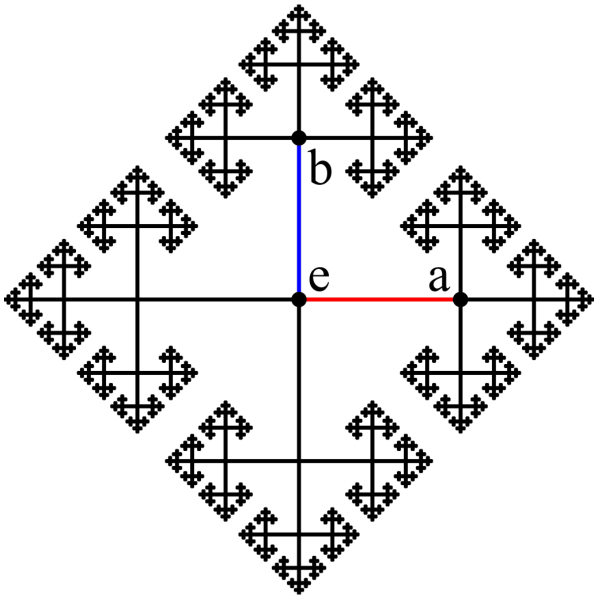

La paradoja de Banach-Tarski

Pablo Gómez Martínez

Director: Álvaro Lozano Rojo

Universidad Zaragoza

2024-2025

Resumen

El teorema de Banach-Tarski establece que, dada una bola en el espacio euclídeo tridimensional, es posible descomponerla en un número finito de subconjuntos disjuntos y, mediante la aplicación de ciertas rotaciones, reconstruir a partir de ellos dos copias idénticas de la bola original. Este resultado, conocido como la *Paradoja de Banach-Tarski*, constituye un punto de encuentro entre distintas áreas de la matemática moderna, y su estudio pone de manifiesto la profunda interacción entre la teoría de grupos, la geometría y la teoría de la medida.

Para formalizar la noción que subyace en el teorema, introducimos el concepto de *conjunto paradójico*. Dado un grupo G que actúa sobre un conjunto X, diremos que X es *G-paradójico* si puede descomponerse en un número finito de subconjuntos disjuntos de los que, mediante la acción de elementos de G, pueden obtenerse dos copias del conjunto original. En estos términos, el teorema de Banach-Tarski se reformula afirmando que la bola tridimensional es G-paradójica bajo la acción de un subgrupo de rotaciones.

El objetivo de este trabajo no se limita a la exposición y demostración rigurosa del teorema, sino que se centra en analizar la relación estructural entre el carácter paradójico de un conjunto y la posibilidad de definir sobre él una medida finito-aditiva e invariante bajo la acción de un grupo. Mostraremos que ambas propiedades, paradojicidad e invariancia de medida, son incompatibles.

En el capítulo 1 se desarrolla la demostración del teorema de Banach-Tarski y se caracteriza el concepto de conjunto paradójico. Se introduce la noción de equidescomponibilidad y se prueba que, en el contexto adecuado, es equivalente a ser paradójico. A partir de esta equivalencia se demuestra que la esfera, y por extensión la bola, son G-paradójicas bajo la acción de un subgrupo de isometrías. Finalmente, se muestra que la existencia de una descomposición paradójica impide la construcción de una medida finito-aditiva, invariante por isometrías y de medida total no nula. Para ello, usaremos como base principalmente la primera parte del libro de Stan Wagon [1].

En el capítulo 2 se aborda la implicación recíproca: si un grupo admite una medida finito-aditiva e invariante por la izquierda, entonces no pueden existir conjuntos paradójicos bajo su acción. Para ello se introduce el concepto de *promediabilidad* (o *amenabilidad*), introducido por von Neumann como herramienta para estudiar precisamente esta relación. Se demuestra que los grupos promediables no generan descomposiciones paradójicas y se presentan ejemplos relevantes, concluyendo que los grupos de isometrías de la recta y del plano son promediables, lo que explica la inexistencia de resultados análogos al de Banach-Tarski en dimensiones 1 y 2. Nos apoyaremos en este caso en la segunda parte del libro de Wagon [1].

En conjunto, los resultados que desarrollamos no solo ofrecen una comprensión rigurosa del Teorema de Banach-Tarski, sino que también ilustran la sorprendente profundidad de la interacción entre geometría, teoría de grupos y teoría de la medida, para lo cual, hacemos uso de ideas que se sitúan en el origen de múltiples líneas de investigación actuales (usaremos sucesiones de Følner, filtros y ultralímites)

En este trabajo, consideramos como verdadero el axioma de elección. Como veremos es una pieza clave de la demostración y sin el no hay teorema de Banach-Tarski. Este es un tema muy controvertido a la par que interesante cuyas consideraciones pueden ser muy nutritivas para futuros trabajos. Por citar algunas posibles líneas de investigación, se podría discutir la consistencia relativa del sistema *Zermelo-Fraenkle* tanto con él como sin él, las implicaciones que ello tiene o explorar qué sucede al relajar el axioma.

Abstract

The Banach-Tarski theorem states that, given a ball in three-dimensional Euclidean space, it is possible to decompose it into a finite number of disjoint subsets and, by applying certain rotations, reconstruct from them two identical copies of the original ball. This result, known as the *Banach-Tarski Paradox*, represents a meeting point between different areas of modern mathematics, and its study reveals the deep interaction between group theory, geometry, and measure theory.

To formalize the underlying notion in the theorem, we introduce the concept of a *paradoxical set*. Given a group G acting on a set X, we say that X is G*-paradoxical* if it can be decomposed into a finite number of disjoint subsets from which, through the action of elements of G, two copies of the original set can be obtained. In these terms, the Banach-Tarski theorem can be reformulated as asserting that the three-dimensional ball is G-paradoxical under the action of a subgroup of rotations.

The aim of this work is not limited to the rigorous exposition and proof of the theorem, but rather to analyze the structural relationship between the paradoxical nature of a set and the possibility of defining on it a finitely additive, group-invariant measure. We will show that these two properties—paradoxicality and measure invariance—are incompatible.

Chapter 1 develops the proof of the Banach-Tarski theorem and characterizes the concept of a paradoxical set. The notion of equidecomposability is introduced and shown to be equivalent, in the appropriate context, to paradoxicality. From this equivalence, it is proven that the sphere, and by extension the ball, are G-paradoxical under the action of a subgroup of isometries. Finally, it is shown that the existence of a paradoxical decomposition prevents the construction of a finitely additive, isometry-invariant measure with nonzero total measure.To this end, we will mainly rely on the first part of Stan Wagon's book [1].

Chapter 2 addresses the reciprocal implication: if a group admits a finitely additive measure invariant under left translation, then paradoxical sets cannot exist under its action. To this end, we introduce the concept of *amenability*, introduced by von Neumann as a tool to study precisely this relationship. It is proven that amenable groups do not generate paradoxical decompositions, and relevant examples are presented, concluding that the groups of isometries of the line and the plane are amenable, which explains the absence of results analogous to Banach-Tarski in dimensions 1 and 2. We will focus on the second part of [1].

Overall, the results developed here not only provide a rigorous understanding of the Banach-Tarski theorem but also illustrate the remarkable depth of the interaction between geometry, group theory, and measure theory. To this end, we make use of ideas that lie at the origin of several current research lines (we will use Følner sequences, filters, and ultralimits).

Finally, it should be clarified that throughout we assume the Axiom of Choice to be true. As we will see, it is a key piece of the proof, and without it, the Banach-Tarski theorem does not hold. This is a highly controversial yet fascinating topic, whose considerations can be very fruitful for future work. To mention some possible lines of inquiry, one could discuss the relative consistency of the *Zermelo–Fraenkel* system both with and without the Axiom of Choice, the implications this has, or explore what happens when the axiom is weakened.

Índice general

Capítulo 1

Descomposiciones Paradójicas

ó la inexistencia de medidas finito-aditivas

En este primer capítulo desarrollamos la base teórica necesaria para comprender cómo se puede "duplicar" un conjunto mediante transformaciones geométricas, lo aplicamos a la bola y estudiamos por qué esto imposibilita la existencia de ciertas medidas invariantes.

1.1. Decomposiciones paradójicas

Comencemos recordando la noción de *grupo*. Un *grupo* G, es un conjunto con una operación binaria interna asociativa, con elemento neutro e inverso para cada elemento. Usaremos la notación multiplicativa y con frecuencia llamaremos *letra* a un elemento del grupo y *palabra* a un producto de letras y sus inversas.

Ejemplo 1.1. $SO(3) := \{ A \in M_3(\mathbb{R}) \ : \ A^T A = I \ \text{ y } \ \det(A) = 1 \}$. Es decir, el conjunto de rotaciones respecto al origen en el espacio tridimensional euclídeo

Ejemplo 1.2. Sean a y b símbolos. El grupo *libre* de dos generadores, F_2 , es el conjunto de todas las palabras que se forman con a, a^{-1}, b, b^{-1}, incluyendo la palabra vacía e, reducidas y con la operación de concatenación de palabras. Con reducidas, nos referimos a que para toda palabra $g_1 \dots g_n$ formada con estas cuatro letras, es imposible que se cumpla

$$g_i g_{i+1} = 1 \quad \text{para } 1 \leq i < n.$$

Dado un grupo G y $a, b \in G$, decimos que son *independientes* si los elementos a, b, a^{-1}, b^{-1} son todos distintos y no existe ninguna palabra formada por ellos reducida no trivial que sea la identidad. Si a y b son independientes, $\langle a, b \rangle \leqslant G$ es isomorfo aF_2

Definición 1.1. Decimos que un grupo G *actúa* sobre un conjunto X, y lo denotamos como $G \curvearrowright X$, si existe una aplicación:

$$\varphi : G \times X \to X$$

tal que para todo $g_1, g_2 \in G$ y $x \in X$:

- $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$,
- $1x = x$, donde 1 es el elemento neutro de G.

De este modo cada g define una aplicación biyectiva de X en X. Generalmente la forma en la que hemos definido la acción se conoce como acción a izquierda.

Observación 1.1. Un grupo actúa de manera natural sobre sí mismo mediante la acción:

$$\varphi : G \times G \to G, \quad (h, g) \mapsto hg$$

Definición 1.2. Decimos que G es *paradójico*, si existen enteros positivos m, n, así como subconjuntos disjuntos dos a dos $G_1, \dots, G_n, H_1, \dots, H_m \leqslant G$ y elementos $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ tales que:

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} g_i G_i \quad \text{y} \quad G = \bigcup_{j=1}^{m} h_j H_j.$$

Ejemplo 1.3. El grupo libre de orden 2, F_2, es paradójico. Consideremos el grupo libre de dos generadores $F_2 = \langle a, b \rangle$. Si ρ es uno de los elementos $a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$, definimos $W(\rho)$ como el conjunto de palabras reducidas de F cuya representación como palabra en a, a^{-1}, b, b^{-1} comienza (desde la izquierda) con ρ. Es obvio que

$$F = \{e\} \sqcup W(a) \sqcup W(a^{-1}) \sqcup W(b) \sqcup W(b^{-1}),$$

donde $A \sqcup B$ denota la unión entre conjuntos disjuntos. Además, se tiene que:

$$W(a) \sqcup aW(a^{-1}) = F_2,$$

y

$$W(b) \sqcup bW(b^{-1}) = F_2.$$

Veámoslo para el primer caso, si $h \in F \setminus W(a)$, entonces $a^{-1}h \in W(a^{-1})$, luego

$$h = a(a^{-1}h) \in aW(a^{-1}).$$

Por lo que F_2 es paradójico.

Definición 1.3. Sea $G \curvearrowright X$ y $E \subseteq X$ no vacío. Decimos que E es G-*paradójico* (o paradójico con respecto a G) si existen enteros positivos m, n, así como subconjuntos disjuntos dos a dos $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subseteq E$ y elementos $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ tales que:

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i) \quad \text{y} \quad E = \bigcup_{j=1}^{m} h_j(B_j).$$

Observación 1.2. G es paradójico sii G es G-paradójico con la acción natural $G \curvearrowright G$

Proposición 1.1. Sea $G \curvearrowright X$, $E \subseteq X$ no vacío y $S \leqslant G$ subgrupo. Si E es S-paradójico, E es G-paradójico.

Demostración. Si G actúa sobre X, S también actúa sobre X. Además, basta tomar los elementos de S que consiguen duplicar E pues también pertenecen a G. $\square$

Ejemplo 1.4. Una esfera es paradójica con respecto a un subgrupo de $SO(3)$ y por la proposición anterior también lo es con respecto a $SO(3)$. Probarlo es uno de los objetivos de este trabajo.

Definición 1.4. Sea $G \curvearrowright X$. La *órbita* de $x \in X$ es el conjunto $O(x) := \{gx \mid g \in G\} \subseteq X$. Decimos que $x \in X$ es punto fijo de $g \in G$ si $g(x) = x$, y decimos que el grupo actúa sin puntos fijos (no triviales) ó de manera *libre*, si solo la identidad tiene puntos fijos.

Proposición 1.2. Sea G grupo paradójico y $G \curvearrowright X$ sin puntos fijos, entonces X es G-paradójico.

Demostración. Como G es paradójico, existen enteros m, n, así como subconjuntos disjuntos dos a dos $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \leqslant G$ y elementos $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in G$ tales que:

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i) \quad \text{y} \quad G = \bigcup_{j=1}^{m} h_j(B_j).$$

Usando el axioma de elección construimos un conjunto $M \subseteq X$ que contiene exactamente un elemento de cada órbita. Veamos que $\{g(M) : g \in G\}$ forma una partición de X:

- Por un lado $\bigcup\{g(M) : g \in G\} = X$ por ser M los representantes de cada órbita y aplicarles todos los elementos de G.

- Por otro lado los subconjuntos $g(M)$ son disjuntos 2 a 2: sean gM y hM con intersección no vacía, entonces $\exists\ m_1, m_1 \in M$ tales que $gm_1 = hm_2$. Luego $h^{-1}gm_1 = m_2$, es decir pertenecen a la misma órbita y por tanto $m_1 = m_2$. Ahora como la acción es sin puntos fijos, $h^{-1}gm_1 = m_1$ implica $h^{-1}g = 1$ y por tanto $h = g$.

Ahora, consideremos los subconjuntos de X

$$A_i^* = \{g(M) : g \in A_i\} \subseteq X,$$
$$B_j^* = \{g(M) : g \in B_j\} \subseteq X.$$

Dado que los A_i, B_j son disjuntos, estos también lo son, además, tenemos que:

$$\bigcup_i g_i(A_i^*) = \bigcup_i g_i\{g(M) : g \in A_i\} = \bigcup_i \{g_i g(M) : g \in A_i\} = \{g(M) : g \in G\} = X.$$

De la misma manera para los B_j^*. Luego los conjuntos A_i^* y B_j^* forman una descomposición paradójica de X. $\square$

Veamos alguna consecuencia inmediata de la proposición anterior:

Corolario 1.1. Un grupo, con un subgrupo paradójico, es paradójico. En particular, si un grupo tiene como subgrupo al grupo libre de orden 2, F_2, será paradójico.

Demostración. Sean G grupo y $H \leqslant G$ paradójico. Consideremos la acción natural $H \curvearrowright G$, H actúa libremente (si $hg = g$ multiplicando a derecha por g^{-1} se obtiene $h = 1$), luego G es H-paradójico como conjunto. Pero esto es que G es G-paradójico como conjunto, que es lo mismo que ser G-paradójico $\square$

1.2. El teorema de Hausdorff

Veamos que existe un subgrupo de $SO(3)$, con carácter paradójico, así aplicando el corolario anterior tendremos que $SO(3)$ es paradójico. Adicionalmente, si consiguiéramos probar que este grupo actúa libremente sobre la esfera, podríamos aplicar la proposición 1.2 para demostrar que la esfera es paradójica bajo este grupo.

Proposición 1.3. Existen 2 rotaciones en $SO(3)$ que son independientes, luego generan el grupo libre de orden 2.

Demostración. Consideremos las siguientes isometrías $\varphi, \rho \in SO(3)$:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Observemos primero que, como $\varphi, \rho \in SO(3)$, se tiene $\varphi^{-1} = \varphi^T$ y $\rho^{-1} = \rho^T$ y son todas ellas distintas. Probaremos ahora que no existe palabra reducida no trivial en $\varphi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}$ que sea la identidad. Sea w una palabra reducida no trivial en las letras $\varphi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que w termina (por la derecha) en $\varphi^{\pm 1}$; si no fuera así, basta conjugar por φ puesto que $w = \mathrm{Id} \iff \varphi^{-1} w \varphi = 1$. Si es cierto que para toda palabra reducida w que termina en $\varphi^{\pm 1}$ se tiene que:

$$w(1,0,0) = \frac{(a, b\sqrt{2}, c)}{3^k}, \tag{1.1}$$

con $a, b, c, k \in \mathbb{Z}$ *y* $3 \nmid b$. Entonces $w(1,0,0) \neq (1,0,0)$ y por tanto $w \neq 1$. Probemos (1.1). Lo demostramos por inducción sobre la longitud $\ell(w)$. Si $\ell(w) = 1$, entonces $w = \varphi^{\pm 1}$ y con un cálculo directo obtenemos:

$$\varphi^{\pm 1}(1,0,0) = \frac{(1, \pm 2\sqrt{2}, 0)}{3},$$

Supongamos la afirmación cierta para todas las palabras de longitud menor o igual a $n-1$ y sea w de longitud n. Escribimos $w = \sigma w'$ con $\sigma \in \{\varphi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}\}$ y $\ell(w') = n-1$. Por hipótesis inductiva

$$w'(1,0,0) = \frac{(a', b'\sqrt{2}, c')}{3^{k'}} \quad \text{con } a', b', c', k' \in \mathbb{Z},\ 3 \nmid b'.$$

Al aplicar $\varphi^{\pm 1}$ o $\rho^{\pm 1}$ sobre este vector se obtienen relaciones lineales entre las componentes; concretamente:

- Si aplicamos $\varphi^{\pm 1}$:
$$a = a' \mp 4b', \qquad b = b' \pm 2a', \qquad c = 3c'.$$

- Si aplicamos $\rho^{\pm 1}$:
$$a = 3a', \qquad b = b' \mp 2c', \qquad c = c' \pm 4b'.$$

En cualquiera de los dos casos $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y el denominador aumenta en una potencia de 3, de modo que $w(1,0,0)$ tiene la forma

$$\frac{(a, b\sqrt{2}, c)}{3^k}$$

con $k = k' + 1$. Veamos ahora que $3 \nmid b$. Supongamos $w = \sigma_1\sigma_2 v$, con

$$v(1,0,0) = \frac{(a'', b''\sqrt{2}, c'')}{3^{k-2}},$$

y $\sigma_i \in \{\varphi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}\}$. Fijamos también la notación

$$\sigma_2 v(1,0,0) = \frac{(a', b'\sqrt{2}, c')}{3^{k-1}}.$$

Aparecen cuatro posibles casos:

1. Si $w = \rho^{\pm 1}\varphi^{\pm 1}v$, se tiene $c' = 3c''$ y $b = b' \mp 2c'$. Como $3 \mid c'$, resulta $b \equiv b' \pmod 3$. Concluimos que si $3 \nmid b'$, entonces $3 \nmid b$.

2. Si $w = \varphi^{\pm 1}\rho^{\pm 1}v$, se cumple $a' = 3a''$ y $b = b' \mp 2a'$. Por el mismo argumento anterior, si $3 \nmid b'$, entonces $3 \nmid b$.

3. Si $w = \varphi^{\pm 1}\varphi^{\pm 1}v$, se tiene

$$b = b' \pm 2a' = b'' \pm 2a'' \pm 2(a'' \mp 4b'') = -7b'' \pm 4a'' = -9b'' + 2b'.$$

   De modo que $b \equiv 2b' \pmod 3$, y por tanto si $3 \nmid b'$, entonces $3 \nmid b$.

4. Si $w = \rho^{\pm 1}\rho^{\pm 1}v$, se cumple

$$b = b' \mp 2c' = b'' \mp 2c'' \mp 2(c'' \pm 4b'') = -7b'' \mp 4c'' = -9b'' + 2b'.$$

   Se obtiene el mismo resultado que en el apartado anterior. □

Recordemos que en el ejemplo 1.2 vimos que el grupo libre de orden 2 era paradójico, luego ya tenemos un subgrupo paradójico en $SO(3)$, denotémoslo en lo que sigue como F. La proposición 1.2 garantiza que si F actúa sobre la esfera libremente podemos duplicarla, el problema es que las rotaciones tienen puntos fijos con respecto a la esfera, la intersección de $\mathbb{S}^2$ con el eje de rotación, los polos. Mas formalmente, sea $\sigma \in SO(\mathbb{R}^3)$, definimos los *polos* de σ sobre una esfera $\mathbb{S}^2$, como $\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : \sigma(x,y,z) = (x,y,z)\}$. Ahora bien, si a la esfera le quitamos estos puntos, podemos duplicarla. Esto es lo que se conoce como teorema o *paradoja* de Hausdorff:

Teorema 1.1 (de Hausdorff)**.** Existe un conjunto contable D de manera que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ es $SO(3)$-paradójico.

Demostración. Sean F el grupo paradójico de $SO(3)$ y D los polos de $F \setminus \{e\}$. El grupo F está generado por un número finito de elementos, es contable, cada rotación de $F \setminus \{e\}$ tiene dos polos, luego los polos $F \setminus \{e\}$ son contables. Así, F actúa libremente sobre $\mathbb{S}^2 \setminus D$. Aplicando la proposición 1.2, obtenemos que el conjunto es F-paradójico, y como F es subgrupo de $SO(3)$, aplicando la proposición 1.1 se tiene el resultado. □

1.3. Equidescomponibilidad

En lo que resta de capítulo vamos a sortear las dificultades que suponen los polos y el centro a la hora de generalizar la paradoja de Hausdorff a la bola. Para ello, introducimos el concepto de equidescomponibilidad. Veremos que la equidescomponibilidad de un conjunto en 2 copias es en esencia lo mismo que ser paradójico. Esto nos permitirá traducir el problema a términos de equidescomponibilidad donde solventar el problema de los polos y el centro es más fácil.

Definición 1.5. Sean X un conjunto, $A, B \subset X$ y G un grupo tal que $G \curvearrowright X$. Decimos que A y B son G-*equidescomponibles* si tienen dos descomposiciones

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{k} A_i, \quad B = \bigsqcup_{i=1}^{k} B_i,$$

de manera que existen $g_i \in I$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$ tales que $g_i(A_i) = B_i$.

Lema 1.1. Una esfera sin un punto es $SO(3)$-equidescomponible a una esfera.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, sea S la esfera unidad centrada en el origen. Sea p el punto $(1, 0, 0)$. Tomemos una rotación $r \in SO(3)$ que mueve una unidad de longitud (el espacio es métrico así que podemos). Aplicamos reiteradamente r a p. Al conjunto de puntos que vamos recorriendo lo denotamos $B := \{p, r(p), rr(p), \ldots\}$. Dado que $L = 2\pi$ es irracional, ningún elemento de B se repite. Definimos $B' := \{r(p), rr(p), \ldots\} = B \setminus \{p\}$ y $A := S \setminus B$. Se tiene que $S = A \sqcup B$ y $S \setminus p = A \sqcup B'$. Evidentemente, A es equidescomponible a A. Para ver que B es equidescomponible a B', basta tomar r^{-1} y aplicársela a B'. Los conjuntos son equidescomponibles. □

Lema 1.2. Una esfera sin un número contable de puntos es $SO(3)$-equidescomponible a una esfera.

Demostración. Denotemos D al conjunto contable. Sea λ una recta que pasa por el origen y que no intersecta ningún punto de D. Esto es posible ya que D es numerable. Sea $r(\alpha)$ la rotación alrededor de λ de ángulo α. Definimos $J := \{\alpha \in [0, 2\pi] : \exists n \in \mathbb{N}, \exists P \in D, r(n\alpha)P \in D\}$. Entonces J es numerable y por tanto existe un ángulo $\theta \notin J$. Sea ρ la rotación alrededor de λ de ángulo θ. Entonces

- $\rho^n(D) \cap D = \varnothing$ para todo $n \neq 0$.
- Para $m \neq n$ se tiene $\rho^m(D) \cap \rho^n(D) = \varnothing$. (Si $\rho^m(P) = \rho^n(Q)$ con $P, Q \in D$, aplicar ρ^{-m} da $P = \rho^{n-m}(Q)$, contradictorio a la elección de θ.)

Definimos

$$E = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \rho^n(D)$$

por último, repetimos la idea de la demostración anterior: $S = S \setminus E \sqcup E$, $S \setminus D = S \setminus E \sqcup \rho(E)$, la identidad lleva $S \setminus E$ a $S \setminus E$ y ρ lleva E a $\rho(E)$ □

Lema 1.3. Una bola sin centro es $E(3)$-equidescomponible en una bola con centro, siendo $E(3)$ el grupo de las isometrías en el espacio Euclídeo de dimensión 3.

Demostración. Basta tomar una esfera contenida en la bola que pase por el centro y aplicar el lema 1.1 con alguna rotación que comparta centro con la esfera. □

Proposición 1.4. Sean X un conjunto, G grupo y $G \curvearrowright X$, si G es $SO(3)$ o $E(3)$, la relación de G-equidescomponibilidad es una relación de equivalencia entre elementos de $P(X)$.

Demostración. La reflexividad y simétría son evidentes, basta tomar como elementos del grupo la identidad o las inversas respectivamente. Probemos la transitividad. Sean $A, B, C \subset X$ tales que $A \sim_G B$ y $B \sim_G C$. Entonces existen $\{A_1, \ldots, A_n\}$, $\{B_1, \ldots, B_n\}$ y elementos $g_1, \ldots, g_n \in G$ como en la definición anterior y $\{B'_1, \ldots, B'_m\}$ de B y $\{C_1, \ldots, C_m\}$ de C con elementos $h_1, \ldots, h_m \in G$ como en la definición anterior. Tomamos la familia $\left\{g_i^{-1}(B_i \cap B'_j)\right\}_{i,j}$ de subconjuntos de A. Notar que son disjuntos dos a dos por serlo los B_i, B'_j y porque las funciones g_i^{-1} son biyectivas. Veamos ahora que su unión es el conjunto A:

$$\bigcup_{i,j} g_i^{-1}(B_i \cap B'_j) = \bigcup_{j=1}^{m} \left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap g_i^{-1} B'_j) \right) = A \cap \left(\bigcup_{i,j} g_i^{-1} B'_j \right) = A.$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}$ aplicamos $h_j g_i \in G$ a estos subconjuntos. (Se comprueba fácilmente que los subconjuntos obtenidos son disjuntos dos a dos por serlo los C_j y por ser $h_j g_i$ biyectivas). Veamos que su unión es el conjunto C:

$$\begin{aligned}\bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} (h_j g_i (A_i \cap g_i^{-1} B'_j)) &= \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} h_j (g_i A_i \cap B'_j) = \bigcup_{j=1}^{m} h_j \left(\bigcup_{i=1}^{n} (g_i A_i \cap B'_j) \right) \\ &= \bigcup_{j=1}^{m} h_j \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} g_i A_i \right) \cap B'_j \right) = \bigcup_{j=1}^{m} h_j (B \cap B'_j) = \bigcup_{j=1}^{m} h_j B'_j = C,\end{aligned}$$

donde en la primera igualdad hemos usado que las g_i biyectivas, en particular son inyectivas. Luego $A \sim_G C$ y por tanto es transitiva. □

Veamos el teorema que nos permitirá relacionar equidescomponibilidad y el carácter paradójico de un conjunto:

Teorema 1.2 (de Banach-Schröeder-Bernstein)**.** Sea X un conjunto, $A, B \subset X$ y G un grupo tal que $G \curvearrowright X$. Supongamos que A es G-equidescomponible con algún subconjunto de B, denotémoslo $A \prec B$ y además $B \prec A$, entonces A es G-equidescomponible a B: $A \sim_G B$.

Demostración. Recordemos que si $C, D \subseteq X$ y $C \sim_G D$:

$$C = \bigsqcup_{i=1}^{k} C_i, \quad D = \bigsqcup_{i=1}^{k} D_i,$$

$$\exists h_i \in I \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\} \text{ tal que } h_i(C_i) = D_i.$$

Recordemos también que cada h_i es una aplicación biyectiva por actuar G sobre X y en particular sobre C. Así, por hipótesis tenemos:

- $A \preceq B$, así que $A \sim_G B_1 \subseteq B$ y podemos construir $f : A \to B_1$ una biyección.
- $B \preceq A$, así que $B \sim_G A_1 \subseteq A$ y podemos construir $g : A_1 \to B$ una biyección.

Definiendo f y g con las que aparecen al G-equidescomponer. Notar que se tiene lo siguiente:

1. **(a)** Si $A \sim_G B_1$, entonces la biyección $f : A \to B_1$ respeta subconjuntos: para todo $C \subseteq A$, también $C \sim_G f(C)$ (ídem para g). Esto viene de que la equidecomposición con respecto a G se hereda a subconjuntos.
2. **(b)** Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, y $A_1 \sim_G B_1$, $A_2 \sim_G B_2$, entonces $A_1 \cup A_2 \sim_G B_1 \cup B_2$. O sea, se pueden pegar equidecomposiciones cuando son disjuntas.

Queremos dividir A en dos partes: una que se va a emparejar con B vía f y otra que se va a emparejar con B vía g. Para eso se define:

1. $C_0 = A \setminus A_1$. Esto es la parte de A que no tiene imagen directa en B mediante g.
2. Después, inductivamente:
$$C_{n+1} = g^{-1}\big(f(C_n)\big).$$
3. Finalmente:
$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n.$$

A continuación probamos que

$$g(A \setminus C) = B \setminus f(C).$$

$g(A \setminus C) \subseteq B \setminus f(C)$: Sea $x \in A \setminus C$. Como $C_0 = A \setminus A_1 \subseteq C$, se tiene $x \in A_1$ y $g(x) \in B$. Si $g(x) \in f(C)$, entonces existe n tal que $g(x) \in f(C_n)$. Pero por definición de C_{n+1}, $f(C_n) = g(C_{n+1})$, y la inyectividad de g sobre A_1 implicaría $x \in C_{n+1} \subseteq C$, contradicción. Luego $g(x) \notin f(C)$ y como $g(x) \in B$, se sigue que $g(x) \in B \setminus f(C)$.

$B \setminus f(C) \subseteq g(A \setminus C)$: Sea $y \in B \setminus f(C)$. Como $g : A_1 \to B$ es sobreyectiva, existe $x \in A_1$ tal que $g(x) = y$. Si $x \in C$, entonces $x \in C_m$ para algún $m \geq 1$ (no puede ser $m = 0$ ya que $x \in A_1$). Por la definición recursiva, $g(C_m) = f(C_{m-1}) \subseteq f(C)$, lo que implicaría $g(x) \in f(C)$, contradicción. Por tanto $x \in A \setminus C$ y $y = g(x) \in g(A \setminus C)$.
Por último, por la propiedad (a), se cumple que

$$C \sim_G f(C).$$

Gracias a g también tenemos que

$$A \setminus C \sim_G B \setminus f(C).$$

Luego, por la propiedad (b), al combinar estas piezas disjuntas obtenemos

$$(A \setminus C) \cup C \sim_G (B \setminus f(C)) \cup f(C).$$

Como

$$(A \setminus C) \cup C = A \quad \text{y} \quad (B \setminus f(C)) \cup f(C) = B,$$

concluimos que

$$A \sim_G B.$$ □

Corolario 1.2. Sea $G \curvearrowright X$. Un subconjunto $E \subseteq X$ es G-paradójico si y solo si existen conjuntos disjuntos $A, B \subseteq E$ tales que $A \sqcup B = E$ y $A \sim_G E \sim_G B$, es decir E es G-equidescomponible a dos copias de sí mismo.

Demostración. $\Longleftarrow$) Tenemos que probar que $\exists F_1, \ldots, F_n \subseteq E$ y $H_1, \ldots, H_m \subseteq E$ así como $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in G$ tales que:

$$E = \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i(H_i), \quad E = \bigsqcup_{i=1}^{m} h_i(F_i),$$

Supongamos que existen conjuntos disjuntos $A, B \subseteq E$ tales que $A \sqcup B = E$ y $A \sim_G E \sim_G B$. Por la definición de equidescomponibilidad esto implica que existen: $A_1, \ldots, A_n \subseteq A$ Y $B_1, \ldots, B_m \subseteq B$ disjuntos, así como $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in G$ tales que:

$$E = \bigsqcup_{i=1}^{n} E_i = \bigsqcup_{i=1}^{n} a_i(A_i), \quad E = \bigsqcup_{i=1}^{m} E_i = \bigsqcup_{i=1}^{m} b_i(B_i),$$

Por tanto basta tomar los conjuntos A_i como los H_i y los B_i como los F_i

$\Longrightarrow$) Recíprocamente, si E es G-paradójico, existen subconjuntos disjuntos dos a dos $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \subseteq E$ y elementos $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in G$ tales que:

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i) \quad \text{y} \quad E = \bigcup_{j=1}^{m} h_j(B_j).$$

Tomemos $A = \bigsqcup_i A_i$ y $B = \bigsqcup_j B_j$. Son disjuntos y además $A \sim_G E \sim_G B$. Nos falta ver que $E = A \sqcup B$. Pero,

$$E \sim_G B \subseteq E \setminus A \subseteq E,$$

por lo que el teorema de Banach–Schröder–Bernstein implica que

$$E \setminus A \sim_G E.$$

Así que podemos tomar $E \setminus A$ en lugar de B. □

1.4. El teorema de Banach-Tarski

Ahora podemos traducir los resultados que tenemos y el teorema de Banach-Tarski en términos de equidescomponibilidad. Por el corolario 1.2, el teorema de Hausdorff nos dice que la esfera sin los polos es $SO(3)$-equidescomponible a 2 copias suyas. En esta sección trataremos de generalizarlo a la esfera y a la bola.

Teorema 1.3. Una esfera en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ es $SO(3)$-equidescomponible a 2 copias suyas. Es decir, sea $R \in \mathbb{R}$, S la esfera de radio R y S_1, S_2 dos copias suyas, entonces: $S \sim S_1 \cup S_2$ (o equivalentemente es $SO(3)$-paradójico).

Demostración. Por el teorema de Hausdorff tenemos que la esfera sin los polos de F es equidescomponible a dos copias suyas. Para generalizarlo a la esfera: quitamos los polos de F de la esfera original, la duplicamos y a una de las copias le damos estos puntos. Con la esfera agujereada que resta, basta aplicar el lema 1.2 □

Teorema 1.4. (Teorema de Banach-Tarski) Una bola en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ es $E(3)$-equidescomponible a 2 copias suyas. Es decir, sea $R \in \mathbb{R}$, B la bola de radio R y B_1, B_2 dos copias suyas, entonces: $B \sim B_1 \cup B_2$ (o equivalentemente es $E(3)$-paradójico).

Demostración. En la paradoja de Hausdorff el grosor de la esfera no juega ningún papel, por lo que podemos generalizarlos a cortezas esféricas. El único punto con el que tenemos que tener cuidado es el centro. Tomemos una bola, le quitamos el conjunto de polos de F y el centro, este conjunto es $SO(3)$-equidescomponible a 2 bolas sin los puntos P y sin el centro. Tomamos los polos y el centro y se los ponemos a una de las dos copias. Con la restante, basta aplicar los lemas 1.2 y 1.3 □

Combinando este teorema con el de Banach-Schröeder-Bernstein obtenemos una versión mucho más fuerte del teorema:

Teorema 1.5. Cualesquiera dos subconjuntos acotados del espacio euclídeo de tres dimensiones con interiores no vacíos son SO(3)-equidescomponibles.

Demostración. (Teorema de Banach-Tarski) llamemos A y B a los conjuntos acotados no vacíos, por el teorema 1.2 basta ver que $A \prec B$ y $B \prec A$. Probamos que $A \prec B$: Tomamos 2 bolas V y W tales que $A \subset V$ y $W \subset B$. Como son conjuntos acotados con interiores no vacíos, esto es posible. A continuación, invocamos el teorema de Banach-Tarski y duplicamos la bola W hasta que tengamos suficientes copias como para cubrir V. El teorema nos garantiza que n copias de $W \sim W$, luego tenemos lo siguiente:

$$A \subset V \subset n \text{ copias de } W \sim W \subset B.$$

Luego en resumen $A \prec B$. Repitiendo exactamente el mismo argumento para el recíproco obtenemos $B \prec A$ y por el teorema 1.2 de Banach-Schröeder-Bernstein se tiene: $A \sim B$. □

1.5. La no existencia de medidas finito-aditivas

Sea G grupo, X conjunto y $G \curvearrowright X$, terminamos el capítulo estudiando las implicaciones que tiene el carácter paradójico de un conjunto en la posibilidad de construir una medida sobre $\mathcal{P}(X)$:

Proposición 1.5. Sean $G \curvearrowright X$ una acción y $E \subset X$. Si E es G-paradójico, entonces no existe una medidaμ G-invariante,sobre $P(X)$, finito aditiva tal que $\mu(E) = 1$.

Demostración. Supongamos que μ es una medida finitamente aditiva e invariante bajo G en $\mathcal{P}(X)$ y que $\mu(E) < \infty$. Sean A_i, B_j en E y g_i, h_j en G los que hacen que E sea G-paradójico. Entonces:

$$\mu(E) = \sum \mu(A_i) + \sum \mu(B_j) = \sum \mu(g_i A_i) + \sum \mu(h_j B_j) = \mu(E) + \mu(E) = 2\mu(E).$$

Dado que $\mu(E) < \infty$, esto implica que $\mu(E) = 0$. □

Esta proposición con el Teorema de Banach-Tarski implica que no es posible crear una medida finitamente aditiva en $\mathbb{R}^3$ que sea tanto invariante por isometrías, que pueda medir cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^3$ y que asigne una medida no nula a la bola unitaria.

Capítulo 2

Medidas finito-aditivas G-invariantes

ó la inexistencia de descomposiciones paradójicas

No es posible replicar la paradoja de Banach-Tarski en una o dos dimensiones; el intervalo en $\mathbb{R}$ o el disco en $\mathbb{R}^2$ no pueden ser reorganizados en dos intervalos o dos discos utilizando solo un número finito de piezas, traslaciones y rotaciones. Este hecho se fundamenta en la existencia de medidas finitamente aditivas no triviales invariantes por la acción del grupo de isometrías en estos espacios. En este capítulo vamos a indagar en esta cuestión, haciendo uso para ello del concepto de promediabilidad.

2.1. Promediabilidad

Definición 2.1. Dado un grupo G, si existe μ, una medida finitamente aditiva en $\mathcal{P}(G)$ tal que $\mu(G) = 1$, y μ es invariante por la izquierda (es decir, $\mu(g^{-1}A) = \mu(A)$ para todo $g \in G$ y todo $A \subseteq G$), entonces decimos que G es *promediable*.

Ejemplo 2.1. El grupo libre de orden 2 no es promediable.

Supongamos que existe tal medida μ y que a y b son los generadores del grupo. Vimos que $F_2 = W(a) \sqcup W(b) \sqcup W(b^{-1}) \sqcup W(a^{-1}) \sqcup e$. Como $W(b) \subset W(a^{-1}) \setminus W(a)$, tenemos que:

$$\mu(W(b)) \leq \mu(a^{-1}W(a)) - \mu(W(a)) = \mu(W(a)) - \mu(W(a)) = 0.$$

Por la F_2-invarianza, podemos hacer lo mismo para los otros subconjuntos y obtenemos $\mu(W(a)) = \mu(W(b)) = \mu(W(b^{-1})) = \mu(W(a^{-1})) = 0$. Ademas como $b\{e\} \subseteq W(b)$, entonces $\mu(e) \leq \mu(W(b)) = 0$, luego $\mu(F_2) = 0$, que es imposible.

Ejemplo 2.2. Veamos que un grupo finito G es promediable. Sea n su orden, basta definir $\mu(A) = |A|/n \ \ \forall A \in \mathcal{P}(G)$. Claramente es finito aditiva y $\mu(G) = 1$. Para ver la G-invarianza basta recordar que $\varphi_g : A \longrightarrow gA, \qquad \varphi_g(a) = ga$, es biyectiva.

Observación 2.1. Si G grupo es paradójico, entonces no puede ser promediable. En efecto, cualquier medida μ que satisfaciera las condiciones de promediabilidad llevaría a una contradicción similar a la del ejemplo 2.1

Definición 2.2. Sea $\ell^\infty(G) := \{f : G \to \mathbb{R} : f \text{ acotada}\}$, una *media* es un funcional lineal no negativo:

$$\lambda : \ell^\infty(G) \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que $\lambda(1) = 1$. Muchas veces encontraremos la definición de promediabilidad en términos de media sobre $\ell^\infty(G)$: Un grupo es promediable si existe una media invariante por la izquierda, es decir, una media tal que para todo $f \in \ell^\infty(G)$ y para todo $x \in G$

$$\lambda(\tau_x f) = \lambda(f),$$

donde $\tau_x f(h) = f(x^{-1}h)$. Ambas nociones son equivalentes, en efecto, si μ es una medida en G, entonces se puede aplicar la construcción estándar del integral a partir de una medida al sistema $(G, \mathcal{P}(G), \mu)$. Dicha construcción procede definiendo el integral primero para funciones simples y, posteriormente, mediante supremos, para todas las funciones medibles. En este contexto, el proceso se simplifica puesto que todos los conjuntos, y por ende todas las funciones, son medibles. De esta manera, para cada función $f \in \ell^\infty(G)$ se define el número real

$$\int f\, d\mu,$$

el cual determina un funcional que verifica las siguientes propiedades:

1. $\displaystyle\int (af + bg)\, d\mu = a \int f\, d\mu + b \int g\, d\mu$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \ell^\infty(G)$.

2. $\displaystyle\int f\, d\mu \geq 0$ siempre que $f(g) \geq 0$ para todo $g \in G$.

3. $\displaystyle\int \chi_G\, d\mu = 1$, donde χ_G denota la función característica de G.

4. Para cada $g \in G$ y $f \in \ell^\infty(G)$, se tiene que:
$$\int (\tau_g f)\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

Por lo tanto, un grupo promediable siempre admite una media invariante por la izquierda. Recíprocamente, si $F : \ell^\infty(G) \to \mathbb{R}$ es una media invariante por la izquierda, entonces definiendo

$$\mu(A) = F(\chi_A),$$

se obtiene una medida en G con las propiedades deseadas. De este modo, un grupo es promediable si y solo si admite una media invariante por la izquierda.

Cuando estudiábamos grupos paradójicos, la propiedad del grupo se transmitía al conjunto sobre el que actuaba, ahora vamos a tratar de ver como la promediabilidad del grupo se transmite al conjunto, permitiéndonos construir la medida deseada sobre las partes del conjunto:

Proposición 2.1. Sea G grupo promediable, $G \curvearrowright X$, entonces existe una medida finito-aditiva G-invariante sobre $\mathcal{P}(X)$ de medida total 1.

Demostración. Fijemos $x \in X$. Dado que G es promediable existe una medida μ sobre $\mathcal{P}(G)$ finito aditiva, G-invariante y de medida total 1. Definimos $\nu : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ como $\nu(A) = \mu\{g \in G : g(x) \in A\}$. Veamos que es medida la que buscamos. Sean $A, B \subset X$ disjuntos:

1. La medida ν es de probabilidad ya que $\nu(X) = \mu\{g \in G : g(X)\} = \mu(G) = 1$ por actuar G sobre X.

2. tenemos que $\nu(A \sqcup B) = \mu\{g \in G : g(x) \in A \sqcup B\}$. Ahora si llamamos $G_A := \{g \in G : g(x) \in A\}$ y $G_B := \{g \in G : g(x) \in B\}$, notar que $G_A \cap G_B = \emptyset$. En efecto, si $h \in G_A \cap G_B$, entonces $h(x) \in A \cap B$, pero $A \cap B \neq \emptyset$. Por tanto:

$$\nu(A \sqcup B) = \mu\{g \in G : g(x) \in A\} + \mu\{g \in G : g(x) \in B\} = \nu(A) + \nu(B).$$

3. Queda ver que es G-invariante. Sea $h \in G$:

$$\nu(hA) = \mu\{g \in G : g(x) \in hA\} = \mu\{g \in G,\ h^{-1}g(x) \in A\}.$$

Ahora llamando $g' = h^{-1}g$ y por la invariancia de μ:

$$\nu(hA) = \mu\{hg' \in G : g'(x) \in A\} = \mu\{g' \in G : g'(x) \in A\} = \nu(A). \qquad \square$$

Corolario 2.1. Si G es promediable y $G \curvearrowright X$, entonces X no es G-paradójico.

Demostración. La proposición 1.5 nos dice que si X es G-paradójico no puede existir una medida sobre $\mathcal{P}(X)$ con las características descritas, pero por la proposición 2.1 si G es promediable, entonces existe una medida por lo que no puede ser que X sea G-paradójico $\square$

2.2. Algunos grupos promediables

El corolario anterior nos da un camino claro a seguir para demostrar la inexistencia de paradojas tipo Banach-Tarski para el disco o el intervalo. Tenemos que demostrar que el grupo de isometrías en el plano y en la recta son promediables:

Teorema 2.1. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. Los grupos finitos son promediables.
2. Si G promediable entonces $H \leq G$ es promediable.
3. Si N es un subgrupo normal de G, y tanto N como G/N son promediables, entonces G es promediable.

Demostración. 1. Es el ejemplo 2.2

2. Sea $\mu\colon \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ una medida que cumple las condiciones de la promediabilidad de G. Por el axioma de elección y recordando que las coclases a derecha forman una partición de G, podemos asegurar que existe un transversal a la derecha $M \subset G$ para H; es decir,

$$G = \bigsqcup_{m \in M} Hm,$$

donde la unión es disjunta (cada coclase a derecha de H en G tiene un único representante en M). Definimos una función $\nu\colon \mathcal{P}(H) \to [0,1]$ de la siguiente forma: para todo $A \subseteq H$, sea

$$\nu(A) := \mu(AM),$$

donde

$$AM = \bigcup_{m \in M} Am.$$

Verifiquemos que ν es una medida en H que satisface las propiedades de promediabilidad. Observar que

$$HM = \bigcup_{m \in M} Hm = G,$$

ya que M es un transversal. Por lo tanto,

$$\nu(H) = \mu(HM) = \mu(G) = 1.$$

Sean $A, B \subseteq H$ disjuntos. Entonces, por la propiedad de la medida μ en G y dado que

$$(A \sqcup B)M = AM \sqcup BM,$$

se tiene

$$\nu(A \sqcup B) = \mu((A \sqcup B)M) = \mu(AM) + \mu(BM) = \nu(A) + \nu(B).$$

Sea $h_0 \in H$ y $A \subseteq H$. Consideramos:

$$\nu(h_0 A) = \mu((h_0 A)M).$$

Pero notar que

$$(h_0 A)M = \bigcup_{m \in M} h_0 Am = h_0(AM).$$

Como μ es invariante por la izquierda en G, tenemos:

$$\mu(h_0(AM)) = \mu(AM),$$

es decir,

$$\nu(h_0 A) = \nu(A).$$

Por lo anterior, ν es una medida finitamente aditiva en $\mathcal{P}(H)$ con $\nu(H) = 1$ e invariante por la izquierda. Esto prueba que H es promediable.

3.Sea ν_1 una medida invariante finitamente aditiva sobre $\mathcal{P}(N)$ (que cumple las condiciones de promediabilidad) y ν_2 una medida finitamente aditiva invariante sobre $\mathcal{P}(G/N)$ (por la promediabilidad de G/N). Para cada conjunto $A \subseteq G$ definimos la función

$$f_A : G \to \mathbb{R}, \quad f_A(g) := \nu_1\big(N \cap g^{-1}A\big).$$

Notamos que si g_1 y g_2 pertenecen a la misma coclase de N en G (es decir, si $g_1 N = g_2 N$), entonces existe $h \in N$ tal que $g_2 = g_1 h$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f_A(g_2) &= \nu_1\Big(N \cap g_2^{-1}A\Big) = \nu_1\Big(N \cap (h^{-1}g_1^{-1})A\Big) \\ &= \nu_1\Big(N \cap h^{-1}(g_1^{-1}A)\Big) = \nu_1\Big(h\big(N \cap h^{-1}(g_1^{-1}A)\big)\Big) \\ &= \nu_1\Big(N \cap g_1^{-1}A\Big) = f_A(g_1), \end{aligned}$$

donde hemos usado la invarianza de ν_1 bajo la acción de N (es decir, $\nu_1(hB) = \nu_1(B)$ para todo $h \in N$ y $B \subseteq N$). Debido a que f_A es constante en cada coclase de N, esta función induce una función bien definida

$$\widehat{f}_A : G/N \to \mathbb{R}, \quad \text{definida por} \quad \widehat{f}_A(gN) = f_A(g).$$

Definimos entonces la medida μ sobre G por

$$\mu(A) := \int_{G/N} \widehat{f}_A \, d\nu_2.$$

Veamos que μ tiene las propiedades requeridas: Observamos que para $A = G$,

$$f_G(g) = \nu_1\big(N \cap g^{-1}G\big) = \nu_1(N),$$

y asumiendo que ν_1 está normalizada (i.e. $\nu_1(N) = 1$), obtenemos

$$\mu(G) = \int_{G/N} \widehat{f}_G \, d\nu_2 = \int_{G/N} 1 \, d\nu_2 = \nu_2(G/N) = 1.$$

Si $A, B \subseteq G$ son disjuntos, entonces para cada $g \in G$ se tiene $g^{-1}(A \sqcup B) = g^{-1}A \sqcup g^{-1}B$, de donde

$$f_{A \sqcup B}(g) = \nu_1\big(N \cap g^{-1}(A \sqcup B)\big) = \nu_1\big(N \cap g^{-1}A\big) + \nu_1\big(N \cap g^{-1}B\big) = f_A(g) + f_B(g).$$

Por tanto, la función inducida satisface

$$\widehat{f}_{A \cup B}(gN) = \widehat{f}_A(gN) + \widehat{f}_B(gN),$$

y al integrar respecto a ν_2 se deduce

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Sea $g_0 \in G$ y consideremos $A \subseteq G$. Entonces,

$$f_{g_0 A}(g) = \nu_1\big(N \cap g^{-1}(g_0 A)\big).$$

como

$$g^{-1}(g_0 A) = (g^{-1} g_0) A,$$

tenemos

$$f_{g_0 A}(g) = \nu_1\big(N \cap (g^{-1} g_0) A\big) = f_A(g^{-1} g_0).$$

Esta relación implica que la función $f_{g_0 A}$ se puede escribir en términos de f_A mediante una traslación. Al inducir la función en G/N y utilizar la invarianza de la medida ν_2 en G/N, se concluye que

$$\mu(g_0 A) = \mu(A).$$

En resumen, μ es una medida finitamente aditiva sobre G con $\mu(G) = 1$ e invariante por la izquierda. Esto prueba que G es promediable. □

Tratemos ahora de demostrar que los grupos abelianos son promediables.

2.3. Sucesiones de Følner

Si bien demostrar que los grupos abelianos son promediables es posible con la definición de promediabilidad que hemos dado, es bastante complicado. Por ello, vamos a introducir una caracterización que facilita la demostración a la par que nos da una perspectiva más amplia de la promedialilidad. Para ello, antes debemos familiarizarnos con los ultrafiltros y los ultralímites. Comenzamos recordando la definición usual de límite: dada una sucesión (x_n) en $\mathbb{R}$ con la topología usual y un punto $x \in \mathbb{R}$, decimos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

si para todo entorno V de x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $\forall n \geq N, x_n \in V$.

Definición 2.3. Un *filtro* sobre un conjunto X es una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X que cumple las siguientes propiedades:

1. Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

2. Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.

3. $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

Un *ultrafiltro* $\mathcal{U}$ es un filtro maximal, si dado $A \subseteq N$, se tiene que $A \in \mathcal{U}$, o bien $N \setminus A \in \mathcal{U}$.

Observación 2.2. La noción de filtro formaliza la idea de qué subconjuntos dentro de un conjunto consideramos *grandes*. Por ello, resulta natural exigirle a estos subconjuntos: que no sean el vacío, que si un subconjunto *grande* está contenido en otro, este, es *grande* y que la intersección de *grandes*, sea *grande*. Por otro lado, los ultrafiltros, al ser maximales, consiguen clasificar todos los subconjuntos.

Ejemplo 2.3. Si consideramos $X = \mathbb{N}$, los subconjuntos cofinitos $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A^c \text{ finito}\}$, son un filtro, pero no un ultrafiltro: Por un lado se cumplen las tres propiedades de los filtros:

1. Si A cofinito y $A \subseteq B$, B es cofinito.

2. la intersección de cofinitos es cofinita.

3. $\varnothing^c = \mathbb{N}$ luego $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

Pero por otro lado, no es posible clasificar todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$. Basta considerar los pares, que no son cofinitos, ni tampoco lo es su complementario, los impares.

Definición 2.4. Sean una sucesión (x_n) en $\mathbb{R}$ con la topología usual y un ultrafiltro $\mathcal{U}$ de $\mathbb{N}$. Si existe un punto $x \in \mathbb{R}$ tal que para todo entorno V de x se cumple

$$\{\, n \in \mathbb{N} : x_n \in V \,\} \in \mathcal{U}.$$

Decimos que x es el *ultralímite* de x_n respecto a $\mathcal{U}$ y lo denotamos como: $\lim_{n\to\mathcal{U}} x_n$, El límite en sentido clásico es un ultralímite con el filtro cofinito, así pues, en lugar de preguntarnos que ocurre para casi todos los índices n, ahora nos preguntamos que ocurre para un conjunto de índices *grande*.

Observación 2.3. La idea de ultralímite, nos permite hablar del límite de una sucesión aun cuando este no exista en el sentido usual. El motivo es que en un espacio compacto siempre existe el ultralímite de la sucesión y en un Hausdorff siempre es único.

- Compacidad $\implies$ existencia. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene ultralímite respecto a $\mathcal{U}$. En consecuencia, para cada $x \in X$ existe un entorno abierto U_x de x tal que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_x\} \notin \mathcal{U}$. Como el filtro es maximal: $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U_x\} \in \mathcal{U}$. Si existiera una subcubierta finita $X = \bigcup_{j=1}^n U_{x_j}$, entonces tendríamos:

$$\emptyset = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin X\} = \left\{ n \in \mathbb{N} : x_n \notin \bigcup_{j=1}^{n} U_{x_j} \right\} = \bigcap_{j=1}^{n} \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U_{x_j}\} \in \mathcal{U},$$

  lo cual es una contradicción.

- Haussdorf $\implies$ unicidad. Supongamos que $\lim_{n\to\mathcal{U}} x_n = x$ y $\lim_{n\to\mathcal{U}} x_n = y$ y Supongamos que $x \neq y$. Como X es Hausdorff, existen entornos abiertos disjuntos $U \ni x$ y $V \ni y$ tal que $U \cap V = \emptyset$. Por definición de ultralímite, se tiene $\{n : x_n \in U\} \in \mathcal{U}$, $\{n : x_n \in V\} \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es un filtro, la intersección de estos dos conjuntos también pertenece a $\mathcal{U}$: $\{n : x_n \in U\} \cap \{n : x_n \in V\} = \{n : x_n \in U \cap V\} \in \mathcal{U}$. Pero $U \cap V = \emptyset$, así que la intersección es vacía. Esto es imposible porque un ultrafiltro no puede contener el conjunto vacío. Por lo tanto, se concluye que $x = y$.

Proposición 2.2. Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$ con la topología usual y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ tal que $[c, \infty) \in \mathcal{U}$ para todo $c \in \mathbb{N}$. Entonces:

1. Si (x_n) converge en el sentido usual a un límite $L \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\lim_{n\to\mathcal{U}} x_n = L.$$

2. Si (x_n) y (y_n) son sucesiones en $\mathbb{R}$ y existen

$$\lim_{n\to\mathcal{U}} x_n = x \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\mathcal{U}} y_n = y,$$

   entonces

$$\lim_{n\to\mathcal{U}} (x_n + y_n) = x + y.$$

Demostración. (1) Considerar el conjunto

$$A_\varepsilon := \{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| < \varepsilon\}.$$

Como $x_n \to L$ en el sentido usual, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ y por tanto A_ε contiene a la cola $[N, \infty)$. por hipótesis $[N, \infty) \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es cerrado por superconjuntos, se tiene $A_\varepsilon \in \mathcal{U}$. Dado que esto ocurre para todo $\varepsilon > 0$, se deduce que $\lim_{n\to\mathcal{U}} x_n = L$.

(2) Supongamos que $\lim_{n\to\mathcal{U}} x_n = x$ y $\lim_{n\to\mathcal{U}} y_n = y$. Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de ultralímite,

$$A := \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \tfrac{\varepsilon}{2}\} \in \mathcal{U}, \quad B := \{n \in \mathbb{N} : |y_n - y| < \tfrac{\varepsilon}{2}\} \in \mathcal{U}.$$

Como $\mathcal{U}$ es un filtro, $A \cap B \in \mathcal{U}$. Para todo $n \in A \cap B$ se cumple

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto,

$$\{n \in \mathbb{N} : |(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon\} \in \mathcal{U},$$

y de nuevo por la definición de ultralímite se concluye que

$$\lim_{n\to\mathcal{U}} (x_n + y_n) = x + y. \qquad \square$$

Definición 2.5. Sea G un grupo contable. Una secuencia de subconjuntos finitos $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de G se llama *sucesión de Følner* si, para todo $g \in G$, se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|gF_n \triangle F_n|}{|F_n|} = 0,$$

donde $gF_n = \{gh : h \in F_n\}$ y $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, es la diferencia simétrica.

Definición 2.6. Sea G un grupo contable. Decimos que G satisface la *condición de Følner* si para todo subconjunto finito $S \subset G$ y todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito y no vacío $A \subset G$ tal que

$$\frac{|sA \triangle A|}{|A|} < \varepsilon \quad \text{para todo } s \in S.$$

Como vemos en el siguiente lema, ambas caracterizaciones son equivalentes, por lo que usaremos indistintamente una caracterización u otra según nos convenga:

Lema 2.1. Un grupo G contable satisface la condición de Følner si y sólo si posee una sucesión de Følner.

Demostración. Supongamos que G satisface la condición de Følner. Escribamos $G = \bigcup_n A_n$ como unión de subconjuntos finitos

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots.$$

Sea $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ para cada n. La condición de Følner implica entonces que, para cada n, existe un subconjunto finito $F_n \subset G$ tal que para todo $a \in A_n$ se cumple

$$\frac{|aF_n \triangle F_n|}{|F_n|} \leq \frac{1}{n}.$$

Dado que para todo $g \in G$ existe algún A_n que lo contiene (y, por tanto, todos los A_m con $m \geq n$ también lo contienen), se tiene que

$$\frac{|gF_n \triangle F_n|}{|F_n|} \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto, la sucesión $(F_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Følner en G.

La demostración del recíproco es inmediata: si (F_n) es una sucesión de Følner, basta tomar un F_n apropiado para un conjunto finito dado $S \subset G$ y un $\varepsilon > 0$. □

Teorema 2.2 (Caracterización de Følner)**.** Un grupo G contable satisface la condición de Følner si y solo si, es promediable.

Demostración. Comenzamos demostrando Følner implica promediable. Para ello usamos la noción de ultralímites que hemos introducido. Tenemos un grupo G y una secuencia de Følner (F_i), y queremos definir una medida μ sobre G. Una definición natural que utiliza nuestra secuencia de Følner sería

$$\mu(A) = \lim_{i\to\infty} \frac{|A \cap F_i|}{|F_i|}.$$

Por supuesto, este límite no necesariamente existe. Para superar esta dificultad técnica, tomamos un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre los números naturales que contenga los intervalos $[n, \infty)$. Entonces usamos un *ultralímite* en lugar del límite habitual:

$$\mu(A) = \lim_{i\to\mathcal{U}} \frac{|A \cap F_i|}{|F_i|}.$$

Resulta que los ultralímites tienen todas las propiedades que necesitamos. Es decir:

- μ es una medida de probabilidad. Es decir,

  $$\mu(G) = \lim_{i\to\mathcal{U}} 1 = 1,$$

  ya que el ultralímite coincide con el límite regular cuando este existe.

- μ es finitamente aditiva. Esto se debe a que los ultralímites conmutan con la suma de la misma forma que los límites ordinarios.

- μ es invariante por traslaciones a la izquierda. En efecto, ya que:

  $$\left|\frac{|gA \cap F_i|}{|F_i|} - \frac{|A \cap F_i|}{|F_i|}\right| = \left|\frac{|A \cap g^{-1}F_i|}{|F_i|} - \frac{|A \cap F_i|}{|F_i|}\right| \leq \frac{|A \cap (g^{-1}F_i \triangle F_i)|}{|F_i|} \to 0,$$

  por la definición de la sucesión de Følner.

Pasamos a demostrar la implicación recíproca. Para demostrarla usamos la caracterización de promediabilidad en medias, en lugar de en medidas. Sea

$$\Phi := \{f : G \to \mathbb{R} \mid f \geq 0,\ f \text{ tiene soporte finito y } \|f\|_{\ell^1(G)} = \sum_{g\in G} |f(g)| = 1\} \subset \ell^1(G).$$

Mostremos primero que, si G es promediable, para todo subconjunto finito $A \subseteq G$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $f \in \Phi$ tal que $\|f - \tau_a f\|_{\ell^1(G)} \leq \varepsilon$ para todo $a \in A$. Por reducción al absurdo, supongamos que existen $A \subseteq G$, $\varepsilon > 0$ tales que para todo $f \in \Phi$ existe algún $a \in A$ con $\|f - \tau_a f\|_{\ell^1(G)} > \varepsilon$. Por un lado, todas las funciones del conjunto $\{f - \tau_a f \mid f \in \Phi\} \subset \Phi$ están separadas del 0. Además, es un subconjunto convexo, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $H, G \in \{f - \tau_a f \mid f \in \Phi\}$:

$$\lambda H + (1-\lambda)G = \lambda(h - \tau_a h) + (1-\lambda)(g - \tau_a g) = [\lambda h + (1-\lambda)g] - \tau_a[\lambda h + (1-\lambda)g].$$

Donde $\lambda h + (1-\lambda)g \in \Phi$. Dado que tanto $\{f - \tau_a f \mid f \in \Phi\}$ como $B(0, \varepsilon/2)$ son convexos y el segundo es abierto, podemos usar el teorema de separación de Hahn-Banach y afirmar que existen $\beta \in \ell^1(G)^*$ y $t \in \mathbb{R}$ tales que $\beta(f - af) \geq t > 0$ para todo $f \in \Phi$. Sabemos, por ser un resultado clásico de análisis funcional, que $\ell^1(G)^* \cong \ell^\infty(G)$ y existe alguna $b \in \ell^\infty(G)$ (identificada con el funcional β) tal que

$$\langle f - \tau_a * f, b\rangle = \sum_{x \in G} (f - \tau_a * f)(x) b(x) \geq t,$$

para todo $f \in \Phi$. Tomando $f = \delta_y$ con $y \in G$, obtenemos

$$\langle \delta_y - \tau_a * \delta_y, b\rangle = \sum_{x \in G} \delta_y(x) b(x) - \delta_y(ax) b(x) = b(y) - b(ay) \geq t.$$

Así, $b(y) - b(ay) \geq t$ para todo $y \in G$. Pero como G es promediable, existe una media invariante a izquierda $M : \ell^\infty(G) \to \mathbb{R}$. Aplicando M a la desigualdad anterior se obtiene $M(b - ab) \geq t > 0$, lo que contradice la invariancia a izquierda de M, por tanto, $\|f - \tau_a f\|_{\ell^1(G)} \leq \varepsilon$.

Demostraremos ahora que para todo conjunto finito $A \subset G$ y todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito no vacío $F \subset G$ tal que

$$\frac{|aF \triangle F|}{|F|} \leq \varepsilon \quad \text{para todo } a \in A.$$

Por lo visto inmediatamente antes, para $A \subseteq G$ finito y $\varepsilon > 0$ fijos, existe $f \in \Phi$ tal que $\|f - af\|_{\ell^1(G)} \leq \varepsilon/|A|$ para todo $a \in A$. Como f tiene soporte finito, puede escribirse en una descomposición por niveles: $f = \sum_{i=1}^n c_i 1_{F_i}$, con conjuntos finitos no vacíos $F_1 \supseteq \cdots \supseteq F_n$ y constantes positivas $c_i > 0$. Además, $\sum_{i=1}^n c_i |F_i| = 1$ pues $f \in \Phi$. Ahora bien, $|f(g) - af(g)| \geq c_i$ para $g \in (aF_i \triangle F_i)$, así que

$$\sum_{i=1}^n c_i |aF_i \triangle F_i| \leq \|f - af\|_{\ell^1(G)} \leq \frac{\varepsilon}{|A|} \sum_{i=1}^n c_i |F_i|,$$

para todo $a \in A$. Por tanto,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{a \in A} c_i |aF_i \triangle F_i| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n c_i |F_i|.$$

Por el principio del palomar existe algún índice i tal que $\sum_{a \in A} |aF_i \triangle F_i| \leq \varepsilon |F_i|$, y por tanto $|aF_i \triangle F_i|/|F_i| \leq \varepsilon$ para todo $a \in A$, osea cumple la condición de Følner. □

2.4. Promediabilidad de los abelianos

Ahora que tenemos la existencia de sucesiones de Følner para probar la promediabilidad vamos a ver como diferentes grupos son promediables hasta llegar a los abelianos:

Proposición 2.3. Tenemos que:

1. si H y G contables promediables, entonces $H \times G$ es promediable.
2. Sea $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ una unión dirigida de subgrupos, es decir, para cualquier $\alpha, \beta \in I$ existe $\gamma \in I$ tal que $G_\alpha, G_\beta \subseteq G_\gamma$. Supongamos que cada G_α es contable y promediable. Entonces G también es promediable.

Demostración. (1) Sea G y H grupos promediables. Por promediabilidad existen secuencias de Følner $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en G y $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H, es decir, para todo $g \in G$,

$$\frac{|gA_n \triangle A_n|}{|A_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

y para todo $h \in H$,

$$\frac{|hB_n \triangle B_n|}{|B_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Consideremos los conjuntos

$$C_n := A_n \times B_n \subset G \times H.$$

Sea $(g, h) \in G \times H$. Observemos que

$$(g, h)C_n = (gA_n) \times (hB_n).$$

La diferencia simétrica satisface la cota

$$(g, h)C_n \triangle C_n \;\subset\; \big((gA_n \triangle A_n) \times B_n\big) \;\cup\; \big(A_n \times (hB_n \triangle B_n)\big),$$

y por tanto

$$|(g, h)C_n \triangle C_n| \le |gA_n \triangle A_n|\,|B_n| + |A_n|\,|hB_n \triangle B_n|.$$

Dividiendo por $|C_n| = |A_n|\,|B_n|$ obtenemos

$$\frac{|(g, h)C_n \triangle C_n|}{|C_n|} \le \frac{|gA_n \triangle A_n|}{|A_n|} + \frac{|hB_n \triangle B_n|}{|B_n|}.$$

Ahora, sea $f \in G \times H$. Proyectando sobre cada factor obtenemos conjuntos finitos $f_G := g \in G$ y $f_H := h \in H$. Dado $\varepsilon > 0$, por la propiedad de Følner para A_n y B_n existe N tal que para todo $n \ge N$:

$$\frac{|gA_n \triangle A_n|}{|A_n|} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad h \in F_H, \quad \frac{|hB_n \triangle B_n|}{|B_n|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, para todo (g, h) y $n \ge N$,

$$\frac{|(g, h)C_n \triangle C_n|}{|C_n|} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto muestra que (C_n) satisface la condición de Følner en $G \times H$. Por tanto $G \times H$ es promediable. $\square$

(2) Sea G un grupo y $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia dirigida por inclusión de subgrupos de G, es decir, $G = \bigcup_{i\in I} G_i$ y para todo i, j existe k tal que $G_i, G_j \subseteq G_k$. Supongamos que cada G_i es promediable. Queremos probar que G es promediable. Sea entonces $S \subset G$ un conjunto finito y $\varepsilon > 0$. Cada elemento de S pertenece a algún subgrupo G_i. Como la familia es dirigida, existe un índice k tal que $S \subset G_k$. Como G_k es promediable, se cumple la condición de Følner dentro de G_k. En particular, existe un conjunto finito no vacío $A \subset G_k$ tal que

$$\frac{|sA\triangle A|}{|A|} \leq \varepsilon \quad \text{para todo } s \in S.$$

Pero este mismo conjunto A puede considerarse como subconjunto de G, y la desigualdad anterior sigue siendo válida en G. Por lo tanto, para todo conjunto finito $S \subset G$ y todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $A \subset G$ que satisface la condición anterior y por tanto G cumple la condición de Følner

Proposición 2.4. El grupo $\mathbb{Z}$ es promediable.

Demostración. Queremos probar que $\mathbb{Z}$ es promediable usando secuencias de Følner, dado que es abeliano, usamos en este caso la notación aditiva de grupo en lugar de la multiplicativa. Consideremos los intervalos centrados en 0:

$$F_n = \{-n, -n+1, \ldots, 0, 1, \ldots, n\}.$$

Entonces $|F_n| = 2n + 1$. Sea $k \in \mathbb{Z}$:

$$k + F_n = \{k - n, \ldots, k + n\}.$$

La diferencia simétrica es

$$(k + F_n)\triangle F_n = (F_n \setminus (k + F_n)) \cup ((k + F_n) \setminus F_n).$$

Si $k > 0$, los elementos que no coinciden en la intersección son como mucho k en cada extremo. Por lo tanto,

$$|(k + F_n)\triangle F_n| \leq 2|k|.$$

Dividiendo entre $|F_n| = 2n + 1$, obtenemos

$$\frac{|(k + F_n)\triangle F_n|}{|F_n|} \leq \frac{2|k|}{2n+1} \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$ □

Proposición 2.5. $\mathbb{Z}^r$ con $r \in \mathbb{N}$ es promediable.

Demostración. Dado que $\mathbb{Z}$ es promediable y el producto directo de promediables es promediable, se tiene el resultado □

Proposición 2.6. Todo grupo abeliano finitamente generado es promediable.

Demostración. Por el teorema de clasificación de grupos tenemos que si G es abeliano finitamente generado: $G \cong \mathbb{Z}^d \oplus \tau$, con $d \in \mathbb{N}$, τ grupo finito y $\oplus$ el producto directo de para grupos abelianos (notación suma). Acabamos de ver que $\mathbb{Z}^d$ es abeliano, por el teorema 2.1 (1), los finitos son promediables y de nuevo usando que el producto directo es promediable se tiene el resultado. □

Proposición 2.7. Los grupos abelianos son promediables.

Demostración. Comenzamos viendo un resultado clásico: todo grupo abeliano es unión dirigida de subgrupos finitamente generados (abelianos). Veámoslo: Sea

$$\mathcal{F} := \{\langle F \rangle : F \subseteq G,\ F \text{ finito}\},$$

donde $\langle F \rangle$ denota el subgrupo generado por F. Para cada $g \in G$ se tiene que $g \in \langle \{g\} \rangle$, de modo que

$$G = \bigcup_{H \in \mathcal{F}} H.$$

Además, si $H_1 = \langle F_1 \rangle$ y $H_2 = \langle F_2 \rangle$ son dos elementos de $\mathcal{F}$, entonces el conjunto $F := F_1 \cup F_2$ es finito y satisface $H_1, H_2 \subseteq \langle F \rangle$. Por tanto, $\mathcal{F}$ es una familia dirigida por inclusión. Se concluye así que G es la unión dirigida de sus subgrupos finitamente generados. Usando la proposición 2.3 (1) tenemos que la unión dirigida de promediables es promediable y con la proposición 2.6 tenemos que todos los finitamente generados abelianos, son abelianos. $\square$

Capítulo 3

Conclusiones

Este último capítulo nos brinda herramientas para profundizar en la inexistencia de teoremas tipo Banach-Tarski sobre la recta o el plano. En primer lugar, procedemos sobre la recta real. Observamos que $E(1)$, el grupo de isometrías de la recta real, está formado únicamente por traslaciones, y por lo tanto es un grupo abeliano. La Proposición 2.7 garantiza que $E(1)$ es promediable y por el corolario 2.1, $\mathbb{R}$ no es $E(1)$-paradójico.

En dimensión dos, tenemos que $\mathbb{R}^2$ es abeliano y por tanto promediable, así que de nuevo por el corolario 2.1 $\mathbb{R}^2$ no es $\mathbb{R}^2$-paradójico. El grupo de isometrías del plano euclídeo, $E(2)$, no es abeliano. Pese a esto, es resoluble y admite una serie normal abeliana, $I \triangleleft SO(2) \triangleleft E(2)$. El grupo $SO(2)$ está formado por rotaciones con centro en el origen, y por lo tanto es abeliano. El cociente $E(2)/SO(2)$ es isomorfo al grupo de traslaciones del plano euclídeo, también abeliano. Por la proposición 2.7, $SO(2)$ y $E(2)/SO(2)$ son ambos promediables, y por teorema 2.1 (3), $E(2)$ es también promediable. Por el colorario 2.1 $\mathbb{R}^2$ también es $E(2)$-paradójico.

A modo de conclusión, este trabajo nos ha permitido recorrer un camino que conecta paradojas geométricas con propiedades profundas de la teoría de grupos y la teoría de la medida. Con ello, no solo hemos comprobado la imposibilidad de extender ciertas paradojas a dimensiones inferiores, sino que también hemos puesto de manifiesto la riqueza y unidad de las matemáticas, donde geometría, álgebra y análisis confluyen de manera sorprendente. Este estudio no cierra la discusión, sino que abre nuevas vías para explorar cómo las herramientas modernas como la promediabilidad pueden seguir arrojando luz sobre problemas clásicos.

Bibliografía

[1] S. Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, 1993.

[2] L. M. Wapner, *The Pea and the Sun: A Mathematical Paradox*, CRC Press, 2005.

[3] T. Tao, *Notes on Amenability, the Ping Pong Lemma, and the Banach-Tarski Paradox*, 2010. Terry Tao's blog.

[4] T. Tao, *Some Notes on Amenability*, 2008. Terry Tao's blog.

[5] K. Juschenko, *Amenability of Discrete Groups by Examples*, 2015.

[6] A. Garrido, *An Introduction to Amenable Groups*, Oxford Advanced Class in Algebra, 2013.

[7] I. Namioka, *Følner's Conditions for Amenable Semi-Groups*, *Mathematica Scandinavica*, vol. 15, pp. 18–28, 1964.

[8] I. Goldbring, *Ultrafilters Throughout Mathematics*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 220, American Mathematical Society, 2022.