\alpha p}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left|f(z)\mathrm{e}^{\frac{-\alpha}{2}|z|^2}\right|^p \mathrm{d}A(z)\right)^{\frac{1}{p}}$$

si $1 \leq p < \infty$ (donde A denota la medida de área sobre $\mathbb{C}$), o

$$\|f\|_{\infty,\alpha} = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}.$$

El operador de Hausdorff tiene una larga historia, y ha sido estudiado por autores como O. Blasco en [5] o P. Galanopoulos y G. Stylogiannis en [11]. El estudio de estos operadores puede parecer caprichoso, pero realmente viene motivado por ser la generalización natural del operador de Cesàro clásico.

Para ver cómo se llega a la construcción de $\mathscr{H}_\mu$ vamos a restringirnos por un momento a un contexto discreto. Tomamos una sucesión $\mu = (\mu_n)_{n=0}^\infty \subseteq \mathbb{C}$ y construimos la *matriz de Hausdorff* H_μ, cuyo elemento en posición (m,k) es

$$H_\mu(m,k) = \begin{cases} \binom{m}{k}\Delta^{m-k}\mu_k, & k \leq m, \\ 0, & k > m, \end{cases}$$

donde $\Delta\mu_k = \mu_k - \mu_{k+1}$ y $\Delta^m\mu_k = \Delta\left(\Delta^{m-1}\mu_k\right)$. Estas matrices fueron estudiadas por G. H. Hardy en [14] (capítulo X). Es fácil comprobar por inducción que para todo $k \leq m$ se tiene que

$$\Delta^{m-k}\mu_k = \sum_{i=0}^{m-k} (-1)^i \binom{m-k}{i} \mu_{k+i}. \tag{1}$$

Entonces H_μ es una matriz triangular inferior, que puede ser considerada como un operador que actúa sobre cada sucesión de la forma habitual, es decir, para toda sucesión $s = (s_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{C}$ definimos $H_\mu s$ como la sucesión cuyo elemento m-ésimo es

$$\left(H_\mu s\right)_m = \sum_{k=0}^m H_\mu(m,k)s_k.$$

Nótese que si elegimos la sucesión de momentos de la medida de Lebesgue

$$\mu_n = \frac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t, \quad \forall n \geq 0,$$

entonces gracias a (1), al binomio de Newton y a las propiedades de la función Beta se puede comprobar fácilmente que
$$H_\mu(m,k)=\frac{1}{m+1},$$
luego para cada $m\in\mathbb{N}$ se tiene que
$$\left(H_\mu s\right)_m=\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}s_k=(Cs)_m,$$
que es, precisamente, la sucesión clásica de medias de Cesàro C. Es decir, el operador de Hausdorff H_μ es una generalización del operador de Cesàro clásico.

El operador C ha sido ampliamente estudiado. Su acotación se sigue de la desigualdad de Hardy (véase [15], sección 9.8), pero no fue hasta 1965, en el artículo [7], que los autores A. Brown, P. R. Halmos y A. L. Shields lo consideraron como un operador $C:\ell^2\longrightarrow\ell^2$, y encontraron su espectro y espectro puntual. En [19], G. Leibowitz generalizó este estudio al caso ℓ^p, y en 2018 L. Abadías y P. J. Miana también estudiaron en [2] propiedades espectrales de estos operadores (o más bien de una versión generalizada) usando semigrupos fuertemente continuos.

El operador de Cesàro discreto induce un operador que actúa sobre funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$, de la siguiente manera: dada $f\in\mathscr{H}(\mathbb{D})$ con representación en serie de potencias $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, definimos
$$\mathscr{C}f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_k\right)z^n.$$
Este es el operador de Cesàro sobre $\mathscr{H}(\mathbb{D})$ y ha sido estudiado, como operador en los espacios de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ por autores como A. A. Albanese, J. Beltrán y W. J. Ricker en [3], donde estudian su continuidad, compacidad y propiedades espectrales. En ese mismo artículo se muestra que
$$\mathscr{C}f(z)=\frac{1}{z}\int_0^z\frac{f(\omega)}{1-\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$
Ya hemos visto que H_μ generaliza a C en el contexto discreto, luego en el contexto complejo el operador $\mathscr{H}_\mu$ sobre $\mathbb{D}$ dado por
$$\mathscr{H}_\mu f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}H_\mu(n,k)a_k\right)z^n \tag{2}$$
generaliza al operador de Cesàro $\mathscr{C}$. Un caso particularmente interesante surge al considerar la sucesión de momentos
$$\mu_n=\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}\mu(t), \tag{3}$$
donde μ es una medida positiva sobre los borelianos de $(0,1)$. Nótese que el operador de Cesàro proviene de considerar la medida de Lebesgue en (3). Además, en [1] se muestra que
$$\mathscr{H}_\mu f(z)=\int_0^1\frac{1}{1-(1-t)z}f\left(\frac{tz}{1-(1-t)z}\right)\mathrm{d}\mu(t). \tag{4}$$
De hecho, en ese mismo artículo los autores L. Abadías y J. Oliva-Maza hacen un estudio exhaustivo de las propiedades espectrales de este operador (en realidad, de una versión generalizada) sobre diferentes espacios de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$.

La situación en $\mathbb{C}$ es ligeramente distinta, ya que el operador de Cesáro clásico en $\mathbb{C}$ se define directamente como
$$\mathscr{C}f(z)=\frac{1}{z}\int_0^z f(\omega)\,\mathrm{d}\omega.$$
Nuestro objetivo es generalizarlo de manera similar a como hicimos en el disco $\mathbb{D}$. Esto se puede hacer definiendo el operador de Hausdorff en $\mathbb{C}$ como
$$\mathscr{H}_\mu f(z)=\int_0^\infty\frac{1}{t}f\left(\frac{z}{t}\right)\mathrm{d}\mu(t).$$

Esta expresión es muy similar a la del operador de (4), pero la diferente naturaleza de $\mathbb{D}$ y de $\mathbb{C}$ exige que sean diferentes. Resulta que, eligiendo la medida $\mathrm{d}\mu(t) = \chi_{[1,\infty)}(t)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ y haciendo un cambio de variable se llega a que

$$\mathscr{H}_\mu f(z) = \int_1^\infty f\left(\frac{z}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{z}\int_0^z f(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \mathscr{C}f(z)$$

(el caso $z = 0$ se extiende por continuidad).

Es decir, inspirados por la situación en el disco $\mathbb{D}$, hemos conseguido generalizar el operador de Cesàro en $\mathbb{C}$ a través del operador de Hausdorff.

En los artículos [5], [11], [6] y [4] se estudian propiedades de compacidad y acotación del operador $\mathscr{H}_\mu$ en diversos espacios de funciones holomorfas con pesos. En todos los casos, para que los resultados funcionen hay que imponer que la medida μ satisfaga $\mu((0,1)) = 0$ y la condición de integrabilidad

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\mu(t)}{t} = 1.$$

Es fácil comprobar que la medida $\mathrm{d}\mu(t) = \chi_{[1,\infty)}(t)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ que da lugar al operador de Cesàro satisface esta condición, luego todos los resultados que se prueben para $\mathscr{H}_\mu$ serán válidos también para $\mathscr{C}$.

Otra manera de construir el operador de Hausdorff sobre $\mathbb{C}$, análoga a la construcción de $\mathscr{H}_\mu$ sobre el disco consiste en considerar los *momentos*

$$\mu_n = \int_0^\infty \frac{1}{t^{n+1}}\,\mathrm{d}\mu(t), \tag{5}$$

y probar que el operador que a cada función entera $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ le asigna

$$\sum_{n=0}^\infty \mu_n a_n z^n$$

es, precisamente, el operador de Hausdorff $\mathscr{H}_\mu$. Además, el operador de Cesàro proviene de elegir la misma medida $\mathrm{d}\mu(t) = \frac{\chi_{[1,\infty)}(t)}{t}$ en (5).

La estructura del trabajo, a grandes rasgos, es como sigue:

- En el primer capítulo se presenta una breve introducción a la teoría de integración vectorial de Bochner, necesaria para dar sentido a expresiones tales como $\int_0^\infty T(t)f\,\mathrm{d}\mu(t)$, en las que estamos integrando vectores. También se introducirá el concepto de espacio de Banach y se proporcionarán algunas herramientas para trabajar con ellos.

- En el segundo capítulo se exploran propiedades básicas del objeto matemático del que sacaremos más provecho a lo largo de todo el trabajo: los semigrupos de operadores. Se dará una motivación para definir estas familias de operadores, generalizando el concepto de función exponencial matricial a espacios de dimensión infinita.

- En el tercer capítulo estudiaremos una clase particular se semigrupos, llamados *fuertemente continuos*. Estos semigrupos, además de ser muy comunes, tienen buenas propiedades, como por ejemplo la existencia de un generador infinitesimal A, que en general es un operador no acotado y cuyas propiedades espectrales serán suficientes para deducir las del operador de Hausdorff. Además, daremos un breve repaso al resultado clásico de Hille-Yosida, que caracteriza los operadores A que generan semigrupos fuertemente continuos.

- En el cuarto capítulo exploraremos los espacios de Fock y el operador de Hausdorff que hemos motivado antes. Veremos cómo representarlo como la integral de un semigrupo de operadores (representación de Hille-Phillips) y estudiaremos las propiedades de ese semigrupo, tales como la continuidad fuerte, su generador A y los diferentes tipos de espectro de este generador.

- En el último capítulo se presentan las herramientas que nos brinda en cálculo funcional para operadores sectoriales, además del cálculo funcional de Phillips, especial para generadores de semigrupos fuertemente continuos. Estas dos herramientas nos van a permitir traspasar de manera muy directa las propiedades espectrales del generador A al operador de Hausdorff.

En resumen, en este trabajo se realizan las siguientes aportaciones:

- Se presentan todos los conceptos necesarios para comprender la teoría de semigrupos y de operadores integrales de manera ordenada y autocontenida.
- Se fijan unos cimientos sólidos sobre los que construir toda la teoría que se desarrollará después. Se ha puesto especial énfasis en que los conceptos básicos queden bien definidos y en dar un significado riguroso a todas las expresiones que aparecen en la memoria.
- Proporcionaremos demostraciones de muchos de los resultados que se utilizan, algunas de ellas originales aunque el resultado sea conocido. Se proporcionarán referencias de aquellos resultados que no demostremos por quedar fuera de las pretensiones del trabajo.
- Hacemos una contribución original al estudio del operador de Hausdorff sobre los espacios de Fock, calculando sus diferentes tipos de espectro a través de la teoría de semigrupos y del cálculo funcional.

Capítulo 1

Integración vectorial

A lo largo de toda la memoria estaremos trabajando con integrales de operadores, que no son otra cosa que integrales vectoriales. Es por ello que en esta sección incluimos las nociones básicas de la integral vectorial, así como de espacios normados y de Banach.

1.1. Espacios normados y de Banach

La mayoría de resultados de esta sección no se demuestran, y se pueden encontrar en libros básicos sobre análisis funcional, como por ejemplo [18].

Definición 1.1. Sea X un espacio vectorial. Decimos que una aplicación $\|\cdot\| : X \longrightarrow [0,\infty)$ es una *norma* sobre X si se cumple que:

- $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in X$,
- $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$,
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X$.

En este caso diremos que el par $(X, \|\cdot\|)$ es un *espacio normado*.

Observación 1. Si el contexto es claro y no hay ningún tipo de ambigüedad, omitiremos la mención de la norma y hablaremos de un espacio normado X. Si no se indica lo contrario, asumiremos además que el espacio vectorial X es complejo.

Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, podemos definir la aplicación $d : X \times X \longrightarrow [0,\infty)$ dada por

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Esta aplicación verifica todas las condiciones que definen una distancia, es decir,

- $d(x,y) \geq 0, \quad \forall x, y \in X$,
- $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$,
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \quad \forall x, y, z \in X$ (desigualdad triangular).

Esto otorga al conjunto X una topología de espacio métrico.

Un caso especialmente relevante de espacios normados es el de espacios normados completos, también llamados espacios de Banach. Para ello necesitamos hablar brevemente sobre sucesiones en espacios normados.

Definición 1.2. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ una sucesión en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, y sea $x \in X$. Decimos que la sucesión es:

- *convergente* a x si

$$\text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe algún } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n \geq n_0, \text{ se tiene que } \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

  Equivalentemente, si la sucesión real de término general $\|x_n - x\|$ tiende a 0.

- *de Cauchy* si

$$\text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe algún } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n, m \geq n_0, \text{ se tiene que } \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Una propiedad que tiene cierta relevancia es la continuidad de la norma.

Lema 1.1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Entonces la norma es una aplicación continua en X.*

Estos conceptos están relacionados entre si. En particular, ser convergente es más fuerte que ser de Cauchy.

Proposición 1.2. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq$ una sucesión en un espacio normado X convergente a algún $x \in X$. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.*

Se tiene además que si una sucesión es convergente, su límite es único.

Proposición 1.3. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ una sucesión en un espacio de Banach X convergente a x y a y. Entonces necesariamente $x = y$.*

El recíproco de este resultado no tiene por qué ser cierto. Los espacios donde esto sucede se llaman espacios *completos* o *de Banach*.

Definición 1.3. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Decimos que $(X, \|\cdot\|)$ es un *espacio de Banach* o *completo* si dada cualquier sucesión de Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ existe algún $x \in X$ tal que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x.

Ejemplo 1. El ejemplo por excelencia de espacio de Banach es el siguiente: dado $1 \leq p < \infty$ y un espacio de medida positiva (Ω, Σ, μ), tomamos el conjunto

$$\mathscr{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es } \mu\text{- medible y } \|f\|_p < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Resulta que el par $(\mathscr{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_p)$ ni siguiera es un espacio normado, ya que si $f(x) = 0$ en casi todo punto $x \in \Omega$ entonces $\|f\|_p = 0$, luego no se cumple el segundo apartado de la definición (1.1). Esto se puede arreglar introduciendo la relación de equivalencia

$$f \sim g \text{ si } f(x) = g(x) \text{ en casi todo punto } x \in \Omega,$$

y considerando el conjunto cociente

$$L^p(\Omega, \Sigma, \mu) = \mathscr{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu) / \sim .$$

Resulta que ahora el par $(L^p(\Omega, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado completo (para un tratamiento detallado de estos espacios puede consultarse, por ejemplo [24]).

El hecho de que este espacio es de Banach se usará cuando demostramos la completitud de los espacios de Fock en el Capítulo 4.

Existen diversas caracterizaciones de los espacios de Banach, pero lo que nos interesará a nosotros es cuándo un subespacio vectorial M de un espacio de Banach X vuelve a ser un espacio de Banach.

Proposición 1.4. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach, y sea* $M \subseteq X$ *un subespacio vectorial de* X. *Entonces el par* $(M, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach si y sólo si* M *es cerrado en* X.

Demostración. Supongamos que $(M, \|\cdot\|)$ es completo, y tomemos una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ convergente a $x \in X$. Como $(X, \|\cdot\|)$ es completo, existe algún $y \in M$ tal que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a y. Por el Lema 1.3, necesariamente $x = y$, y por tanto $x \in M$, es decir, M es cerrado.

Recíprocamente, supongamos que M es cerrado. Tomemos una sucesión de Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M$. Entonces, como estamos considerando la misma norma en M y en X, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X, luego es convergente a algún $x \in X$. Como M es cerrado, necesariamente $x \in M$, y por tanto M es de Banach. □

El objeto al que vamos a prestar más atención a lo largo del trabajo son los operadores lineales entre espacios de Banach.

Definición 1.4. Sean $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios de Banach y consideremos un operador lineal $T : X \longrightarrow Y$. Definimos la cantidad

$$\|T\| = \sup \{\|Tx\|_Y \mid \|x\|_X \leq 1\},$$

y el conjunto

$$\mathscr{L}(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y \mid \|T\| < \infty\}.$$

A los elementos de $\mathscr{L}(X,Y)$ se les llama *operadores continuos*. Definimos también el *espacio dual* de X como

$$X^* = \mathscr{L}(X, \mathbb{C}),$$

y a sus elementos se les llaman *funcionales*.

Observación 2. La aplicación

$$\|\cdot\| : \mathscr{L}(X,Y) \longrightarrow [0, \infty)$$

define una norma sobre $\mathscr{L}(X,Y)$, y además el espacio normado $(\mathscr{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach si y sólo si Y es de Banach.

Si $X = Y$, escribiremos $\mathscr{L}(X) := \mathscr{L}(X,X)$.

El siguiente resultado ayuda a calcular normas de operadores en la práctica.

Proposición 1.5. *Sea* $T : X \longrightarrow Y$ *un operador lineal entre dos espacios de Banach* $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$. *Entonces*

$$\|T\| = \text{ínf}\{C > 0 \mid \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X\}.$$

Recordemos que un operador $T : X \longrightarrow X$ se dice *invertible* si existe otro operador $S : X \longrightarrow X$ tal que $ST = TS = I$.

Proposición 1.6. *Sea* $T \in \mathscr{L}(X)$*, con* X *Banach. Entonces:*

- *Si* $\|I - T\| < 1$*, entonces* T *es invertible.*
- *Si* $\|\lambda\| \leq \frac{1}{\|T\|}$*, entonces* $\lambda - T$ *es invertible.*

Utilizando la noción de norma de operador se caracteriza la continuidad de los operadores lineales.

Proposición 1.7. *Sea* $T : X \longrightarrow Y$ *un operador lineal entre dos espacios de Banach* X *e* Y. *Entonces* T *es continuo en* X *si y sólo si* $\|T\| < \infty$.

Observación 3. Por esta razón, a los operadores continuos se les llama a veces operadores *acotados*.

En la práctica, lo que se hace para encontrar la norma de un operador lineal y continuo es, primero encontrar una constante positiva C tal que

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X,$$

y después encontrar un vector x_0 tal que

$$\|Tx_0\|_Y = C\|x_0\|_X.$$

De esta manera, necesariamente $\|T\| = C$.

1.1.1. Los teoremas fundamentales del análisis funcional

Mencionamos ahora tres teoremas fundamentales en el estudio de los operadores lineales y continuos en espacios de Banach: el teorema de Hahn-Banach, el teorema del gráfico cerrado y el teorema de Banach-Steinhaus.

El teorema de Hahn-Banach habla sobre extensiones que preservan la norma de funcionales lineales y continuos.

Teorema 1.8 (Hahn-Banach)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $M \subseteq X$ un subespacio vectorial, y $T_0 : M \longrightarrow \mathbb{C}$ una aplicación lineal. Entonces existe un funcional $T \in X^*$ tal que*

- $T_0(x) = T(x), \quad \forall x \in M,$
- $\|T_0\| = \|T\|.$

Este teorema será relevante cuando demostremos que la integral de Bochner está bien definida.

El teorema de Banach-Steinhaus (también conocido como *principio de acotación uniforme*) habla sobre la acotación uniforme de operadores lineales.

Teorema 1.9 (Banach-Steinhaus)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach, y sea $(T(t))_{t\in I} \subseteq \mathscr{L}(X)$. Si para cada $x \in X$ se tiene que*

$$\sup_{t\in I} \|T(t)x\|_X < \infty,$$

entonces

$$\sup_{t\in I} \|T(t)\| < \infty.$$

Por último, el teorema del gráfico cerrado dice que el conjunto de operadores continuos y el conjunto de operadores cerrados definidos en un espacio de Banach X son el mismo.

Definición 1.5. Un operador $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow Y$ con X,Y espacios de Banach se dice *cerrado* si para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq D(T)$ tal que $x_n \to x$ y $Tx_n \to y$ se tiene que $x \in D(T)$ con $Tx = y$.

Teorema 1.10 (Gráfico cerrado)**.** *Sea $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal, con X,Y espacios de Banach. Entonces T es continua si y sólo si es cerrada.*

Observación 4. El Teorema 1.10 sólo es aplicable si el dominio de T es Banach (por ejemplo si $D(T)$ es cerrado). En otro caso no lo podemos aplicar.

1.2. Integración vectorial

1.2.1. Funciones medibles

Ya tenemos las nociones básicas que necesitamos sobre espacios de Banach. Una pregunta que puede surgir en este contexto es: así como podemos definir la integral de Lebesgue para funciones $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ que toman valores complejos, ¿podemos definir una integral análoga a la de Lebesgue para funciones $f : \Omega \longrightarrow X$, donde X es un espacio de Banach?

Esta cuestión es especialmente relevante en este trabajo, ya que más adelante trataremos con conjuntos de operadores de la forma

$$(T(t))_{t\geq 0} \subseteq \mathscr{L}(X),$$

y consideraremos las integrales

$$\int_0^{\infty} T(t)x \,\mathrm{d}t, \tag{1.1}$$

donde $x \in X$ y $T(t)x : [0,\infty) \longrightarrow X$.

Aún no hemos dado sentido a una integral de este tipo, y eso es lo que vamos a hacer a continuación. Los resultados de este capítulo se encuentran en [8] y [9].

Para dar sentido a una expresión como (1.1), vamos a seguir un proceso similar al que se sigue cuando se define la integral de Lebesgue.

Definición 1.6. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida positiva y $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Decimos que una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es:

- *simple* si existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $E_1, \ldots, E_n \in \Sigma$ tales que
$$f = \sum_{j=1}^{n} x_j \chi_{E_j}.$$
- *μ-medible* si existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que
$$\|f_n - f\| \to 0, \quad n \to \infty, \quad \mu\text{-para casi todo punto.}$$
- *débilmente μ-medible* si para cada $x^* \in X^*$ la función compleja $x^* \circ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es μ-medible en el sentido tradicional.

Lema 1.11. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow X$ una función continua, con I intervalo. Entonces f es débilmente μ-medible.*

Demostración. Sabemos que las funciones $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continuas son μ-medibles. Además, dado un funcional lineal y continuo $x^* \in X^*$, tenemos que la función $x^* \circ f$ es continua al ser composición de funciones continuas, y por tanto es medible, luego f es débilmente μ-medible. □

La noción de μ-medibilidad admite una caracterización en términos de funciones con valores esencialmente separables.

Definición 1.7. Se dice que una función $f : \Omega \longrightarrow X$ *toma valores esencialmente separables* si existe algún $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ y tal que $f(\Omega \setminus E)$ es separable en X.

Teorema 1.12 (Pettis)**.** *Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es μ-medible si y sólo si satisface las dos condiciones siguientes:*

- *f toma valores esencialmente separables,*
- *f es débilmente μ-medible.*

Como consecuencia del Teorema 1.12 (cuya demostración se encuentra en [8]) se deduce que podemos aproximar uniformemente cualquier función medible por funciones simples.

Corolario 1.13. *Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es μ-medible si y sólo si existe una sucesión de funciones simples que toman una cantidad contable de valores $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que*
$$\sup_{\omega \in \Omega \setminus \Omega_0} \{\|f(\omega) - f_n(\omega)\|\} \to 0, \quad n \to \infty,$$
para algún conjunto Ω_0 de medida nula.

Para nuestros propósitos va a ser suficiente considerar el caso $\Omega = I \subseteq \mathbb{R}$, donde I es un intervalo.

Proposición 1.14. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow X$ una función continua definida en un intervalo. Entonces f es m-medible, donde m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sabemos, por el Lema 1.11, que f es débilmente m-medible. Además, resulta que el conjunto
$$E = I \cap \mathbb{Q}$$
satisface que $m(E) = 0$, y además su imagen $f(E)$ es contable y satisface que
$$\overline{f(E)} = f(I)$$
al ser $\mathbb{Q}$ denso en $\mathbb{R}$, luego f toma valores esencialmente separables. Ahora basta aplicar el Teorema 1.12 para deducir que f es medible. □

1.2.2. La integral de Bochner

Una vez sabemos lo que es una función medible, podemos definir la integral de este tipo de funciones. Para ello definimos primero la integral de funciones simples.

Definición 1.8. Dada una función simple $s : \Omega \longrightarrow X$ tal que

$$s = \sum_{j=1}^{n} x_j \chi_{E_j},$$

definimos su integral de Bochner como

$$\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{n} x_j \mu(E_j).$$

Una función simple puede admitir varias representaciones diferentes, luego a priori la integral de una función simple depende de la representación que elijamos. Vamos a detenernos un momento a demostrar que la integral está bien definida, ya que vamos a utilizarla durante todo el trabajo.

Lema 1.15. *Sea X un espacio de Banach. Si dados $x, y \in X$ se tiene que $x^*x = x^*y$, $\forall x^* \in X^*$, entonces necesariamente $x = y$.*

Demostración. Veamos primero que x e y son linealmente dependientes. Si no lo fueran, podríamos definir el subespacio vectorial de dimensión 2

$$M = \operatorname{span}\{x, y\} \subseteq X = \{ax + by \mid a, b \in \mathbb{C}\}.$$

Dado un elemento $ax + by \in M$, definimos la aplicación lineal

$$T_0(ax + by) := a.$$

Por el Teorema 1.8, existe un funcional $T \in X^*$ tal que $T(ax + by) = a$, $\forall x, y \in X$, luego

$$Tx = 1, \quad Ty = 0,$$

y por tanto $Tx \neq Ty$.

Así, x e y son linealmente dependientes, pongamos $x = ay$, con $a \in \mathbb{C}$. Definimos el subespacio

$$M = \operatorname{span}\{x\} = \{cx \mid c \in \mathbb{C}\},$$

y la aplicación lineal

$$T_0(cx) = c, \quad cx \in M.$$

Por el Teorema 1.8, tenemos que existe un funcional $T \in X^*$ tal que $T(cx) = c$, $\forall x \in X$, luego

$$Tx = 1, \quad Ty = T(ax) = a,$$

y como por hipótesis $Tx = Ty$, necesariamente $a = 1$ y por tanto $x = y$. □

Proposición 1.16. *La integral de una función simple $s : \Omega \longrightarrow X$ está bien definida.*

Demostración. Supongamos que s admite dos representaciones diferentes, pongamos

$$s = \sum_{j=1}^{n} x_j \chi_{E_j} = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{A_j}. \tag{1.2}$$

Sean

$$I_1 = \sum_{j=1}^{n} x_j \mu_{E_j}, \quad I_2 = \sum_{j=1}^{m} y_j \mu_{A_j}.$$

Dado cualquier funcional $x^* \in X^*$, tenemos que

$$x^* I_1 = x^* \sum_{j=1}^{n} x_j \mu_{E_j} = \sum_{j=1}^{n} x^* x_j \chi_{E_j} = \int_\Omega x^* x_j \chi(E_j)\, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega x^* \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \chi_{E_j} \right) \mathrm{d}\mu. \tag{1.3}$$

Del mismo modo se demuestra que

$$x^* I_2 = \int_\Omega x^* \left(\sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{A_j} \right) \mathrm{d}\mu, \tag{1.4}$$

pero en virtud de (1.2), (1.3) y (1.4) se tiene que

$$x^* I_1 = x^* I_2, \quad x^* \in X^*,$$

luego gracias al Lema 1.15 se tiene que $I_1 = I_2$. □

Observación 5. Toda función simple admite una representación de la forma

$$s = \sum_{j=1}^{n} x_j \chi_{E_j},$$

donde los x_j son todos distintos y los E_j forman una partición de Ω. Esta representación de llama *representación canónica* de s.

Una vez tenemos bien definida la integral de una función simple, podemos definir la integral de una función medible cualquiera.

Definición 1.9. Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función μ-medible. Decimos que f es *integrable Bochner* si existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $f_n \to f$ μ-en casi todo punto y con

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\|\, \mathrm{d}\mu = 0.$$

En tal caso, definimos

$$\int_\Omega f\, \mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, \mathrm{d}\mu.$$

Observación 6. No es trivial en absoluto que la integral esté bien definida. Por un lado, podríamos elegir diferentes sucesiones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\|\, \mathrm{d}\mu = 0,$$

y por otro lado tenemos que garantizar la existencia del límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, \mathrm{d}\mu.$$

Para demostrar que la integral está bien definida utilizaremos algunos resultados sobre funciones simples.

Lema 1.17. *Sean $s, t : \Omega \longrightarrow X$ funciones simples. Entonces*

$$\int_\Omega (s+t)\, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega s\, \mathrm{d}\mu + \int_\Omega t\, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Sean
$$s=\sum_{j=1}^{n} x_j\chi_{E_j},\quad t=\sum_{k=1}^{m} y_k\chi_{A_k},$$
las representaciones canónicas de s y t, respectivamente. Entonces
$$s+t=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(x_j+y_k)\chi_{E_j\cap A_k},$$
luego
$$\begin{aligned}\int_\Omega (s+t)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_j+y_k)\mu(E_j\cap A_k)=\sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{k=1}^{m}\mu(E_j\cap A_k)\right)+\sum_{k=1}^{m} y_k\left(\sum_{j=1}^{n}\mu(E_j\cap A_k)\right)\\ &=\sum_{j=1}^{n} x_j\mu(E_j)+\sum_{k=1}^{m} y_k\mu(A_k)=\int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu+\int_\Omega t\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$
□

Lema 1.18. *Sea $s:\Omega\longrightarrow X$ una función simple. Entonces*
$$\left\|\int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu\right\|\le\int_\Omega \|s\|\,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Sea
$$s=\sum_{j=1}^{n} x_j\chi_{E_j}$$
la representación canónica de s. Entonces resulta que
$$\|s\|=\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|\chi_{E_j},$$
y por la desigualdad triangular tenemos que
$$\left\|\int_\Omega s\,\mathrm{d}\mu\right\|=\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\mu(E_j)\right\|\le\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|\mu(E_j)=\int_\Omega\|s\|\,\mathrm{d}\mu.$$
□

Con todo esto ya podemos demostrar que la integral de una función cualquiera está bien definida.

Proposición 1.19. *Sea $f:\Omega\longrightarrow X$ integrable Bochner. Entonces el vector $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$ está bien definido.*

Demostración. Tenemos que demostrar dos cosas:

- Si $(f_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión tal que
$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\|f_n-f\|\,\mathrm{d}\mu\to 0,$$
entonces existe el límite
$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu.$$
Para ello basta ver que la sucesión
$$\left(\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu\right)_{n=1}^{\infty}\tag{1.5}$$
es de Cauchy. En efecto, usando el Lema 1.17 y el Lema 1.18, dados $k,l\in\mathbb{N}$ se tiene que
$$\begin{aligned}\left\|\int_\Omega f_k\,\mathrm{d}\mu-\int_\Omega f_l\,\mathrm{d}\mu\right\|&=\left\|\int_\Omega(f_k-f_l)\,\mathrm{d}\mu\right\|\le\int_\Omega\|f_k-f+f-f_l\|\,\mathrm{d}\mu\\ &\le\int_\Omega\|f_k-f\|\,\mathrm{d}\mu+\int_\Omega\|f_l-f\|\,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$
de donde se deduce que la sucesión (1.5) es de Cauchy, y por tanto convergente.

- Dadas dos sucesiones $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que
$$\int_{\Omega} \|f_n - f\| \, d\mu, \int_{\Omega} \|g_n - f\| \, d\mu \to 0, \quad n \to \infty,$$
se tiene que
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} g_n \, d\mu.$$
En efecto, siguiendo los mismos pasos de antes se llega a que
$$\left\| \int_{\Omega} f_n \, d\mu - \int_{\Omega} g_n \, d\mu \right\| \leq \int_{\Omega} \|f_n - f\| \, d\mu + \int_{\Omega} \|g_n - f\| \, d\mu \to 0, \quad n \to \infty,$$
luego el límite es el mismo. □

1.2.3. Propiedades de la integral de Bochner.

Una de las caracterizaciones más intuitivas de la integrabilidad Bochner es la siguiente (su demostración está en [8], Teorema II.2.2).

Proposición 1.20. *Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función μ-medible. Si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita, entonces f es integrable Bochner si y sólo si la función real $\|f\|$ es integrable Lebesgue. En ese caso, se tiene que*
$$\left\| \int_{\Omega} f \, d\mu \right\| \leq \int_{\Omega} \|f\| \, d\mu.$$

Demostración. Supongamos que f es integrable Bochner. Sea $(f_n)_{n=1}^{n}$ una sucesión de funciones simples tal que
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \|f - f_n\| \, d\mu \to 0.$$
Entonces $\|f\|$ es medible por la desigualdad triangular inversa, y dado $n \in \mathbb{N}$ tenemos que
$$\int_{\Omega} \|f\| \, d\mu \leq \int_{\Omega} \|f - f_n\| \, d\mu + \int_{\Omega} \|f_n\| \, d\mu,$$
luego eligiendo n suficientemente grande tenemos que el lado derecho de la desigualdad es finito.

Recíprocamente, supongamos que $\|f\|$ es integrable. En virtud del Corolario 1.13 existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $f_n \to f$ en $\Omega \setminus \Omega_0$, donde $\mu(\Omega_0) = 0$. Sea la sucesión de funciones
$$g_n = f_n \chi_{E_n},$$
donde
$$E_n = \{x \in \Omega \mid \|f_n(x)\| \leq 2\|f(x)\|\}.$$
Entonces g_n es simple para todo $n \in \mathbb{N}$, cumple que $\|g_n(x)\| \leq 2\|f(x)\|$ para casi todo punto $x \in \Omega$, y además $\lim_{n\to\infty} \|g_n(x) - f(x)\| = 0$, $\forall x \in \Omega \setminus \Omega_0$, ya que dado $x \in \Omega \setminus \Omega_0$ tenemos que
$$\|g_n(x) - f(x)\| \leq \|g_n(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f(x)\|.$$
El segundo sumando del segundo miembro de la desigualdad tiende a 0 trivialmente. El primer sumando también tiende a cero, ya que
$$\|g_n(x) - f_n(x)\| = \|f_n(t)\|(\chi_{E_n}(x) - 1) \to 0, \quad n \to \infty, \quad \forall x \in \Omega \setminus \Omega_0,$$
ya que dado $x \in \Omega \setminus \Omega_0$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} \|f_n(x)\| = \|f(x)\|$, y por tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$\|f_n(x)\| \leq 2\|f(x)\|, \quad \forall n \geq n_0,$$

luego $\chi_{E_n}(x) - 1 \to 0$.

Más aún, para todo $x \in \Omega \setminus \Omega_0$ se tiene que

$$\|g_n(x) - f(x)\| \leq 3\|f(x)\|,$$

ya que $\|g_n(x)\| \leq 2\|f(x)\|$, y como por hipótesis $\|f\|$ es integrable Lebesgue, el teorema de la convergencia dominada asegura que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|g_n - f\| \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \|g_n - f\| \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

y por tanto f es integrable Bochner.

Veamos ahora que

$$\left\| \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \right\| \leq \int_\Omega \|f\| \,\mathrm{d}\mu.$$

En efecto, como la norma es una aplicación continua por el Lema 1.1 se tiene que

$$\left\| \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \right\| = \left\| \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \right\|,$$

pero como f_n es simple para todo $n \in \mathbb{N}$, por el Lema 1.18 tenemos que

$$\left\| \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n\| \,\mathrm{d}\mu.$$

Además, por el teorema de la convergencia dominada y usando de nuevo el Lema 1.1 se tiene que

$$\left\| \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n\| \,\mathrm{d}\mu. = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \|f_n\| \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \|f\| \,\mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

Pata terminar el capítulo presentamos algunas propiedades fundamentales de la integral de Bochner, algunas de las cuales tienen su análogo en la teoría de la integración de Lebesgue.

Teorema 1.21 (Hille). *Sea $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador cerrado en un espacio de Banach, y $f : \Omega \longrightarrow X$ una función μ-medible tal que Tf también es μ-medible. Entonces*

$$T\left(\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right) = \int_E Tf \,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, en virtud del Corolario 1.13 podemos encontrar una función que toma una cantidad contable de valores h_ε y un conjunto de medida nula N_1 tal que

$$\sup_{\omega\in\Omega\setminus N_1} \{\|f(\omega) - h_\varepsilon(\omega)\|\} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podemos escribir

$$h_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{E_n},$$

donde $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ es una partición de Ω. Del mismo modo, podemos encontrar una función que toma una cantidad contable de valores g_ε y otro conjunto de medida nula N_2 tales que

$$\sup_{\omega\in\Omega\setminus N_2} \{\|Tf(\omega) - g_\varepsilon(\omega)\} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

y podemos escribir

$$g_\varepsilon = \sum_{n,m=1}^{\infty} y_{n,m} \chi_{E_{n,m}},$$

donde $(E_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ es una partición de E_n, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para cada par (n,m), seleccionamos un $\omega_{n,m} \in E_{n,m}$, y definimos la función

$$\phi = \sum_{n,m=1}^{\infty} f(\omega_{n,m})\chi_{E_{n,m}}.$$

Tenemos entonces que, para cada $\omega \in \Omega \setminus N_1$,

$$\|f(\omega) - \phi(\omega)\| \leq \|f(\omega) - h_\varepsilon(\omega)\| + \|h_\varepsilon(\omega) - \phi(\omega)\|,$$

pero resulta que

$$\|f(\omega) - h_\varepsilon(\omega)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y además existe un único $E_{n,m}$ tal que $\omega = \omega_{n,m} \in E_{n,m}$, luego

$$\|h_\varepsilon(\omega) - \phi(\omega)\| = \|h_\varepsilon(\omega_{n,m}) - f(\omega_{n,m})\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N_1,$$

y por tanto

$$\|f(\omega) - \phi(\omega)\| \leq \|f(\omega) - h_\varepsilon(\omega)\| + \|h_\varepsilon(\omega) - \phi(\omega)\| < \varepsilon.$$

Del mismo modo se demuestra que

$$\|Tf(\omega) - T\phi(\omega)\| < \varepsilon, \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N_2.$$

Así, tenemos que

$$\int_\Omega \|f - \phi\| \,\mathrm{d}\mu, \int_\Omega \|Tf - T\phi\| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon\mu(\Omega),$$

y además por la definición de integral se tiene que

$$\int_E \phi \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k,l\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=1}^{l} f(\omega_{n,m})\mu(E_{n,m}),$$

y

$$\int_E T\phi \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k,l\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=1}^{l} Tf(\omega_{n,m})\mu(E_{n,m}).$$

Además, como T es cerrado, entonces $\int_E \phi \,\mathrm{d}\mu \in D(T)$, con $T\left(\int_E \phi \,\mathrm{d}\mu\right) = \int_E T\phi \,\mathrm{d}\mu$.

Tomemos ahora una sucesión $(\varepsilon_i)_{i=1}^{\infty}$ con $\varepsilon_i \to 0$, y para cada i consideramos la correspondiente función ϕ_i. Entonces

$$\left\| \int_E \phi_i \,\mathrm{d}\mu - \int_E f \,\mathrm{d}\mu \right\| \leq \int_E \|\phi_i - f\|,$$

pero

$$\sup_{\omega \in \Omega \setminus N_1} \|\phi_i(\omega) - f(\omega)\| < \varepsilon_i \to 0, \quad i \to \infty,$$

luego como el espacio es de medida finita se tiene que

$$\left\| \int_E \phi_i \,\mathrm{d}\mu - \int_E f \,\mathrm{d}\mu \right\| \leq \int_E \|\phi_i - f\| \,\mathrm{d}\mu \leq \mu(E) \sup_{\omega \in \Omega \setminus N_1} \|\phi_i(\omega) - f(\omega)\| \to 0, \quad i \to \infty. \tag{1.6}$$

Del mismo modo se demuestra que

$$\left\| \int_E T\phi_i \,\mathrm{d}\mu - \int_E Tf \,\mathrm{d}\mu \right\| \to 0, \quad i \to \infty, \tag{1.7}$$

pero como para cada i se tiene que$T\left(\int_\Omega \phi_i \,\mathrm{d}\mu\right) = \int_\Omega T\phi_i \,\mathrm{d}\mu$, entonces en virtud de (1.6) y de (1.7) se deduce que

$$T\left(\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right) = \int_E Tf \,\mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

La integral de Bochner tiene una versión análoga del teorema fundamental del cálculo integral, y que tendrá importancia cuando estudiemos semigrupos uniformemente continuos.

Teorema 1.22. *Sea f una función continua e integrable Bochner en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Entonces para todo $t \in I$ se tiene que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)\,\mathrm{d}s = f(t).$$

Demostración. Como f es continua, en virtud del Teorema 1.12 f toma valores esencialmente separables, luego existe un subconjunto denso $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq f(I)$. Entonces por el teorema fundamental del cálculo integral para la integral de Lebesgue tenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|f(s)-x_n\|\,\mathrm{d}s = \|f(t)-x_n\|, \quad \forall t \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ya que f es continua y la norma también. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\limsup_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|f(s)-f(t)\|\,\mathrm{d}s \leq \limsup_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|f(s)-x_n\|\,\mathrm{d}s + \|f(t)-x_n\| = 2\|f(t)-x_n\|.$$

Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es denso, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f(t)-x_{n_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

luego

$$\limsup_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|f(s)-f(t)\|\,\mathrm{d}s \leq \varepsilon,$$

luego necesariamente

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|f(s)-f(t)\|\,\mathrm{d}s = 0,$$

y por la desigualdad triangular se obtiene el resultado. $\square$

Capítulo 2

Generalidades de semigrupos

Durante gran parte de esta memoria estaremos trabajando con semigrupos de operadores. En particular, serán especialmente importantes los semigrupos fuertemente continuos en el origen. Muchos de los resultados de este capítulo se encuentran en [10].

2.1. Motivación y definición

Recordemos que habíamos definido $\mathscr{L}(X)$ como el conjunto de operadores lineales y continuos en X.

Este conjunto, dotado de las operaciones $\cdot_{\mathbb{C}}$ (producto por escalar), $\circ$ (composición) y $+$ (suma), y de la norma usual de operadores $\|\cdot\|$ forma un álgebra de Banach, es decir, satisface las siguientes propiedades:

- $T\circ(S+R) = T\circ S + T\circ S + R$ y $(T+S)\circ R = T\circ R + S\circ R, \quad \forall R,S,T\in\mathscr{L}(X)$,
- $T\circ(S\circ R) = (T\circ S)\circ R, \quad \forall R,S,T\in\mathscr{L}(X)$,
- $\lambda\cdot_{\mathbb{C}}(T\circ S) = (\lambda\cdot_{\mathbb{C}} T)\circ(\lambda\cdot_{\mathbb{C}} S), \quad \forall\lambda\in\mathbb{C}, \quad \forall S,T\in\mathscr{L}(X)$,
- Existe $K>0$ tal que $\|T\circ S\|\le K\|T\|\|S\|, \quad \forall S,T\in\mathscr{L}(X)$.

La motivación para definir el concepto de semigrupo es la que sigue: consideremos la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ x(0) = 1, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $x:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{C}$ y x es de clase $\mathscr{C}^{(1)}$. Es fácil demostrar que este problema de Cauchy tiene solución única, que es de la forma

$$x(t) = \mathrm{e}^{at}.$$

Además, resulta que si consideramos la ecuación funcional

$$\begin{cases} x(t+s) = x(t)x(s) \\ x(0) = 1, \end{cases} \tag{2.2}$$

donde $x:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{C}$, y encontramos una solución x continua, entonces necesariamente es derivable, y además x satisface (2.1) para un único $a\in\mathbb{C}$ (para más detalles consúltese [10], sección I.1).

Nos podemos preguntar si esto se puede generalizar a espacios más complicados, no necesariamente iguales a $\mathbb{C}$. Resulta que si x satisface (2.2), entonces $x(t)\in\mathbb{C}$, lo que puede ser interpretado como un operador lineal $x(t)\in\mathscr{L}(X)$, dado por $x(t)(z) := x(t)z$. Así, y tomando como base el problema (2.2), podemos dar el salto a $\mathbb{C}^n$, es decir, a matrices.

Consideramos entonces el problema funcional

$$\begin{cases} x(t+s) = x(t)x(s) \\ x(0) = I, \end{cases} \tag{2.3}$$

donde $x : [0,\infty) \longrightarrow M_n(\mathbb{C}) = \{M \mid M$ es matriz cuadrada $n\times n$ sobre $\mathbb{C}\}$, y I es la matriz identidad.

Este problema es fácil de resolver usando la noción de matriz exponencial, y se obtiene que para cada $A \in M_n(\mathbb{C})$, la función

$$x(t) = \mathrm{e}^{tA}$$

satisface (2.3), y es continua. Más aún, también satisface la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = I. \end{cases} \tag{2.4}$$

¿Y por qué parar aquí? Hemos generalizado el caso de dimensión 1 a dimensión n, pero nada nos impide preguntarnos qué pasa para espacios de dimensión infinita.

En efecto, si ahora consideramos un espacio de Banach X (nótese que en el caso $X = \mathbb{C}^n$ se tiene que $\mathscr{L}(X) = M_n(\mathbb{C})$) podemos considerar el problema funcional

$$\begin{cases} T(s+t) = T(s)\circ T(t), \quad s,t \geq 0 \\ T(0) = I, \end{cases} \tag{2.5}$$

donde $T : [0,\infty) \longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{C})$.

Las soluciones de (2.5) forman lo que se denomina un *semigrupo de operadores*.

Definición 2.1. Una colección de operadores $(T(t))_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach X se dice que es un *semigrupo de operadores* si satisface (2.5) y $T(t)$ es acotado para todo $t \geq 0$; es decir, si

(I) $T(s+t) = T(s)\circ T(t), \quad t,s \geq 0$ (ley del semigrupo),

(II) $T(0) = I$, donde I es el operador identidad,

(III) $\|T(t)\| < \infty, \quad \forall t \geq 0.$

Si las condiciones se satisfacen también para $t,s \in \mathbb{R}$, entonces hablaremos de un *grupo de operadores* $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$.

A la vista de los casos de dimensión finita, es natural preguntarse si dado $A \in \mathscr{L}(X)$, tiene sentido definir su exponencial como

$$T(t) = \mathrm{e}^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!},$$

donde la convergencia ocurre en el álgebra de Banach $\mathscr{L}(X)$, si este operador forma un semigrupo y si satisface el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T(t) = AT(t), \quad t \geq 0, \\ T(0) = I. \end{cases} \tag{2.6}$$

La respuesta a las tres cuestiones anteriores es afirmativa.

Lema 2.1. *Dado $A \in \mathscr{L}(X)$, el operador exponencial e^{tA} está bien definido.*

Demostración. Tenemos que demostrar que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

es convergente en el álgebra de Banach $\mathscr{L}(X)$, para lo cual basta ver que la sucesión de sumas parciales

$$\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{t^kA^k}{k!}\right)_{N=0}^{\infty}$$

es de Cauchy. En efecto, dados dos números naturales $N>M$ tenemos que

$$\left\|\sum_{k=0}^{N}\frac{t^kA^k}{k!}-\sum_{k=0}^{M}\frac{t^kA^k}{k!}\right\|=\left\|\sum_{k=0}^{M+1}\frac{t^kA^k}{k!}\right\|\leq\sum_{k=M+1}^{N}\left\|\frac{t^kA^k}{k!}\right\|=\sum_{k=M+1}^{N}\frac{|t|^k\|A\|^k}{k!}\to 0,\quad N,M\to\infty,$$

ya que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|t|^k\|A\|^k}{k!}$$

es convergente a $\mathrm{e}^{|t|\|A\|}$, luego la sucesión es de Cauchy y al ser $\mathscr{L}(X)$ de Banach, es convergente. $\square$

Observación 7. De ahora en adelante omitiremos el símbolo $\circ$ cuando escribamos la composición de dos operadores, y la denotaremos por yuxtaposición.

Veamos ahora que e^{tA} es solución de 2.5.

Proposición 2.2. *Dado $A\in\mathscr{L}(X)$, la colección de operadores $(T(t))_{t\geq 0}$ dada por*

$$T(t)=\mathrm{e}^{tA}$$

forma un semigrupo de operadores.

Demostración. Como la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|t|^k\|A\|^k}{k!}$$

es convergente, por la fórmula de Cauchy para el producto de dos series y por el binomio de Newton, para cada $s,t\geq 0$ se tiene que

$$\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^kA^k}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{n-k}\|A\|^{n-k}}{(n-k)!}\frac{s^k\|A\|^k}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(s+t)^nA^n}{n!}=\mathrm{e}^{(t+s)A},$$

luego $(T(t))_{t\geq 0}$ es un semigrupo de operadores. Además,

$$\mathrm{e}^{0A}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{0^kA^k}{k!}=A^0=I,$$

y

$$\|T(t)\|\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|r|^k\|A\|^k}{k!}=\mathrm{e}^{|t|\|A\|}<\infty.$$ $\square$

Antes de demostrar que este semigrupo satisface (2.6), vamos a demostrar que también cumple la propiedad que más adelante motivará la definición de semigrupo uniformemente continuo.

Proposición 2.3. *Dado $A\in\mathscr{L}(X)$, la aplicación*

$$\begin{array}{lcl}[0,\infty) & \longrightarrow & \mathscr{L}(X)\\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{tA}\end{array}$$

es continua respecto de la topología de norma de operador en $\mathscr{L}(X)$.

Demostración. Tenemos que demostrar que si $s \to t$, entonces $\mathrm{e}^{sA} \to \mathrm{e}^{tA}$ en el álgebra de Banach $\mathscr{L}(X)$. Tenemos que

$$\lim_{s\to t} \mathrm{e}^{sA} = \lim_{h\to 0} \mathrm{e}^{(t+h)A}, \tag{2.7}$$

y como $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$ es un semigrupo, entonces

$$\mathrm{e}^{(t+h)A} - \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}\left(\mathrm{e}^{hA} - I\right). \tag{2.8}$$

Resulta además que

$$\|\mathrm{e}^{hA} - I\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!}\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|h|^k \|A\|^k}{k!} = \mathrm{e}^{h\|A\|} - 1 \to 0, \quad h \to 0,$$

y por tanto

$$\lim_{h\to 0} \mathrm{e}^{hA} = I,$$

y de (2.7) y (2.8) se sigue que la aplicación del enunciado es continua. □

Ahora estamos en condiciones de demostrar que la exponencial de un operador acotado satisface la ecuación diferencial (2.6).

Proposición 2.4. *Dado $A \in \mathscr{L}(X)$, el semigrupo $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$ satisface la ecuación diferencial (2.6).*

Demostración. Tenemos que demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{(t+h)A} - \mathrm{e}^{tA}}{h} = A\mathrm{e}^{tA}$$

en norma de operador. En efecto, en virtud de la Proposición 2.2 se tiene que

$$\frac{\mathrm{e}^{(t+h)A} - \mathrm{e}^{tA}}{h} = \frac{\mathrm{e}^{hA} - I}{h}\mathrm{e}^{tA},$$

luego basta probar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{hA} - I}{h} = A$$

en norma de operador. Observamos que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\mathrm{e}^{hA} - I}{h} - A\right\| &= \left\|\frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!} - I\right) - A\right\| = \left\|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1} A^k}{k!}\right\| \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^{k-1} \|A\|^k}{k!} = \frac{\mathrm{e}^{|h|\|A\|} - 1}{|h|} - \|A\| \to 0, \quad h \to 0,\end{aligned}$$

luego efectivamente

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{hA} - I}{h} = A,$$

y el resultado está probado. □

De hecho, este tipo de operadores son los únicos que satisfacen la ecuación diferencial (2.6).

Proposición 2.5. *Si $T(t)$ es una solución de (2.6), necesariamente $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$.*

Demostración. Gracias a la Proposición 2.4 basta ver que el problema (2.6) admite una única solución. Supongamos que $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$, y que $S(t)$ es otra solución. Para cada $t \geq 0$ definimos el operador

$$Q_t(s) = T(s)S(t-s), \quad s \geq 0.$$

Observamos que

$$AT(s) = A\mathrm{e}^{tA} = A\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k A^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k A^k}{k!} A = T(s)A,$$

luego

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} Q_t(s) = AT(s)S(t-s) - T(s)AS(t-s) = 0,$$

luego necesariamente $S(t) = Q_t(0) = Q_t(t) = T(t) = \mathrm{e}^{tA}$, y la solución es única. □

2.2. Semigrupos uniformemente continuos

En el contexto anterior, el hecho de que la aplicación $t \longmapsto \mathrm{e}^{tA}$ sea continua da lugar a lo que se conoce como semigrupos *uniformemente continuos*.

Definición 2.2. Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo de operadores sobre un espacio de Banach X. Decimos que el semigrupo es *uniformemente continuo* si la aplicación $[0,\infty) \longrightarrow \mathscr{L}(X)$ dada por $t \longmapsto T(t)$ es continua en norma de operador.

Esta condición es muy restrictiva; de hecho los únicos semigrupos unifmemente continuos son los de la forma $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$.

Proposición 2.6. *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo uniformemente continuo sobre un espacio de Banach X. Entonces existe $A \in \mathscr{L}(X)$ tal que*

$$T(t) = \mathrm{e}^{tA}.$$

Demostración. Para cada $t \geq 0$ consideramos el operador $V(t)$ en X dado por

$$V(t)x = \int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s,$$

donde la integral es de Bochner. Sabemos que la aplicación $s \longrightarrow T(s)$ es continua en norma de operador, luego en particular la aplicación

$$s \longrightarrow T(s)x$$

es continua para todo $x \in X$. Así, por la Proposición 1.14 la aplicación $T(s)x$ es medible. Además, resulta que la aplicación $\|T(s)x\|$ es integrable Lebesgue en $[0,t]$, luego $T(s)x$ es integrable Bochner en $[0,t]$ por la Proposición 1.20.

Además, de nuevo por el Teorema 1.20 se tiene que para todo $x \in X$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s - x\right\| &= \left\|\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s - \frac{1}{t}\int_0^t x\,\mathrm{d}s\right\| = \left\|\frac{1}{t}\int_0^t (T(s)-I)x\,\mathrm{d}s\right\| \\ &\leq \frac{1}{t}\int_0^t \|(T(s)-I)x\|\,\mathrm{d}s \leq \|x\|\frac{1}{t}\int_0^t \|T(s)-I\|\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

luego como consecuencia del teorema fundamental del cálculo integral tenemos que

$$\left\|\frac{1}{t}V(t) - I\right\| \leq \frac{1}{t}\int_0^t \|T(s)-I\|\,\mathrm{d}s \to \|T(0)-I\| = 0, \quad t \to 0,$$

ya que $\|T(s)-I\|$ es continua y $T(0)=I$. Con esto,

$$\frac{1}{t}V(t)\to I, \quad t\to 0 \tag{2.9}$$

en norma de operador. Del mismo modo se demuestra que dado $t_0>0$,

$$\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t+t_0} T(s)\,\mathrm{d}s \to T(t_0), \quad t\to 0 \tag{2.10}$$

en norma de operador. Además, en virtud de (2.9) existe algún $t_0>0$ tal que

$$\left\|\frac{1}{t_0}V(t_0)-I\right\|<1, \tag{2.11}$$

y como consecuencia de la Proposición 1.6 se tiene que $\frac{1}{t_0}V(t_0)$ es invertible, luego $V(t_0)$ es invertible. Así, realizando el cambio de variable $r=s+t$ se tiene que

$$\begin{aligned} T(t)-I &= V(t_0)^{-1}V(t_0)T(t)-I = V(t_0)^{-1}\left(\int_0^t T(s+t)\,\mathrm{d}s - V(t_0)\right) \\ &= V(t_0)^{-1}\left(\int_{t_0}^{t+t_0} T(r)\,\mathrm{d}r - \int_0^t T(r)\,\mathrm{d}r\right). \end{aligned}$$

Por tanto, gracias a (2.9) y a (2.10) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{T(t+h)-T(t)}{h} &= \frac{T(h)-I}{h}T(t) = V(t_0)^{-1}\left(\frac{1}{h}\int_{t_0}^{h+t_0} T(r)\,\mathrm{d}r - \frac{1}{h}\int_0^h T(r)\,\mathrm{d}r\right)T(t) \\ &\to V(t_0)^{-1}\left(T(t_0)-I\right)T(t), \quad h\to 0^+ \end{aligned}$$

en norma de operador. Es decir, $T(t)$ es derivable, con

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)=AT(t),$$

donde $A=V(t_0)^{-1}\left(T(t_0)-I\right)$. Por la Proposición 2.5 y la Proposición 2.4, se tiene que $T(t)=\mathrm{e}^{tA}$. □

Observación 8. El operador A que cumple $T(t)=\mathrm{e}^{tA}$ queda unívocamente determinado por ser la derivada de $T(t)$ en $t=0$, luego dicha aplicación lineal A es única.

Gracias a la Proposición 2.6 y a la observación anterior tiene sentido la siguiente definición.

Definición 2.3. Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo uniformemente continuo en un espacio de Banach X. Definimos el *generador* de $(T(t))_{t\geq 0}$ como el único operador $A\in\mathscr{L}(X)$ tal que $T(t)=\mathrm{e}^{tA}$, $\forall t\geq 0$.

2.3. El teorema de la transformación espectral

Para terminar este capítulo vamos a hablar brevemente sobre las propiedades espectrales de los semigrupos uniformemente continuos. No vamos a demostrar ningún resultado, ya que no los vamos a utilizar, pero sí que vamos a mencionar el principal teorema espectral para este tipo de semigrupos.

Definición 2.4. Dado un operador $T: D(T)\subseteq X \longrightarrow X$ (no necesariamente acotado), se definen:

- El *espectro* de T como el conjunto

$$\sigma(T)=\{\lambda\in\mathbb{C} \mid \lambda-T \text{ no es invertible}\},$$

- La *resolvente* de T como el conjunto

$$\rho(T)=\mathbb{C}\setminus\sigma(T)=\{\lambda\in\mathbb{C} \mid \lambda-T \text{ es invertible}\}.$$

Más tarde se definirán otros conceptos relacionados, como el operador resolvente, el espectro puntual o el espectro esencial. De momento, mencionamos un resultado que relaciona el espectro de un semigrupo con el espectro de su generador.

Teorema 2.7 (Teorema de la transformación espectral)**.** *Sea* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un semigrupo uniformemente continuo en un espacio de Banach* X*, y sea* A *su generador. Entonces para cada* $t \geq 0$ *se tiene que*

$$\sigma(T(t)) = \left\{ \mathrm{e}^{t\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A) \right\}.$$

Todos los resultados anteriores conforman una teoría con resultados muy buenos y muy directos. La clave de que los semigrupos uniformemente continuos funcionen tan bien está en que el generador A es acotado. Sin embargo, la clase de los semigrupos uniformemente continuos es muy pequeña, ya que como consecuencia de la Proposición 2.6, todos los semigrupos uniformemente continuos son de la forma e^{tA}.

También nos damos cuenta de que el generador A de un semigrupo uniformemente continuo $(T(t))_{t\geq 0}$ viene dado por

$$Ax = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}.$$

Esto nos puede llevar a pensar, ¿por qué no intentar definir el generador de un semigrupo exigiendo sólamente lo mínimo necesario, es decir, que exista el límite

$$\lim_{h\to 0^+} \|T(h)x - x\| = 0$$

para cada x? Esto es, precisamente, lo que da lugar a la noción de *semigrupo fuertemente continuo*, que va a ser el objeto de estudio de ahora en adelante.

Capítulo 3

Semigrupos fuertemente continuos

3.1. Definición y caracterización

Definición 3.1. Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo de operadores en un espacio de Banach X. Decimos que $(T(t))_{t\geq 0}$ es un semigrupo *fuertemente continuo* si para cada $x \in X$ existe el límite

$$\lim_{h\to 0^+} \|T(h)x - x\|$$

y vale 0.

Esta definición viene motivada por el interés que suscita que el límite $\lim_{h\to 0} \frac{T(h)x-x}{h}$ exista, pero también podríamos haber pensado en relajar la definición de semigrupo uniformemente continuo, y exigir que para cada $x \in X$ las aplicaciones

$$\xi_x(t) = T(t)x, \quad t \geq 0$$

sean continuas (en lugar de que $t \longmapsto T(t)$ sea continua). Sin embargo, ambos conceptos son el mismo.

Proposición 3.1. *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo de operadores en X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) $(T(t))_{t\geq 0}$ *es fuertemente continuo.*

(b) *Para cada $x \in X$, la aplicación $\xi_x : [0,\infty) \longrightarrow X$ (llamada órbita de x) dada por*

$$\xi_x(t) = T(t)x, \quad \forall t \geq 0$$

es continua.

(c) *Existen $\delta > 0$, $M \geq 1$ y un subconjunto denso $D \subseteq X$ tales que*

a) $\|T(t)\| \leq M, \quad \forall t \in [0,\delta]$,

b) $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$, $\forall x \in D$.

Para demostrar este resultado vamos a necesitar un lema topológico.

Lema 3.2. *Sea X un espacio de Banach, $K \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto compacto, y sea $F : K \longrightarrow \mathscr{L}(X)$ una aplicación. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) *Para cada $x \in X$, las aplicaciones $F(t)x$, $\forall t \in K$ son continuas.*

(b) *F está uniformemente acotada y existe un subconjunto denso $D \subseteq X$ tal que para cada $x \in D$ las aplicaciones $F(t)x$, $\forall t \in K$ son continuas.*

(c) *Para todo $C \subseteq X$ compacto, la aplicación $K \times C \longrightarrow X$ tal que $(t,x) \longmapsto F(t)x$ es uniformemente continua.*

Demostración. La implicación (c)⇒(a) es trivial, ya que dado $x \in X$, basta elegir el compacto $C = \{x\}$.

Para la implicación (a)⇒(b) tenemos que demostrar que F está uniformemente acotada, es decir, que

$$\sup_{t\in K} \|F(t)\| < \infty.$$

Sabemos que la aplicación $t \longmapsto F(t)x$ es continua en K, que es compacto, luego necesariamente la aplicación $t \longmapsto \|F(t)x\|$ está acotada por el teorema de Weierstrass, es decir, $\sup_{t\in K} \|F(t)x\| < \infty$. Por el Teorema 1.9 se tiene que $\sup_{t\in K} \|F(t)\| < \infty$.

Por último, para demostrar la implicación (b)⇒(c), supongamos que $\sup_{t\in K} \|F(t)\| < M$, y sean $\varepsilon > 0$ y $C \subseteq X$ compacto. Como D es denso, existen $x_1, \ldots, x_m \in D$ tales que

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \left(x_i + \frac{\varepsilon}{4M}\mathbb{B} \right),$$

donde

$$\mathbb{B} = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Además existe $\delta > 0$ tal que

$$\|F(t)x_i - F(s)x_i\| \leq \varepsilon/4,$$

para todo $i = 1, \ldots, m$ y para todo $t, s \in K$ con $|t-s| < \delta$, ya que $x_i \in D$ y $t \longrightarrow F(t)x_i$ es continua en D.

Ahora, tomemos $x, y \in C$ y $t, s \in K$ tales que

$$\|x-y\| \leq \frac{\varepsilon}{4M}, \quad |t-s| < \delta,$$

y como D es denso podemos elegir alguno de los x_j de manera que $\|x - x_j\| < \varepsilon/M$. Por tanto, usando la desigualdad triangular se tiene que

$$\begin{aligned}
\|F(t)x - F(t)y\| &\leq \|F(t)x - F(t)x_j\| + \|F(t)x_j - F(s)x_j\| + \|F(s)x_j - F(s)x\| + \|F(s)x - F(s)y\| \\
&\leq \|F(t)\|\|x - x_j\| + \|F(t)x_j - F(s)x_j\| + \|F(s)\|\|x_j - x\| + \|F(s)\|\|x-y\| \\
&\leq M\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4} + M\frac{\varepsilon}{4M} + M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

luego la aplicación del enunciado es continua. Además, como ε/M no depende del punto elegido, la convergencia es uniforme. □

Ahora estamos en condiciones del demostrar la Proposición 3.1.

Demostración (de la Proposición 3.1). Veamos la implicación (b)⇒(c). El apartado (1) es trivial. Para demostrar (2) procedemos por reducción al absurdo, es decir, suponemos que para todo $M \geq 1$ y para cada $\delta > 0$ existe algún $t \in [0, \delta]$ tal que $\|T(t)\| > M$. Elijamos una sucesión $(\delta_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq [0, \infty)$ tal que $\delta_n \to 0$, y tal que $\|T(\delta_n)\| \to \infty$. Por el Teorema 1.9 existe $x \in X$ tal que $\|T(\delta_n)x\| \to \infty$, luego la aplicación $t \longrightarrow T(t)x$ no es continua.

Veamos ahora la implicación (c)⇒(a). Tenemos que demostrar que para cada $x \in X$, se tiene que

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x.$$

Tomemos una sucesión $(t_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq [0, \infty)$ tal que $t_n \to 0$, y el conjunto

$$K = \{t_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

Entonces K es compacto, y como para todo $t \geq 0$ se tiene que $\|T(t)\| \leq M$, resulta que la restricción

$$T(t)|_K = T(t), \quad \forall t \in K$$

es acotada. Además, gracias a la parte (2) del apartado (c), para cada $x \in X$ la restricción $T(t)|_K x$ es continua. Así, por el Lema 3.2 tenemos que para cada $x \in X$, la aplicación $T(t)x$ es continua, y por tanto

$$\lim_{h \to 0^+} T(h)x = x.$$

Por último, veamos la implicación (a)⇒(b). Tenemos que demostrar que la aplciación $t \longmapsto T(t)x$ es continua para todo $x \in X$.

Sean $t_0 > 0$ y $x \in X$. Por un lado, si $h > 0$ entonces

$$\|T(t_0+h)x - T(t_0)x\| = \|T(t_0)\left(T(h)x - x\right)\| \leq \|T(t_0)\|\|T(h)x - x\| \to 0, \quad h \to 0^+,$$

luego

$$\lim_{h \to 0^+} \|T(h)x - x\| = 0.$$

Por otro lado, si $h < 0$ entonces

$$\|T(t_0+h)x - T(t_0)x\| = \|T(t_0+h)\left(x - T(-h)x\right)\| \leq \|T(t_0+h)\|\|x - T(-h)x\|.$$

Si vemos que

$$\sup_{t \in [0,t_0]} \|T(t)\| < \infty,$$

tendremos que

$$\|T(t_0+h)x - T(t_0)x\| \leq \|T(t_0+h)\|\|x - T(-h)x\| \to 0, \quad h \to 0^-.$$

En efecto, como consecuencia del Teorema 1.9 existe algún $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{t \in [0,\delta]} \|T(t)\| < \infty.$$

fijamos ahora $t_0 > 0$. Si $t_0 < \delta$, entonces es trivial que

$$\sup_{t \in [0,t_0]} \|T(t)\| < \infty.$$

Si $t_0 > \delta$, por la propiedad arquimediana tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_0 < n\delta$, luego como $(T(t))_{t \geq 0}$ es semigrupo, se tiene que

$$\sup_{t \in [0,t_0]} \|T(t)\| \leq \sup_{t \in [0,n\delta]} \|T(t)\| = \sup_{t \in [0,\delta]} \|T(nt)\| \leq \sup_{t \in [0,\delta]} \|T(t)^n\| \leq \sup_{t \in [0,\delta]} \|T(t)\|^n < \infty.$$

Esto concluye la demostración. □

3.2. Generadores

Ya hemos hablado de generadores de semigrupos uniformemente continuos en el Capítulo 1, y ya hemos mencionado en la Sección 3.1 que la motivación de la definición de semigrupo fuertemente es garantizar la mínima condición que hace que el generador pueda estar bien definido.

Definición 3.2. Sea $(T(t))_{t \geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de banach X. Definimos el *generador* de $(T(t))_{t \geq 0}$ como el operador $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ dado por

$$Ax = \lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h},$$

definido en el subconjunto

$$D(A) := \left\{ x \in X \;\middle|\; \text{existe } \lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \right\}.$$

Observación 9.

- Es igual de importante la expresión del generador A como el dominio $D(A)$ donde este está definido. Es por ello que usualmente se denota al generador como el par $(A, D(A))$.
- El generador de un semigrupo fuertemente continuo está bien definido como consecuencia inmediata de la definición de continuidad fuerte.
- Podemos expresar también el dominio $D(A)$ como

$$D(A) = \{x \in X \mid \xi_x \text{ es derivable por la derecha en } 0\}.$$

Lema 3.3. *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo, y $(A, D(A))$ su generador. Entonces*

$$D(A) = \{x \in X \mid \xi_x \text{ es derivable en } [0, \infty)\}.$$

Demostración. Por la observación anterior, sabemos que ξ_x es derivable por la derecha en 0. Tomemos $t > 0$. Entonces

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\xi_x(t+h) - \xi_x(t)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t) \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = T(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_x(0^+),$$

luego ξ_x es derivable en t por la derecha.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-} \frac{\xi_x(t+h) - \xi_x(t)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \lim_{h\to 0^-} T(t+h)\frac{x - T(-h)x}{h} = \lim_{h\to 0^+} T(t-h)\frac{T(h) - x}{h} \\ &= T(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_x(0^+),\end{aligned}$$

luego ξ_x es derivable por la izquierda, y como las derivadas laterales coinciden, es derivable en t. □

Mientras en el caso de semigrupos uniformemente continuos el generador siempre era un operador lineal acotado que determinaba unívocamente al semigrupo (ver la observación que sigue a la Proposición 2.6), en el caso de semigrupos fuertemente continuos no vamos a tener generadores acotados, sino una condición más débil, pero los generadores van a seguir determinando unívocamente al semigrupo y además van a tener muy buenas propiedades.

Definición 3.3. Un operador $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow Y$, con X, Y espacios de Banach se dice que es *densamente definido* si $D(T)$ es denso en X.

Este concepto es clave en el estudio de los semigrupos fuertemente continuos.

3.2.1. Propiedades

Teorema 3.4. *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Banach X, y sea $(A, D(A))$ su generador. Entonces A es un operador lineal cerrado y densamente definido, que determina unívocamente al semigrupo.*

Para demostrar este importante resultado necesitamos un resultado previo, que es una especie de análogo del teorema fundamental del cálculo integral para semigrupos.

Lema 3.5. *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo, y sea $(A, D(A))$ su generador. Entonces:*

(a) *Si $x \in D(A)$, entonces $T(t)x \in D(A)$, $\forall t \geq 0$, y además*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \quad \forall t \geq 0.$$

(b) *Para todo $t \geq 0$ y para cada $x \in X$, tenemos que*

$$\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s \in D(A).$$

(c) *Para todo $t \geq 0$ se tiene que:*

a*) Si $x \in X$, entonces*

$$T(t)x - x = A\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s.$$

b*) Si $x \in D(A)$, entonces*

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax\,\mathrm{d}s.$$

Demostración.

(a) Como $(T(t))_{t\geq 0}$ es un semigrupo, se tiene que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = T(t)Ax.$$

Así, $T(t)x \in D(A)$, y en virtud del Lema 3.3 se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x = T(t)Ax.$$

Como ahora sabemos que $T(t)x \in D(A)$ podemos escribir

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{T(h) - I}{h}T(t)x = AT(t)x.$$

(b) Por el Teorema 1.10 tenemos que $T(h)$ es cerrado, luego podemos utilizar el Teorema 1.21 para afirmar que

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(T(h)\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s\right) &= \frac{1}{h}\left(\int_0^t T(s+h)x\,\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} T(s)x\,\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s\right).\end{aligned} \tag{3.1}$$

Por otra parte, la aplicación $t \longmapsto T(t)x$ es continua al ser el semigrupo fuertemente continuo, luego por el Teorema 1.22 y gracias a (3.1) tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left(T(h)\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s\right) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left(T(h)\int_t^{t+h} T(s)x\,\mathrm{d}s - \int_0^h T(s)x\,\mathrm{d}s\right)\\ &= T(t)x - x,\end{aligned}$$

luego $\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s \in D(A)$.

(c) En el apartado anterior demostramos que, de hecho,

$$A\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s = T(t)x - x, \quad \forall x \in X.$$

Sea ahora $x \in D(A)$. En la demostración de la Proposición 3.1 vimos que

$$\sup_{s\in[0,t]} \|T(s)\| < \infty,$$

luego como $(T(t))_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo tenemos que

$$\sup_{s\in[0,t]}\left\|T(s)\frac{T(h)x-x}{h}-T(s)Ax\right\|\leq \sup_{s\in[0,t]}\|T(s)\|\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-Ax\right\|\to 0,\quad h\to 0^+. \tag{3.2}$$

Además, por el Teorema 1.21 y en virtud de (3.2) tenemos que

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{h}(T(h)-I)\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s-\int_0^t T(s)Ax\,\mathrm{d}s\right\|=\left\|\int_0^t T(s)\frac{T(h)x-x}{h}\,\mathrm{d}s-\int_0^t T(s)Ax\,\mathrm{d}s\right\|\\ &\leq \int_0^t T(s)\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-Ax\right\|\mathrm{d}s\leq t\sup_{s\in[0,t]}\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-Ax\right\|\to 0,\quad h\to 0^+,\end{aligned}$$

luego efectivamente

$$A\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s=\int_0^t AT(s)x\,\mathrm{d}s.$$

□

Ahora podemos demostrar el Teorema 3.4.

Demostración (del Teorema 3.4). Veamos que $(A,D(A))$ es cerrado. En efecto, tomemos una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq D(A)$ tal que $x_n\to x$, con $x\in X$ y tal que $Ax_n\to y$. Por el Lema 3.5 tenemos que

$$T(t)x_n-x_n=\int_0^t T(s)Ax_n\,\mathrm{d}s.$$

Como además $(T(t))_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo, siguendo las mismas ideas de la demostración del Lema 3.5 se prueba que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t T(s)Ax_n\,\mathrm{d}s=\int_0^t T(s)y\,\mathrm{d}s,$$

luego

$$T(t)x-x=\lim_{n\to\infty}T(t)x_n-x_n=\lim_{n\to\infty}\int_0^t T(s)Ax_n\,\mathrm{d}s=\int_0^t T(s)y\,\mathrm{d}s.$$

Ahora, multiplicando ambos lados por $\frac{1}{t}$ y tomando $t\to 0^+$, por el Teorema 1.22 se tiene que

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)x-x}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,\mathrm{d}s=T(0)y=y,$$

es decir, $x\in D(A)$, y además $Ax=y$, luego el operador es cerrado.

Veamos que A es densamente definido. Por el Lema 3.5 sabemos que

$$\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s\in D(A),$$

y de nuevo por el Lema 3.5 se tiene que para todo $x\in X$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s=x,$$

luego $D(A)$ es denso en X.

Por último, veamos que $(A,D(A))$ determina unívocamente al semigrupo. En efecto, sea $(S(t))_{t\geq 0}$ otro semigrupo con el mismo generador $(A,D(A))$. Dados $x\in D(A)$ y $t>0$, consideramos las aplicaciones $\eta_x:[0,t]\longrightarrow X$ dadas por $\eta_x(s)=T(t-s)S(s)x$, $\forall s\in[0,t]$. Como $(S(t))_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo, el conjunto

$$K_s=\left\{\frac{S(s+h)x-S(s)x}{h}\;\middle|\;h\in[0,1]\right\}\cup\{AS(s)x\}$$

es compacto para cada $s\in[0,t]$, ya que dada cualquier sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq K_s$ podemos encontrar una subsucesión convergente a $AS(s)x$, descartando los posibles elementos iguales a $AS(s)x$.

Por lo tanto, gracias al Lema 3.2 se tiene que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\left(\eta_x(s+h)-\eta_x(s)\right)=\frac{1}{h}\left(T(t-s-h)S(s+h)x-T(t-s)S(s)x\right)\\
&=\frac{1}{h}\left(T(t-s-h)S(s+h)x-T(t-s-h)S(s)x+T(t-s-h)S(s)x-T(t-s)S(s)x\right)\\
&=\frac{1}{h}T(t-s-h)\left(S(s+h)x-S(s)x\right)+\frac{1}{h}\left(T(t-s-h)-T(t-s)\right)S(s)x\\
&\to T(t-s)AS(s)x-AT(t-s)S(s)x, \quad h\to 0^+,
\end{aligned}$$

y por el Lema 3.5 se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\eta_x(s)=T(t-s)AS(s)x-AT(t-s)S(s)x=0, \quad \forall s\in[0,t],$$

luego necesariamente $\eta_x(s)$ es constante en $[0,t]$.

En particular, como $\eta_x(s)=T(s)x$ y $\eta_x(t)=S(t)x$, tenemos que

$$T(t)x=S(t)x, \quad \forall x\in D(A),$$

pero $D(A)$ es denso, luego necesariamente

$$T(t)=S(s), \quad \forall t\in[0,\infty). \qquad \square$$

En el comentario previo a la Definición 3.3 decíamos que en general los generadores de semigrupos fuertemente continuos no son acotados. De hecho, vamos a demostrar que si el generador es acotado, el semigrupo es uniformemente continuo.

Teorema 3.6. *Dado un semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ fuertemente continuo X con generador $(A,D(A))$ en un espacio de Banach X, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) *El generador A es acotado.*

(b) *El dominio del generador es $D(A)=X$.*

(c) *El dominio $D(A)$ es cerrado en X.*

(d) *El semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ es uniformemente continuo.*

Demostración.

Demostremos (a)⇒(b). Supongamos que A es acotado, y sea $x\in X$. Como $D(A)$ es denso por el Teorema 3.4, existe $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq D(A)$ tal que $x_n\to x$, luego en particular la sucesión es de Cauchy, luego dado $\varepsilon>0$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que si $n,m\geq n_0$, entonces $\|x_n-x_m\|<\varepsilon/\|A\|$. Como A es acotado, tenemos que

$$\|Ax_n-Ax_m\|\leq\|A\|\|x_n-x_m\|<\varepsilon, \quad \forall n,m>n_0,$$

y como X es de Banach, existe $y\in X$ tal que $Ax_n\to y$. Más aún, sabemos que A es cerrado por el Teorema 3.4, luego necesariamente $x\in D(A)$ con $Ax=y$, y por tanto $X=D(A)$.

La implicación (b)⇒(c) es trivial.

Demostraremos ahora (a)⇒(c). En efecto, como $(T(t))_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo, por el Lema 3.5 se tiene que para todo $x\in D(A)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x=AT(t)x, \quad \forall t\geq 0.$$

Como (a)⇒(b), tenemos que $D(A)=X$, luego

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x=AT(t)x, \quad \forall x\in X, \quad \forall t\geq 0,$$

y por la Proposición 2.5 se tiene que

$$T(t) = \mathrm{e}^{tA}, \quad \forall t \geq 0,$$

luego $(T(t))_{t\geq 0}$ es uniformemente continuo.

La implicación (c)⇒(a) se sigue directamente de la Proposición 2.6.

Veamos por último la implicación (c)⇒(a). Como $D(A)$ es cerrado, es un espacio de Banach por la Proposición 1.4. Como A es cerrado y $D(A)$ es de Banach, por el Teorema 1.10 A es continuo, luego es acotado. □

Una propiedad especialmente relevante a la hora de estudiar el espectro de un semigrupo es que su norma crece, a lo sumo, exponencialmente.

Teorema 3.7. *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Banach X. Entonces existen constantes $\omega \in \mathbb{R}$ y $M \geq 1$ tales que*

$$\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demostración. Sabemos que existe una constante $M \geq 1$ tal que

$$\|T(s)\| \leq M, \quad \forall s \in [0,1].$$

Dado $t \geq 1$, llamamos $n = \lfloor t \rfloor \in \mathbb{N}$ y $s = t - \lfloor t \rfloor \in [0,1)$. Entonces

$$t = s + n,$$

y como $(T(t))_{t\geq 0}$ es semigrupo, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|T(t)\| &= \|T(s+n)\| = \|T(t)T(s)\| \leq \|T(t)\|\|T(s)\| \\
&= \|T(s)\|\|T(1)^n\| \leq \|T(s)\|\|T(1)\|^n \leq \|T(s)\|\|T(1)\|^n \\
&\leq M\mathrm{e}^{n\log\|T(1)\|} \leq M\mathrm{e}^{t\log M},
\end{aligned}$$

ya que $n \leq t$, luego llamando $\omega = \log M$ tenemos la cota deseada. □

Será útil en el estudio espectral de semigrupos considerar la menor constante ω que satisfaga el Teorema 3.7.

Definición 3.4. Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Banach X. Llamamos *cota de crecimiento* del semigrupo a la constante

$$\omega_0 = \text{ínf}\left\{\omega \in \mathbb{R} \mid \text{existe } M \geq 1 \text{ tal que } \|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}, \forall t \geq 0\right\}.$$

3.3. Propiedades espectrales

Una propiedad que nos ayudará a distinguir entre semigrupos uniformemente continuos y fuertemente continuos es la siguiente.

Proposición 3.8. *Sea $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador lineal acotado. Entonces $\sigma(T)$ es acotado.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de la Proposición 1.6. □

Corolario 3.9. *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Banach X, y sea $D(A)$ su generador. Si $\sigma(A)$ no es acotado, entonces $(T(t))_{t\geq 0}$ no es uniformemente continuo.*

Demostración. Si $\sigma(A)$ no es acotado, entonces por la Proposición 3.8 A no es acotado, luego por la Proposición 3.1 el semigrupo no es uniformemente continuo. □

Ya hemos definido los conceptos de espectro y resolvente. En este trabajo vamos a manejar otros tres conceptos más: el espectro puntual, el espectro esencial y el operador resolvente.

Definición 3.5. Dado un operador lineal $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow X$, definimos:

- el *espectro puntual* de T como el conjunto

$$\sigma_{point}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \text{ no es inyectivo}\},$$

- el *espectro esencial* de T como el conjunto

$$\sigma_{\text{ess}}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \dim\ker(\lambda - T) = \infty \text{ o } \operatorname{codim}\operatorname{rg}(\lambda - T) = \infty\}.$$

Observación 10. Recuérdese que, dado un espacio vectorial V y un subespacio $M \subseteq V$, se define la *codimensión* de M como

$$\operatorname{codim}(M) = \dim(V/M).$$

En particular, si $V = M \oplus N$, entonces $\operatorname{codim}(M) = \dim(N)$.

Definición 3.6. Sea T un operador lineal en X, y $\lambda \in \rho(T)$. Definimos el *operador resolvente* de T asociado a λ como el operador

$$R(\lambda, T)x := (\lambda - T)^{-1}x, \quad x \in X.$$

Este operador es acotado siempre que T sea cerrado. Para verlo necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.10. *Sea $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador cerrado e invertible. Entonces A^{-1} también es cerrado.*

Demostración. Tenemos que A^{-1} está definido en X al ser A invertible. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ tal que $x_n \to x \in X$ y con $A^{-1}x_n \to y$. Como A es cerrado y $(A^{-1}x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq D(A)$, tenemos que $x_n = AA^{-1}x_n \to Ay$, luego $Ay = x$ y por tanto $y = A^{-1}x$, es decir, A^{-1} es cerrado. □

Lema 3.11. *Sea $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador lineal cerrado en un espacio de Banach X. Si $\lambda \in \rho(A)$, entonces $R(\lambda, A)$ es un operador lineal acotado.*

Demostración. Como $\lambda \in \rho(A)$, entonces $\lambda - A$ es biyectivo y por tanto $R(\lambda, A)$ es un operador definido en X, que es un espacio de Banach. Como $\lambda - A$ es cerrado, entonces $R(\lambda, A)$ también es cerrado por el Lema 3.10, y por el Teorema 1.10 tenemos que $R(\lambda, A)$ es acotado. □

Proposición 3.12 (Identidad del resolvente)**.** *Sea $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador cerrado. Entonces, para todo $\lambda, \mu \in \rho(A)$ tenemos que*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

Demostración. Se tiene que

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = R(\lambda, A)(\mu - A)R(\mu, A) - R(\lambda, A)(\lambda - A)R(\mu, A) = R(\lambda, A)R(\mu, A)(\mu - \lambda). \quad \square$$

Estaremos interesados en estudiar el espectro operadores integrales definidos a través de integrales de semigrupos. Como veremos en el Capítulo 5, esto se hace a través del generador infinitesimal. Vamos a estudiar algunas de sus propiedades espectrales.

Proposición 3.13. *Sea $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador lineal en un espacio de Banach X. Entonces el espectro $\sigma(A)$ es cerrado en X.*

Demostración. Por el Lema 3.11, el operador $R(\lambda,A)$ es acotado para todo $\lambda \in \rho(A)$. Sea $\lambda_0 \in \rho(A)$, y tomemos $\lambda \in \mathbb{C}$. Es fácil ver que

$$\lambda - A = (I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0,A))\,(\lambda_0 - A),$$

y por la Proposición 1.6, resulta que $\lambda - A$ es invertible si

$$|\lambda_0 - \lambda| \leq \frac{1}{\|R(\lambda_0,A)\|},$$

luego

$$\mathbb{B}\left(\lambda_0; \frac{1}{\|R(\lambda_0,A)\|}\right) \subseteq \rho(A),$$

donde $\mathbb{B}(a;r)$ denota la bola abierta de centro a y radio r, y por tanto $\rho(A)$ es abierto, con lo que $\sigma(A)$ es cerrado. □

Una de las propiedades espectrales más básicas e importantes es la que sigue.

Proposición 3.14. *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo con generador $(A,D(A))$ en un espacio de Banach X, tal que*

$$\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Entonces:

1. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que la integral*
$$R(\lambda)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)x\,\mathrm{d}s \tag{3.3}$$
es convergente en sentido impropio, entonces $\lambda \in \rho(A)$, y $R(\lambda,A) = R(\lambda)$.
2. *Si $Re\lambda > \omega$, entonces $\lambda \in \rho(A)$ y el resolvente viene dado por la expresión (3.3).*
3. *Se tiene que $\|R(\lambda,A)\| \leq \dfrac{M}{Re\lambda - \omega}$.*

Demostración.

1. Lo probamos primero para el caso $\lambda = 0$. Por hipótesis podemos escribir
$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}R(0)x &= \lim_{t\to\infty}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{h}\left(\int_0^t T(s+h)x\,\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s\right)\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} T(s)x\,\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} T(s)x\,\mathrm{d}s - \int_0^h T(s)x\,\mathrm{d}s\right).\end{aligned} \tag{3.4}$$
Resulta que el límite
$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s$$
existe por hipótesis, luego el límite
$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \|T(s)x\|\,\mathrm{d}s$$
también existe. Por tanto,
$$\begin{aligned}\left\|\lim_{t\to\infty}\int_t^{t+h} T(s)x\,\mathrm{d}s\right\| &\leq \lim_{t\to\infty}\int_t^{t+h}\|T(s)x\|\,\mathrm{d}s\\ &= \lim_{t\to\infty}\left(\int_0^{t+h}\|T(s)x\|\,\mathrm{d}s - \int_0^t\|T(s)x\|\,\mathrm{d}s\right) = 0,\end{aligned}$$

y en virtud de (3.4) y del Teorema 1.22 tenemos que

$$\frac{T(h)-I}{h}R(0)x = -\frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\,\mathrm{d}s \to -T(0)x = -x, \quad h \to 0^+,$$

luego $R(0)x \in D(A)$, $\forall x \in X$, y además $AR(0) = -I$.

Más aún, si $x \in D(A)$, entonces por el Teorema 1.21 se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} A\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s = \lim_{t\to\infty}\int_0^t T(s)Ax\,\mathrm{d}s = R(0)Ax.$$

Como A es cerrado, de las dos igualdades anteriores se deduce que $AR(0)x = R(0)Ax = -I$, y por tanto

$$R(0) = (-A)^{-1}.$$

Si $\lambda \neq 0$, tomamos el semigrupo reescalado

$$S(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t).$$

El generador de $(S(t))_{t\geq 0}$ viene dado por la expresión

$$\begin{aligned} Bx &= \lim_{h\to 0^+}\frac{S(h)x-x}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda h}T(h)x-x}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda h}T(h)x-T(h)x}{h} + \lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)x-x}{h} \\ &= -\lambda x + Ax, \quad \forall x \in D(A), \end{aligned}$$

luego $D(B) = D(A)$, y si $\lambda \in \rho(A)$ entonces $0 \in \rho(B)$. De esta manera, si denotamos $\tilde{R}(\lambda)$ al operador

$$\tilde{R}(\lambda)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda}S(s)\,\mathrm{d}s,$$

tenemos que

$$R(\lambda) = \tilde{R}(0) = (-B)^{-1} = (\lambda - A)^{-1} = R(\lambda, A).$$

2. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}\lambda < \omega$. Entonces por el Teorema 3.7 se tiene que

$$\left\|\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)\,\mathrm{d}s\right\| \leq \int_0^t \|\mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)\|\,\mathrm{d}s \leq \int_0^t M\mathrm{e}^{s(\omega-\mathrm{Re}\lambda)}\,\mathrm{d}s \to \frac{M}{\omega - \mathrm{Re}\lambda}, \quad t \to \infty,$$

luego gracias al apartado (1) tenemos que $\lambda \in \rho(A)$.

3. Se deduce inmediatamente de la desigualdad anterior. □

Un hecho que se desprende de forma inmediata de la Proposición 3.14 es el siguiente.

Corolario 3.15. *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Banach X,y sea A su generador. Si ω_0 es la cota de crecimiento del semigrupo, entonces*

$$\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid Re\lambda \leq \omega_0\}.$$

Nos gustaría poder demostrar alguna versión del Teorema 2.7 para semigrupos fuertementente continuos. Para ello, vamos a necesitar la siguiente igualdad para el operador resolvente.

Lema 3.16. *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Banach X, y $(A, D(A))$ su generador. Entonces, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y para todo $t > 0$ tenemos que:*

1. Si $x \in X$, entonces

$$\mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x - x = (A-\lambda)\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)x\,\mathrm{d}s.$$

2. *Si $x \in D(A)$, entonces*

$$e^{-\lambda t}T(t)x - x = \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)(A-\lambda)x\,ds.$$

Demostración. Basta aplicar el reescalado utilizado en la demostración de la Proposición 3.14, es decir, considerar

$$S(t) = e^{-\lambda t}T(t),$$

cuyo generador es $B = A - \lambda$, y aplicarle el Lema 3.5. □

3.3.1. Teoremas de la transformación espectral

En el Teorema 2.3 vimos la inmediata relación que existe entre el espectro de un semigrupo uniformemente continuo y su generador. Para nosotros va a ser más interesante encontrar algún resultado similar para semigrupos fuertemente continuos, aunque realmente tampoco vamos a utilizarlos.

Para el espectro puntual tenemos un resultado casi análogo al caso uniformemente continuo. Este resultado se encuentra en [10], Teorema 3.7.

Teorema 3.17 (Transformación espectral para el espectro puntual)**.** *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Banach X, y sea A su generador. Entonces*

$$\sigma_{point}(T(t)) \setminus \{0\} = \left\{ e^{t\lambda} \,\middle|\, \lambda \in \sigma_{point}(A) \right\}.$$

Sin embargo, para este tipo de semigrupos el resultado para el espectro es más débil.

Teorema 3.18 (Inclusión espectral)**.** *Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Banach X, y sea $(A, D(A))$ su generador. Entonces*

$$\sigma(T(t)) \supseteq \left\{ e^{t\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A) \right\}.$$

Demostración. En virtud del Lema 3.16, tenemos que para todo $x \in D(A)$,

$$e^{-\lambda t}T(t)x - x = \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)(A-\lambda)x\,ds,$$

luego si $\lambda - A$ no es biyectivo, entonces $e^{-\lambda t}T(t)x - x$ tampoco es biyectivo, y trivialmente se sigue el enunciado. □

Observación 11. La debilidad de este resultado no es mayor problema para nuestros propósitos, como veremos en el Capítulo 5.

3.4. Los teoremas de Hille-Yosida

Un resultado clásico de la teoría de semigrupos, aunque no le vamos a sacar mucho partido en este trabajo, es la colección de teoremas de Hille-Yosida, que caracterizan a los operadores A en un espacio de Banach X que generan un semigrupo fuertemente continuo. No los vamos a demostrar, ya que no son resultados esenciales para este trabajo.

El primero de estos resultados se encuentra en [10], Teorema II.3.5.

Teorema 3.19 (Hille-Yosida, caso contractivo, 1948)**.** *Dado un operador lineal $(A, D(A))$, con equivalentes:*

(a) $(A, D(A))$ *genera un semigrupo de contracciones (es decir, de norma menor que 1).*

(b) $(A,D(A))$ *es cerrado, densamente definido y para cada* $\lambda > 0$ *se tiene que* $\lambda \in \rho(A)$*, con*

$$\|R(\lambda,A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

(c) $(A,D(A))$ *es cerrado, densamente definido y para cada* $\lambda \in \mathbb{C}$ *con* $Re\lambda > 0$*, se tiene que* $\lambda \in \rho(A)$*, con*

$$\|R(\lambda,A)\| \leq \frac{1}{Re\lambda}.$$

Existe una versión totalmente general del teorema de Hille-Yosida, más reciente, y que fue demostrada en 1952 por Feller, Miyadera y Phillips. Su prueba se puede encontrar en [10], Teorema II.3.8.

Teorema 3.20 (Hille-Yosida, caso general)**.** *Sea* $(A,D(A))$ *un operador lineal en* X*, y sean* $\omega \in \mathbb{R}$ *y* $M \geq 1$ *constantes. Entonces son equivalentes:*

1. $(A,D(A))$ *genera un semigrupo fuertemente continuo con cota exponencial*

$$\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}.$$

2. $(A,D(A))$ *es cerrado, densamente definido y* $\forall\lambda > \omega$ *se tiene que* $\lambda \in \rho(A)$*, y la cota*

$$\|((\lambda-\omega)R(\lambda,A))^n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. $(A,D(A))$ *es cerrado, densamente definido, y* $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ *con* $Re\lambda > \omega$ *se tiene que* $\lambda \in \rho(A)$ *y la cota*

$$\|R(\lambda,A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda-\omega)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Capítulo 4

Operadores de Hausdorff en espacios de Fock

El objetivo fundamental de este trabajo es el estudio espectral del operador de Hausdorff sobre los espacios de Fock. En esta sección los definimos y exploramos sus propiedades básicas y espectrales.

4.1. Espacios de Fock. Resultados básicos

Los espacios de Fock son colecciones de un tipo muy particular de funciones enteras. En concreto, son funciones cuya integral respecto de cierta medida gaussiana es finita. Los resultados de esta sección se encuentran, en su mayoría, en [25].

Definición 4.1. Sean $1 \leq p < \infty$ y $\alpha > 0$. Para cada función entera $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, definimos

$$\|f\|_{p,\alpha} := \left(\frac{\alpha p}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| f(z) \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} \right|^p \mathrm{d}A(z) \right)^{1/p},$$

donde $\mathrm{d}A(z)$ es la medida de área en $\mathbb{C}$ sobre los borelianos.

Definimos el *espacio de Fock* de parámetros p y α como

$$F^p_\alpha := \{ f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}) \mid \|f\|_{p,\alpha} < \infty \}.$$

Si $p = \infty$, tomamos

$$\|f\|_{\infty,\alpha} := \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2},$$

y definimos el espacio de Fock F^∞_α de la misma manera.

Observación 12.

- Puede parecer antinatural que la medida con respecto de la que integramos dependa del parámetro p. Sin embargo, esto hace que los espacios de Fock tengan propiedades muy buenas, como por ejemplo la Proposición 4.28.
- Podemos extender la definición de los espacios F^p_α a $0 < p < 1$, pero en este caso los espacios de Fock no son espacios de Banach. Sí que son completos, pero no son espacios normados. Para mas detalles, consultar [5].

La norma $\| \cdot \|_{p,\alpha}$ puede ser reescrita en términos de integrales radiales.

Definición 4.2. Sean $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, $1 \leq p < \infty$ y $r > 0$. Definimos la *media radial de orden p* como

$$M_p(f,r) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right) \right|^p \mathrm{d}\theta \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$, definimos

$$M_\infty(f,r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

Proposición 4.1. *Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$. Entonces*

$$\lim_{p\to\infty} M_p(f,r) = M_\infty(f,r), \quad \forall r > 0.$$

Demostración. Denotemos

$$r\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\},$$

y para cada $\varepsilon > 0$ tomemos el subconjunto

$$S_\varepsilon = \{z \in r\mathbb{T} \mid |f(z)| \geq M_\infty(f,r) - \varepsilon\}.$$

Entonces, denotando σ a la medida de longitud de arco sobre $r\mathbb{T}$ tenemos que

$$\begin{aligned} M_p(f,r) &= \left(\int_{r\mathbb{T}} |f|^p \,\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{S_\varepsilon} |f|^p \,\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{S_\varepsilon} (M_\infty(f,r)-\varepsilon)^p \,\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (M_\infty(f,r)-\varepsilon)\,\sigma(S_\varepsilon)^{1/p}, \end{aligned}$$

luego

$$\liminf_{p\to\infty} M_p(f,r) \geq M_\infty(f,r). \tag{4.1}$$

Por otra parte, si $p > q$ tenemos que

$$\begin{aligned} M_p(f,r)^p &= \int_{r\mathbb{T}} |f|^p \,\mathrm{d}\sigma = \int_{r\mathbb{T}} |f|^{p-q}|f|^q \,\mathrm{d}\sigma \leq \int_{r\mathbb{T}} M_\infty(f,r)^{p-q}|f|^q \,\mathrm{d}\sigma \\ &= M_\infty(f,r)^{p-q} \int_{r\mathbb{T}} |f|^q \,\mathrm{d}\sigma, \end{aligned}$$

luego

$$M_p(f,r) \leq M_\infty(f,r)^{1-q/p} \left(\int_{r\mathbb{T}} |f|^q \,\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{p}},$$

y por tanto

$$\limsup_{p\to\infty} M_p(f,r) \leq M_\infty(f,r), \tag{4.2}$$

luego gracias a (4.1) y (4.2) se sigue el resultado. □

El siguiente resultado jugará un importante papel a la norma de estudiar la norma del operador de Hausdorff.

Proposición 4.2. *Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces, si $r < s$, se tiene que*

$$M_p(f,r) \leq M_p(f,s).$$

Para demostrarlo necesitaremos recurrir al concepto de función subarmónica y función semicontinua.

Definición 4.3. Sea $u : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un abierto Ω. Decimos que u es *semicontinua superiormente* en $z_0 \in \Omega$ si para cada sucesión $(z_n)_{n=1}^\infty \subseteq \Omega$ con $z_n \to z_0$ tenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} u(z_n) \leq z_0.$$

Definición 4.4. Sea $u : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un abierto Ω. Decimos que u es *subarmónica* si se cumplen todas las siguientes condiciones.

(a) $-\infty \leq u(z) < \infty$.

(b) u es semicontinua superiormente.

(c) Si $\bar{\mathbb{B}}(a;r) \subseteq \Omega$, entonces $u(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(a+re^{i\theta}\right)\,\mathrm{d}\theta$, donde $\bar{\mathbb{B}}(a;r)$ es la bola cerrada de centro a y radio r.

(d) Si $\bar{\mathbb{B}}(a;r) \subseteq \Omega$, entonces $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(a+re^{i\theta}\right)\,\mathrm{d}\theta \neq -\infty$.

Teorema 4.3 (Desigualdad de Jensen)**.** *Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida, $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible y $\phi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función convexa. Entonces*

$$\phi\left(\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right) \leq \int_X \phi\circ f\,\mathrm{d}\mu.$$

Teorema 4.4 (Igualdad de Jensen)**.** *Sea $g\in\mathscr{H}(\mathbb{C})$, y sean $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$ sus ceros en $\bar{\mathbb{B}}(0;r)$, repetidos de acuerdo con su multiplicidad. Entonces*

$$|g(0)|\prod_{n=1}^{N}\frac{r}{|\alpha_n|} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta}.$$

La demostración del Teorema 4.3 y del Teorema 4.4 se pueden consultar en [22], Teorema 3.3 y Teorema 15.18 respectivamente.

Lema 4.5. *Sea $u:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ una función subarmónica y sea $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monótona creciente y convexa. Entonces la composición $\phi\circ u$ es subarmónica.*

Demostración. Es claro que $\phi\circ u$ satisface las condiciones (a) y (d) de la Definición 4.4. Verifiquemos la condición (b). Sea $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ con $z_n\to z_0$. Sabemos que $\limsup_{n\to\infty} f(z_n)\leq z_0$, como ϕ es creciente y u es subarmónica entonces

$$\phi\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n} u(z_k)\right) = \phi\left(\limsup_{n\to\infty} u(z_n)\right) \leq \phi(u(z_0)).$$

Sabemos además que las funciones convexas son continuas en el interior de sus dominios (véase [23], páginas 128-129), luego

$$\limsup_{n\to\infty}\phi\left(\sup_{k\geq n} u(z_k)\right) = \phi\left(\limsup_{n\to\infty} u(z_n)\right) \leq \phi(u(z_0)). \tag{4.3}$$

Además, como ϕ es no decreciente y $u(z_n)\leq \sup_{k\geq n} u(z_k)$, en virtud de (4.3) se tiene que

$$\limsup_{n\to\infty}\phi\left(u(z_n)\right) \leq \limsup_{n\to\infty}\phi\left(\sup_{k\geq n} u(z_k)\right) \leq \phi(u(z_0)),$$

es decir, $\phi\circ u$ es semicontinua superiormente.

Sólo falta verificar la condición (c). Si tomamos $r>0$, entonces como ϕ es no decreciente y u es subarmónica tenemos que

$$\phi(u(a)) \leq \phi\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta\right) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(u(a+re^{i\theta}))\,\mathrm{d}\theta,$$

ya que ϕ es convexa, y podemos utilizar el Teorema 4.3. □

Lema 4.6. *Sea $f\in\mathscr{H}(\mathbb{C})$ no idénticamente nula. Entonces, si $0<r<s<\infty$, tenemos que*

$$\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{2\pi}\log|f(se^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta.$$

Demostración. Sabemos que existen $m \in \mathbb{N}$ (posiblemente $m = 0$) y $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tales que $g(0) \neq 0$ y con $f(z) = z^m g(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_r}$ los ceros de g en el disco $\bar{\mathbb{B}}(0;r)$. Resulta que si $r < s$, entonces gracias al Teorema 4.4 se tiene que

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(r\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta} = |g(0)|\prod_{n=1}^{N_r}\frac{r}{|\alpha_n|} \leq |g(0)|\prod_{n=1}^{N_s}\frac{s}{|\alpha_n|} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(s\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta},$$

luego como la función exponencial es creciente se tiene que

$$\int_0^{2\pi}\log|g(r\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{2\pi}\log|g(s\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta, \tag{4.4}$$

y además

$$\int_0^{2\pi}\log|f(r\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\log|r^m g(r\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta = 2\pi m\log(r) + \int_0^{2\pi}\log|g(r\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta. \tag{4.5}$$

Por tanto, gracias a (4.4) y (4.5) se tiene que

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\log|f(r\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{2\pi}\log|f(s\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2\pi m\log(r) + \int_0^{2\pi}\log|g(r\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta - 2\pi m\log(s) - \int_0^{2\pi}\log|g(s\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta \leq 0.\end{aligned}$$

□

Teorema 4.7. *Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ no idénticamente nula. Entonces, para cada $1 \leq p < \infty$, la función $|f|^p$ es subarmónica.*

Demostración. Veamos primero que $\log|f|$ es subarmónica. En efecto, como log es creciente y $|f|$ es continua, entonces $\log|f|$ es semicontinua superiormente. Además, $-\infty \leq \log|f(z)| < \infty$, $\forall z \neq 0$, luego por el Lema 4.6 es inmediato que $\log|f|$ es subarmónica.

Ahora basta elegir la función

$$\phi(x) = \mathrm{e}^{px},$$

que es estrictamente creciente y convexa, y aplicar el Lema 4.5 a $\log|f|$. □

Teorema 4.8. *Sea $u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ subarmónica en $\mathbb{C}$, $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto y $h : \mathrm{int}(K) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica con $u(z) \leq h(z)$, $\forall z \in \partial K$. Entonces*

$$u(z) \leq h(z), \quad \forall z \in K.$$

Demostración. Sea $u_1 = u - h$, y supongamos que $u_1(z) > 0$ para algún $z \in \mathrm{int}(K)$. Como u_1 es continua y K es compacto, entonces alcanza su máximo $M \in \mathbb{R}$, y como $u_1 \leq 0$ en ∂K, entonces

$$\emptyset \neq E := \{z \in K \mid u_1(z) = M\} \subseteq \mathrm{int}(K).$$

Sea $z_0 \in \partial E$. Entonces existe $r > 0$ con $\bar{\mathbb{B}}(z_0, r) \subseteq \mathrm{int}(K)$, pero parte de su frontera está contenida en $\mathrm{int}(K) \setminus E$, luego

$$u_1(z_0) = M > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_1(z_0 + r\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta,$$

es decir, u_1 no es subarmónica. □

Teorema 4.9. *Sea $u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua y subarmónica. Si $r < s$, entonces*

$$\int_0^{2\pi} u(r\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{2\pi} u(s\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

Demostración. Sea h la extensión continua y armónica de u en $\bar{\mathbb{B}}(0,s)$ tal que $u(z) = h(z), \forall z \in \partial\bar{\mathbb{B}}(0;s)$. Por el Teorema 4.8, tenemos que $u(z) \leq h(z)$, $\forall z \in \bar{\mathbb{B}}(0;s)$, luego como $r < s$,

$$\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{2\pi} h(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta = 2\pi h(0) = \int_0^{2\pi} h(se^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} u(se^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta. \qquad \square$$

Ahora es inmediato demostrar la Proposición 4.2.

Demostración (de la Proposición 4.2). Basta aplicar los resultados anteriores a la función $|f|^p$, que es subarmónica. $\square$

Vamos a ver cómo utilizar la función real de variable real $M_p(f,\cdot)$ para manejar la norma $\|\cdot\|_{p,\alpha}$. El siguiente resultado es consecuencia inmediata del teorema de Fubini.

Teorema 4.10 (Integración el coordenadas polares)**.** *Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow [0,\infty]$ una función medible. Entonces*

$$\int_{\mathbb{C}} f(z)\,\mathrm{d}A(z) = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_0^{\infty} r f(ru)\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\sigma(u)$$

Proposición 4.11. *Sean $\alpha > 0$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces, para toda $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ se tiene que*

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\alpha p \int_0^{\infty} M_p(f,r)^p \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2} r^2} r\,\mathrm{d}r \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$, entonces se tiene que

$$\|f\|_{\infty,\alpha} = \sup_{r \geq 0} M_\infty(f,r)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2} r^2}.$$

Demostración. Gracias al Teorema 4.10 y al Teorema de Fubini se tiene que para todo $1 \leq p < \infty$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p,\alpha}^p &= \frac{\alpha p}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| f(z)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} \right|^p \mathrm{d}A(z) = \frac{\alpha p}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \int_0^{\infty} r \left| f(ru)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|ru|^2} \right|^p \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\sigma(u) \\
&= \frac{\alpha p}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r \left| f(re^{i\theta})\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|re^{i\theta}|^2} \right|^p \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \alpha p \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p \mathrm{d}\theta\, r\mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2} r^2} \mathrm{d}r = \alpha p \int_0^{\infty} M_p(f,r)^p \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2} r^2} r\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Además, para $p = \infty$ tenemos que

$$\|f\|_{\infty,\alpha} = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} = \sup_{r \geq 0} \sup_{|z|=r} |f(z)|\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} = \sup_{r \geq 0} M_\infty(f,r)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2} r^2}. \qquad \square$$

Ahora vamos a estudiar los asuntos básicos relativos a espacios de Fock, es decir, demostrar que $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ define una norma, y que el espacio de Fock F_α^p es un espacio de Banach.

Lema 4.12. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ define una norma sobre el espacio vectorial $\mathscr{H}(\mathbb{C})$.*

Demostración.

- Es claro que $\|f\|_{p,\alpha} \geq 0$ para cada $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$.
- Es trivial que para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que $\|\lambda f\|_{p,\alpha} = |\lambda| \|f\|_{p,\alpha}$, para cada $f \in F_\alpha^p$.
- Si $p < \infty$, la desigualdad triangular se deduce de la desigualdad de Minkowski para espacios L^p. Si $p = \infty$ se deduce de la desigualdad triangular para el valor absoluto. $\square$

Vamos a verificar que, en efecto, F_α^p es un espacio de Banach. Para ello vamos a necesitar el teorema de Egorov, que cuya demostración se puede encontrar en [17], Teorema V.41.5.

Teorema 4.13 (Egorov). *Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita, y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en Ω tal que $f_n(x)\to f(x)$ en casi todo punto $x\in\Omega$. Entonces $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge casi uniformemente, es decir, para cada $\delta>0$ existe $\Omega_\delta\in\Sigma$ con*

$$\mu(\Omega_\delta)>\mu(\Omega)-\delta,$$

tal que f_n converge uniformemente a f en Ω_δ.

Además, como consecuencia del teorema de Morera, el límite casi uniforme de funciones holomorfas es holomorfo.

Proposición 4.14. *Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathscr{H}(\mathbb{C})$ una sucesión de funciones tal que $f_n\to f$ casi uniformemente. Entonces $f\in\mathscr{H}(\mathbb{C})$.*

Ahora podemos demostrar que F_α^p es un espacio de Banach.

Lema 4.15. *El espacio normado $(F_\alpha^p,\|\cdot\|_{p,\alpha})$ es un espacio de Banach, para $1\le p\le\infty$.*

Demostración. En virtud de la Proposición 1.4 basta ver que F_α^p es cerrado en L^p, considerado como espacio de funciones integrables si $p<\infty$ o como espacio de funciones acotadas si $p=\infty$ (siempre respecto del peso correspondiente).

El hecho de que F_α^p es subespacio vectorial de L^p es trivial. Para ver que es cerrado, sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq F_\alpha^p$ una sucesión convergente a algún $f\in L^p$ en la topología dada por la norma $\|\cdot\|_{p,\alpha}$. Veamos que $f\in F_\alpha^p$.

Evidentemente $\|f\|_{p,\alpha}<\infty$ ya que $f\in L^p$.

Para verificar que $f\in\mathscr{H}(\mathbb{C})$, notamos que como $f_n\to f$ en $\|\cdot\|_{p,\alpha}$, entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}\subseteq(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $f_{n_k}\to f$ en casi todo punto (de hecho, si $p=\infty$ la propia sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ cumple esto). Por el Teorema 4.13 se tiene que $f_{n_k}\to f$ casi uniformemente, luego por la Proposición 4.14 se tiene que $f\in\mathscr{H}(\mathbb{C})$. □

Las funciones de F_α^p admiten una cota puntual óptima.

Proposición 4.16. *Sea $1\le p\le\infty$ y $f\in F_\alpha^p$. Entonces*

$$|f(z)|\le\|f\|_{p,\alpha}\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|z|^2},\quad\forall z\in\mathbb{C}.$$

Demostración. Veamos el caso $p=\infty$. Por la definición de la norma en F_α^∞, para todo $z\in\mathbb{C}$ se tiene que

$$|f(z)|\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\le\sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}=\|f\|_{\infty,\alpha},$$

y por tanto

$$|f(z)|\le\|f\|_{\infty,\alpha}\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|z|^2},\quad\forall z\in\mathbb{C}.$$

Si $1\le p<\infty$, entonces $|f|^p$ es subarmónica por la Proposición 4.7, y por tanto para cada $r>0$ se tiene que

$$|f(0)|^p\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(r\mathrm{e}^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta=M_p(f,r)^p.$$

De esta manera, se tiene que

$$|f(0)|^p=\alpha p\int_0^\infty|f(0)|^p\mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}r^2}r\,\mathrm{d}r\le\alpha p\int_0^\infty M_p(f,r)^p\mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}r^2}r\,\mathrm{d}r=\|f\|_{p,\alpha}^p,$$

y por tanto

$$|f(0)|\le\|f\|_{p,\alpha}\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|0|^2}.$$

Si $z\ne0$, entonces tomamos la función

$$F(w)=f(z-w)\mathrm{e}^{\alpha w\bar{z}-\frac{\alpha}{2}|z|^2},$$

que cumple que $F(0) = f(z)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}$ y por tanto se tiene que

$$\begin{aligned}|f(z)|^p e^{-\frac{\alpha p}{2}|z|^2} \leq \|F\|_{p,\alpha}^p &= \frac{\alpha p}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}\left|f(z-w)e^{\alpha w\bar{z}-\frac{\alpha}{2}|z|^2}e^{\frac{-\alpha}{2}|w|^2}\right|^p \mathrm{d}A(w)\\ &= \frac{\alpha p}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}\left|f(z-w)e^{\frac{1}{2}|w-z|^2}\right|^p \mathrm{d}A(w) = \frac{\alpha p}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}\left|f(w)e^{\frac{1}{2}|w|^2}\right|^p \mathrm{d}A(w) = \|f\|_{p,\alpha}^p,\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$|f(z)| \leq \|f\|_{p,\alpha} e^{\frac{\alpha}{2}|z|^2}.$$

Si además F es constante entonces se tiene la igualdad, y por tanto la cota es óptima. □

Observación 13. En [25] (página 40) se demuestra además que si $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)|e^{\frac{-\alpha}{2}|z|^2} = 0, \quad \forall f \in F_\alpha^p,$$

pero si $p = \infty$ esto no es necesariamente cierto. De hecho, el conjunto

$$f_\alpha^\infty = \left\{ f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}) \mid \lim_{|z|\to\infty} |f(z)|e^{\frac{-\alpha}{2}|z|^2} = 0 \right\}$$

es un subconjunto propio y cerrado de F_α^∞, y es la clausura en F_α^∞ del conjunto de polinomios P.

Veamos algunas propiedades estructurales de los espacios F_α^p.

Lema 4.17. *Sean $m \in \mathbb{N}, \alpha > 0$ y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $P \subseteq F_\alpha^p$. Además, si $u_k(z) = z^k$, entonces*

$$\|u_k\|_{p,\alpha} = \left(\frac{2}{\alpha p}\right)^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{kp}{2}+1\right)^{1/p},$$

y

$$\|u_k\|_{\infty,p} = \left(\frac{n}{\alpha e}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Demostración. Como F_α^p es un espacio vectorial, basta demostrar que $u_k \in F_\alpha^p$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Supongamos primero que $p < \infty$. Es trivial que $u_k \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, y además se tiene que

$$M_p(u_k, r)^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(re^{i\theta})^k|^p \, \mathrm{d}\theta = r^{kp},$$

luego

$$\|u_k\|_{p,\alpha}^p = \frac{1}{\alpha p}\int_0^\infty r^{kp+1} e^{-\frac{\alpha p}{2}r^2} \, \mathrm{d}r,$$

y haciendo el cambio de variable $u = \frac{\alpha p}{2} r^2$ resulta que

$$\|u_k\|_{p,\alpha}^p = \left(\frac{2}{\alpha p}\right)^{\frac{kp}{2}} \int_0^\infty u^{\frac{kp}{2}} e^{-u} \, \mathrm{d}u = \left(\frac{2}{\alpha p}\right)^{\frac{kp}{2}} \Gamma\left(\frac{kp}{2}+1\right),$$

que es finito, luego $u_k \in F_\alpha^p$. Si $p = \infty$, entonces

$$\|u_k\|_{\infty,\alpha} = \sup_{r\geq 0} M_\infty(u_k, r) e^{-\frac{\alpha}{2}r^2},$$

pero como

$$M_\infty(u_k, r) = \sup_{|z|=r} |z^k| = r^k,$$

entonces

$$\|u_k\|_{\infty,\alpha} = \sup_{r\geq 0} r^k e^{-\frac{\alpha}{2}r^2},$$

y es fácil ver (derivando) que ese supremo se alcanza en $r = \left(\frac{n}{\alpha}\right)^{1/2}$, de donde se sigue el resultado. □

Observación 14. De aquí en adelante será muy habitual el uso de la siguiente notación: escribiremos $f(z) \lesssim g(z)$ si existe alguna constante C independiente de z tal que $f(z) \leq Cg(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$, y escribiremos $f(z) \approx g(z)$ si existe una constante C independiente de z tal que $f(z) = Cg(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Algunas veces escribiremos también $f(z) \asymp g(z)$ si $f(z) \lesssim g(z)$ y $g(z) \lesssim f(z)$.

Corolario 4.18. *Sean $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ y $\alpha > 0$. Entonces*

$$\|u_n\|_{p,\alpha} \asymp \left(\frac{n}{\alpha \mathrm{e}}\right)^{\frac{n}{2}} n^{\frac{1}{2p}}.$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la fórmula de Stirling

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x.$$

y del Lema 4.17. □

Lema 4.19. *Sean $\alpha > 0$ y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$F_\alpha^p = P_{m-1} \oplus Z^m,$$

donde

$$P_{m-1} = \{p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \mid p \text{ es un polinomio de grado menor o igual que } m\}.$$

y

$$Z^m = \left\{f \in F_\alpha^p \mid f \text{ tiene un cero en 0 de orden al menos } m\right\}.$$

Demostración. Por un lado, por el Lema 4.17 sabemos que $P_{m-1} \subseteq F_\alpha^p$, y es trivial que $Z^m \subseteq F_\alpha^p$. Además, como F_α^p es un espacio vectorial tenemos que

$$P_{m-1} + Z^m \subseteq F_\alpha^p.$$

Por otro lado, tomemos $f \in F_\alpha^p$. Entonces en particular $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, luego admite un desarrollo en serie de potencias, pongamos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Tomemos el polinomio

$$p(z) = \sum_{n=0}^{m-1} a_n z^n$$

y la función

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n.$$

Entonces es claro que $p \in P_{m-1}$, que $g \in Z^m$ y además resulta que

$$f(z) = p(z) + g(z),$$

y por tanto se sigue que

$$P_{m-1} + Z^m = F_\alpha^p.$$

Además, si $f \in P_{m-1} \cap Z^m$ entonces necesariamente $f(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, luego la suma es directa. □

4.2. Operador de Hausdorff

Los resultados conocidos de esta sección se encuentran en [5].
Introducimos la siguiente notación: para cada intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ definimos

$$\mathbf{M}(I) = \{\mu \mid \mu \text{ es una medida positiva } \sigma\text{-finita sobre los borelianos de } I\}.$$

Además, cuando escribamos

$$\int_0^\infty g(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$$

entenderemos que estamos integrando sobre $(0,\infty)$ en sentido Lebesgue (o Bochner).

Definición 4.5. Sea $\mu \in \mathbf{M}((0,\infty))$. Definimos el *operador de Hausdorff* asociado a la medida μ como el operador $\mathscr{H}_\mu$ dado (formalmente) por

$$\mathscr{H}_\mu f(z) := \int_0^\infty f\left(\frac{z}{t}\right)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}\mu(t), \quad \forall f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Observación 15. Nuestro objetivo final es estudiar propiedades espectrales de este operador sobre los espacios de Fock, luego lo mínimo que deberemos exigir es que $\mathscr{H}_\mu$ esté definido en F^p_α. En particular, tendrá que estar definido en los monomios u_k, para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir, se tendrá que cumplir la condición

$$\mu_n := \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\mu(t)}{t^{n+1}} < \infty,$$

o equivalentemente, que $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\mu(t)}{t} < \infty$.

Con objeto de utilizar los teoremas espectrales del Capítulo 5, debemos exigir que $\mathscr{H}_\mu$ sea un operador acotado sobre F^p_α. Para ver cuándo sucede esto sobre F^p_α será necesario trabajar con los espacios de Fock mixtos.

Definición 4.6. Sean $\alpha > 0$ y $1 \le p,q \le \infty$. Definimos el espacio de Fock mixto de parámetros p,q y α como

$$F^{p,q}_\alpha := \left\{f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}) \mid \|f\|_{p,q,\alpha} < \infty\right\},$$

donde

$$\|f\|_{p,q,\alpha} = \left(\alpha p \int_0^\infty M_p(f,r)^q \mathrm{e}^{-\frac{\alpha q}{2}r^2}\, r\,\mathrm{d}r\right)^{1/q}, \quad 1 \le q < \infty,$$

y

$$\|f\|_{p,\infty,\alpha} = \sup_{r\ge 0} M_p(f,r)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}r^2}.$$

Observación 16.

- De la misma manera que con los espacios F^p_α, se puede demostrar que $F^{p,q}_\alpha$ es un espacio de Banach.
- Si $p = q$ entonces se tiene que
$$F^{p,p}_\alpha = F^p_\alpha.$$

Entre los espacios de Fock mixtos existen varias relaciones de inclusión.

Proposición 4.20. *Sean* $1 \le p,q \le \infty$, $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$, $1 \le q_1 \le q_2 \le \infty$, *y* $\alpha \le \beta$. *Entonces*

(I) $F^{\infty,q}_\alpha \subseteq F^{p_2,q}_\alpha \subseteq F^{p_1,q}_\alpha$.

(II) $F^{p,q_1}_\alpha \subseteq F^{p,q_2}_\alpha \subseteq F^{p,\infty}_\alpha$.

(III) $F_\alpha^{p,q} \subseteq F_\beta^{p,q}$.

Demostración.

(I) Sabemos que, como consecuencia de la desigualdad de Hölder, si $p \leq q$ entonces dada una función medible f en un espacio de medida finito (Ω, Σ, μ) se tiene que

$$\mu(\Omega)^{1/p}\left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \leq \mu(\Omega)^{1/q}\left(\int_\Omega |f|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q},$$

de donde se deduce inmediatamente que si $r > 0$ y $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ entonces

$$M_{p_1}(f,r) \leq M_{p_2}(f,r) \leq M_\infty(f,r),$$

y por tanto

$$\|f\|_{p_1,q,\alpha} \subseteq \|f\|_{p_2,q,\alpha} \subseteq \|f\|_{\infty,q,\alpha},$$

de donde se sigue la inclusión del enunciado.

(II) Como $M_p(f,r)$ es creciente por la Proposición 4.2, entonces para todo $r \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}\|f\|_{p,q_2,\alpha}^{q_2} &\geq \alpha q_2 \int_r^\infty M_p(f,s)^{q_2} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha q_2}{2}s^2} s\,\mathrm{d}s \geq M_p(f,r)^{q_2} \alpha q_2 \int_r^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\alpha q_2}{2}s^2} s\,\mathrm{d}s \\ &= M_p(f,s)^{q_2} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha q_2}{2}s^2},\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\|f\|_{p,\infty,\alpha} \leq \|f\|_{p,q_2,\alpha}$ y por tanto se tiene que

$$F_\alpha^{p,q_2} \subseteq F_\alpha^{p,\infty}.$$

Por otra parte resulta que, como $\|f\|_{p,\infty,\alpha} \leq \|f\|_{p,q_1,\alpha}$, entonces

$$\begin{aligned}\|f\|_{p,q_2,\alpha}^{q_2} &\approx \int_0^\infty M_p(f,r)^{q_1} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha q_1}{2}r^2} r M_p(f,r)^{q_2-q_1} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha(q_2-q_1)}{2}r^2} \,\mathrm{d}r \\ &\leq \int_0^\infty M_p(f,r)^{q_1} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha q_1}{2}r^2} r \left(\sup_{r\geq 0} M_p(f,r) \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}r^2}\right)^{q_2-q_1} \mathrm{d}r \\ &= \|f\|_{p,\infty,\alpha}^{q_2-q_1} \|f\|_{p,q_1,\alpha}^{q_1} \leq \|f\|_{p,q_1,\alpha}^{q_2},\end{aligned}$$

y por tanto se tiene que

$$F_\alpha^{p,q_1} \subseteq F_\alpha^{p,q_2}.$$

(III) Se deduce del hecho de que, como $\mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}r^2}$ es decreciente en α, entonces

$$\|f\|_\beta^{p,q} \leq \|f\|_\alpha^{p,q}.$$

□

Corolario 4.21. *Sean $1 \leq p < q < \infty$. Entonces*

$$F_\alpha^{\infty,p} \subseteq F_\alpha^{q,p} \subseteq F_\alpha^p \subseteq F_\alpha^q \subseteq F_\alpha^{p,q} \subseteq F_\alpha^{p,\infty}.$$

Ahora estamos en condiciones de caracterizar la acotación de $\mathscr{H}_\mu$. Para ello necesitaremos la desigualdad integral de Minkowski. Su demostración se puede consultar en [15], teoremas 198-202.

Lema 4.22. *Sean $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu)$ y $(\Omega_2, \Sigma_2, \nu)$ dos espacios de medida σ-finitos, y $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Entonces para todo $1 \leq p < \infty$ se tiene que*

$$\left(\int_{\Omega_2} \left|\int_{\Omega_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right|^p \mathrm{d}\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |f(x,y)|^p \,\mathrm{d}\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}\mu(x).$$

Proposición 4.23. *Sea $\mu \in \mathbf{M}((0,\infty))$ tal que*

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\mu(t)}{t} = 1.$$

Entonces son equivalentes:

1. *El operador $\mathscr{H}_\mu : F^p_\alpha \longrightarrow F^p_\alpha$ es acotado para todo $1 \le p \le \infty$ y para todo $\alpha > 0$.*
2. *Existen algunos $1 \le p \le \infty$ y $\alpha > 0$ tales que $\mathscr{H}_\mu : F^p_\alpha \longrightarrow F^p_\alpha$ es acotado.*
3. *Existe $1 \le p \le \infty$ y $\alpha > 0$ tales que $\mathscr{H}_\mu : F^{\infty,q}_\alpha \longrightarrow F^{p,\infty}_\alpha$ es acotado.*
4. *Se cumple que $\mu((0,1)) = 0$.*
5. *El operador $\mathscr{H}_\mu : F^{p,q}_\alpha \longrightarrow F^{p,q}_\alpha$ es acotado para todo $1 \le p,q \le \infty$ y $\alpha > 0$.*

Demostración.

(a) La implicación (1)⇒(2) es trivial.

(b) La implicación (2)⇒(3) se deduce del hecho de que $F^{\infty,p}_\alpha \subseteq F^p_\alpha \subseteq F^{q,\infty}_\alpha$.

(c) Para la implicación (3)⇒(4), notamos que

$$\mu_n = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\mu(t)}{t^{n+1}} = \frac{1}{(n/\alpha)^{n/2}} \int_0^\infty \left(\frac{(n/\alpha)^{1/2}}{t}\right)^n \frac{\mathrm{d}\mu(t)}{t} = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{n/2} \mathscr{H}_\mu(u_n)\left(\left(\frac{n}{\alpha}\right)^{1/2}\right),$$

y gracias a la Proposición 4.16, dado $1 \le p \le \infty$ se tiene que

$$\mu_n = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{n/2} \mathscr{H}_\mu(u_n)\left(\left(\frac{n}{\alpha}\right)^{1/2}\right) \le \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{n/2} \|\mathscr{H}_\mu(u_n)\|_{\infty,\alpha} \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}\left(\left(\frac{n}{\alpha}\right)^{1/2}\right)^2} \lesssim \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{n/2} \|u_n\|_{p,\alpha} \mathrm{e}^{n/2}.$$

Si $p = \infty$, por el Lema 4.17 se tiene que

$$\|u_n\|_{\infty,\alpha} = \left(\frac{n}{\alpha \mathrm{e}}\right)^{n/2},$$

luego

$$\mu_n \lesssim \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{n/2} \left(\frac{n}{\alpha \mathrm{e}}\right)^{n/2} \mathrm{e}^{n/2} = 1,$$

y por tanto, dado cualquier $\delta > 0$ se tiene que

$$\left(\frac{1}{\delta}\right)^{n+1} \mu((0,\delta)) \le \int_0^\delta \frac{\mathrm{d}\mu(t)}{t^{n+1}} \le \mu_n \lesssim 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y resulta que si $\delta < 1$, entonces $(1/\delta)^{n+1} \to \infty$, luego necesariamente $\mu((0,\delta)) = 0$ para todo $\delta \in (0,1)$, y por tanto $\mu((0,1)) = 0$.

Si $1 \le p < \infty$, entonces gracias al Corolario 4.18 se tiene que

$$\mu_n \lesssim \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{n/2} \|u_n\|_{p,\alpha} \mathrm{e}^{n/2} \lesssim \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{n/2} \left(\frac{n}{\alpha \mathrm{e}}\right)^{n/2} n^{\frac{1}{np}} \mathrm{e}^{n/2} = n^{\frac{1}{2p}},$$

luego necesariamente

$$\frac{1}{n^{1/(2p)}} \mu_n \lesssim 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Del mismo modo de antes, resulta que si $\delta \in (0,1)$ entonces $(1/\delta)^{n+1}/n^{1/(2p)} \to \infty$ por órdenes de infinitud, y se sigue que $\mu((0,1)) = 0$.

(d) Veamos la implicación (4)⇒(5). Dada $f \in F_\alpha^{p,q}$ se tiene que

$$\mathscr{H}_\mu f(z) = \int_{[1,\infty)} \frac{1}{t} f\left(\frac{z}{t}\right) \mathrm{d}\mu(t),$$

luego por el Lema 4.22 tenemos que

$$\begin{aligned} M_p\left(\mathscr{H}_\mu f, r\right) &\approx \left(\int_0^{2\pi} \left|\int_{[1,\infty)} \frac{1}{t} f\left(\frac{r\mathrm{e}^{i\theta}}{t}\right) \mathrm{d}\mu(t)\right|^p \mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_{[1,\infty)} \left(\int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{t} f\left(\frac{r\mathrm{e}^{i\theta}}{t}\right)\right|^p \mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}\mu(t) \approx \int_{[1,\infty)} \frac{1}{t} M_p\left(f, \frac{r}{t}\right) \mathrm{d}\mu(t), \end{aligned}$$

pero como M_p es creciente en r y estamos integrando en $[1,\infty)$ tenemos que

$$M_p\left(\mathscr{H}_\mu f, r\right) \lesssim \int_{[1,\infty)} M_p\left(f, \frac{r}{t}\right) \mathrm{d}\mu(t) < M_p(f,r) \int_{[1,\infty)} \frac{\mathrm{d}\mu(t)}{t} \leq M_p(f,r), \quad \forall r > 0,$$

y como $f \in F_\alpha^{p,q}$, entonces de la desigualdad anterior se sigue que $\mathscr{H}_\mu f \in F_\alpha^{p,q}$, y además

$$\|\mathscr{H}_\mu f\|_{p,q,\alpha} \lesssim \|f\|_{p,q,\alpha},$$

luego $\mathscr{H}_\mu$ es un operador acotado.

(e) La implicación (5)⇒(1) es trivial, pues basta tomar $p = q$. □

4.2.1. Representación de Hille-Phillips del operador de Hausdorff

Los resultados de esta sección son originales. Para estudiar las propiedades espectrales de este operador, un paso clave va a ser representarlo como la integral de un semigrupo de operadores. Asumiendo que $\mu((0,1)) = 0$ tenemos que $\mathscr{H}_\mu$ es acotado, y además haciendo el cambio de variable $t = \mathrm{e}^s$ tenemos que

$$\mathscr{H}_\mu(f)(z) = \int_0^\infty f\left(\frac{z}{t}\right) \frac{1}{t} \mathrm{d}\mu(t) = \int_{[1,\infty)} f\left(\frac{z}{t}\right) \frac{1}{t} \mathrm{d}\mu(t) = \int_{[0,\infty)} f(z\mathrm{e}^{-s})\mathrm{e}^{-s}\, \mathrm{d}\nu(s),$$

donde ν es la medida imagen de μ por el cambio de variable.

Resulta que ahora el integrando forma un semigrupo de operadores.

Proposición 4.24. *Sea $1 \leq p \leq \infty$, y consideremos la familia de operadores $(T(t))_{t\geq 0}$ en F_α^p dada por*

$$T(t)f(z) := f(z\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t}.$$

Entonces $(T(t))_{t\geq 0}$ forma un semigrupo de operadores. Más aún, forma un semigrupo de contracciones, con

$$\|T(t)\| = \mathrm{e}^{-t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demostración. Tenemos que demostrar que para cada $t \in \mathbb{R}$, $T(t)$ es un operador lineal sobre el espacio de F_α^p, y que además se cumple la ley del semigrupo de la Definición 2.1.

- Son operadores lineales. En efecto, dadas $f, g \in F_\alpha^p$, y $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$T(t)(\lambda f + \alpha g)(z) = (\lambda f + \alpha g)(z\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t} = (\lambda f(z\mathrm{e}^{-t}) + \alpha g(z\mathrm{e}^{-t}))\mathrm{e}^{-t} = \lambda T(t)f(z) + \alpha T(t)g(z).$$

- Cumplen la ley del semigrupo. En efecto, dada $f \in F_\alpha^p$ y $t, s \geq 0$, tenemos que

$$T(t+s)f(z) = f(z\mathrm{e}^{-t-s})\mathrm{e}^{-t-s} = f(z\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-s})\mathrm{e}^{-s}\mathrm{e}^{-t} = T(s)f(z\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t} = \left(T(s)T(t)\right)f(z).$$

- Se tiene que $T(0) = I$. En efecto, es trivial que para toda $f \in F^p_\alpha$ se tiene que

$$T(0)f(z) = f(z\mathrm{e}^0)\mathrm{e}^0 = f(z) = If(z).$$

- El operador $T(t)$ es acotado para todo $t \geq 0$. Supongamos que $p < \infty$. Por una parte, si $u_0(z) = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$, entonces

$$M_p(u_0, r)^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 1,$$

luego realizando un cambio de variable se llega a que

$$\|u_0\|^p_{p,\alpha} = \alpha p \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}r^2} r\,\mathrm{d}r = 1.$$

Ahora, notamos que

$$T(t)u_0(z) = u_0(z\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t}u_0(z),$$

luego

$$\|T(t)u_0\|_{p,\alpha} = \mathrm{e}^{-t}\|u_0\|_{p,\alpha} = \mathrm{e}^{-t},$$

y por tanto $\|T(t)\| \geq \mathrm{e}^{-t}$. Por otra parte, resulta que dada $f \in F^p_\alpha$ entonces

$$\begin{aligned} M_p(T(t)f, r)^p &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|T(t)f(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^p \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\mathrm{e}^{-t}f(r\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{i\theta})\right|^p \mathrm{d}\theta \\ &= \mathrm{e}^{-tp}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{i\theta})\right|^p \mathrm{d}\theta = \mathrm{e}^{-tp}M_p(f, r\mathrm{e}^{-t})^p, \end{aligned}$$

luego gracias a la Proposición 4.2, si $t \geq 0$ tenemos que

$$M_p(T(t)f, r) = \mathrm{e}^{-t}M_p(f, r\mathrm{e}^{-t}) \leq \mathrm{e}^{-t}M_p(f, r),$$

y por tanto

$$\|T(t)f\|^p_{p,\alpha} = \alpha p \int_0^\infty M_p(T(t)f, r)^p \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}r^2} r\,\mathrm{d}r \leq \mathrm{e}^{-tp}\alpha p \int_0^\infty M_p(f, r)^p \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}r^2} r\,\mathrm{d}r = \mathrm{e}^{-tp}\|f\|^p_{p,\alpha},$$

es decir,

$$\|T(t)\| \leq \mathrm{e}^{-t},$$

luego el operador $T(t)$ es acotado, y además su norma es

$$\|T(t)\| = \mathrm{e}^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Supongamos ahora que $p = \infty$. Es fácil ver que, de nuevo,

$$\|T(t)u_0\|_{\infty,\alpha} = \mathrm{e}^{-t}\|u_0\|_{\infty,\alpha}.$$

Además, gracias a la Proposición 4.1 y a la Proposición 4.2 se tiene que, para cada $f \in F^\infty_\alpha$,

$$\begin{aligned} \|T(t)f\|_{\infty,\alpha} &= \sup_{r\geq 0} M_\infty(T(t)f, r)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}r^2} = \sup_{r\geq 0}\lim_{p\to\infty} M_p(T(t)f, r)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}r^2} \\ &\leq \sup_{r\geq 0}\mathrm{e}^{-t}\lim_{p\to\infty} M_p(f, r)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}r^2} = \mathrm{e}^{-t}\sup_{r\geq 0} M_\infty(f, r)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}r^2} = \mathrm{e}^{-t}\|f\|_{\infty,\alpha}, \end{aligned}$$

con lo que necesariamente $\|T(t)\| = \mathrm{e}^{-t}$. □

También es posible dar una expresión distinta de la norma de $\|T(t)f\|$, para cada $f \in F^p_\alpha$. De hecho, esa expresión de la norma también es válida para $t < 0$.

Lema 4.25. *Sean* $1 \leq p < \infty$*,* $f \in F^p_\alpha$ *y* $t \in \mathbb{R}$*. Entonces*

$$\|T(t)f\|_{p,\alpha} = \mathrm{e}^{t(-1+2/p)} \left(\alpha p \int_0^\infty M_p(f,r)^p \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}\mathrm{e}^{2t}r^2} r\,\mathrm{d}r\right)^{1/p}.$$

Demostración. Se tiene que

$$M_p(T(t)f,r)^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t}\right|^p \mathrm{d}\theta = \mathrm{e}^{-tp} M_p(f, r\mathrm{e}^{-t}). \tag{4.6}$$

Entonces, en virtud de (4.6) y haciendo el cambio de variable $u = r\mathrm{e}^{-t}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|T(t)f\|^p_{p,\alpha} &= \alpha p \int_0^\infty M_p(T(t)f,r)^p \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}r^2} r\,\mathrm{d}r = \alpha p \mathrm{e}^{-tp}\int_0^\infty M_p(f,r\mathrm{e}^{-t})^p \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}\mathrm{e}^{2t}r^2} r\,\mathrm{d}r \\ &= \mathrm{e}^{-tp}\alpha p \int_0^\infty M_p(f,u)^p \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}\mathrm{e}^{2t}u^2}\mathrm{e}^{2t} u\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{t(p-2)}\int_0^\infty M_p(f,r)^p \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}\mathrm{e}^{2t}r^2} r\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

□

Observación 17. Es claro que la familia de operadores $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ satisface (2.5). Sin embargo, esta familia no va a ser un grupo de operadores.

Proposición 4.26. *Los operadores* $T(t)$ *de la Proposición 4.24, con* $t < 0$*, no son acotados para* $1 \leq p \leq \infty$*.*

Demostración. Para demostrar esto basta encontrar una función $f \in F^p_\alpha$ tal que $T(t)f \notin F^p_\alpha$.

Supongamos primero que $p < \infty$. Fijamos $t < 0$, y elegimos la función

$$f(z) = \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{2t}z^2}.$$

Tenemos que $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, y además

$$\begin{aligned}M_p(f,r)^p &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r\mathrm{e}^{i\theta})|^p \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{2t}r^2\mathrm{e}^{2i\theta}}\right|^p \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{2t}r^2(\cos(2\theta)+i\sin(2\theta))}\right|^p \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\frac{\alpha p}{2}\mathrm{e}^{2t}r^2\cos(2\theta)}\mathrm{d}\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\frac{\alpha p}{2}\mathrm{e}^{2t}r^2}\mathrm{d}\theta = \mathrm{e}^{\frac{\alpha p}{2}\mathrm{e}^{2t}r^2}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\|f\|^p_{p,\alpha} &= \alpha p\int_0^\infty M_p(f,r)^p \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}r^2} r\,\mathrm{d}r \leq \alpha p \int_0^\infty \mathrm{e}^{\frac{\alpha p}{2}\mathrm{e}^{2t}r^2}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}r^2} r\,\mathrm{d}r \\ &= \alpha p\int_0^\infty \mathrm{e}^{\frac{\alpha p}{2}(\mathrm{e}^{2t}-1)} r\,\mathrm{d}r < \infty,\end{aligned}$$

ya que $t < 0$.

Por otra parte, por el Lema 4.25 y gracias a 4.7 se tiene que

$$\|T(t)f\|^p_{p,\alpha} = \mathrm{e}^{t(2-p)}\alpha p\int_0^\infty M_p(f,r)^p \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}\mathrm{e}^{2t}r^2} r\,\mathrm{d}r = \frac{\mathrm{e}^{t(2-p)}\alpha p}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\frac{\alpha p}{2}\mathrm{e}^{2t}r^2\cos(2\theta)}\mathrm{d}\theta\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}\mathrm{e}^{2t}r^2} r\,\mathrm{d}r.$$

Llamamos

$$C = \frac{\mathrm{e}^{t(2-p)}\alpha p}{2\pi},$$

y usando el teorema de Fubini tenemos que

$$\|T(t)f\|^p_{p,\alpha} = C\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\frac{\alpha p}{2}\mathrm{e}^{2t}r^2(\cos(2\theta)-1)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Haciendo el cambio de variable

$$u = \frac{\alpha p}{2} \mathrm{e}^{2t} r^2 (\cos(2\theta) - 1),$$

tenemos que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\frac{\alpha p}{2} \mathrm{e}^{2t} r^2 (\cos(2\theta)-1)} r \, \mathrm{d}r = \frac{1}{\alpha p \mathrm{e}^{2t} r (1 - \cos(2\theta))},$$

y sustituyendo esto en la fórmula originalse obtiene que

$$\|T(t)f\|_{p,\alpha}^p = \frac{C}{\alpha p \mathrm{e}^{2t}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \cos(2\theta)} \, \mathrm{d}\theta = \infty,$$

ya que

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\left(\frac{1}{1-\cos(2\theta)}\right)}{\left(\frac{1}{\frac{1}{2}(2\theta)^2}\right)} = 1,$$

y como la función $\frac{1}{\frac{1}{2}(2\theta)^2}$ no es integrable en $(0, 2\pi)$, por el criterio de comparación por paso al límite la función $\frac{1}{1-\cos(2\theta)}$ tampoco.

Con esto, hemos demostrado que $\|T(t)f\|_{p,\alpha} = \infty$, y por tanto $T(t)f \notin F_\alpha^p$.

Si $p = \infty$ elegimos la función $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2} \mathrm{e}^t z^2}$. Entonces

$$\|f\|_{\alpha,\infty} = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| \, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}(\mathrm{e}^t \mathrm{Re}(z^2) - |z|^2)} \leq \sup_{z \in \mathbb{C}} \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|z|^2(\mathrm{e}^t - 1)} < \infty,$$

es decir, $f \in F_\alpha^\infty$, pero resulta que

$$|T(t)f(z)| \, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} = \left| \mathrm{e}^{-t} \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2} \mathrm{e}^t (\mathrm{e}^{-t} z)^2} \right| \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} = \mathrm{e}^{-t} \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} \mathrm{Re}(z^2) - |z|^2\right)} \to \infty,$$

donde el límite es para $|z| \to \infty$ en la dirección $\mathrm{Re}(z) > 0$ y $\mathrm{Im}(z) = 0$. Por tanto, $T(t)f \notin F_\alpha^\infty$. □

Para terminar el estudio básico del semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, vamos a demostrar que de hecho este es fuertemente continuo si $1 \leq p < \infty$. Para ello necesitaremos utilizar el principio del módulo máximo.

Lema 4.27 (Principio del módulo máximo)**.** *Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$, donde $\mathbb{D}$ es un disco en $\mathbb{C}$ centrado en el origen. Entonces existe un $z_0 \in \partial\mathbb{D}$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, $\forall z \in \mathbb{D}$.*

Proposición 4.28. *El semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ de la Proposición 4.24 definido sobre el espacio de Banach F_α^p es fuertemente continuo, para todo $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Tenemos que demostrar que $\lim_{t \to 0^+} \|T(t)f - f\|_{p,\alpha} = 0$, o equivalentemente,

$$\lim_{t \to 0^+} \int_0^\infty M_p(T(t)f - f, r)^p \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2} r^2} r \, \mathrm{d}r = 0.$$

Vamos a utilizar el teorema de la convergencia dominada, en dos pasos.

- Es fácil ver que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|x + y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p) \tag{4.8}$$

y como M_p es una función creciente por la Proposición 4.2, y en virtud de (4.8) tenemos que

$$\begin{aligned} M_p(T(t)f - f, r)^p &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathrm{e}^{-t} f(r\mathrm{e}^{i\theta} \mathrm{e}^{-t}) - f(r\mathrm{e}^{i\theta})|^p \, \mathrm{d}\theta \\ &\leq 2^{p-1} \left(\frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-tp} \int_0^{2\pi} |f(r\mathrm{e}^{i\theta} \mathrm{e}^{-t})|^p \, \mathrm{d}\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r\mathrm{e}^{i\theta})|^p \, \mathrm{d}\theta \right) \\ &\leq 2^{p-1} \left(M_p(f, r\mathrm{e}^{-t}) + M_p(f, r) \right) \leq 2^p M_p(f, r), \end{aligned}$$

y por tanto tenemos que para cada $r \in (0,\infty)$,

$$M_p(T(t)f-f,r)^p \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}r^2} r \leq 2^p M_p(f,r)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}r^2} r,$$

que es integrable ya que $f \in F^p_\alpha$, y además no depende de t. Por tanto, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada para afirmar que

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^\infty M_p(T(t)f-f,r)^p \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}r^2} r\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty \lim_{t\to 0^+} M_p(T(t)f-f,r)^p \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}r^2} r\,\mathrm{d}r \tag{4.9}$$

- Ahora basta demostrar que
$$\lim_{t\to 0^+} M_p(T(t)f-f,r)^p = 0.$$
Usaremos de nuevo el teorema de la convergencia dominada. De nuevo gracias a (4.8), para cada $\theta \in (0,2\pi)$ se tiene que
$$|\mathrm{e}^{-t} f(r\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-t}) - f(r\mathrm{e}^{i\theta})|^p \leq 2^{p-1}\left(|f(r\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{i\theta})|^p + |f(r\mathrm{e}^{i\theta})|^p\right).$$
Ahora, por el Lema 4.27 existe $\theta_0 \in (0,2\pi)$ tal que $|f(r\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{i\theta})|, |f(r\mathrm{e}^{i\theta})| \leq |f(r\mathrm{e}^{i\theta_0})|$, $\forall\theta \in (0,2\pi)$, luego
$$|\mathrm{e}^{-t} f(r\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-t}) - f(r\mathrm{e}^{i\theta})|^p \leq 2^{p-1}\left(|f(r\mathrm{e}^{i\theta_0})|^p + |f(r\mathrm{e}^{i\theta_0})|^p\right),$$
que obviamente es integrable en $(0,2\pi)$ y no depende de t. Por tanto, por el teorema de la convergencia dominada tenemos que
$$\lim_{t\to 0^+} M_p(T(t)f-f,r)^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{t\to 0^+} |\mathrm{e}^{-t} f(r\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-t}) - f(r\mathrm{e}^{i\theta})|^p \,\mathrm{d}\theta = 0, \tag{4.10}$$
ya que como $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, en particular es continua en 0, luego
$$\lim_{t\to 0^+} |\mathrm{e}^{-t} f(r\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-t}) - f(r\mathrm{e}^{i\theta})| = 0.$$

Así, en virtud de (4.9) y de (4.10) se tiene que

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)f-f\|^p_{p,\alpha} = \lim_{t\to 0^+} \int_0^\infty M_p(T(t)f-f,r)^p \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}r^2} r = 0,$$

luego el semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo. □

Observación 18. Si $p=\infty$, el semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ no es fuertemente continuo. Lo veremos en la siguiente sección, pero para demostrarlo necesitaremos el siguiente lema.

Lema 4.29. *Si $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ es tal que $g' \in F^\infty_\alpha$, entonces $g \in F^\infty_\alpha$.*

Demostración. Como $g' \in F^p_\alpha$, entonces por la Proposición 4.16 se tiene que

$$|g'(z)| \lesssim \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}|z|^2}.$$

Por tanto tenemos que

$$\begin{aligned}|g(z)| = \left|g(0)+\int_0^z g'(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right| &\leq |g(0)| + \left|\int_0^z g'(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right| = |g(0)| + \left|\int_0^{|z|} g'(R\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}R\right| \\ &\leq |g(0)| + \int_0^{|z|} \left|g'(R\mathrm{e}^{i\theta})\right|\mathrm{d}R \lesssim |g(0)| + \int_0^{|z|} \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}R^2}\,\mathrm{d}R \approx |g(0)| + \int_0^{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}|z|} \mathrm{e}^{r^2}\,\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

luego

$$|g(z)|\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} \lesssim |g(0)|\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} + \int_0^{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}|z|} \mathrm{e}^{r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{e}^{-\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}|z|\right)^2} = |g(0)|\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} + D\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}|z|\right), \tag{4.11}$$

donde D es la función de Dawson, definida como

$$D(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En [20] se estudian propiedades de esta función. En particular, se demuestra que es acotada, luego en virtud de (4.11) se tiene que

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} |g(z)|\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} < \infty,$$

y por tanto $g \in F_\alpha^\infty$. □

4.2.2. Propiedades espectrales del generador infinitesimal

En el Capítulo 5 veremos que para conocer los diferentes tipos de espectro del operador de Hausdorff $\mathscr{H}_\mu$ es suficiente conocer las propiedades espectrales del generador infinitesimal A del semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$.

Observación 19. Será habitual de ahora en adelante cometer el abuso de notación de referirse de igual forma a una función g que a la evaluación de dicha función en un punto genérico $g(z)$, cuando el contexto lo permita. Esto nos permitirá escribir cosas del estilo $g(z) \in F_\alpha^p$.

Proposición 4.30. *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces el generador del semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ de la Proposición 4.24 es el operador diferencial*

$$Af(z) = -f(z) - zf'(z), \quad \forall f \in D(A),$$

donde

$$D(A) = \left\{ f \in F_\alpha^p \mid zf'(z) \in F_\alpha^p \right\}.$$

Demostración. En primer lugar, supongamos que $f \in D(A)$. Entonces el generador de $(T(t))_{t\geq 0}$ viene dado por

$$Af(z) = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)f(z) - f(z)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(T(t)f(z)\right)\bigg|_{t=0}.$$

Como el semigrupo venía dado por

$$T(t)f(z) = \mathrm{e}^{-t}f(z\mathrm{e}^{-t}), \tag{4.12}$$

podemos derivar en (4.12), y con la ayuda del Lema 3.5 obtenemos que

$$Af(z) = \left(-\mathrm{e}^{-t}f(z\mathrm{e}^{-t}) + \mathrm{e}^{-t}(-z\mathrm{e}^{-t})f'(z\mathrm{e}^{-t})\right)\bigg|_{t=0} = -f(z) - zf'(z).$$

Por tanto, para que exista $Af(z)$, es necesario que $-f(z) - zf'(z)$ esté en el espacio de Fock F_α^p, pero esto ocurre si y sólo si $zf'(z) \in F_\alpha^p$. Por lo tanto,

$$D(A) = \left\{ f \in F_\alpha^p \mid zf'(z) \in F_\alpha^p \right\}.$$ □

Si en el la Proposición 4.28 no hemos considerado el caso $p = \infty$, es porque el semigrupo deja de ser fuertemente continuo.

Proposición 4.31. *El semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ de la Proposición 4.24 no es fuertemente continuo en F_α^∞.*

Demostración. Si el semigrupo fuera fuertemente continuo, entonces su generador sería el operador

$$Af(z) = -f(z) - zf'(z),$$

definido en el dominio

$$D(A) = \left\{ f \in F_\alpha^\infty \mid zf'(z) \in F_\alpha^\infty \right\},$$

y por el Teorema 3.4 el conjunto $D(A)$ es denso en F_α^∞.

Por otro lado, si $f \in D(A)$ entonces $zf'(z) \in F_\alpha^\infty$, luego

$$(zf(z))' = f(z) + zf'(z) \in F_\alpha^\infty,$$

y gracias al Lema 4.29 $zf(z) \in F_\alpha^\infty$, y por tanto

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |zf(z)| \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} = \sup_{z \in \mathbb{C}} |z| \left(|f(z)| \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} \right) < \infty$$

luego necesariamente

$$\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} = 0,$$

con lo que $f \in f_\alpha^\infty$. Además es trivial que $P \subseteq D(A)$. Por tanto

$$P \subseteq D(A) \subseteq f_\alpha^\infty,$$

y por la Observación 13 se tiene que

$$f_\alpha^\infty = \overline{P} \subseteq \overline{D(A)} \subseteq \overline{f_\alpha^\infty} = f_\alpha^\infty,$$

es decir, $\overline{D(A)} = f_\alpha^\infty \neq F_\alpha^\infty$, con lo que A no es densamente definido, y por tanto el semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ no es fuertemente continuo. □

Estudiemos ahora el espectro puntual del generador del semigrupo. Recordamos que se define el espectro puntual de un operador $(T, D(T))$ en un espacio de Banach X como

$$\sigma_{point}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \text{ no es inyectiva}\}.$$

Proposición 4.32. *Sea $1 \leq p < \infty$, y sea A el generador del semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ de la Proposición 4.24. Entonces*

$$\sigma_{point}(A) = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma_{point}(A)$, con función propia asociada f. Entonces se tiene que $(\lambda - A)f = 0$, es decir,

$$(1+\lambda)f(z) + zf'(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

que es una ecuación diferencial ordinaria. Para resolverla formalmente, primero multiplicamos por z^λ, obteniendo

$$(1+\lambda)z^\lambda f(z) + z^{\lambda+1} f'(z) = 0,$$

es decir,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(z^{\lambda+1} f(z) \right) = 0,$$

luego necesariamente existe una constante $K \in \mathbb{C}$ tal que

$$z^{\lambda+1} f(z) = K, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

y despejando f se tiene que

$$f(z) = \frac{K}{z^{\lambda+1}}.$$

Por tanto, si $\lambda = -k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ la función f es de la forma

$$f(z) = Kz^{k-1},$$

que es un polinomio, y por tanto es analítica y $f \in F^p_\alpha$ para todo $1 \leq p < \infty$ por el Lema 4.17, es decir, λ es valor propio de A con función propia asociada $f(z) = \frac{1}{z^{\lambda+1}}$.

Si por el contrario $\lambda \neq -k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces f no es analítica, y en particular $f \notin F^p_\alpha$, luego λ no es valor propio de A. □

Como consecuencia se sigue que el semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ no es uniformemente continuo.

Corolario 4.33. *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces el semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ de la Proposición 4.24 no es uniformemente continuo.*

Demostración. En virtud de la Proposición 4.32, $\sigma_{point}(A)$ no es acotado, luego por el Corolario 3.9 el semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ no es uniformemente continuo. □

Estudiaremos ahora cuál es el espectro del generador. Recordemos que el espectro de un operador $(T, D(T))$ en un espacio de Banach X se definía como

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T \text{ no es invertible}\}.$$

Resulta que el espectro y el espectro puntual de A son iguales.

Teorema 4.34. *Sea $1 \leq p < \infty$, y sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda \neq -n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces* $\mathrm{rg}(\lambda - A) = F^p_\alpha$.

Demostración. Recordemos que, por el Lema 4.19, para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$F^p_\alpha = P_{m-1} \oplus Z^m,$$

luego dada $f \in F^p_\alpha$, existen $p \in P_{m-1}$ y $g \in Z^m$ únicas tales que

$$f(z) = p(z) + g(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Así, si demostramos que existe $m \in \mathbb{N}$ con $P_{m-1} \subseteq \mathrm{rg}(\lambda - A)$ y $Z^m \subseteq \mathrm{rg}(\lambda - A)$, entonces existirán $\tilde{p} \in D(A)$ y $\tilde{f} \in D(A)$ tales que $(\lambda - A)\tilde{p} = p$ y $(\lambda - A)\tilde{g} = g$, con lo que

$$(\lambda - A)(\tilde{p} + \tilde{g}) = p + g = f,$$

luego $f \in \mathrm{rg}(\lambda - A)$, y por tanto

$$F^p_\alpha = \mathrm{rg}(\lambda - A).$$

Veamos en primer lugar que $P_{m-1} \subseteq \mathrm{rg}(\lambda - A)$. En efecto, sea $p \in P_{m-1}$, pongamos

$$p(z) = \sum_{k=0}^{m-1} a_n z^k,$$

y tomemos

$$\tilde{p}(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{k + \lambda + 1} z^k,$$

que está bien definido al ser $\lambda \neq -n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Es fácil ver que, de hecho,

$$(\lambda - A)\tilde{p}(z) = p(z), \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

y además $\tilde{p} \in D(A)$ al ser un polinomio. Así, tenemos que $p \in \mathrm{rg}(\lambda - A)$.

Veamos ahora que $Z^m \subseteq \mathrm{rg}(\lambda - A)$. Tomemos $g \in Z^m$, y supongamos que $g(z) = z^m h(z)$ para alguna función $h \in F^p_\alpha$. Supongamos también que

$$g(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k z^k, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

y de manera similar a como hacíamos con los polinomios, tomamos la función

$$\tilde{g}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{k+\lambda+1} z^k, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Entonces $\tilde{g} \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, ya que eligiendo $m > -\mathrm{Re}\lambda$ se tiene que para todo $k \geq m$,

$$\left| \frac{a_k}{k+\lambda+1} z^k \right| \leq \left| a_k z^k \right|,$$

y como la serie $\sum_{k=m}^{\infty} a_k z^k$ es absolutamente convergente para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces la serie

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{k+\lambda+1} z^k$$

es absolutamente convergente $\forall z \in \mathbb{C}$ por el criterio de comparación por mayoración, luego $\tilde{g} \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$.

Vamos a ver que $\tilde{g} \in F^p_\alpha$ y que además $(\lambda - A)\tilde{g} = g$.

Para verificar que $(\lambda - A)\tilde{g} = g$ basta utilizar el teorema de derivación de series de potencias, y tenemos que para todo $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}(\lambda - A)\tilde{g}(z) &= (1+\lambda)\tilde{g}(z) + z\tilde{g}'(z) = (1+\lambda) \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{k+\lambda+1} z^k + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k a_k}{k+\lambda+1} z^k \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} a_k z^k = g(z).\end{aligned}$$

Veamos ahora que $\|\tilde{g}\|_{p,\alpha} < \infty$. Para ello vamos a encontrar una representación integral de g en casi todo punto de $\mathbb{C}$.

Tomemos $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Entonces

$$\frac{1}{z^{\lambda+1}} \int_0^z \omega^\lambda g(\omega)\, \mathrm{d}\omega = \frac{1}{z^{\lambda+1}} \int_0^z \sum_{k=m}^{\infty} a_k \omega^{k+\lambda}\, \mathrm{d}\omega.$$

Veamos que podemos intercambiar la serie y la integral. Para ello basta ver que la serie del integrando converge uniformemente el segmento $[0,z]$. En efecto, eligiendo de nuevo $m > -\mathrm{Re}\lambda$ se tiene que

$$\begin{aligned}\sup_{\omega\in[0,z]} \left\{ \left| \omega^\lambda g(\omega) - \sum_{k=m}^{N} a_k \omega^{\lambda+k} \right| \right\} &= \sup_{\omega\in[0,z]} \left\{ |\omega^{\lambda+m}| \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m}\omega^k - \sum_{k=0}^{N} a_{k+m}\omega^k \right| \right\} \\ &\leq \sup_{\omega\in[0,z]} \left\{ |\omega^{\lambda+m}| \right\} \sup_{\omega\in[0,z]} \left\{ \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m}\omega^k - \sum_{k=0}^{N} a_{k+m}\omega^k \right| \right\} \to 0, \quad N \to \infty,\end{aligned}$$

ya que $\sup_{\omega\in[0,z]} \left\{ |\omega^{\lambda+m}| \right\} = |z^{\lambda+m}| < \infty$ y la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m}\omega^k$ converge uniformemente.

Así, podemos intercambiar la serie y la integral y tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^{\lambda+1}} \int_0^z \omega^\lambda g(\omega)\, \mathrm{d}\omega &= \sum_{k=m}^{\infty} a_k \int_0^z \omega^{\lambda+k}\, \mathrm{d}\omega = \frac{1}{z^{\lambda+1}} \sum_{k=m}^{\infty} a_k \frac{z^{\lambda+k+1}}{\lambda+k+1} \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{k+\lambda+1} z^k = g(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].\end{aligned}$$

en otras palabras,

$$\tilde{g}(z) = \frac{1}{z^{\lambda+1}} \int_0^z \omega^\lambda g(\omega)\,\mathrm{d}\omega, \quad \text{para casi todo } z \in \mathbb{C},$$

ya que $A((-\infty,0]) = 0$.

Ahora, usando esta representación integral en casi todo punto se obtiene que

$$M_p(\tilde{g},r) \approx \left(\int_0^{2\pi} \left|\tilde{g}\left(re^{i\theta}\right)\right|^p \mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{(re^{i\theta})^{\lambda+1}} \int_0^{re^{i\theta}} \omega^\lambda g(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right|^p \mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(\frac{1}{r^{(\mathrm{Re}\lambda+1)p}} \int_0^{2\pi} \left|\int_0^r \left(se^{i\theta}\right)^\lambda g\left(se^{i\theta}\right) e^{i\theta}\,\mathrm{d}s\right|^p \mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ahora, usando el Lema 4.22 resulta que

$$M_p(\tilde{g},r) \approx \left(\frac{1}{r^{(\mathrm{Re}\lambda+1)p}} \int_0^{2\pi} \left|\int_0^r \left(se^{i\theta}\right)^\lambda g\left(se^{i\theta}\right) e^{i\theta}\,\mathrm{d}s\right|^p \mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \frac{1}{r^{\mathrm{Re}\lambda+1}} \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \left|\left(se^{i\theta}\right)^\lambda g\left(se^{i\theta}\right) e^{i\theta}\right|^p \mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{r^{\mathrm{Re}\lambda+1}} \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \left|s^{\lambda+m} h\left(se^{i\theta}\right)\right|^p \mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{r^{\mathrm{Re}\lambda+1}} \int_0^r s^{\mathrm{Re}\lambda+m} \left(\int_0^{2\pi} \left|h\left(se^{i\theta}\right)\right|^p \mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}s = \frac{1}{r^{\mathrm{Re}\lambda+1}} \int_0^r s^{\mathrm{Re}\lambda+m} M_p(h,s)\,\mathrm{d}s.$$

De esta manera, se tiene que

$$\|\tilde{g}\|_{p,\alpha}^p \lesssim \int_0^\infty \left(\frac{1}{r^{\mathrm{Re}\lambda+1}} \int_0^r s^{\mathrm{Re}\lambda+m} M_p(h,s)\,\mathrm{d}s\right)^p e^{\frac{-\alpha p}{2} r^2} r\,\mathrm{d}r. \tag{4.13}$$

Supongamos de momento que $p \neq 1$. Entonces, usando la desigualdad de Hölder con $q = \frac{p}{p-1}$ tenemos que

$$\int_0^r s^{\mathrm{Re}\lambda+m} M_p(h,s)\,\mathrm{d}s \leq \left(\int_0^r s^{(\mathrm{Re}\lambda+m)q}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^r M_p(h,s)^p\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}},$$

y como $m > -\mathrm{Re}\lambda$, resulta que

$$\left(\int_0^r s^{\mathrm{Re}\lambda+m} M_p(h,s)\,\mathrm{d}s\right)^p \leq \left(\int_0^r s^{(\mathrm{Re}\lambda+m)q}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{q}} \int_0^r M_p(h,s)^p\,\mathrm{d}s,$$
$$\approx r^{((\mathrm{Re}\lambda+m)q+1)\frac{p}{q}} \int_0^r M_p(h,s)^p\,\mathrm{d}s,$$

luego en virtud de (4.13) y usando el teorema de Fubini se tiene que

$$\|\tilde{g}\|_{p,\alpha}^p \lesssim \int_0^\infty \frac{1}{r^{(\mathrm{Re}\lambda+1)p}} r^{((\mathrm{Re}\lambda+m)q+1)\frac{p}{q}} \int_0^r M_p(h,s)^p\,\mathrm{d}s\, e^{\frac{-\alpha p}{2} r^2} r\,\mathrm{d}r$$
$$= \int_0^\infty \int_0^r r^{mp} M_p(h,s)^p e^{\frac{-\alpha p}{2} r^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty M_p(h,s)^p \int_s^\infty r^{mp} e^{\frac{-\alpha p}{2} r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s.$$

Si $p = 1$, entonces usamos la desigualdad de Hölder extendida, obteniendo que

$$\int_0^r s^{\mathrm{Re}\lambda+m} M_1(h,s)\,\mathrm{d}s \leq r^{\mathrm{Re}\lambda+m} \int_0^r M_1(h,s)\,\mathrm{d}s,$$

luego gracias a (4.13) y al teorema de Fubini tenemos que

$$\|\tilde{g}\|_{1,\alpha} \lesssim \int_0^\infty \frac{1}{r^{\mathrm{Re}\lambda+1}} r^{\mathrm{Re}\lambda+m} \int_0^r M_1(h,s)\,\mathrm{d}s\, e^{\frac{-\alpha}{2} r^2} r\,\mathrm{d}r$$
$$= \int_0^\infty r^m \int_0^r M_1(h,s)\,\mathrm{d}s\, e^{\frac{-\alpha}{2} r^2}\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty M_1(h,s) \int_s^\infty r^m e^{\frac{-\alpha}{2} r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s$$

Por tanto, en cualquier caso se obtiene

$$\|\tilde{g}\|_{p,\alpha}^p \lesssim \int_0^\infty M_p(h,s)^p \int_s^\infty r^{mp} \mathrm{e}^{\frac{-\alpha p}{2} r^2} \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}s. \tag{4.14}$$

Ahora hacemos el cambio de variable

$$u = \frac{\alpha p}{2} r^2,$$

lo que en particular implica que $\mathrm{d}r \approx \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}$ y $r \approx \sqrt{u}$, y gracias a (4.14) obtenemos que

$$\int_s^\infty r^{mp} \mathrm{e}^{\frac{-\alpha p}{2} r^2} \,\mathrm{d}r \approx \int_{\frac{\alpha p}{2} s^2}^\infty u^{\frac{mp}{2} + \frac{1}{2} - 1} \mathrm{e}^{-u} \,\mathrm{d}u = \Gamma\left(\frac{mp}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\alpha p}{2} s^2\right),$$

luego

$$\|\tilde{g}\|_{p,\alpha}^p \lesssim \int_0^\infty M_p(h,s)^p \int_s^\infty r^{mp} \mathrm{e}^{\frac{-\alpha p}{2} r^2} \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}s \approx \int_0^\infty M_p(h,s)^p \Gamma\left(\frac{mp}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\alpha p}{2} s^2\right) \mathrm{d}s,$$

donde Γ denota a la función Gamma incompleta, que viene dada por

$$\Gamma(x,s) = \int_s^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t.$$

Sabemos que esta función tiene el siguiente comportamiento asintótico:

$$\Gamma(x,s) \sim s^{x-1} \mathrm{e}^{-s}, \quad s \to \infty,$$

luego en particular

$$\Gamma\left(\frac{mp}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\alpha p}{2} s^2\right) \sim \left(\frac{\alpha p}{2} s^2\right)^{\frac{mp}{2} - \frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2} s^2} \approx s^{mp-1} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2} s^2}, \quad s \to \infty.$$

Esto implica que existe algún $s_0 \geq 0$ (podemos asumir que $s_0 > 1$) tal que

$$\Gamma\left(\frac{mp}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\alpha p}{2} s^2\right) \lesssim s^{mp-1} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2} s^2}, \quad s > s_0.$$

Por tanto, separando el intervalo de integración obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{g}\|_{p,\alpha}^p &\lesssim \int_0^{s_0} M_p(h,s)^p \Gamma\left(\frac{mp}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\alpha p}{2} s^2\right) \mathrm{d}s + \int_{s_0}^\infty M_p(h,s)^p \Gamma\left(\frac{mp}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\alpha p}{2} s^2\right) \mathrm{d}s \\
&\lesssim \int_0^{s_0} M_p(h,s)^p \Gamma\left(\frac{mp}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\alpha p}{2} s^2\right) \mathrm{d}s + \int_{s_0}^\infty M_p(h,s)^p s^{mp-1} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2} s^2} \,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Por un lado, es trivial que

$$\Gamma\left(\frac{mp}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\alpha p}{2} s^2\right) \leq \Gamma\left(\frac{mp}{2} + \frac{1}{2}\right) \lesssim 1, \quad \forall s \geq 0,$$

luego

$$\int_0^{s_0} M_p(h,s)^p \Gamma\left(\frac{mp}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\alpha p}{2} s^2\right) \mathrm{d}s \lesssim \int_0^{s_0} M_p(h,s)^p \,\mathrm{d}s,$$

pero como $h \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ entonces en particular es acotada en $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, y por tanto

$$M_p(h,s)^p \approx \int_0^{2\pi} \left| h\left(s\mathrm{e}^{i\theta}\right) \right|^p \mathrm{d}\theta \leq \int_0^{2\pi} \sup_{z \in \mathbb{D}} |h(z)|^p \,\mathrm{d}s < \infty.$$

Con esto se tiene que, al ser $(0, s_0)$ acotado,

$$\int_0^{s_0} M_p(h,s)^p \Gamma\left(\frac{mp}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\alpha p}{2} s^2\right) \mathrm{d}s \lesssim \int_0^{s_0} M_p(h,s)^p \,\mathrm{d}s < \infty.$$

Por otro lado, resulta que

$$\begin{aligned} s^{mp-1}M_p(h,s)^p &\approx s^{-1}s^{mp}\int_0^{2\pi}\left|h\left(se^{i\theta}\right)\right|^p \mathrm{d}\theta = s^{-1}\int_0^{2\pi}\left|\left(se^{i\theta}\right)^m h\left(se^{i\theta}\right)\right|^p \mathrm{d}\theta \\ &= s^{-1}M_p(g,s)^p, \end{aligned}$$

y como además $s_0 > 1$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{\infty} M_p(h,s)^p s^{mp-1}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}s^2}\,\mathrm{d}s &\lesssim \int_{s_0}^{\infty} M_p(g,s)^p s^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}s^2}\,\mathrm{d}s \le \int_0^{\infty} M_p(g,s)^p s\mathrm{e}^{-\frac{\alpha p}{2}s^2}\,\mathrm{d}s \\ &= \|g\|_{p,\alpha}^p < \infty, \end{aligned}$$

ya que $g \in F_\alpha^p$.

De esta manera, hemos demostrado que $\|\tilde{g}\|_{p,\alpha} < \infty$, y como además $\tilde{g}$ es holomorfa, entonces $\tilde{g} \in F_\alpha^p$.

Por último, como $\tilde{g}$ cumple la ecuación diferencial, entonces necesariamente $\tilde{g} \in D(A)$. Así, queda demostrado que $\mathrm{rg}(\lambda - A) = F_\alpha^p$. □

Como consecuencia inmediata se obtiene que el espectro y el espectro puntual de A coinciden.

Corolario 4.35. *Sea $1 \le p < \infty$, y sea A el generador infinitesimal del semigrupo $(T(t))_{t\ge 0}$ de la Proposición 4.24. Entonces*

$$\sigma_{point}(A) = \sigma(A) = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Estudiemos ahora el espectro esencial de A. Recordemos que el espectro esencial de un operador T sobre un espacio de Banach X se define como

$$\sigma_{ess}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \dim\ker(\lambda - T) = \infty \text{ o } \operatorname{codim}\mathrm{rg}(\lambda - T) = \infty\}.$$

Lema 4.36. *Sea V un espacio vectorial y W un subespacio de V. Entonces*

$$\dim(V/W) \le \dim V.$$

Demostración. Sea $(v_i)_{i\in I}$ una base de V. Entonces es claro que el conjunto

$$(v_i + W)_{i\in I}$$

es un generador de V/W, luego se tiene que $\dim(V/W) \le \#(v_i + W)_{i\in I} = \#(v_i)_{i\in I} = \dim V$. □

Proposición 4.37. *Sea V un espacio vectorial y W_1, W_2 dos subespacios de V tales que $W_1 \subseteq W_2$. Entonces*

$$\operatorname{codim} W_1 \le \operatorname{codim} W_2.$$

Demostración. Resulta que $W_1/W_2 \subseteq V/W_2$, luego por el tercer teorema de isomorfía se tiene que

$$(V/W_2)/(W_1/W_2) \cong V/W_1,$$

con lo que, en virtud del Lema 4.36

$$\operatorname{codim} W_1 = \dim(V/W_1) = \dim\left((V/W_2)/(W_1/W_2)\right) \le \dim(V/W_2) = \operatorname{codim} W_2. \qquad \square$$

Teorema 4.38. *Sea $1 \le p < \infty$, y sea A el generador infinitesimal del semigrupo $(T(t))_{t\ge 0}$ de la Proposición 4.24. Entonces*

$$\sigma_{ess}(A) = \emptyset.$$

Demostración. Analicemos cada condición del espectro esencial.

- $\dim\ker(\lambda - A) = \infty$. Sabemos que si $\lambda \neq -n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\lambda - A$ es un operador inyectivo, luego $\ker(\lambda - A) = \{0\}$ y por tanto $\dim\ker(\lambda - A) = 0$.

  Si $\lambda = -n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lambda \in \sigma_{point}(A)$, y por la Proposición 4.32 se tiene que

  $$\ker(\lambda - A) = \langle u_{n-1} \rangle,$$

  luego $\dim\ker(\lambda - A) = 1$.

  En ninguno de los dos casos se cumple la condición. Analicemos la otra.

- $\operatorname{codim}\operatorname{rg}(\lambda - A) = \infty$. Si $\lambda \neq -n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $F_\alpha^p = \operatorname{rg}(\lambda - A)$ por el Teorema 4.34, luego $\operatorname{codim}\operatorname{rg}(\lambda - A) = 0$, y no se cumple la condición.

  Si $\lambda = -n$ par algún $n \in \mathbb{N}$ entonces resulta que

  $$Z^m \subseteq \operatorname{rg}(\lambda - A)$$

  para m suficientemente grande (la prueba es la misma que la del Teorema 4.34), luego en virtud de la Proposición 4.37 se tiene que

  $$\operatorname{codim}\operatorname{rg}(\lambda - A) = \operatorname{codim} Z^m = \dim P_{m-1} = m - 1 < \infty,$$

  ya que $F_\alpha^p = Z^m \oplus P_{m-1}$. Así, no se cumple la condición.

Como no se cumple ninguna de las dos condiciones para ningún valor de λ, $\sigma_{ess}(A) = \emptyset$. □

Capítulo 5

Cálculo funcional y teoremas espectrales

En este capítulo se proporcionan las herramientas necesarias para, a partir de las propiedades espectrales del generador infinitesimal A dadas en el Capítulo 4, encontrar los diferentes tipos de espectro del operador de Hausdorff $\mathscr{H}_\mu$. Gran parte de los resultados se pueden encontrar en [12].

5.1. Cálculo funcional abstracto

Comenzaremos definiendo la noción de cálculo funcional abstracto y demostrando algunas propiedades básicas sobre él.

Definición 5.1. Sea X un espacio de Banach, $\mathscr{M}$ un álgebra conmutativa unitaria, $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{M}$ una subálgebra y $\Phi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{L}(X)$ un homomorfismo de álgebras. Entonces la terna $(\mathscr{E}, \mathscr{M}, \Phi)$ se denomina *cálculo funcional abstracto* (ó simplemente *cálculo funcional*) sobre X.

- Se dice que el cálculo funcional abstracto $(\mathscr{E}, \mathscr{M}, \Phi)$ es *no degenerado* o *propio* si el conjunto

  $$\operatorname{Reg}(\mathscr{E}) := \{e \in \mathscr{E} \mid \Phi(e) \text{ es inyectivo}\}$$

  es no vacío.

- Dado $f \in \mathscr{M}$, se dice que f es *regularizable* si existe algún $e \in \operatorname{Reg}(\mathscr{E})$ tal que $ef \in \mathscr{E}$.

Notamos que el homomorfismo Φ está definido sólo sobre elementos de la subálgebra $\mathscr{E}$. Mediante un proceso de extensión podremos definirlo para algunos elementos más de $\mathscr{M}$.

Definición 5.2. Dado un cálculo funcional $(\mathscr{E}, \mathscr{M}, \Phi)$, definimos el *regularizador* de $\mathscr{M}$ como

$$\mathscr{M}_r := \{f \in \mathscr{M} \mid f \text{ es regularizable}\},$$

y dado $f \in \mathscr{M}_r$, definimos

$$\Phi(f) := \Phi(e)^{-1}\Phi(ef). \tag{5.1}$$

La Definición 5.2 no depende de la elección del regularizador e que elijamos, y además es una extensión del homomorfismo original.

Lema 5.1. *Sea $(\mathscr{E}, \mathscr{M}, \Phi)$ un cálculo funcional propio. Entonces la aplicación $\Phi : \mathscr{M}_r \longrightarrow \mathscr{L}(X)$ dada por (5.1) está bien definida, y extiende al homomorfismo $\Phi : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{L}(X)$.*

Demostración. Tomamos $f \in \mathscr{M}_r$, y sean $e, h \in \operatorname{Reg}(\mathscr{E})$ tales que $ef, hf \in \mathscr{E}$. Entonces resulta que

$$\Phi(e)\Phi(h) = \Phi(eh) = \Phi(he) = \Phi(h)\Phi(e),$$

luego

$$\Phi(e)^{-1}\Phi(h)^{-1} = \Phi(h)^{-1}\Phi(e)^{-1}.$$

Por tanto, se tiene que

$$\Phi(e)^{-1}\Phi(ef) = \Phi(h)^{-1}\Phi(e)^{-1}\Phi(h)\Phi(ef) = \Phi(h)^{-1}\Phi(e)^{-1}\Phi(hef)$$
$$= \Phi(h)^{-1}\Phi(e)^{-1}\Phi(e)\Phi(hf) = \Phi(h)^{-1}\Phi(hf),$$

con lo que la aplicación está bien definida. Además, si $f \in \mathscr{E}$, entonces para todo regulrizador e se tiene que

$$\Phi(e)^{-1}\Phi(ef) = \Phi(e)^{-1}\Phi(e)\Phi(f) = \Phi(f),$$

luego es una extensión del homomorfismo original. □

Pasamos ahora a definir el cálculo funcional meromorfo, para funciones de variable compleja.

Definición 5.3. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, X un espacio de Banach, $\mathscr{M}(\Omega)$ el álgebra de las funciones meromorfas en Ω y $\mathscr{E}(\Omega)$ una subálgebra de $\mathscr{M}(\Omega)$. Consideremos también un homomorfismo $\Phi : \mathscr{E}(\Omega) \longrightarrow \mathscr{L}(X)$. Decimos que el cálculo funcional $(\mathscr{E}(\Omega), \mathscr{M}(\Omega), \Phi)$ es *meromorfo* si:

- La función $u_1(z) = z$ es regularizable, y
- Si $T \in \mathscr{L}(X)$ conmuta con $A = \Phi(u_1)$, entonces también conmuta con $\Phi(e)$, $\forall e \in \mathscr{E}(\Omega)$.

Observación 20. En este contexto escribimos

$$\mathscr{M}(\Omega)_A = \mathscr{M}(\Omega)_r, \quad f(A) = \Phi(f),$$

y definimos

$$H(A) = \{f \in \mathscr{M}(\Omega)_A \mid f(A) \in \mathscr{L}(X)\}.$$

Evidentemente, si $f \in \mathscr{E}(\Omega)$ entonces $f \in H(A)$.

El siguiente teorema será de utilidad cuando demostremos el teorema de la transformación espectral. Su demostración puede encontrarse en [12], Teorema 1.3.2.

Teorema 5.2 (Teorema fundamental del cálculo funcional)**.** *Sea A un operador cerrado en un espacio de Banach X, y sea $(\mathscr{E}(\Omega), \mathscr{M}(\Omega), \Phi)$ un cálculo funcional meromorfo para A. Sea $f \in \mathscr{M}(\Omega)_A$. Entonces se tiene que:*

1. *Si $T \in \mathscr{L}(X)$ conmuta con A, entonces también conmuta con $f(A)$. Si $f \in H(A)$, entonces $f(A)$ conmuta con A.*
2. *Se tiene que $u_0(A) = I$ y además $u_1(A) = A$.*
3. *Si $g \in \mathscr{M}(\Omega)_A$, entonces*
$$f(A) + g(A) \subseteq (f+g)(A), \text{ y } f(A)g(A) \subseteq (fg)(A),$$
donde $F \subseteq G$ denota que F es una restricción de G. Además,
$$D((fg)(A)) \cap D(g(A)) = D(f(A)g(A)).$$
4. *La aplicación $\Psi : H(A) \longrightarrow \mathscr{L}(X)$ dada por $\Psi f = f(A)$ es un homomorfismo de álgebras.*
5. *Si $g \in H(A)$ y $g(A)$ es inyectivo, entonces*
$$f(A) = g(A)^{-1} f(A) g(A).$$
6. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $1/(\lambda - z) \in \mathscr{M}(\Omega)$, entonces $1/(\lambda - f(z)) \in \mathscr{M}(\Omega)$ si y sólo si $\lambda - f(A)$ es inyectivo.*

Corolario 5.3. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f,g \in \mathscr{M}(\Omega)_A$, donde A es un operador cerrado en un espacio de Banach X. Supongamos que $D(g(A)) \subseteq D(f(A))$. Entonces*

$$f(A)g(A) \subseteq g(A)f(A).$$

Demostración. En virtud del Teorema 5.2 tenemos que

$$f(A)g(A) \subseteq (fg)(A), \quad g(A)f(A) \subseteq (fg)(A),$$

con $D((fg)(A)) \cap D(g(A)) = D(f(A)g(A))$ y $D((fg)(A)) \cap D(f(A)) = D(g(A)f(A))$. Entonces por hipósesis se tiene que

$$D(f(A)g(A)) = D((fg)(A)) \cap D(g(A)) \subseteq D((fg)(A)) \cap D(f(A)) = D(g(A)f(A)),$$

luego dado $x \in D(f(A)g(A))$ se tiene que

$$f(A)g(A)x = (fg)(A)x = g(A)f(A)x,$$

y por tanto $f(A)g(A) \subseteq g(A)f(A)$. □

5.2. Cálculo funcional para operadores sectoriales

Ahora que sabemos lo que es un cálculo funcional meromorfo, vamos a construir un cálculo funcional para operadores sectoriales.

5.2.1. Operadores sectoriales

Definición 5.4. Sean $\omega > 0$ y A un operador en un espacio de Banach X. Decimos que A es *sectorial* de ángulo ω (denotado como $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$) si es cerrado y cumple

- $\sigma(A) \subseteq \overline{S_\omega}$,
- $\sup\{\|\lambda R(\lambda,A)\| \mid \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_{\omega'}}\} < \infty, \quad \forall \omega' \in (\omega,\pi)$,

donde

$$S_\omega = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0 \text{ y } |\mathrm{Arg}\, z| < \omega\}, & \text{si } \omega \in (0,\pi] \\ (0,\infty), & \text{si } \omega = 0. \end{cases}$$

Observación 21. Si existe algún $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda + A$ es sectorial, se dice que A es *cuasi-sectorial*.

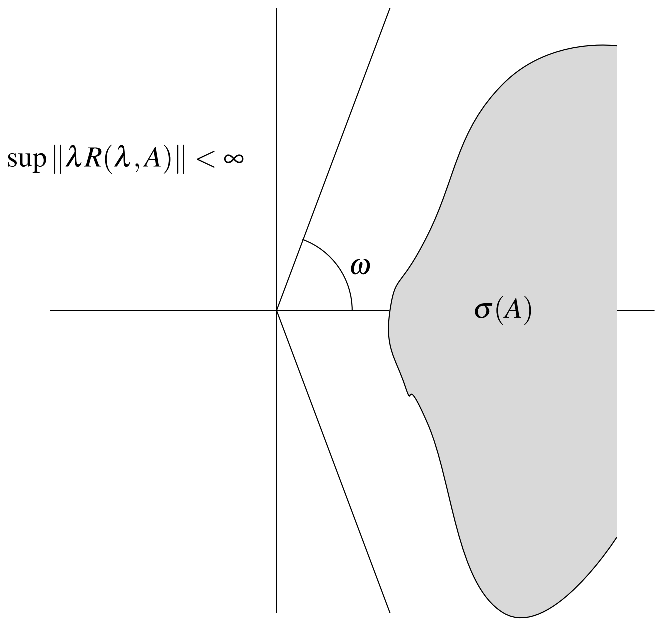

Figura 5.1: Espectro de un operador sectorial

Observación 22. Si A es el generador de un semigrupo fuertemente continuo $(T(t))_{t\geq 0}$, entonces $-A$ es cuasi-sectorial, ya que por la Proposición 3.14 se tiene que

$$\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\lambda \leq \omega_0\},$$

donde ω_0 es la cota de crecimiento de la Definición 3.4, y por tanto

$$\sigma(-A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\lambda \geq -\omega_0\},$$

luego $-A$ es cuasi-sectorial de ángulo $\pi/2$.

Observación 23. Todos los resultados válidos para operadores sectoriales son también válidos para cuasi-sectoriales, ya que basta realizar una traslación para obtener un operador sectorial.

5.2.2. Cálculo funcional natural

Nuestro objetivo es construir un cálculo funcional con buenas propiedades para operadores sectoriales, y en particular para generadores de semigrupos. Para ello necesitamos varias definiciones previas.

Definición 5.5. Sea $\varphi \in (0,\pi]$ y $f \in \mathscr{M}(S_\varphi)$. Decimos que f tiene *límite polinómico* $c \in \mathbb{C}$ en 0 si existe algún $\alpha > 0$ tal que $f(z) = c + O(|z|^\alpha)$ si $z \to 0$. Decimos que tiene límite polinómico ∞ en 0 si $1/f$ tiene límite polinómico 0 en 0.

Del mismo modo, decimos que f tiene límite polinómico $d \in \mathbb{C}_\infty$ (la esfera de Riemann) en ∞ si $f(z^{-1})$ tiene limite polinómico d en 0.

Decimos que f tiene *límite polinómico finito* en 0 (resp. en ∞) si existe algún $c \in \mathbb{C}$ tal que f tiene límite polinómico c en 0 (resp. ∞); y decimos que f *decae regularmente* en 0 (resp. ∞) si f tiene límite polinómico 0 en 0 (resp. ∞).

Observación 24. Los límites polinómicos se comportan bien con la suma y el producto de funciones.

Lema 5.4. *Sea $\varphi \in (0,\pi]$ y $f \in \mathscr{M}(S_\varphi)$ con límite polinómico no nulo en* 0 *(resp. ∞). Entonces la función $1/f$ tiene límite polinómico en* 0 *(resp. ∞).*

Demostración. Supongamos que existen $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\alpha > 0$ tales que $f(z) - c = O(|z|^\alpha)$. Entonces

$$\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{c} = \frac{c - f(z)}{cf(z)} = \frac{O(|z|^\alpha)}{cf(z)},$$

y como existe $C \in \mathbb{C}$ tal que $O(|z|^\alpha)/|z|^\alpha \to C$ y $f(z) \to c$ si $z \to 0$, entonces

$$\frac{O(|z|^\alpha)}{|z|^\alpha cf(z)} \to \frac{C}{c^2} \in \mathbb{C},$$

con lo que

$$\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{c} = O(|z|^\alpha), \quad z \to 0.$$

Si el límite polinómico de f es ∞, entonces por definición $1/f$ tiene límite polinóimico 0. El caso de límite polinómico en ∞ se demuestra igual cambiando z por z^{-1}. $\square$

Para nuestros propósitos será útil dotar de algún sentido a la expresión

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_{\varphi'}} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z, \tag{5.2}$$

donde $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$, $f \in \mathscr{H}(S_\varphi)$, $\varphi \in (\omega,\pi]$ y $\varphi' \in (\omega,\varphi)$, usando algún cálculo funcional.

Observación 25.

- En la fórmula 5.2 estamos cometiendo un pequeño abuso de notación. Lo correcto sería escribir, para cada $x \in D(A)$,
$$f(A)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_{\varphi'}} f(z)R(z,A)x\,\mathrm{d}z.$$
Usualmente omitiremos la mención del vector x.

- Para poder definir el operador de (5.2) necesitamos asegurarnos de que f no presenta problemas de integrabilidad, además de que $f(A)$ no depende de la elección de φ y φ'.

Lema 5.5. *Sean $f \in \mathscr{M}(S_\varphi)$ y $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ tales que f decae regularmente en 0 y en ∞. Entonces el operador $f(A)$ de (5.2) está bien definido.*

Demostración. Tenemos que demostrar que $f(A)$ no depende de la elección de φ y φ' y además que la integral es finita (en norma).

Por un lado, como A es sectorial, en particular se tiene que
$$\|R(z,A)\| \leq \frac{C}{|z|}, \quad \forall z \in \partial S_{\varphi'}, \tag{5.3}$$
donde C es una constante que depende de φ'.

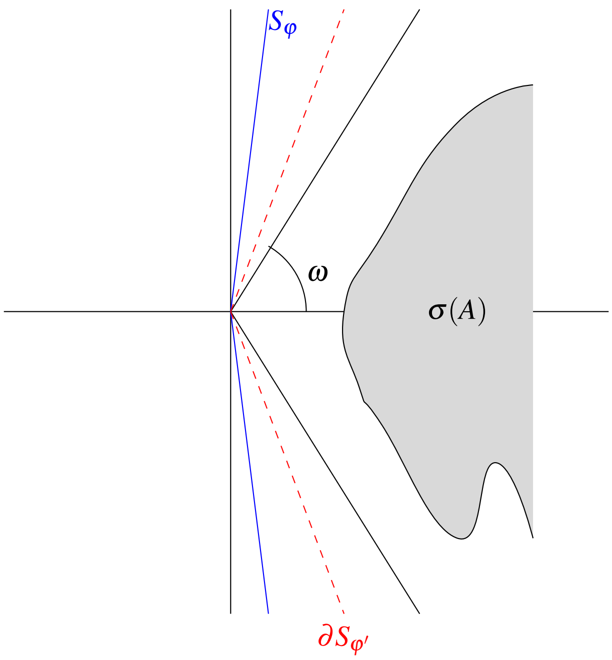

Figura 5.2: Sectores S_φ y $S_{\varphi'}$

Vamos a parametrizar el camino $\partial S_{\varphi'}$ de la siguiente manera: escribimos $\partial S_{\varphi'} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, donde
$$\Gamma_1 = \left\{re^{i\varphi'} \mid r \in [0,\infty)\right\},$$
y
$$\Gamma_2 = \left\{re^{-i\varphi'} \mid r \in [0,\infty)\right\},$$
con lo que
$$\int_{\partial S_{\varphi'}} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z.$$

Nos centramos en Γ_1. Tenemos que verificar que

$$\int_{\Gamma_1} \|f(z)R(z,A)\| \, \mathrm{d}z < \infty.$$

En efecto, parametrizando el camino y aplicando la cota (5.3) se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} \|f(z)R(z,A)\| \, \mathrm{d}z &= \int_0^\infty \left\| f(r\mathrm{e}^{i\varphi'})R(r\mathrm{e}^{i\varphi'},A) \right\| \mathrm{e}^{i\varphi'} \, \mathrm{d}r \\ &\lesssim \int_0^\infty \frac{|f(r\mathrm{e}^{i\varphi'})|}{|r\mathrm{e}^{i\varphi'}|} \, \mathrm{d}r = \int_0^1 \frac{|f(r\mathrm{e}^{i\varphi'})|}{|r\mathrm{e}^{i\varphi'}|} \, \mathrm{d}r + \int_1^\infty \frac{|f(r\mathrm{e}^{i\varphi'})|}{|r\mathrm{e}^{i\varphi'}|} \, \mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Sabemos además que f decae regularmente en 0 y en ∞, luego se tiene que

$$f(r\mathrm{e}^{i\varphi'}) \asymp |r\mathrm{e}^{i\varphi'}| = r, \quad r \to 0^+,$$

y

$$f(r\mathrm{e}^{i\varphi'}) \asymp \frac{1}{|r\mathrm{e}^{i\varphi'}|} = \frac{1}{r}, \quad r \to 0^+,$$

luego resulta que

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} \|f(z)R(z,A)\| \, \mathrm{d}z &\lesssim \int_0^1 \frac{|f(r\mathrm{e}^{i\varphi'})|}{|r\mathrm{e}^{i\varphi'}|} \, \mathrm{d}r + \int_1^\infty \frac{|f(r\mathrm{e}^{i\varphi'})|}{|r\mathrm{e}^{i\varphi'}|} \, \mathrm{d}r \\ &\lesssim \int_0^1 \frac{1}{r^{1-\alpha}} \, \mathrm{d}r + \int_1^\infty \frac{1}{r^{1+\alpha}} < \infty,\end{aligned}$$

y por tanto la integral es finita en norma. Para Γ_2 la demostración es análoga.

Por otro lado, tenemos que ver que $f(A)$ no depende de la elección de φ'. En efecto, tomemos $\varphi', \varphi'' \in (\omega, \varphi)$, con $\varphi'' > \varphi'$. Tenemos que verificar que

$$\int_{\partial S_{\varphi'} \cup (-\partial S_{\varphi''})} f(z)R(z,A) \, \mathrm{d}z = 0.$$

Para ello, para cada $R, r_1, r_2 > 0$ con $R > r_1 > r_2$ consideramos el camino cerrado C_{R,r_1,r_2} de la imagen, donde la orientación es positiva (es decir, en sentido antihorario):

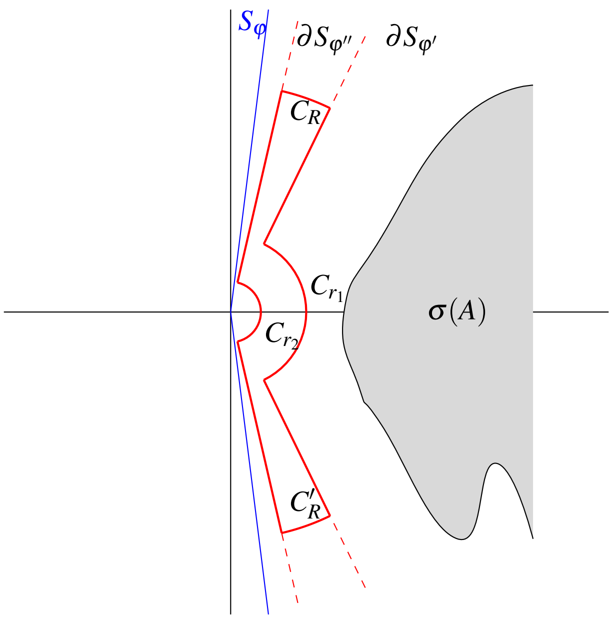

Figura 5.3: Camino considerado en la demostración del Lema 5.5.

Los caminos C_r son arcos de circunferencia de radio r. Además $\operatorname{supp} C_{R,r_1,r_2} \subseteq S_\varphi$, y denotando $fR(z) = f(z)R(z,A)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial S_{\varphi'} \cup (-\partial S_{\varphi''})} fR(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty, r_1\to 0, r_2\to 0} \left(\int_{C_{R,r_1,r_2}} fR(z)\,\mathrm{d}z \right.\\
&\left. - \int_{C_R} fR(z)\,\mathrm{d}z - \int_{C_{r_1}} fR(z) - \int_{C_{r_2}} fR(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}z - \int_{C_R'} fR(z)\,\mathrm{d}z \right)\\
&= -\lim_{R\to\infty} \left(\int_{C_R} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z + \int_{C_R'} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z \right)\\
&- \lim_{r_1\to 0} \int_{C_{r_1}} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z - \lim_{r_2\to 0} \int_{C_{r_2}} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

ya que C_{R,r_1,r_2} es un camino cerrado en S_φ, y $f(z)R(z,A)$ es holomorfa ahí (tras evaluar en algún vector x), luego por el teorema de Cauchy se tiene que

$$\int_{C_{R,r_1,r_2}} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Además, parametrizando C_R se tiene que

$$\int_{C_R} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi'}^{\varphi''} f\left(Re^{i\theta}\right) R\left(Re^{i\theta}, A\right) iRe^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

pero como A es sectorial y f decae regularmente en ∞, entonces resulta que

$$\left| f\left(Re^{i\theta}\right) R\left(Re^{i\theta}, A\right) iRe^{i\theta} \right| \lesssim \frac{1}{R^\alpha}\frac{1}{R}R = \frac{1}{R^\alpha} \lesssim 1, \quad \forall R \geq 1,$$

que es integrable en (φ', φ''), luego por el teorema de la convergencia dominada se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \left| \int_{C_R} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z \right| &= \int_{\varphi'}^{\varphi''} \lim_{R\to\infty} \left| f\left(Re^{i\theta}\right) R\left(Re^{i\theta}, A\right) iRe^{i\theta} \right| \mathrm{d}\theta\\
&\lesssim \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^\alpha} = 0.
\end{aligned}$$

Del mismo modo se demuestra que

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{C_R'} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z \right| = 0,$$

y usando el decaimiento regular de f en 0 se demuestra de manera análoga que

$$\lim_{r_1\to\infty} \int_{C_{r_1}} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z = \lim_{r_2\to\infty} \int_{C_{r_2}} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z = 0,$$

con lo que finalmente se obtiene que

$$\int_{\partial S_{\varphi'} \cup (-\partial S_{\varphi''})} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z = 0,$$

y por tanto $f(A)$ está bien definida. □

A la vista del Lema 5.5, parece natural definir el siguiente conjunto.

Definición 5.6. Sea $\varphi \in (0, \pi)$. Definimos la *clase de Dunford-Riesz* como

$$H_0^\infty(S_\varphi) = \left\{ f \in H^\infty(S_\varphi) \mid f \text{ decae regularmente en 0 y } \infty \right\},$$

donde

$$H^\infty(S_\varphi) = \left\{ f \in \mathscr{H}(S_\varphi) \mid f \text{ es acotada} \right\}.$$

Observación 26. El conjunto $H^\infty(S_\varphi)$ es un álgebra de Banach, dotado de la norma

$$\|f\|_{\infty,\varphi} = \sup\left\{|f(z)| \mid z \in S_\varphi\right\}.$$

Además, es claro que $H_0^\infty(S_\varphi)$ es un ideal de $H^\infty(S_\varphi)$.

Sin embargo, ni la función constante u_0 ni la función racional $r(z) = \frac{1}{1+z}$ pertenecen a la clase de Dunford-Riesz, y esto es algo que necesitaremos más adelante. Es por ello que definimos la *clase de Dunford-Riesz extendida* como

$$\mathscr{E}(S_\varphi) = H_0^\infty(S_\varphi) \oplus \langle r\rangle \oplus \langle u_0\rangle .$$

Este conjunto es una subálgebra de $H^\infty(S_\varphi)$ gracias a la identidad

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \frac{1}{1-z} - \frac{z}{(1+z)^2}.$$

Vamos a ir acercándonos a la construcción del cálculo funcional natural.

Lema 5.6. *Sea $A \in \operatorname{Sect}(\omega)$ cerrado, y sea $\varphi \in (\omega,\pi)$. Entonces se tiene que:*

1. *La aplicación $\Phi : H_0^\infty(S_\varphi) \longrightarrow \mathscr{L}(X)$ dada por $\Phi(h) = h(A)$ es un homomorfismo de álgebras, donde*
$$h(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega'}} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z,$$
con $\omega' \in (\omega,\phi)$.

2. *Si B es un operador cerrado que conmuta con $R(\lambda,A)$, entonces B conmuta con $f(A)$. En particular, $f(A)$ conmuta con A y con $R(\lambda,A)$ para todo $\lambda \in \rho(A)$.*

3. *Resulta que*
$$R(\lambda,A)f(A) = \left((\lambda - z)^{-1}f(z)\right)(A), \quad \forall \lambda \notin \overline{S_\phi}.$$

Demostración. Ya vimos en el Lema 5.5 que $h(A)$ está bien definido, es decir, que no depende de la elección de ω'.

1. Es claro que Φ es lineal. además, si tomamos $h_1,h_2 \in \operatorname{Sect}(\omega)$ y elegimos $\omega',\omega'' \in (\omega,\varphi)$ tales que $\omega'' > \omega'$, entonces como $h_1(A)$ y $h_2(A)$ no dependen de la elección de ω resulta que
$$\begin{aligned}\Phi(h_1)\Phi(h_2) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega'}} h_1(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega''}} h_2(w)R(w,A)\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_{\omega'}}\int_{\Gamma_{\omega''}} h_1(z)h_2(w)R(z,A)R(w,A)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}z,\end{aligned} \tag{5.4}$$
luego en virtud de la Proposición 3.12 (identidad del resolvente) y gracias a (5.4) se tiene que
$$\begin{aligned}\Phi(h_1)\Phi(h_2) &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_{\omega'}}\int_{\Gamma_{\omega''}} \frac{h_1(z)h_2(w)}{w-z}\left(R(z,A)-R(w,A)\right)\mathrm{d}w\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\left(\int_{\Gamma_{\omega'}} h_1(z)R(z,A)\int_{\Gamma_{\omega''}}\frac{h_2(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}z - \int_{\Gamma_{\omega'}}\int_{\Gamma_{\omega''}}\frac{h_1(z)h_2(w)}{w-z}R(w,A)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}z\right).\end{aligned}$$
Ahora, gracias a la fórmula de Cauchy, a las propiedades de decaimiento de h_2 y utilizando técnicas similares a las que ya hemos utilizado se puede ver que
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega''}}\frac{h_2(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = h_2(z),$$

y usando también el teorema de Fubini tenemos que

$$\Phi(h_1)\Phi(h_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega'}} h_1(z)h_2(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_{\omega''}} h_2(w)R(w,A)\int_{\Gamma_{\omega'}} \frac{h_1(z)}{w-z}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w,$$

pero como $\omega'' > \omega'$, de nuevo por las propiedades de decaimiento de $h_1(z)$ se puede demostrar, utilizando el teorema de Cauchy, que

$$\int_{\Gamma_{\omega'}} \frac{h_1(z)}{w-z}\,\mathrm{d}z = 0,$$

con lo que finalmente se obtiene que

$$\Phi(h_1)\Phi(h_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega'}} h_1(z)h_2(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z = \Phi(h_1h_2).$$

2. Por el Teorema 1.21 se tiene que

$$Bf(A) = \frac{1}{2\pi i}B\int_{\Gamma} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} Bf(z)AR(z,A)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)R(z,A)B\,\mathrm{d}z = f(A)B.$$

Como A y $R(\lambda,A)$ con cerrados, el resultado se cumple para $B = A$ y $B = R(\lambda,A)$.

3. Sea la función $g(z) = (\lambda - z^{-1})f(z)$, y denotemos por simplicidad $\Gamma = \Gamma_{\omega'}$. Entonces, gracias a la identidad

$$(\lambda - A)R(z,A) = (\lambda - z)R(z,A) + I$$

se tiene que

$$(\lambda - A)g(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} g(z)(\lambda - A)R(z,A)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} g(z)\left((\lambda - z)R(z,A) + I\right)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} g(z)\,\mathrm{d}z = f(A),$$

ya que gracias al teorema de Cauchy y al decaimiento de g se puede ver que

$$\int_{\Gamma} g(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

De esta manera, se tiene que

$$\left((\lambda - z)^{-1}f(z)\right)(A) = g(A) = R(\lambda,A)f(A).$$

□

Nuestro objetivo es desarrollar un cálculo funcional para la clase de Dunford-Riesz extendida $\mathscr{E}(S_\varphi)$. Para ello, parece razonable definir, para $f \in \mathscr{E}(S_\varphi)$,

$$f(A) = g(A) + c(1+A)^{-1} + d,$$

donde $f(z) = g(z) + c(1+z)^{-1} + d$.

Vamos a verificar que esa aplicación es, en efecto, un homomorfismo.

Lema 5.7. *Sea $A \in \operatorname{Sect}(\omega)$, $\omega' \in (\omega,\varphi)$, $\delta \in (0,1)$ y la función $f(z) = (1+z)^{-1}$. Entonces*

$$(1+A)^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',\delta}} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z,$$

donde $\Gamma_{\omega',\delta}$ es el camino de la imagen.

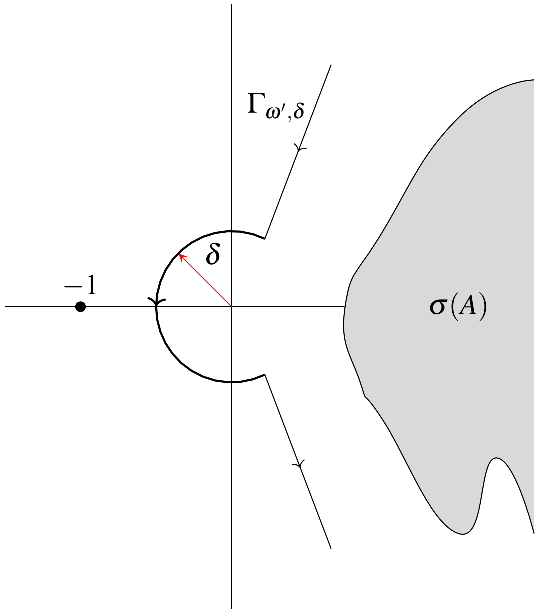

Figura 5.4: Camino del Lema 5.7.

Demostración. Tomemos el camino $\Gamma' = \Gamma_{\omega',R}$, donde $R > 1$, y para cada $\rho > R$ el camino cerrado $C_{R,\rho}$ como en la imagen.

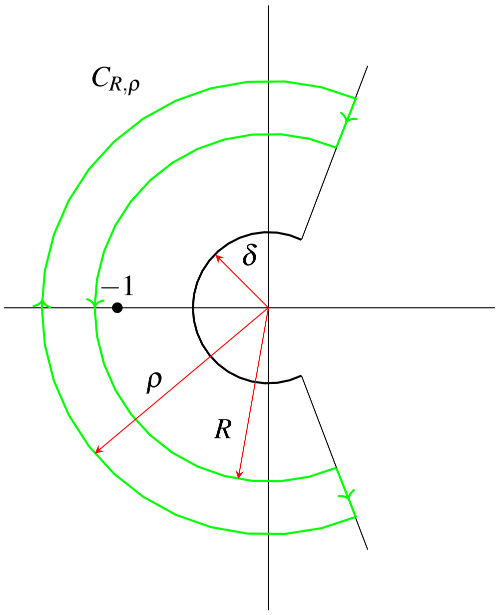

Figura 5.5: Camino $C_{R,\rho}$.

Tomemos también el camino C_ρ parametrizado como $C_\rho(\theta) = \rho e^{-i\theta}$, $\forall \theta \in (-\omega', \omega')$. Entonces es claro que

$$\int_{\Gamma'} f(z)R(z,A)\,dz = \lim_{\rho\to\infty} \left(\int_{C_{R,\rho}} f(z)R(z,A)\,dz - \int_{C_\rho} f(z)R(z,A)\,dz \right),$$

pero como $f(z)R(z,A)$ es holomorfa en un entorno del camino $C_{R,\rho}$ y este es cerrado, entonces

$$\int_{C_{R,\rho}} f(z)R(z,A)\,dz = 0,$$

con lo que

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma'} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z &= \lim_{\rho\to\infty} -\int_{C_\rho} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z\\ &= -\lim_{\rho\to\infty}\int_{-\omega'}^{\omega'} \frac{1}{1+\rho\mathrm{e}^{-i\theta}} R(\rho\mathrm{e}^{-i\theta},A)(-i)\rho\mathrm{e}^{-i\theta}\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

Ahora, como $A \in \operatorname{Sect}(\omega)$ y usando el teorema de la convergencia dominada es fácil ver que

$$\lim_{\rho\to\infty} -\int_{C_\rho} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z = 0,$$

luego

$$\int_{\Gamma'} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Por razonamientos parecidos se puede verificar que si Γ'' es un desplazado de Γ' hacia la izquierda, entonces

$$\int_{\Gamma''} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z = 0,$$

luego

$$\int_{\Gamma} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma\cup(-\Gamma'')} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z. \tag{5.5}$$

Ahora, consideremos el camino γ_ρ de la imagen, donde γ_ρ^1 y γ_ρ^2 son dos arcos de circunferencia definidos entre los ángulos fijos α_1 y α_2 (resp. $-\alpha_1$ y $-\alpha_2$).

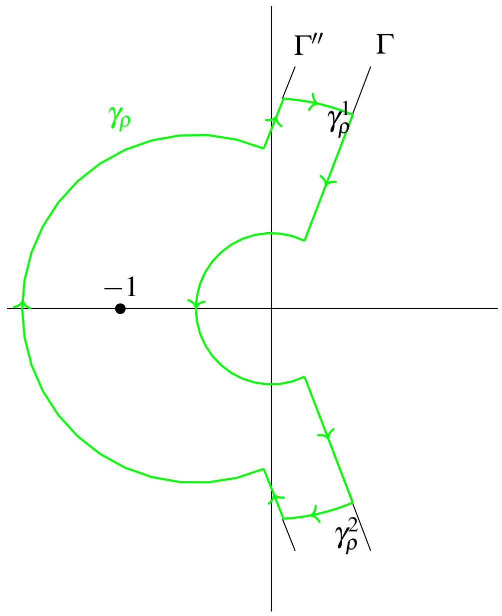

Figura 5.6: Camino γ_ρ.

Es claro que

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma\cup(-\Gamma'')} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z\\ &= \lim_{\rho\to\infty}\left(\int_{\gamma_\rho} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_\rho^1} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_\rho^2} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z\right),\end{aligned} \tag{5.6}$$

y de la misma manera que antes se demuestra que

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{\gamma_\rho^1} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z = \lim_{\rho\to\infty}\int_{\gamma_\rho^2} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Por otro lado, γ_ρ es una curva cerrada simple que encierra a la singularidad -1, luego (teniendo en cuenta que el sentido de giro es horario) por la fórmula de Cauchy se tiene que

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z = -2\pi i R(-1,A) = 2\pi i(1+A)^{-1}, \tag{5.7}$$

luego en virtud de (5.5), (5.6) y (5.7) tenemos que

$$(1+A)^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',\delta}} f(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z. \qquad \square$$

Corolario 5.8. *Sea $A \in \operatorname{Sect}(\omega)$. y $\omega' \in (\omega,\pi)$. Entonces*

$$(1+A)^{-1}(1+A)^{-1} = \int_{\Gamma_{\omega',\delta}} \frac{1}{(1+z)^2}R(z,A)\,\mathrm{d}z = (1+A)^{-2}.$$

Demostración. Siguiendo los mismos pasos que en el Lema 5.6 (es decir, utilizar la identidad de la resolvente y el teorema de Fubini), y usando la representación integral de $(1+A)^{-1}$ del Lema 5.7 se sigue el resultado. $\square$

Ahora estamos en condiciones de construir nuestro cálculo funcional.

Proposición 5.9. *Sea $A \in \operatorname{Sect}(\omega)$ y $\varphi \in (\omega,\pi)$. Entonces la terna*

$$\left(\mathscr{E}(S_\varphi), \mathscr{M}(S_\varphi), \Phi_A\right),$$

es un cálculo funcional meromorfo, denominado cálculo funcional primario para el operador A, donde para cada $f \in \mathscr{E}(S_\varphi)$ dada por $f(z) = f_1(z) + c(1+z)^{-1} + d$ con $c,d \in \mathbb{C}$ definimos

$$\Phi_A(f) = f(A) = f_1(A) + c(1+A)^{-1} + d,$$

y donde $f_1(A)$ viene dado por la fórmula (5.2).

Demostración. Es claro que Φ_A es una aplicación lineal, luego basta ver que

$$f(A)g(A) = (fg)(A), \quad \forall f,g \in \mathscr{E}(S_\varphi).$$

En efecto, si escribimos

$$f(z) = f_1(z) + c_1(1+z)^{-1} + d_1, \quad g(z) = g_1(z) + c_2(1+z)^{-1} + d_2$$

entonces

$$\begin{aligned} f(z)g(z) = {} & f_1(z)g_1(z) + c_2 f_1(z)(1+z)^{-1} + d_2 f_1(z) \\ & + c_1 g_1(1+z)^{-1} + c_1c_2(1+z)^{-2} + d_2c_1(1+z)^{-1} \\ & + d_1 g_1(z) + d_1c_2(1+z)^{-1} + d_1d_2, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} (fg)(A) = {} & (f_1g_1)(A) + c_2(f_1(z)(1+z)^{-1})(A) + d_2 f_1(A) \\ & + c_1(g_1(z)(1+z)^{-1})(A) + c_1c_2(1+A)^{-2} + d_2c_1(1+A)^{-1} \\ & + d_1g_1(A) + d_1c_2(1+A)^{-1} + d_1d_2. \end{aligned}$$

Ahora, en virtud del Corolario 5.8 y del Lema 5.6 y como $f \longmapsto f(A)$ es un homomorfismo en $H_0^\infty(S_\varphi)$, resulta que

$$\begin{aligned} (fg)(A) = {} & f_1(A)g_1(A) + c_2 f_1(A)(1+A)^{-1} + d_2 f_1(A) \\ & + c_1 g_1(1+A)^{-1} + c_1c_2(1+A)^{-1}(1+A)^{-1} + d_2c_1(1+A)^{-1} \\ & + d_1g_1(A) + d_1c_2(1+A)^{-1} + d_1d_2 = f(A)g(A), \end{aligned}$$

luego efectivamente Φ_A es un homomorfismo. $\square$

Observación 27. Es interesante notar que, en este caso, el conjunto de funciones regularizables es

$$\mathscr{M}(S_\varphi)_A = \left\{ f \in \mathscr{M}(S_\varphi) \mid \exists e \in \mathscr{E}(S_\varphi) \text{ tal que } e(A) \text{ es inyectivo y } ef \in \mathscr{E}(S_\varphi) \right\}.$$

Es necesario que $e(A)$ sea inyectiva para poder definir

$$f(A) = e(A)^{-1}(ef)(A).$$

Observación 28. El cálculo funcional primario depende de la elección del ángulo φ. Por ello parece natural definir

$$\mathscr{E}[S_\omega] = \bigcup_{\varphi \in (\omega,\pi)} \mathscr{E}(S_\varphi), \quad \mathscr{M}[S_\omega] = \bigcup_{\varphi \in (\omega,\pi)} \mathscr{M}(S_\varphi)$$

y tomar la terna

$$(\mathscr{E}[S_\omega], \mathscr{M}[S_\omega], \Phi),$$

donde $\Phi : \mathscr{E}[S_\omega] \longrightarrow \mathscr{L}(X)$ es algún homomorfismo. Esto es precisamente lo que vamos a hacer, pero antes necesitamos comprobar algunos detalles.

La primera pregunta que nos podemos hacer es: ¿Cómo definimos el homomorfismo Φ? La manera más natural es la siguiente: si tomamos $f \in \mathscr{E}[S_\omega]$, entonces existe algún $\varphi_0 \in (\omega, \pi)$ tal que $f \in \mathscr{E}(S_{\varphi_0})$, y si $\Phi_A^{\varphi_0}$ es el homomorfismo del cálculo funcional primario asociado a S_{φ_0}, definimos

$$\Phi(f) := \Phi_A^{\varphi_0}(f). \tag{5.8}$$

Proposición 5.10. *Sea $A \in \operatorname{Sect}\omega$. La terna $(\mathscr{E}[S_\omega], \mathscr{M}[S_\omega], \Phi)$, donde Φ viene definida como en (5.8), es un cálculo funcional meromorfo para A, llamado cálculo funcional natural.*

Demostración. Veamos que Φ está bien definido. En efecto, si $f \in \mathscr{E}(S_{\varphi_0})$ entonces $f \in \mathscr{E}(S_\varphi)$, $\forall \varphi \in (\varphi_0, \pi)$, luego parece que hay ambigüedad en la definición de Φ. Sin embargo ya hemos visto que

$$\int_{\Gamma_\varphi} f(z) R(z,A)\, \mathrm{d}z$$

es independiente de la elección de φ por la Proposición 5.5, luego de hecho

$$\Phi_A^{\varphi_0}(f) = \Phi_A^{\varphi}(f), \quad \forall \varphi \in (\varphi_0, \pi)$$

y por tanto Φ está bien definida. Además es trivialmente un homomorfismo.

Por otro lado, $\mathscr{E}[S_\omega]$ es una subálgebra de $\mathscr{M}[S_\omega]$, ya que $\mathscr{E}[S_\omega] \subseteq \mathscr{M}[S_\omega]$ y cada $\mathscr{E}(S_\varphi)$ es una subálgebra de $\mathscr{M}(S_\varphi)$.

Por último, para todo $\varphi \in (\omega, \pi)$ se tiene que

$$\mathscr{M}[S_\omega] \subseteq \mathscr{M}(S_\omega),$$

ya que $\mathscr{M}(S_\varphi) \subseteq \mathscr{M}(S_\omega)$ para todo $\varphi \in (\omega, \pi)$, luego de hecho el cálculo funcional es meromorfo. □

Observación 29. Definimos el *dominio* del cálculo funcional natural como

$$\mathscr{M}[S_\omega]_A = \bigcup_{\varphi \in (\omega,\pi)} \mathscr{M}(S_\varphi)_A.$$

Recordemos que el dominio de un cálculo funcional era la subálgebra de elementos regularizables, y sobre los que podíamos definir Φ por el procedimiento de extensión (Proposición 5.1).

5.3. Cálculo funcional de Phillips para semigrupos

El cálculo funcional natural va a ser de gran utilidad para encontrar el espectro del operador de Hausdorff a partir del espectro del operador $(T(t))_{t\geq 0}$ que hemos estudiado. Sin embargo, con lo que hemos construido hasta ahora no es suficiente, y en ningún momento hemos asumido que A es el generador de un semigrupo fuertemente continuo, propiedad que vamos a utilizar ahora.

Definición 5.7. Sea $\mu \in \mathbf{M}([0,\infty))$. Definimos su *transformada de Laplace* como

$$\mathscr{L}\mu(z) = \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}\mu(t), \quad \forall z \text{ con } \mathrm{Re} z \geq 0.$$

La transformada de Laplace se comporta bien con la convolución de medidas.

Definición 5.8. Sean $\mu, \nu \in \mathbf{M}([0,\infty))$. Definimos la *convolución* de μ y ν como la medida $\mu * \nu$ tal que

$$(\mu * \nu)(A) = \int_{[0,\infty)} \int_{[0,\infty)} \chi_A(t+s)\,\mathrm{d}\mu(t)\,\mathrm{d}\nu(s), \quad \forall A \text{ boreliano de } [0,\infty).$$

Lema 5.11. *Sean $\mu, \nu \in \mathbf{M}([0,\infty))$. Entonces*

$$\mathscr{L}(\mu * \nu) = \mathscr{L}\mu \cdot \mathscr{L}\nu.$$

Demostración. Por el proceso habitual de aproximación por funciones características se tiene que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\mu * \nu)(z) &= \int_{[0,\infty)} \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-z(t+s)}\,\mathrm{d}\mu(t)\,\mathrm{d}\nu(s) = \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-zs} \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}\mu(t)\,\mathrm{d}\nu(s) \\ &= \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-zs} \mathscr{L}\mu(z)\,\mathrm{d}\nu(s) = \mathscr{L}\mu(z) \cdot \mathscr{L}\nu(z).\end{aligned}$$

□

Observación 30. Resulta que

$$\mathscr{L}\mu(is) = \mathscr{F}\mu(s), \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

donde $\mathscr{F}$ denota la transformada de Fourier, y como $\mathscr{F}$ es inyectiva, entonces $\mathscr{L}$ también lo es, de manera que μ queda determinada por $\mathscr{L}\mu$ (para más detalles consultar [12], página 73).

Observación 31. Es fácil ver que si δ_0 denota la medida de Dirac en 0, entonces

$$u_0 = \mathscr{L}\delta_0,$$

y además

$$\mathscr{L}\left(\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right) = (1+z)^{-1}.$$

Proposición 5.12. *Sea $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y $\psi \in H_0^\infty(S_\varphi)$. Entonces existe una única función $g \in L^1([0,\infty), m)$ (donde m denota la medida de Lebesgue) tal que $\psi = \mathscr{L}\mu$, donde μ es la medida absolutamente continua respecto de m con densidad g. En particular, g viene dada por*

$$g(t) = \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma \psi(z) \mathrm{e}^{zt}\,\mathrm{d}z,$$

donde $\Gamma = \partial S_{\omega'}$ y $\omega' \in \left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right)$ es arbitrario.

Demostración. Sea $w \in \mathbb{C}_+$. Gracias a las propiedades de decaimiento de ψ, a la fórmula de Cauchy y al hecho de que para todo $z \in \Gamma$ se tiene que $\mathrm{Re}(z - \omega) < 0$ (ya que $\varphi \in (\pi/2, \pi)$), resulta que

$$\psi(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\psi(z)}{z - w}\,\mathrm{d}z = \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma \int_0^\infty \psi(z) \mathrm{e}^{(z-w)t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z.$$

Nótese que, si denotamos por comodidad

$$\int_\Gamma |f(z)|\,|\mathrm{d}z| = \int_I |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

donde $\gamma(t)$, $\forall t \in I$ es una parameterización de Γ, entonces gracias al decaimiento de ψ en 0 y ∞, y al hecho de que como $\mathrm{Re}(w) \geq 0$ se tiene que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z-w)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{Re}(w-z)} \leq \frac{1}{|\mathrm{Re}(z)|},$$

podemos afirmar que

$$\int_\Gamma \int_0^\infty |\psi(z)|\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z-w)t}\,\mathrm{d}t|\mathrm{d}z| \leq \int_\Gamma \left|\frac{\psi(z)}{z}\right| \frac{|z|}{|\mathrm{Re}z|}\,|\mathrm{d}z| \leq \sup_{0\neq z\in\Gamma}\left\{\frac{|z|}{|\mathrm{Re}z|}\right\}\int_\Gamma \left|\frac{\psi(z)}{z}\right| |\mathrm{d}z| < \infty. \tag{5.9}$$

Por tanto, gracias a (5.9) podemos usar el teorema de Fubini para afirmar que

$$\psi(w) = \frac{-1}{2\pi i}\int_0^\infty \psi(z)\int_\Gamma \mathrm{e}^{(z-w)t}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-wt}\left(\frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma \psi(z)\mathrm{e}^{zt}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t = \mathscr{L}\mu(w),$$

como queríamos demostrar. □

El resultado fundamental de esta sección, y que nos va a permitir calcular el espectro del operador de Hausdorff, es el siguiente.

Teorema 5.13. *Sea $-A$ el generador de un semigrupo fuertemente continuo $(T(t))_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach X. Si $\nu \in \mathbf{M}([0,\infty))$ y suponemos que $f = \mathscr{L}\nu$ cumple $f \in \mathscr{M}[S_{\pi/2}]_A$, entonces el homomorfismo del cálculo funcional natural se puede expresar como*

$$f(A) = \int_{[0,\infty)} T(t)\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Esta representación de $f(A)$ se conoce como cálculo funcional de Phillips.

Demostración. Notamos que tiene sentido hablar del cálculo funcional natural para A, ya que al ser $-A$ el generador de un semigrupo fuertemente continuo entonces $\sigma(A)$ está contenido en un semiplano izquierdo S por la Proposición 3.14, y además gracias al teorema de Hille-Yosida (Teorema 3.20) se tiene que

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{C}\setminus\overline{S}} \|\lambda R(\lambda,A)\| < \infty,$$

con lo que $-A$ es cuasi-sectorial, y sin pérdida de generalidad podemos asumir que $-A$ es sectorial de ángulo $\pi/2$.

Veamos primero el caso $f \in \mathscr{E}(S_\varphi)$, y luego veremos el caso general $f \in \mathscr{M}[S_{\pi/2}]_A$.

Sabemos que si $f \in \mathscr{E}(S_\varphi)$ entonces la podemos escribir como

$$f(z) = \psi(z) + c(1+z)^{-1} + d,$$

donde $\psi \in H_0^\infty(S_\varphi)$, luego por linealidad basta demostrar el resultado para $\psi \in H_0^\infty(S_\varphi)$, para $r(z) = (1+z)^{-1}$ y para $u_0(z) = 1$.

- Es trivial que el resultado se cumple para $u_0(z) = 1$, ya que por el Teorema 5.2 se tiene que

$$u_0(A) = I = \int_{[0,\infty)} T(t)\,\mathrm{d}\delta_0(t).$$

- Veamos el caso $r(z) = (1+z)^{-1}$. Gracias a la Proposición 3.14 se tiene que

$$(1+A)^{-1} = \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-t} T(t)\,\mathrm{d}t,$$

y el resultado está probado.

- Veamos el caso $\psi \in H_0^\infty(S_\varphi)$. Gracias a la Proposición 3.14 y al teorema de Fubini (recuérdese el decaimiento de ψ en 0 y ∞ y la cota exponencial de $\|T(t)x\|$ para $x \in X$) tenemos que

$$\begin{aligned}\psi(A) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \psi(z)R(z,A)\,\mathrm{d}z = \frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma \psi(z)R(-z,-A)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma \psi(z)\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{zt}T(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z = \int_{[0,\infty)} \left(\frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma \psi(z)\mathrm{e}^{zt}\,\mathrm{d}z\right) T(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[0,\infty)} T(t)\,\mathrm{d}\mu(t),\end{aligned}$$

donde μ es la medida absolutamente continua de la Proposición 5.12.

Sólo falta demostrar el caso general, es decir, $f \in \mathscr{M}[S_{\pi/2}]_A$. Tenemos que demostrar que dado un regularizador e de f, podemos escribir

$$f(A) = e(A)^{-1}(ef)(A).$$

En efecto, dado un regularizador e de f, tomemos la medida ν proporcionada por la Proposición 5.12, de manera que $\mathscr{L}\nu = e$. Entonces

$$\mathscr{L}(\nu * \mu) = \mathscr{L}\nu \cdot \mathscr{L}\mu = ef,$$

con lo que al ser $(T(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo y por el Teorema 1.21 se tiene que

$$\begin{aligned}(ef)(A) &= \int_{[0,\infty)} T(t)\,\mathrm{d}(\nu*\mu)(t) = \int_{[0,\infty)}\int_{[0,\infty)} T(t+s)\,\mathrm{d}\nu(s)\,\mathrm{d}\mu(t) \\ &= \int_{[0,\infty)} T(t)\int_{[0,\infty)} T(s)\,\mathrm{d}\nu(s)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_{[0,\infty)} T(t)e(A)\,\mathrm{d}\mu(t) \\ &= e(A)\int_{[0,\infty)} T(t)\,\mathrm{d}\mu(t),\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

5.4. Teoremas de la transformación espectral

Con estos dos cálculos funcionales estamos listos para traspasar las propiedades espectrales del generador A del semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ de la Proposición 4.24 al operador de Hausdorff sobre los espacios de Fock.

El siguiente lema se sigue inmediatamente de la representación de Phillips de $\mathscr{H}_\mu$, de las propiedades de la medida μ y del Teorema 5.13.

Lema 5.14. *Sea $\mu \in \mathbf{M}((0,\infty))$ tal que $\mu((0,1)) = 0$ y $\int_0^\infty \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\mu(t) = 1$, y sea ν la medida imagen de μ por el cambio de variable $t = \mathrm{e}^s$. Entonces*

$$\mathscr{H}_\mu f = \mathscr{L}\nu(A)f, \quad \forall f \in F_\alpha^p,$$

donde A es el generador del semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ de la Proposición 4.24.

Usando esta representación del operador de Hausdorff vamos a ser capaces de calcular su espectro, espectro puntual y espectro esencial. Para ello necesitamos varios resultados previos.

Lema 5.15. *Sea $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{point}(A)$. Supongamos que existen $e \in H(A)$ y $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que la función*

$$f(z) = \frac{e(z) - c}{\lambda - z}$$

cumple que $f \in H(A)$. Entonces $e(A)(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A)^{-1} e(A)$.

Demostración. Como $e \in H(A)$, entonces

$$D((\lambda - A)^{-1}) \subseteq X = D(e(A)),$$

luego por el Corolario 5.3 tenemos que

$$e(A)(\lambda - A)^{-1} \subseteq (\lambda - A)^{-1} e(A).$$

Para ver la otra inclusión basta ver que $D(e(A)(\lambda - A)^{-1}) = D((\lambda - A)^{-1} e(A))$. En efecto, sea $x \in D(e(A)(\lambda - A)^{-1})$. Entonces existe algún $y \in D(A)$ tal que

$$e(A)x = (\lambda - A)y.$$

Sabemos por hipótesis que

$$e(z) = (\lambda - z) f(z) + c, \quad \forall z \in S_\omega,$$

luego en particular $\mathrm{rg}(f(A)) \subseteq D(A)$ (ya que $e \in H(A)$), y como $f \in H(A)$ podemos escribir

$$(\lambda - A)y = (\lambda - A) f(A)x + cx,$$

luego

$$cx = (\lambda - A)(y - f(A)x),$$

pero $c \neq 0$ por hipótesis, y por tanto $x \in \mathrm{rg}(\lambda - A) = D((\lambda - A)^{-1})$. Finalmente, por el Teorema 5.2 se tiene que

$$\begin{aligned} x &\in D((\lambda - A)^{-1}) \cap D((\lambda - A)^{-1} e(A)) \\ &= D((\lambda - A)^{-1}) \cap D((e(\lambda - z)^{-1})(A)) = D(e(A)(\lambda - A)^{-1}), \end{aligned}$$

luego efectivamente $D(e(A)(\lambda - A)^{-1}) = D((\lambda - A)^{-1} e(A))$. □

Lema 5.16. *Sean $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$, $f \in \mathscr{M}[S_\omega]_A$ y $\lambda \in \overline{S_\omega}$. Entonces existe un regularizador e de f tal que $e(\lambda) \neq 0$.*

Demostración. Tomamos un regularizador g de f, es decir, $g(A)$ es inyectivo y $gf \in \mathscr{E}[S_\omega]$. Sea n el orden de λ como cero de la función f (es posible que $n = 0$), y definamos

$$e(z) = \frac{g(z)}{(\lambda - z)^n}.$$

Entonces es claro que $e(\lambda) \neq 0$, y como además $\mathscr{E}[S_\omega]$ es un álgebra y la función $1/(\lambda - z)^n \in \mathscr{E}[S_\omega]$, entonces $e \in \mathscr{E}[S_\omega]$, y por tanto

$$g(A) = (\lambda - A)^n e(A),$$

luego necesariamente $e(A)$ es inyectiva. Por último, es claro que $ef \in \mathscr{E}[S_\omega]$, luego e es un regularizador de f. □

Proposición 5.17. *Sean $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$, $f \in \mathscr{M}[S_\omega]_A$ y $\lambda \in \overline{S_\omega} \setminus \{0\}$. Si $f(\lambda) = 0$ y $f(A)$ es invertible, entonces $\lambda \in \rho(A)$.*

Demostración. Por el Lema 5.16 existe un regularizador e de f tal que $e(\lambda) \neq 0$. Se tiene que la función h definida a través de

$$h(z) = \frac{e(z)f(z)}{\lambda - z}, \quad z \neq \lambda,$$

y extendida por continuidad en $z = \lambda$. Esta función cumple que $h \in \mathscr{E}[S_\omega]$, y por tanto

$$h(A)(\lambda - A) \subseteq (ef)(A) = f(A)e(A)$$

(no podemos afirmar que se de la igualdad porque $f \notin \mathscr{E}[S_\omega]$), y como $f(A)$ es inyectiva por hipótesis y $e(A)$ también al ser un regularizador, entonces necesariamente $\lambda - A$ también es inyectiva.

Para ver que $\lambda - A$ es suprayectiva tomamos la función g definida como

$$g(z) = \frac{e(z) - e(\lambda)}{\lambda - z}, \quad \forall z \neq \lambda,$$

y extendida por continuidad a $z = \lambda$ cumple que $g \in \mathscr{E}[S_\omega]$, y como $e(\lambda) \neq 0$ y $\mathscr{E}[S_\omega] \subseteq H(A)$, en virtud del Lema 5.16 se tiene que

$$e(A)^{-1}(\lambda - A) = (\lambda - A)e(A)^{-1},$$

y por tanto

$$\begin{aligned} f(A) &= \left((\lambda - z)\frac{f(z)}{\lambda - z}\right)(A) = e(A)^{-1}\left((\lambda - z)\frac{e(z)f(z)}{\lambda - z}\right)(A) \\ &= e(A)^{-1}(\lambda - A)\left(\frac{e(z)f(z)}{\lambda - z}\right)(A) = (\lambda - A)e(A)^{-1}\left((\lambda - z)\frac{e(z)f(z)}{\lambda - z}\right)(A) \\ &= (\lambda - A)\left(\frac{f(z)}{\lambda - z}\right)(A), \end{aligned}$$

pero como $f(A)$ es suprayectiva por hipótesis, entonces necesariamente $\lambda - A$ es también suprayectiva, de modo que $\lambda \in \rho(A)$. □

El siguiente resultado proporciona la mitad del resultado que estamos buscando. Para ello necesitamos introducir la noción de espectro extendido, que será muy utilizada en lo que resta de trabajo.

Definición 5.9. Sea A un operador lineal en un espacio de Banach X. definimos el *espectro extendido* de A como

$$\widetilde{\sigma}(A) = \begin{cases} \sigma(A), & \text{si } A \in \mathscr{L}(X), \\ \sigma(A) \cup \{\infty\}, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde entendemos ∞ como el punto que añadimos a $\mathbb{C}$ para construir la esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$.

Teorema 5.18 (Teorema de la inclusión espectral)**.** *Sean $A \in \operatorname{Sect}(\omega)$ y $f \in \mathscr{M}[S_\omega]_A$. Entonces*

$$f(\sigma(A) \setminus \{0\}) \subseteq \widetilde{\sigma}(f(A)),$$

donde $f(\sigma(A) \setminus \{0\}) = \{f(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}\}$.

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$. Tenemos que demostrar que $\mu = f(\lambda) \in \widetilde{\sigma}(f(A))$.

- Si $\mu \neq \infty$, consideremos la función
$$g(z) = \mu - f(z).$$
Resulta que $g \in \mathscr{M}[S_\omega]_A$, con $g(\lambda) = 0$, y como $\lambda \in \sigma(A)$, por la Proposición 5.17 $g(A) = \mu - f(A)$ no puede ser invertible, con lo que $\mu \in \sigma(f(A))$.

- Si $\mu = \infty$, procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que $\mu \notin f(\widetilde{\sigma}(A))$. Entonces, por definición de espectro extendido se tiene que $f(A) \in \mathscr{L}(X)$. Por teoría espectral básica de operadores acotados sabemos que existe algún $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f(A) - \lambda_0$ es invertible.

  Consideremos la función
$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \lambda_0}.$$
  Nótese que como $f(\lambda) = \infty$ en el sentido de la esfera de Riemann, entonces $g(\lambda) = 0$. Además, g es regularizable a través de la función $e(z)f(z) - \lambda_0$, donde e es un regularizador de $f(z) - \lambda_0$, es decir, $g \in \mathscr{M}[S_\omega]_A$. Además, $g(A)$ es invertible, ya que al ser $f(A) \in \mathscr{L}(X)$ entonces $f \in H(A)$, y por el Teorema 5.2 podemos afirmar que
$$g(A)(f(A) - \lambda_0) = 1,$$
  luego $g(A)$ es invertible con $g(\lambda) = 0$, luego por la Proposición 5.17 se tiene que $\lambda \in \rho(A)$, lo cual contradice la hipótesis de que $\lambda \in \sigma(A)$. □

Todavía queda un poco de trabajo para poder establecer la el teorema de la transformación espectral. El siguiente teorema es fundamental, pero no lo demostraremos ya que su demostración es bastante técnica y queda fuera de las pretensiones del trabajo. Puede consultarse en [12], Teorema 2.7.5.

Teorema 5.19. *Sean $A \in \operatorname{Sect}(A)$ y $\lambda_0 \in \{0, \infty\}$. Si $f \in \mathscr{M}[S_\omega]_A$ tiene límite polinómico μ en $\lambda_0 \in \widetilde{\sigma}(A)$, entonces $\mu \in \widetilde{\sigma}(f(A))$.*

Como consecuencia inmediata se obtiene una de las inclusiones buscadas.

Corolario 5.20. *Sean $A \in \operatorname{Sect}(\omega)$ y $f \in \mathscr{M}[S_\omega]_A$ con límites polinómicos en $\widetilde{\sigma}(A) \cap \{0, \infty\}$. Entonces*
$$\widetilde{\sigma}(f(A)) \supseteq f(\widetilde{\sigma}(A)),$$
donde
$$f(\widetilde{\sigma}(A)) = \{f(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\} \cup \{f(0), f(\infty)\},$$
y $f(0)$ y $f(\infty)$ son los límites polinómicos de f en 0 y en ∞, respectivamente.

La demostración del siguiente lema se basa en el uso de cálculos funcionales especiales para operadores invertibles y operadores acotados, y tampoco la vamos a ver. Puede consultarse en [12], Teorema 2.7.6.

Lema 5.21. *Sean $A \in \operatorname{Sect}(\omega)$ y $f \in \mathscr{M}[S_\omega]_A$. Supongamos que f tiene límites polinómicos finitos en $\widetilde{\sigma}(A) \cap \{0, \infty\}$ y que todos los polos de f están contenidos en $\rho(A)$. Entonces $f(A) \in \mathscr{L}(X)$.*

La otra inclusión que necesitamos se establece en el siguiente resultado.

Proposición 5.22. *Sean $A \in \operatorname{Sect}(\omega)$ y $f \in \mathscr{M}[S_\omega]_A$ con límites polinómicos en $\widetilde{\sigma}(A) \cap \{0, \infty\}$. Entonces*
$$\widetilde{\sigma}(f(A)) \subseteq f(\widetilde{\sigma}(A)).$$

Demostración. Probaremos el contrarrecíproco, es decir, que si $\mu \notin f(\widetilde{\sigma}(A))$ entonces $\mu \notin \widetilde{\sigma}(f(A))$.

En efecto, sea $\mu \notin f(\widetilde{\sigma}(A))$ tal que $\mu \neq \infty$ (luego verificamos el caso $\mu = \infty$), y sea la función
$$g(z) = \frac{1}{\mu - f(z)}.$$
Entonces $g \in \mathscr{M}[S_\omega]$ (no necesitamos que sea regularizable, aunque de hecho lo es), y tiene límites polinómicos finitos en $\{0, \infty\} \cap \widetilde{\sigma}(A)$, ya que como f tiene límite polinómico finito para todo $c \in \{0, \infty\} \cap \widetilde{\sigma}(A)$, pongamos $f(c)$ (vale para 0 y ∞), entonces $\mu - f$ tiene límites polinómicos finitos $\mu - f(c)$ en c. Como $\mu \neq f(\widetilde{\sigma}(A))$, entonces $\mu - f(c) \neq 0$, y por el Lema 5.4 g tiene límite polinómico finito en c.

Por otra parte, el conjunto de polos de g es

$$P_g = \left\{\lambda \in \overline{S_\omega} \mid f(\lambda) = \mu\right\} \subseteq \rho(A),$$

ya que $\mu \notin f(\sigma(A))$. Así, por el Lema 5.21 tenemos que $(\mu - f(z))(A) = g(A) \in \mathscr{L}(X)$, luego como consecuencia del Teorema 5.2 se tiene que $\mu - f(A)$ es invertible, luego $\mu \notin \sigma(f(A))$, y como $\mu \neq \infty$ entonces $\mu \notin \widetilde{\sigma}(f(A))$.

Si $\mu = \infty$ y $\mu \notin f(\widetilde{\sigma}(A))$, entonces $P_f \subseteq \rho(A)$, luego de nuevo por el Lema 5.21 se tiene que $f(A)$ es acotado, luego $\mu = \infty \notin \widetilde{\sigma}(f(A))$. □

Como consecuencia de los resultados anteriores obtenemos el teorema que buscábamos.

Teorema 5.23 (Teorema de la transformación espectral)**.** *Sean $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ y $f \in \mathscr{M}[S_\omega]_A$ con límites polinómicos en $\widetilde{\sigma}(A) \cap \{0,\infty\}$. Entonces*

$$f(\widetilde{\sigma}(A)) = \widetilde{\sigma}(f(A)).$$

Podemos demostrar de manera muy sencilla un resultado similar al anterior para el espectro puntual.

Teorema 5.24 (Teorema de la transformación espectral para el espectro puntual)**.** *Sean $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ y $f \in \mathscr{M}[S_\omega]_A$ con límites polinómicos en $\widetilde{\sigma}(A) \cap \{0,\infty\}$. Entonces*

$$f(\sigma_{point}(A)) \subseteq \sigma_{point}(f(A)) \subseteq f(\sigma_{point}(A)) \cup f(M),$$

donde $M = \widetilde{\sigma}(A) \cap \{0,\infty\}$.

Demostración. Para la inclusión

$$f(\sigma_{point}(A)) \subseteq \sigma_{point}(f(A))$$

se siguen los mismos pasos que para el Corolario 5.20, con la diferencia de que ahora no usaremos el Lema 5.17 y por tanto los razonamientos también valen para $\lambda = 0$.

Para la inclusión $\sigma_{point}(f(A)) \subseteq f(\sigma_{point}(A)) \cup f(M)$ la demostración es parecida a la del Teorema 5.18. Tomamos $\mu \notin f(\sigma_{point}(A)) \cup f(M)$, y consideramos la función

$$g(z) = \frac{1}{\mu - f(z)}.$$

Como en la Proposición 5.22 se demuestra que $\mu - f(z)$ tiene límites polinómicos finitos en M. Como además estamos asumiendo que $\mu \notin f(M)$, entonces $\mu - f(c) \neq 0$, $\forall c \in M$, con lo que por el Lema 5.4 de la inversa tenemos que g tiene límites polinómicos finitos en M. El resto de la demostración es igual que en la Proposición 5.22. □

Por último, enunciamos un teorema de la transformación espectral para el espectro esencial. Este resultado puede encontrarse en [21], Teorema 5.4.

Teorema 5.25 (Teorema de la transformación espectral para el espectro esencial)**.** *Sean $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ y $f \in \mathscr{M}[S_\omega]_A$ con límites polinómicos en $\widetilde{\sigma}(A) \cap \{0,\infty\}$. Entonces*

$$\widetilde{\sigma}_{ess}(f(A)) = f(\widetilde{\sigma}_{ess}(A)).$$

5.5. Aplicación al operador de Hausdorff sobre espacios de Fock

Una vez hemos demostrado todos los teoremas espectrales, podemos calcular de manera muy sencilla los distintos tipos de espectro del operador de Hausdorff. Para ello, recordamos que dada $\mu \in \mathbf{M}((0,\infty))$, teníamos que

$$\mathscr{H}_\mu f(z) = \int_{[0,\infty)} T(t)f(z)\,\mathrm{d}\nu(t), \quad \forall f \in F^p_\alpha,$$

donde ν es la medida imagen de μ por el cambio de variable $t = \mathrm{e}^s$, y donde

$$T(t)f(z) = \mathrm{e}^{-t} f(z\mathrm{e}^{-t}).$$

Sabemos además que el generador del semigrupo fuertemente continuo $(T(t))_{t\geq 0}$ para $1 \leq p < \infty$ es

$$Af(z) = -f(z) - zf'(z),$$

y hemos demostrado que, como A no es acotado, entonces

$$\widetilde{\sigma}(A) = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}, \quad \sigma_{point}(A) = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad \widetilde{\sigma}_{ess}(A) = \{\infty\}.$$

Además, usando el cálculo funcional de Phillips tenemos el siguiente resultado.

Lema 5.26. *Sea $1 \leq p < \infty$, y sea $\mu \in \mathbf{M}((0,\infty))$ tal que $\mu((0,1)) = 0$ con*

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\mu(t)}{t} = 1.$$

Supongamos que $\mathscr{L}\nu \in \mathscr{M}[S_{\pi/2}]_A$, donde ν es la medida imagen de μ a través del cambio de variable $t = \mathrm{e}^s$. Entonces $\mathscr{H}_\mu$ es un operador acotado sobre F^p_α y además

$$\mathscr{H}_\mu = \mathscr{L}\nu(A).$$

Demostración. Es una aplicación directa de la Proposición 4.23 del Teorema 5.7. □

Por fin damos las propiedades espectrales del operador de Hausdorff.

Teorema 5.27. *Sea $1 \leq p < \infty$, y sea $\mu \in \mathbf{M}((0,\infty))$ tal que $\mu((0,1)) = 0$ con*

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\mu(t)}{t} = 1.$$

Supongamos que $\mathscr{L}\nu \in \mathscr{M}[S_{\pi/2}]_A$, donde ν es la medida imagen de μ a través del cambio de variable $t = \mathrm{e}^s$, y supongamos también que $\mathscr{L}\nu$ tiene límite polinómico en ∞. Entonces

$$\sigma(\mathscr{H}_\mu) = \left\{ \int_{[1,\infty)} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}\mu(t) \right\}_{n=1}^\infty \cup \{0\},$$
$$\sigma_{point}(\mathscr{H}_\mu) = \left\{ \int_{[1,\infty)} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}\mu(t) \right\}_{n=1}^\infty,$$
$$\sigma_{ess}(\mathscr{H}_\mu) = \{0\}.$$

Demostración. Sea ν la medida imagen de μ a través del cambio de variable $t = \mathrm{e}^s$. Entonces gracias al Lema 5.26 se tiene que

$$\mathscr{L}\nu(z) = \mathscr{H}_\mu f(z),$$

y además si $\mathrm{Re} z \geq 1$ entonces

$$\left|\mathrm{e}^{-zs}\right| \leq \mathrm{e}^{-s},$$

pero e^{-s} es ν-integrable, ya que

$$\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}\nu(s) = \int_{[1,\infty)} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\mu(t) = 1,$$

luego por el teorema de la convergencia dominada se tiene que

$$\lim_{|z|\to\infty} \mathscr{L}\nu(z) = \int_{[1,\infty)} \lim_{|z|\to\infty} \mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}\nu(t) = 0 \text{ (a través de } S_{\pi/2}),$$

luego en particular el límite polinómico de $\mathscr{L}\nu$ en ∞ es 0, es decir, $\mathscr{L}\nu(\infty) = 0$. Además, sabemos que $\widetilde{\sigma}(-A) = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}$, luego

$$\widetilde{\sigma}(A) = \{n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\},$$

luego en particular $\{0,\infty\} \cap \widetilde{\sigma}(A) = \{\infty\}$, y así $\mathscr{L}\nu$ tiene límites polinómicos finitos en $\{0,\infty\} \cap \widetilde{\sigma}(A)$.

Además, como $\mathscr{H}_\mu$ es acotado, gracias al Teorema 5.7 y al Teorema 5.23 se tiene que

$$\sigma(\mathscr{H}_\mu) = \mathscr{L}\mu(\widetilde{\sigma}(A)) = \left\{\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}\nu(t)\right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\} = \left\{\int_{[1,\infty)} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}\mu(t)\right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}.$$

Para el espectro puntual, primero notamos que

$$f(\sigma_{point}(A)) = \left\{\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}\nu(t)\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\int_{[1,\infty)} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}\mu(t)\right\}_{n=1}^{\infty} = \sigma(\mathscr{H}_\mu) \setminus \{0\}.$$

Además hemos visto que $\mathscr{L}\nu\left(\{0,\infty\} \cap \widetilde{\sigma}(A)\right) = \{0\}$, luego por el Teorema 5.24 se tiene que

$$\sigma(\mathscr{H}_\mu) \setminus \{0\} \subseteq \sigma_{point}(\mathscr{H}_\mu) \subseteq \sigma(\mathscr{H}_\mu),$$

luego sólo falta demostrar que $0 \notin \sigma_{point}(\mathscr{H}_\mu)$, es decir, que $\mathscr{H}_\mu$ es inyectivo.

En efecto, supongamos que $f \in \ker \mathscr{H}_\mu$ tiene desarrollo en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Entonces

$$0 = \mathscr{H}_\mu f(z) = \int_{[1,\infty)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{t^{n+1}}\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Ahora, para cada $t \geq 1$ y para cada $n \geq 0$ se tiene que $1/t^{n+1} \leq 1/t$, luego

$$\int_{[1,\infty)} \frac{1}{t^{n+1}}\,\mathrm{d}\mu(t) \leq \int_{[1,\infty)} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\mu(t) = 1,$$

y por tanto para cada $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{[1,\infty)} \left|a_n \frac{z^n}{t^{n+1}}\right| \mathrm{d}\mu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n \int_{[1,\infty)} \frac{1}{t^{n+1}}\,\mathrm{d}\mu(t) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n < \infty,$$

ya que la serie es absolutamente convergente. Por tanto, podemos intercambiar serie e integral para afirmar que

$$0 = \mathscr{H}_\mu f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \int_{[1,\infty)} \frac{1}{t^{n+1}}\,\mathrm{d}\mu(t), \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

luego necesariamente $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ya que $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{t^{n+1}}\,\mathrm{d}\mu(t) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Es decir, $f(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$ y por tanto $\mathscr{H}_\mu$ es inyectiva y $0 \notin \sigma_{point}(\mathscr{H}_\mu)$.

En cuanto al espectro esencial, como $\widetilde{\sigma}_{ess}(A) = \{\infty\}$ entonces por el Teorema 5.25 se tiene que

$$\sigma_{ess}(\mathscr{H}_\mu) = \mathscr{L}\nu(\widetilde{\sigma}_{ess}(A)) = \{\mathscr{L}\nu(\infty)\} = \{0\}. \qquad \square$$

Observación 32. Si $p = \infty$, entonces no podemos aplicar los teoremas espectrales para el espectro, espectro puntual y espectro esencial, ya que el semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ no es fuertemente continuo por la Proposición 4.31. Sin embargo, sí que podemos demostrar algún resultado, pero mucho más limitado.

Aunque el semigrupo no sea fuertemente continuo, la representación de Phillips

$$\mathscr{H}_\mu f(z) = \int_{[0,\infty)} T(t) f(z)\,\mathrm{d}\nu(t)$$

sigue siendo válida, ya que el semigrupo es acotado por la Proposición 4.23, siempre que se satisfagan las condiciones habituales sobre las medidas.

Tomemos $\lambda = \mathrm{e}^{-nt}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, y la función $g_n(z) = z^{n-1}$. Entonces resulta que

$$T(t)g_n(z) = \mathrm{e}^{-t}\left(\mathrm{e}^{-t}z\right)^{n-1} = \mathrm{e}^{-nt}z^{n-1} = \lambda g_n(z),$$

y como $g_n \in F^\infty_\alpha$, entonces $\lambda = \mathrm{e}^{-nt}$ es valor propio de $T(t)$. Además,

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_\mu g_n(z) &= \int_{[0,\infty)} T(t)g_n(z)\,\mathrm{d}\nu(t) = \int_{[0,\infty)} T(t)z^{n-1}\,\mathrm{d}\nu(t) = \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-nt}z^{n-1}\,\mathrm{d}\nu(t)\\ &= z^{n-1}\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}\nu(t) = g_n(z)\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}\nu(t) = g_n(z)\int_{[1,\infty)} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}\mu(t),\end{aligned}$$

luego $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}\mu(t)$ es valor propio de $\mathscr{H}_\mu$. Esto demuestra el siguiente resultado.

Proposición 5.28. *Sea $\mu \in \mathbf{M}((0,\infty)) = 0$ tal que $\mu((0,1)) = 0$, con*

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\mu(t)}{t} = 1.$$

Entonces $\mathscr{H}_\mu : F^\infty_\alpha \longrightarrow F^\infty_\alpha$ es un operador acotado con

$$\sigma_{point}(\mathscr{H}_\mu) \supseteq \left\{\int_{[1,\infty)} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}\mu(t)\right\}_{n=1}^\infty.$$

Para terminar, vamos a calcular los distintos espectros del el operador de Cesàro $\mathscr{C} : F^p_\alpha \longrightarrow F^p_\alpha$ para $1 \leq p < \infty$ usando que $\mathscr{C} = \mathscr{H}_\mu$, donde $\mathrm{d}\mu(t) = \frac{1}{t}\chi_{[1,\infty)}(t)\,\mathrm{d}t$, tal como explicamos en la introducción.

Corolario 5.29. *Sea $1 \leq p < \infty$, y consideremos el operador*

$$\mathscr{C} f(z) = \frac{1}{z}\int_0^z f(\omega)\,\mathrm{d}\omega, \quad \forall f \in F^p_\alpha, \quad \forall z \neq 0,$$

y definido como $\mathscr{C} f(0) = f(0)$. Entonces $\mathscr{C}$ es un operador acotado en F^p_α, y

$$\begin{aligned}\sigma(\mathscr{C}) &= \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty \cup \{0\},\\ \sigma_{point}(\mathscr{C}) &= \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty,\\ \sigma_{ess}(\mathscr{C}) &= \{0\}.\end{aligned}$$

Demostración. Como vimos en la introducción, se tiene que $\mathscr{C} = \mathscr{H}_\mu$, donde $\mathrm{d}\mu(t) = \frac{1}{t}\chi_{[1,\infty)}(t)\,\mathrm{d}t$. Veamos que esta medida cumple las hipótesis del Teorema 5.27.

- Es claro que $\mu \in \mathbf{M}((0,\infty))$ y que $\mu((0,1)) = 0$ por definición.
- Se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\mu(t)}{t} = \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1.$$

- Si ν es la medida imagen de μ a través del cambio de variable, entonces resulta que

$$d\nu(s) = \frac{1}{e^s} e^s \chi_{[0,\infty)}(s)\, ds = \chi_{[0,\infty)}(s)\, ds,$$

luego

$$\mathscr{L}\nu(z) = \int_0^\infty e^{-tz}\, dt = \frac{1}{z}, \quad \forall z \neq 0.$$

Entonces que $\mathscr{L}\nu(z)$ es una función meromorfa regularizable a través de la función $u_1(z) = z$, es decir, $\mathscr{L}\nu \in \mathscr{M}[S_{\pi/2}]_A$. Además es claro que tiene límite polinómico finito en ∞.

Así, μ cumple todas las condiciones del Teorema 5.27, y teniendo en cuenta que

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^n}\, d\mu(t) = \int_1^\infty \frac{1}{t^{n+1}}\, dt = \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

se tiene el resultado. □

Observación 33. En [5] se demostró que si $\mu((0,1]) = 0$ entonces $\mathscr{H}_\mu$ es compacto. Además, se sabe que si $T : X \longrightarrow X$ es un operador compacto en un espacio de Banach, entonces

$$\sigma(T) \subseteq \sigma_{point}(T) \cup \{0\},$$

y si X es de dimensión infinita, entonces $0 \in \sigma(T)$ (véase, por ejemplo, [18], página 420). Entonces, sin utilizar otro tipo de argumentos podríamos afirmar que

$$\sigma_{point}(\mathscr{H}_\mu) \subseteq \sigma(\mathscr{H}_\mu) \subseteq \sigma_{point}(\mathscr{H}_\mu) \cup \{0\},$$

y por tanto sólo calculando $\sigma_{point}(\mathscr{H}_\mu)$ y viendo que $\mathscr{H}_\mu$ es inyectivo tendríamos probado el Teorema 5.27, ya que F^p_α es de dimensión infinita. La ventaja es que no haría falta calcular el espectro del generador infinitesimal A, sino sólo si espectro puntual, que es mucho más fácil. El inconveniente es que la condición $\mu((0,1]) = 0$ es más restrictiva que $\mu((0,1)) = 0$.

Bibliografía

[1] L. ABADÍAS, J. OLIVA-MAZA, *Spectral sets of generalized Hausdorff matrices on spaces of holomorphic functions on D*. Journal of Functional Analysis **286** (2024) 110298,

[2] L. ABADIAS, P. J. MIANA, *Generalized Cesàro operators, fractional finite differences and gamma functions*. J. Funct. Anal. **274** (2018), no. 5, 1424–1465,

[3] A. A. ALBANESE, J. BELTRÁN, W. J. RICKER, *Generalized Cesàro operators in the disc algebra and in Hardy spaces*. Advances in Operator Theory (2025) 10:5,

[4] M. J. BELTRÁN, J. BONET, C. FERNÁNDEZ, *Classical operators on weighted Banach spaces of entire functions*. Proceedings of the American Mathematical Society **141** (2013), 4293–4303,

[5] O. BLASCO, *Boundedness and compactness of Hausdorff operators on Fock Spaces*. Transactions of the American Mathematical Society **377** (2024), 5165-5196,

[6] J. BONET, *Hausdorff operators on weighted Banach spaces of type H^∞*. Complex Analysis and Operator Theory **16**, 12 (2022),

[7] A. BROWN, P. R. HALMOS, A. L. SHIELDS, *Cesàro operators*. Acta Sci. Math. (Szeged) **26** (1965), pp. 125–137,

[8] J. DIESTEL, J. J. UHL, *Vector measures.* Mathematical Surveys and Monographs, **15** (American Mathematical Society, Providence, R1 1977), ISBN 0-8218-1515-6,

[9] I. D. DINOV, *Bochner integrals and vector measures*. Open Access Master's Report, Michigan Technological University (1993),

[10] K. ENGEL, R. NAGEL, *One-Parameter semigroups for linear evolution equations.* Graduate Texts in Mathematics, **194**, Springer-Verlag (2000), ISBN 978-0-387-22642-2,

[11] P. GALANOPOULOS, G. STYLOGIANNIS, *Hausdorff operators on Fock spaces and a coefficient multiplier problem*. Proceedings of the American Mathematical Society **151** (2023), 3023-3035,

[12] M. HAASE, *The functional calculus for sectorial operators.* Operator Theory: Advances and Applications, **169**, Birkhäuser-Verlag (2006), ISBN 978-3-7643-7697-0,

[13] M. HAASE, *Spectral mapping theorems for holomorphic functional calculi*. Journal of the London Mathematical Society (2) **71** (2005) 723–739,

[14] G. H. HARDY, *Divergent series*. AMS Chelsea Publishing **334** (1949), ISBN 978-1-4704-7785-1,

[15] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G.PÓLYA, *Inequalities*. Cambridge University Press (1934),

[16] O. HÖLDER, *Grenzwerthe von Reihen an der Konvergenzgrenze*. Mathematische Annalen, **20** (1882) 535–549,

[17] A. N. KOLMOGOROV, S. V. FOMIN, *Elements of the theory of functions ans functional analysis*. Graylck press, Rochester, N. Y (1954), ISBN 978-1-61427-304-2,

[18] E. KREYSZIG, *Introductory functional analysis with applications*. John Willey and Sons (1978), ISBN 0-471-50731-8,

[19] G. M. LEIBOWITZ, *Spectra of discrete Cesàro operators*. Tamkang J. Math. **3** (1972), pp. 123–132,

[20] J. H. MCCABE, *A Continued Fraction Expansion, with a Truncation Error Estimate, for Dawson's Integral*. Mathematics of computation **28**, 127 (1974), 811-816,

[21] J. OLIVA-MAZA, *Spectral mapping theorems for essential spectra and regularized functional calculi*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1-23 (2023),

[22] W. RUDIN, *Real and complex analysis.* 3rd Edition, McGraw-Hill, New York (1987), ISBN 0-07-054234-1,

[23] M. SPIVAK, *Supplement to Calculus* W. A. Benjamin (1967), ISBN 0805390197,

[24] A. J. WEIR, *Lebesgue integration and measure.* Cambridge university press (2006), ISBN 0-521-09751-7,

[25] K. ZHU, *Analysis on Fock spaces*. Graduate Texts in Mathematics, **263**, Springer (2010), ISBN 978-1-4419-8801-0.