El Teorema de Beurling

Paula Cabrero Lample

Grado en Matemáticas
Trabajo Fin de Grado

Director: Luciano Abadías Ullod

Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

Universidad de Zaragoza

Zaragoza, Noviembre 2025

Resumen

En Análisis Funcional y Teoría de Operadores, uno de los problemas abiertos de más renombre es el *Problema del Subespacio Invariante*. En concreto, se estudia si dado un operador T lineal y acotado en un espacio de Banach X complejo y separable, se puede identificar un subespacio propio M que sea invariante bajo dicho operador.

Desde que el matemático John Von Nuemann planteara la pregunta a principios del siglo XX, se han realizado diferentes esfuerzos para probar la veracidad o falsedad del enunciado. Aronsajn y Smith [4] demostraron en 1956 la existencia de un subespacio invariante para todo operador *compacto* en un espacio de Banach. El siguiente resultado fue probado con técnicas diversas, primero por Bernstein y Robinson, y más tarde por Halmos [5], extendiendo a los operadores polinomialmente compactos.

En 1973, Lomonosov [6] generalizó todos los resultados conseguidos hasta el momento, demostrando que todo operador no escalar que conmute con un operador compacto no nulo tiene un subespacio hiperinvariante, es decir, invariante para todos los operadores que conmuten con él.

El enunciado, sin embargo, no es cierto en su forma más general. Se han encontrado contraejemplos al problema, por lo que el objetivo actual no es probar el resultado para los operadores en espacios de Banach arbitrarios, sino para espacios de Banach reflexivos y en concreto, para espacios de Hilbert.

La finalidad de este trabajo es caracterizar el *retículo* de subespacios invariantes de un operador específico, el operador *shift* en $\ell_2(\mathbb{N}_0)$, que se define como:

$$S(a_1, a_2, \ldots) = (0, a_1, a_2, \ldots),$$

y demostrar para ello el conocido como *Teorema de Beurling*.

Para ello, en el primer capítulo se introducirán algunos conceptos que serán necesarios para la comprensión de los enunciados posteriormente presentes en la memoria. Comenzaremos hablando de la teoría de los espacios de Banach y, en concreto, de los espacios de Hilbert. Estos últimos resultan particularmente útiles por sus propiedades derivadas de la noción de ortogonalidad definida a partir del producto interno. Se incluirán brevemente también resultados de la teoría de la medida, resaltando la importancia de los espacios $L_p(\mu)$, y se definirá la idea de aproximación de la identidad, centrándonos en una muy conocida como es el núcleo de Poisson. Se incluirá asimismo la definición de orden y cómo esta propiedad nos permite caracterizar el conjunto de subespacios invariantes de un operador como un retículo.

En el segundo capítulo, se transformará el espacio $\ell_2(\mathbb{N}_0)$, mediante un isomorfismo isométrico, en el espacio de Hardy, H^2, que es el espacio de las funciones analíticas en el disco unidad abierto del plano complejo cuyos coeficientes del desarrollo analítico están en $\ell_2(\mathbb{N}_0)$. En dicho espacio el operador shift S de $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ se identifica con el operador $M_z : f(z) \to zf(z)$. Esta transformación es particularmente relevante porque en H^2 existen herramientas para caracterizar el retículo del operador M_z. Se incluirán también en este capítulo el *Teorema del límite radial*, que nos permitirá caracterizar la norma de una función en H^2 mediante su comportamiento en la frontera, a partir de funciones en $L_2(\mathbb{T})$. Por último,

se definirán los productos de Blaschke, y su generalización, las funciones interiores: son estas últimas funciones las que caracterizarán los subespacios invariantes de M_z.

En el tercer y último capítulo estaremos ya en disposición de demostrar el *Teorema de Beurling*:

Teorema 0.1. *Un subespacio cerrado Y de H^2 es invariante para M_z si y solo si existe una función interior ϕ tal que $Y = \phi H^2$.*

Dicho teorema caracteriza completamente el retículo del operador M_z y, por tanto, del operador *shift* S en $\ell_2(\mathbb{N}_0)$, nuestro objetivo inicial. Finalmente se presentarán algunas propiedades de orden entre los subespacios invariantes a partir de las características de las funciones interiores que los definen.

Abstract

In Functional Analysis and Operator Theory, one of the most renowned open problems is the *Invariant Subspace Problem*. Specifically, the question is whether, given a bounded linear operator T on a complex separable Banach space X, one can identify a proper subspace M that is invariant under T.

Since the mathematician John von Neumann posed this question in the early 20th century, various efforts have been made to prove its truth or falsity. Aronszajn and Smith [4] demonstrated in 1956 the existence of an invariant subspace for every *compact* operator on a Banach space. The next result was obtained by different techniques, first by Bernstein and Robinson, and later by Halmos [5], extending it to polynomially compact operators.

In 1973, Lomonosov [6] generalized all results achieved up to that point, proving that every nonscalar operator commuting with a nonzero compact operator has a hyperinvariant subspace, that is, a subspace invariant under all operators that commute with it.

However, the statement is not true in its most general form. Counterexamples to the problem have been found, so the current goal is no longer to prove the result for operators on arbitrary Banach spaces, but rather for reflexive Banach spaces, and in particular, for Hilbert spaces.

The aim of this work is to characterize the *lattice* of invariant subspaces of a specific operator: the *shift* operator on $\ell_2(\mathbb{N}_0)$, defined as

$$S(a_1, a_2, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots),$$

and to prove, as a consequence, the well-known *Beurling's Theorem*.

To this end, the first chapter introduces several concepts necessary for understanding the subsequent results. We begin by discussing Banach spaces, and in particular, Hilbert spaces, which are especially useful due to the notion of orthogonality derived from the inner product. We will also briefly recall some results from measure theory, highlighting the importance of $L_p(\mu)$ spaces, and define the concept of approximation to the identity, focusing on a particularly well-known example: the Poisson kernel. We will also introduce the notion of order, which allows us to characterize the collection of invariant subspaces of an operator as a lattice.

In the second chapter, the space $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ is transformed, via an isometric isomorphism, into the Hardy space H^2, consisting of analytic functions on the open unit disk in the complex plane whose power series coefficients belong to $\ell_2(\mathbb{N}_0)$. In this space, the shift operator S on $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ corresponds to the operator $M_z : f(z) \mapsto zf(z)$. This transformation is particularly relevant because, in H^2, there exist powerful tools to characterize the lattice of invariant subspaces of M_z. This chapter also includes the *Radial Limit Theorem*, which allows us to describe the norm of a function in H^2 through its boundary behavior, using functions in $L_2(\mathbb{T})$. Finally, we introduce Blaschke products and their generalization, the inner functions: it is precisely these inner functions that will characterize the invariant subspaces of M_z.

In the third and final chapter, we will be ready to prove the *Beurling Theorem*:

Teorema 0.2. *A closed subspace Y of H^2 is invariant under M_z if and only if there exists an inner function ϕ such that $Y = \phi H^2$.*

This theorem completely characterizes the lattice of the operator M_z and, consequently, that of the shift operator S on $\ell_2(\mathbb{N}_0)$, which was our initial goal. Finally, some order properties among invariant subspaces will be presented, derived from the characteristics of the inner functions that define them.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Se presentan en este capítulo las definiciones de los principales objetos matemáticos que trabajaremos y los resultados que nos interesarán para el desarrollo del trabajo. Entre ellos, se introducen algunos conceptos sobre espacios de Banach y espacios de Hilbert, según los textos de Rudin ([1], [2]), a los que nos referimos para las demostraciones que aquí se omiten. También se definirán los espacios L_p, tanto con la medida de Lebesgue como con la medida discreta y la relación entre ellos a través de la transformada de Fourier. Además, se introducirá el concepto de aproximación de la identidad, según [3]. Por último, se incluyen ciertos conceptos sobre la estructura de los subespacios invariantes y, en particular, sobre el orden que existe en ella. Para ello nos referimos al texto [7].

1.1. Espacios de Banach

Consideramos un espacio vectorial complejo X, es decir, un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. Sobre este espacio definimos una norma, $\|\cdot\|_X$.

Definición 1.1. Un espacio vectorial complejo normado X se dice **espacio de Banach** si es un espacio completo respecto a la métrica definida a partir de la norma, es decir, si toda sucesión de Cauchy es convergente respecto a la norma definida.

Se considera ahora los operadores sobre un espacio de Banach X en sí mismo, es decir, las aplicaciones de la forma $T : X \to X$.

Definición 1.2. Un operador T lineal se dice acotado si existe $k > 0$ tal que $\|Tx\|_X \leq k\|x\|_X \ \forall x \in X$.

Denotaremos por $\mathscr{B}(X)$ el conjunto de los operadores lineales y acotados sobre X. Es posible definir sobre $\mathscr{B}(X)$ una norma para los operadores, a partir de la norma del espacio ambiente X, es decir,

$$\|T\|_{\mathscr{B}(X)} = \sup\{\|Tx\|_X : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}. \tag{1.1}$$

$\mathscr{B}(X)$ resulta ser también espacio de Banach respecto a $\|\cdot\|_{\mathscr{B}(X)}$.

1.2. Retículo de un operador

Se comenta en esta sección la estructura de los subespacios invariantes de un operador. X en este caso denota un espacio de Banach complejo.

Definición 1.3. Un subconjunto $N \subset X$ se dice variedad lineal si existe un subespacio vectorial $V \subset X$ y un vector $x_0 \in X$ tal que $N = x_0 + V = \{x_0 + v | v \in V\}$. Llamamos **subespacio** M a cualquier variedad lineal cerrada en X. Además, decimos que un subespacio es **propio** o no trivial si $M \neq \{0\}, X$.

Definición 1.4. Dado un operador $T \in \mathscr{B}(X)$, decimos que un subespacio $M \subseteq X$ es **invariante** por T si $T(M) \subseteq M$.

El conjunto de los subespacios invariantes por un operador T tiene una estructura adicional de orden.

Definición 1.5. Una relación binaria $\leq$ en un conjunto A es una relación parcial de orden en A si $\forall a, b, c \in A$:

I. $a \leq a$.

II. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

III. Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.

Un conjunto A con una relación parcial de orden se llama conjunto parcialmente ordenado. Sea A un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado B. Se dice que $b \in B$ es una cota superior para A si $a < b\ \forall a \in A$. Se dice que b es el supremo de A si es la menor de las cotas superiores, es decir, si $b \leq b'$ para todo $b' \in B$ cota superior de A. Las definiciones son equivalentes para los conceptos de cota inferior e ínfimo.

Definición 1.6. Un conjunto parcialmente ordenado A se dice retículo si para toda pareja de elementos $a, b \in A$ los elementos $sup\{a, b\}$ y $inf\{a, b\}$ existen y pertenecen a A.

Es decir, siempre podemos encontrar un supremo para cada par de elementos, pero ello no implica que estos dos elementos sean siempre comparables, sino tendríamos una relación de orden total.

Regresando al caso de los operadores, consideramos el conjunto de sus subespacios invariantes y la relación de inclusión entre conjuntos $\subseteq$, que es una relación binaria.

Definición 1.7. Dato un operador $T \in \mathscr{B}(X)$, se llama **retículo de subespacios invariantes por** T al conjunto

$$Lat\ T = \{M \subseteq X \,|\, M \text{ es invariante por } T\}.$$

Proposición 1.8. *Dado un operador $T \in \mathscr{B}(X)$, $Lat\ T$ es un retículo, donde $N \leq M$ si $N \subseteq M$.*

Demostración. Es fácil ver que la inclusión de conjuntos es una relación parcial de orden, pues cumple las tres propiedades de la Definición 1.5.

Por otro lado, sean $N, M \in Lat\ T$. El subespacio $N \cap M$ es el mayor subespacio contenido en N y M a la vez, por tanto $inf\{M, N\} = M \cap N$ y además pertenece a $Lat\ T$: dado un $x \in M \cap N$ cualquiera, $x \in N \wedge x \in M$, luego $Tx \in N \wedge Tx \in M$ por ser N, M invariantes por T, por tanto $Tx \in M \cap N$.
Igualmente, $sup\{N, M\} = \overline{span}\{N \cup M\}$ es el menor subespacio cerrado que contiene a M, N [1]. Falta ver que $\overline{span}\{N \cup M\}$ es invariante por T. Tomamos un $x \in span\{N \cup M\} \Longrightarrow x = \alpha_N v_n + \alpha_M v_M$, donde $\alpha_N, \alpha_M \in \mathbb{C}$ y $v_N \in N, v_N \in M$, es decir, se puede expresar como combinación lineal de elementos de N y M. Entonces $Tx = T(\alpha_N v_n + \alpha_M v_M) = \alpha_N T v_N + \alpha_M T v_M \in span\{N \cup M\}$ por ser $Tv_N \in N \subset span\{N \cup M\}$, $Tv_M \in M \subset span\{N \cup M\}$ y ser $span\{N \cup M\}$ espacio vectorial. Por último, para ver que la clausura también es invariante por T sea $x \in \overline{span}\{N \cup M\}$ tal que $x = \lim_{n \to \infty} x_n$, con $x_n \in span\{N \cup M\}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

[1] Recordemos que $M \cup N$ no es un espacio vectorial

T es un operador acotado, y por consiguiente, continuo: se demuestra con la definición de operador acotado aplicada al vector y, con $\|y\| \to 0$. Luego podemos intercambiar el operador y el límite y se sigue $Tx = T \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n \in \overline{span}\{N \cup M\}$, dado que $Tx_n \in span\{N \cup M\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ como hemos visto anteriormente y por ser $\overline{span}\{N \cup M\}$ un cerrado. □

Esta estructura adicional será importante para determinar relaciones entre los diferentes subespacios invariantes de un determinado operador.

1.3. Espacios de Hilbert

Una clase de espacios de Banach muy relevante son los espacios de Hilbert, en los que la norma se define a partir del producto interno o producto interior, según $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$. Denotaremos a dichos espacios con $\mathscr{H}$ para distinguirlos de los espacios de Banach generales. Los espacios de Hilbert son ampliamente utilizados en Matemáticas porque generalizan la idea de espacio euclídeo a espacios más generales. Una de las propiedades más interesantes y útiles que heredan de los espacios euclídeos es la noción de ortogonalidad.

Definición 1.9. Decimos que $x \in \mathscr{H}$ es **ortogonal** a $y \in \mathscr{H}$, y se denota $x \perp y$, si $\langle x, y\rangle = 0$.

Notar que la relación de ortogonalidad es simétrica, ya que el producto interno es antisimétrico. Dos resultados consecuencia de la noción de ortogonalidad son los presentados a continuación.

Teorema 1.10. *[[1], Teorema 12.4] Si M es un conjunto cerrado de $\mathscr{H}$ se tiene*

$$\mathscr{H} = M \oplus M^{\perp},$$

donde $M^{\perp} = \cap_{x\in M} x^{\perp}$.

Es decir, M y $M^{\perp}$ son subespacios de $\mathscr{H}$, tal que su intersección es $\{0\}$ y su suma (directa) es $\mathscr{H}$.

Definición 1.11. Dado un conjunto de vectores $\{e_i\}_{i\in I} \subset \mathscr{H}$ decimos que es un conjunto ortonormal si

$$\begin{cases} \langle e_i, e_j\rangle = 0, & \text{si } i \neq j \\ \langle e_i, e_j\rangle = 1, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Se dice que dicho conjunto es maximal si no se puede añadir otro vector $y \in \mathscr{H}$, $y \neq 0$, a $\{e_i\}_{i\in I}$ de modo que el conjunto resultante siga siendo ortonormal. Si el conjunto $\{e_i\}_{i\in I} \subset \mathscr{H}$ es ortonormal y maximal se dice **base ortonormal** del espacio.

Teorema 1.12. *[[1], Teorema 4.22]. Todo conjunto ortonormal $\{e_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{H}$ está contenido en un conjunto ortonormal maximal en $\mathscr{H}$, es decir, en una base ortonormal.*

Como en un espacio de Hilbert no trivial siempre podemos encontrar un conjunto ortonormal, formado por un vector del espacio que tenga norma 1, siempre existirá una base ortonormal en $\mathscr{H}$.

La prueba del Teorema 1.12 es consecuencia de aplicar el Teorema de Maximalidad de Hausdorff, que dice que todo conjunto parcialmente ordenado contiene un subconjunto maximal totalmente ordenado. En nuestro caso, basta considerar la relación de orden dada por la inclusión entre conjuntos. Para más detalles nos remitimos a [1] (Teorema 4.21, Teorema 4.22).

Los coeficientes de un vector $x \in \mathscr{H}$ en una base ortonormal, que denotaremos $\hat{x}(i) = \langle x, e_i \rangle$, tienen nombre propio y se conocen como **coeficientes de Fourier**. La Identidad de Parseval expresa la norma de un vector en función de ellos.

Teorema 1.13. *[Identidad de Parseval, [1], Teorema 4.18]. Sea $x \in \mathscr{H}$ y sea $\{e_i\}_{i \in I}$ una base ortonormal de $\mathscr{H}$. Entonces*

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

1.4. Espacios de medida y núcleos de sumabilidad

Introducimos algunos conceptos de la teoría de la medida aplicados a espacios de Banach. Consideramos $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ donde X es un espacio cualquiera, $\mathfrak{M}$ una σ-álgebra sobre X y μ una medida positiva en dicho espacio medible.

Definición 1.14. Sea $1 \leq p < \infty$. Se define el espacio $\mathfrak{L}_p(\mu)$ como el conjunto de todas las funciones f medibles complejas sobre X tales que $\left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} < +\infty$. Para $p = 1$, una función $f \in \mathfrak{L}_1(\mu)$ se dice que es integrable Lebesgue.

Sobre $\mathfrak{L}_p(\mu)$ puede definir una norma para tener una noción de distancia. La elección obvia y más directa parece ser $\|f\|_{\mathfrak{L}_p(\mu)} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$. Sin embargo, con esta definición no se obtiene una norma ya que no es cierto que $\|f\|_{\mathfrak{L}_p(\mu)} = 0 \Rightarrow f = 0$, sino que $f = 0$ *a.e* en X. La notación *a.e* en X quiere decir que la propiedad se cumple en X salvo tal vez en un conjunto de medida nula. Es necesario, pues, antes de definir la norma, introducir la relación de equivalencia $f \sim g \iff f = g$ *a.e* en X.

Definición 1.15. Sea $(X, \mathfrak{M})$ un espacio de medida y sea $L_p(\mu) = \mathfrak{L}_p(\mu)/\sim$. Si $1 \leq p < \infty$ dada una función $f \in L_p(\mu)$ se define su norma en dicho espacio como

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$, se define $L_\infty(\mu)$ como el conjunto de funciones medibles con la relación de equivalencia $f \sim g \iff f = g$ *a.e* en X tales que es finita la cantidad

$$\|f\|_{L_\infty} = \text{ínf}\left\{ c > 0 \;\middle|\; \exists N \subseteq \Omega,\ \mu(N) = 0,\ \forall t \in \Omega \setminus N : |f(t)| \leq c \right\}.$$

Igualmente se pueden definir los espacios $L^p_{loc}(\mu)$ en los que la definición es exactamente la misma, salvo que la condición de integral finita (o ínfimo finito para el caso $p = \infty$) es sobre cualquier conjunto compacto del espacio y no necesariamente sobre todo el mismo.

La norma en los espacios $L_p(\mu)$, definida a partir de la noción de medida, permite trabajar tanto con la teoría de la medida como con la de los espacios de Banach, puesto que se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.16 ([1], Teorema 3.11)**.** *Los espacios $L_p(\mu)$ son espacios de Banach. Para $p = 2$, $L_2(\mu)$ es un espacio de Hilbert.*

Consideramos ahora el espacio $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ y sea $\mathbb{T}$ su frontera, es decir, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$. Sea $L_p(m_1)$, donde m_1 denota la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{T}$. A partir de ahora escribiremos $L_p(\mathbb{T})$ en vez de $L_p(\mu)$ para remarcar el espacio ambiente, ya que la medida será siempre la de Lebesgue.

Para $p = 1$ sabemos que $L_1(\mathbb{T})$ es espacio vectorial normado completo, con la suma de vectores y el producto por escalares. Se introduce una aplicación adicional sobre la estructura de espacio vectorial, el producto de vectores para $L_1(\mathbb{T})$, que recibe el nombre de **producto de convolución**. Este producto da a $L_1(\mathbb{T})$, considerando su estructura algebraica, una estructura de álgebra de Banach.

Definición 1.17. Dadas $f, g \in L_1(\mathbb{T})$ su producto de convolución es la función en $L_1(\mathbb{T})$

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt.$$

Notar que la condición $f \in L^1(\mathbb{T})$ es equivalente a pedir que sea $f \in L^1([-\pi, \pi])$, con $f(\pi) = f(-\pi)$ por la identificación $[-\pi, \pi] \cong \mathbb{T}$.

Definición 1.18. Se define el núcleo de Poisson, con $\theta \in [-\pi, \pi]$ y $0 \le r < 1$, como

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}. \tag{1.2}$$

Se prueba fácilmente que está bien definido, es decir, la serie es (absolutamente) convergente para $0 \le r < 1$. De hecho, se tiene el siguiente lema.

Lema 1.19.

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2} \qquad \theta \in [-\pi, \pi], \quad 0 \le r < 1.$$

Demostración. Partiendo de la definición, dividimos la serie en dos sumatorios, uno para $n \ge 0$ y otro para $n < 0$ aplicando en el segundo el cambio de variable $n = -m$. Tomamos también $w = re^{i\theta}$.

$$P_r(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (re^{i\theta})^n + \sum_{m=1}^{\infty} (re^{-i\theta})^m = \sum_{n=0}^{\infty} w^n + \sum_{m=0}^{\infty} \overline{w}^m - 1 = \frac{1}{1-w} + \frac{\overline{w}}{1-\overline{w}} = \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2} = \frac{1-r^2}{1-2rcos(\theta)+r^2}.$$

□

Proposición 1.20. *El núcleo de Poisson cumple las siguientes propiedades*

(a) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = 1.$

(b) $|P_r(\theta)| \le \frac{2}{1-r}$ *para todo* $\theta \in [-\pi, \pi]$.

(c) $|P_r(\theta)| \le C\frac{(1-r)}{\theta^2}$ *para todo* $\theta \in [-\pi, \pi]$.

En general, una familia de funciones que cumple estas propiedades se conoce como **aproximación de la identidad**, según la definición dada por [3], Capítulo 3.2. De todas maneras, no parece haber una definición específica porque las propiedades que se exigen varían ligeramente en la bibliografía.

Demostración. (a)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} = 1.$$

La serie e integral podemos intercambiarlas por la convergencia absoluta de la serie de Poisson [2].
El último paso se debe a que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ la primitiva $\frac{e^{in\theta}}{in}$ se anula al evaluar en los extremos. En

[2]La serie que surge de considerar los valores absolutos de los términos de la serie de Poisson es la serie geométrica, que sabemos converge $\forall r < 1$,

concreto esto prueba que $P_r \in L_1(\mathbb{T})\ \forall r \in [0,1)$. Notar que en particular como el núcleo de Poisson es definido positivo, $|P_r(\theta)| = P_r(\theta)\ \forall \theta \in [-\pi,\pi]$, y por tanto $\|P_r\|_{L_1(\mathbb{T})} = 1$, $\forall r \in [0,1)$.

(b)
$$|P_r(\theta)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n + \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1+r}{1-r} \leq \frac{2}{1-r}.$$

(c) Sea $\theta \in [-\pi,\pi]$. Así, $1-2r\cos(\theta)+r^2 = (1-r)^2+2r(1-\cos(\theta)) \geq 2r(1-\cos\theta) \geq C\theta^2$, $C>0$. Entonces,
$$|P_r(\theta)| = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2} \leq C\frac{1-r}{\theta^2}.$$

□

La convolución de una función con el núcleo de Poisson por su relevancia, tiene nombre propio y se conoce como integral de Poisson.

Definición 1.21. Dada $f \in L_1(\mathbb{T})$, se define su **integral de Poisson** como la función
$$P[f](re^{i\theta}) = (f * P_r)(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-y)f(y)dy. \tag{1.3}$$

Dado que $P_r \in L_1(\mathbb{T})\ \forall r \in [0,1)$ la convolución está bien definida de acuerdo a la Definición1.17.

Teorema 1.22. *Sea $f \in L_1(\mathbb{T})$ y sea $\{P_r(\theta)\}_r$ el núcleo de Poisson. Entonces,*
$$(f*P_r)(x) \to f(x) \quad r \to 1^- \quad a.e\ en\ \mathbb{T}.$$

Para probar el resultado, necesitamos definir un nuevo concepto e introducir un lema técnico.

Definición 1.23. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y $t \in \mathbb{R}$. Decimos que t es un punto de Lebesgue para f si
$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{m(B(0,\delta))}\int_{B(0,\delta)} |f(t-\theta)-f(t)|d\theta = 0.$$

Lema 1.24. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y sea $t \in \mathbb{R}$ un punto de Lebesgue. Definimos*
$$\mathscr{A}(1-r) = \frac{1}{1-r}\int_{|\theta|<1-r} |f(t-\theta)-f(t)|d\theta, \quad 0<r<1^-.$$

Se tiene que $\mathscr{A}(1-r)$ es continua para $0<r<1^-$, está acotada y $\mathscr{A}(1-r) \xrightarrow{r\to 1^-} 0$.

Demostración. La continuidad de $\mathscr{A}(1-r)$ en $(0,r)$ sigue de la continuidad absoluta de la integral de Lebesgue (ver [1], Teorema 7.11, Teorema 7.18, que no es el objetivo de este trabajo y llevaría mucho tiempo desarrolarlo). Respecto al límite, notar que $m(B(0,1-r)) = 2(1-r)$ y, dado que t es un punto de Lebesgue, se tiene, por definición,
$$\lim_{r\to 1^-} \mathscr{A}(1-r) = 2\lim_{r \to 1^-} \frac{1}{m(B(0,1-r))}\int_{B(0,1-r)} |f(t-\theta)-f(t)|d\theta \longrightarrow 0.$$

Además, como el límite es cero y la función es continua, sabemos que la función estará acotada en un entorno $(\varepsilon,1^-)$, es decir, $\mathscr{A}(1-r)$ es finito para todo $\varepsilon<r<1^-$. Para $0<r'<\varepsilon$, $\mathscr{A}(1-r') \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\int_{|\theta|<1-\varepsilon}(|f(t-\theta)|+|f(t)|)d\theta \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}+2|f(t)| < \infty$, donde $|f(t)|$ es finito por ser un punto de Lebesgue, ver [9, Teorema 3.21]. □

Demostración. (*Del teorema 1.22*) Hay que ver que $|(f*P_r)(t)-f(t)|\to 0$ a.e en $\mathbb{T}$. Sea $t\in[-\pi,\pi]$ un punto de Lebesgue. Comenzamos reescribiendo la diferencia entre las funciones, usando la propiedad (a) en Teorema 1.20.

$$|(f*P_r)(t)-f(t)|=|\int_{-\pi}^{\pi}f(t-\theta)-f(t)P_r(\theta)d\theta|\leq\int_{-\pi}^{\pi}|f(t-\theta)-f(t)||P_r(\theta)|d\theta.$$

Ahora, queremos extender la integral a toda la recta real para aplicar el Lema 1.24. Basta ver a f y P_r como funciones definidas en $[-\pi,\pi]$ con el mismo valor en los extremos del intervalo y asignándoles a ambas funciones el valor 0 fuera del intervalo $[-\pi,\pi]$. Separamos la última integral en dos términos:

$$\int_{|\theta|<1-r}|f(t-\theta)-f(t)||P_r(\theta)|d\theta+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k(1-r)\leq|\theta|\leq 2^{k+1}(1-r)}|f(t-\theta)-f(t)||P_r(\theta)|d\theta.$$

Para la primera integral, usamos la propiedad (b) en Teorema 1.20 del núcleo de Poisson,

$$\int_{|\theta|<1-r}|f(t-\theta)-f(t))||P_r(\theta)|d\theta\leq\frac{2}{1-r}\int_{|\theta|<1-r}|f(t-\theta)-f(t)|d\theta=2\mathscr{A}(1-r).$$

Respecto al resto de integrales, cada término de la serie cumple, usando ahora la propiedad (c) del núcleo de Poisson,

$$\int_{2^k(1-r)<|\theta|\leq 2^{k+1}(1-r)}|f(t-\theta)-f(t)||P_r(\theta)|d\theta\leq\frac{C(1-r)}{(2^k(1-r))^2}\int_{2^k(1-r)<|\theta|\leq 2^{k+1}(1-r)}|f(t-\theta)-f(t)|d\theta$$

$$\leq\frac{2C}{2^k2^{k+1}(1-r)}\int_{|\theta|\leq 2^{k+1}(1-r)}|f(t-\theta)-f(t)|d\theta=\frac{2C}{2^k}\mathscr{A}(2^{k+1}(1-r)).$$

Por tanto,

$$|(f*P_r)(t)-f(t)|\leq 2\mathscr{A}(1-r)+2C\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\mathscr{A}(2^{k+1}(1-r)).$$

Por la convergencia de la serie geométrica, sabemos que dado $\varepsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=N}^{\infty}2^{-k}<\varepsilon$. Además, hemos probado, en el Lema 1.24 que $\mathscr{A}(2^{k+1}(1-r))<M$, con $M>0$ constante. Por otro lado, si tomamos r tal que $1-r$ es suficientemente cercano a 0, se tiene por el Lema 1.24, para $k\in 0,1,\ldots,N$ que $\mathscr{A}(2^k(1-r))<\frac{\varepsilon}{N+1}$. Así, finalmente, dado $\varepsilon>0$

$$|(f*P_r)(t)-f(t)|\leq C'\varepsilon.$$

El teorema de diferenciación de Lebesgue [[3], Corolario 1.6] nos dice que casi todo punto en $\mathbb{T}$ es un punto de Lebesgue, lo que completa la prueba. □

1.5. La transformada de Fourier entre $L_2(\mathbb{T})$ y $\ell_2(\mathbb{T})$

Para $p=2$, $L_2(\mathbb{T})$ es un espacio de Hilbert. Dadas dos funciones f,g en $L_2(\mathbb{T})$, se define el producto interno y se obtiene, a partir de este, la norma del espacio.

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\theta, \tag{1.4}$$

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{T})}=\langle f,f\rangle^{1/2}=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|^2d\theta\right)^{1/2}. \tag{1.5}$$

Notar que la definición de la norma coincide con la Definición 1.15, salvo por el factor 2π, que es un factor de normalización y se incluye en la definición de la norma cuando el espacio tiene medida finita.

En dicho espacio, el conjunto numerable de funciones $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L_2(\mathbb{T})$ constituye una base ortonormal, pues se cumplen las relaciones 1.11 para ellas. Los coeficientes de Fourier de $f \in L_2(\mathbb{T})$ son

$$\hat{f}(n) = \langle f, e^{in\theta} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{1.6}$$

Dado que $\mathbb{T}$ es compacto se tiene la inclusión $L_2(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$ [3]. Así, $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})e^{-in\theta}| d\theta = \|f\|_{L_1(\mathbb{T})} < \infty$ y las integrales que definen los coeficientes son finitas $\forall n \in \mathbb{Z}$.

La expresión $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) z^n$ se conoce como serie de Fourier de f y según las hipótesis de regularidad que le exijamos a la función f tendremos para la serie convergencia uniforme, puntual, en media o no habrá convergencia a la función f.

Consideramos ahora el conjunto

$$\ell_2(\mathbb{Z}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} \quad | \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty\}. \tag{1.7}$$

En concreto, $\ell_2(\mathbb{Z})$ no es más que el espacio $L_2(m_0)$ sobre $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$, previamente definido en Definición 1.15, donde m_0 es la medida de contar, es decir, la medida que asigna a cada subconjunto de X su cardinalidad. De nuevo, como $p = 2$, por el Teorema 1.16, $\ell_2(\mathbb{Z})$ es un espacio de Hilbert. Dado $a \in \ell_2(\mathbb{Z})$ tal que $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ con $n \mapsto a_n$, la norma definida por la integral de la Definición 1.15 se transforma en un sumatorio, al tomar una medida discreta:

$$\|a\|_{\ell_2(\mathbb{N})} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \right)^{1/2}. \tag{1.8}$$

Y el producto interno se define en $\ell_2(\mathbb{Z})$ como

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \overline{b_n}. \tag{1.9}$$

Observamos las similitudes entre ambos espacios definidos. De hecho se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.25. *La aplicación* $\hat{\ }$ *definida como sigue*

$$\begin{array}{cccc} \hat{\ } : & L_2(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \ell_2(\mathbb{Z}) \\ & f & \longmapsto & \{\hat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

es un homomorfismo isométrico entre $L_2(\mathbb{T})$ *y* $\ell_2(\mathbb{Z})$.

Aplicando la Identidad de Parseval en $L_2(\mathbb{T})$ en la base $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, dado que $\|f\|_{L_2(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \|\hat{f}\|_{\ell_2(\mathbb{Z})}$ se demuestra que es una isometría. Para la sobreyectividad, consultar [8], Proposición 3.2.7. La aplicación definida se conoce como **transformada de Fourier discreta**.

Además, se tiene el siguiente conocido teorema de unicidad sobre los coeficientes de Fourier.

Teorema 1.26. *Sean* $f, g \in L_1(\mathbb{T})$ *y tales que* $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. *Entonces* $f = g$ *a.e en* $\mathbb{T}$.

[3] Se puede probar aplicando la desigualdad de Hölder a las funciones f e id.

Capítulo 2

El operador shift y el espacio de Hardy

Nos centraremos, una vez se ha introducido la teoría necesaria para ello, en caracterizar el retículo de subespacios invariantes de un operador en particular, el operador **shift** sobre el espacio $\ell_2(\mathbb{N}_0)$. El capítulo se desarrolla a partir de los textos [1] y [2].

2.1. El espacio $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ de las sucesiones

El espacio $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ se define como

$$\ell_2(\mathbb{N}_0) = \{(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C} \quad | \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}. \tag{2.1}$$

Es decir, no es más que el espacio $\ell_2(\mathbb{Z})$ pero restrigiéndonos el espacio ambiente X a $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por tanto, $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ es un espacio de Hilbert. La norma y producto interno vienen dados por las ecuaciones (1.8), (1.9), donde los sumatorios se realizan sobre los $n \geq 0$.

Adicionalmente, el espacio $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ es separable. Por definición, un espacio topológico es separable si y solo si existe un subconjunto denso y numerable. Para el caso especial de los espacios de Hilbert, el conjunto de las combinaciones lineales finitas de elementos de una base ortonormal es denso en $\mathscr{H}$. Si no lo fuese, por el Teorema 1.10 podríamos encontrar un vector ortogonal no nulo en el complementario de la clausura, contradiciendo la maximalidad de la base. Por tanto, si encontramos una base ortonormal numerable habremos demostrado la separabilidad. En $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ consideramos el conjunto $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}_0} \subset \ell_2(\mathbb{N}_0)$ donde $e_i = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{\text{posición i-ésima}}, 0, ..., 0)$. Notar que dicho conjunto cumple la definición de base ortonormal y que es contable. Es decir, $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ es separable.

En el espacio $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ se define el operador **shift** según:

$$\begin{array}{rcccl} S & : & \ell_2(\mathbb{N}_0) & \longrightarrow & \ell_2(\mathbb{N}_0) \\ & & a \equiv (a_0, a_1, a_2, ...) & \longmapsto & (0, a_0, a_1, ...). \end{array}$$

Proposición 2.1. *El operador shift es lineal y acotado, es decir, pertenece a $\mathscr{B}(\ell_2(\mathbb{N}_0))$.*

Demostración. La linealidad es inmediata. Para ver que el operador es acotado, por la definición 1.2, basta demostrar que S es una isometría en $\ell_2(\mathbb{N}_0)$. De hecho, dado $a \equiv \{a_n\}_n \in \ell_2(\mathbb{N}_0)$,

$$\|S(a)\|^2_{\ell_2(\mathbb{N}_0)} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n-1}|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2 = \|a\|^2_{\ell_2(\mathbb{N}_0)}.$$

□

Observando la forma del operador se puede deducir sin necesidad de ninguna herramienta matemática adicional que los subespacios

$$M_k = \{(a_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell_2(\mathbb{N}_0) \,|\, a_m = 0 \quad \forall m = 0, ..., k\}$$

son invariantes bajo S, dado que toda sucesión que tomemos en $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ con sus k primeras componentes nulas, mantiene estas componentes nulas tras aplicar el shift. De hecho, tendrá una componente más nula.

Sin embargo, para caracterizar el retículo es necesario distinguir si estos subespacios son los únicos invariantes bajo S o existen más. Con este objeto, el procedimento que se va a implementar es el siguiente, vamos a pasar de $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ a otro espacio, el espacio de Hardy, H^2, espacio en el que el operador tiene una representación más sencilla para caracterizar su retículo.

2.2. El espacio de Hardy

Consideramos ahora el **espacio de Hardy**, es decir, el conjunto

$$H^2 = \{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ \forall z \in \mathbb{D} \quad | \ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}. \tag{2.2}$$

donde a_n denota el n-ésimo coeficiente de Taylor de la función f, y $\mathbb{D}$ el disco unidad definido anteriormente. Notar que, en particular, todas las funciones del espacio de Hardy son analíticas. Dados dos elementos del espacio de Hardy, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, se define su producto interno como

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}. \tag{2.3}$$

Y su norma

$$\|f\|_{H^2} = \langle f, f\rangle^{1/2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}. \tag{2.4}$$

La relación entre ambos espacios viende dada por el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *H^2 es isomóficamente isométrico a $\ell_2(\mathbb{N}_0)$.*

Demostración. Definimos la aplicación

$$\begin{array}{rcccl} \psi & : & \ell_2(\mathbb{N}_0) & \longrightarrow & H^2 \\ & & a \equiv (a_0, a_1, a_2, ...) & \longmapsto & f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \end{array}$$

En primer lugar, observamos que la aplicación está bien definida, es decir, que dada una serie en $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ (converge cuadráticamente) la serie que define f es convergente respecto a la norma de H^2. Sigue del hecho que la norma de H^2 consiste en tomar la suma cuadrática de los coeficientes en el desarrollo de Taylor de la función f, es decir, $\|a\|_{\ell_2(\mathbb{N}_0)} = \|f\|_{H^2}$. Con esta igualdad probamos también que la aplicación es una isometría.

Veamos ahora que es biyectiva. La inyectividad sigue de que la aplicación es una isometría: por contradicción, si dos elementos en $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ tuviesen la misma imagen, la distancia de las imágenes sería nula, mientras que dicha distancia en el dominio sería diversa de cero, lo que contradice que sea una isometría. Respecto a la sobreyectividad, como hemos visto, toda sucesión de coeficientes de una función en H^2 está en $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ por definición. Por tanto, la función es biyectiva. La continuidad se sigue de ser isometría. $\square$

Como consecuencia de este teorema tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.3. *H^2 es un espacio de Hilbert separable.*

2.2.1. Límite radial de las funciones en los espacios de Hardy

La norma de una función en H^2 está dada por la suma cuadrática de los coeficientes de Taylor de la misma. Presentamos ahora otra forma de caracterizar la norma de una función $f \in H^2$, que además nos dará información adicional sobre las funciones del espacio, ya que estudia el comportamiento de las mismas en la frontera del dominio y que nos mostrará la relación entre los espacios H^2 y $L_2(\mathbb{T})$.

Para todo $r \in [0,1)$ se define la familia de funciones en H^2:

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}), \quad \forall e^{i\theta} \in \mathbb{T}. \tag{2.5}$$

Fijada una función f, y tomando el límite cuando $r \to 1^-$, se estudia qué ocurre con la función cuando nos acercamos a la frontera, justo lo que queríamos conseguir. A partir de ellas, la relación con la norma definida previamente en H^2 viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 2.4. *Dada $f \in H^2$, se tiene*

$$\|f\|_{H^2}^2 = \lim_{r \longrightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta. \tag{2.6}$$

Demostración. Como $f_r \in H^2$ $\forall r \in [0,1)$, consideramos su desarrollo en serie de Taylor en $\mathbb{D}$,

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{i\theta})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}.$$

Por otro lado, notamos que $\{f_r\}_{r \in [0,1)} \subset L_2(\mathbb{T})$. De hecho, según (1.5), se escribe

$$\|f_r\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta, \quad \forall r \in [0,1).$$

La norma está bien definida, pues estamos evaluando la función f en su dominio de definición, por la inclusión $r\mathbb{T} \subset \mathbb{D}$ si $r \in [0,1)$. Además, $\|f\|_{L_2(r\mathbb{T})}$ es finita por ser f analítica, y por tanto, continua en el disco abierto y ser el conjunto de integración un compacto.

Sean $\{\hat{f}_r(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier de la función f_r como función en $L_2(\mathbb{T})$. Se tiene, según (1.6), que para $m \in \mathbb{N}_0$

$$\hat{f}_r(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_r(e^{i\theta}) e^{-im\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} e^{-im\theta} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta}_{\delta_{nm}} = a_m r^m,$$

siendo nulos para m negativo. El intercambio de serie e integral anterior se da por la convergencia absoluta de la serie y la integral.

Así, usando la identidad de Parseval 1.13 para la norma en $L_2(\mathbb{T})$ se tiene la igualdad

$$\|f_r\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \quad \forall r \in [0,1).$$

Además, para cada $N \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \|f\|_{H^2}^2 < \infty \quad \forall r \in [0,1).$$

Como para todo N la sucesión de sumas parciales está acotada por la norma de f en H^2 y tiende a esta misma cuando $N \to \infty$ se prueba el resultado. □

Podemos, por tanto, caracterizar si una función f pertenece al espacio de Hardy por su comportamiento en la frontera de $\mathbb{D}$, aunque la función no esté definida en ella. En este sentido, sea $f \in H^2$ tal que $\{a_n\}_{n\geq 0}$ son los coeficientes de su desarrollo en serie de Taylor en $\mathbb{D}$. Se define el **valor frontera** de f en el borde como la función f^* cuya serie de Fourier viene dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}. \tag{2.7}$$

Notar que la serie es medible por ser el límite de funciones medibles. Remarcar que los coeficientes de Fourier de f^* en $L_2(\mathbb{T})$ son, *por definición*, los coeficientes de Taylor de la correspondiente función analítica f en el disco $\mathbb{D}$. En concreto, todos los coeficientes de Fourier negativos de f^* serán nulos. El siguiente teorema nos dice que dicha definición es correcta.

Teorema 2.5. *[Teorema del límite radial] Sea $f \in H^2$. Entonces:*

(a) $f^* \in L_2(\mathbb{T})$ *y* $\|f^*\|_{L_2(\mathbb{T})} = \|f\|_{H^2}$.

(b) $\|f_r - f^*\|_{L_2(\mathbb{T})} \to 0$ *si* $r \to 1^-$.

(c) $f_r \to f^*$ *a.e en* $\mathbb{T}$ *si* $r \to 1^-$.

Demostración. (a) Aplicamos la Identidad de Parseval a f^* en $L_2(\mathbb{T})$, teniendo en cuenta lo apenas comentado de sus coeficientes de Fourier:

$$\|f^*\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \|f\|_{H^2}^2 < \infty. \tag{2.8}$$

(b) De lo visto anteriormente, conocemos los coeficientes de Fourier de las funciones f_r y f^*. Aplicamos que $\hat{}$ es lineal, por serlo el producto interno. De nuevo por la Identidad de Parseval:

$$\|f_r - f^*\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(r^n - 1)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |(1-r^n)|^2.$$

Ahora, dividimos la serie en dos sumandos. Por un lado, como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ es convergente, entonces $\forall \varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|^2 < \varepsilon/2$. Además, como $|1-r^n| \leq 1$ si $r \in [0,1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|^2 |(1-r^n)|^2 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|^2 < \varepsilon/2$.

Por otro lado, si consideramos el sumatorio hasta el término N tenemos una suma finita, así que por continuidad podemos intercambiar límite y suma y se tiene que $\lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 |(1-r^n)|^2 =$

$\sum_{n=0}^{N}|a_n|^2 \text{lím}_{r\to 1^-}|1-r^n|^2 = 0$. Entonces, $\exists R>0$ tal que $\sum_{n=0}^{N}|a_n|^2|(1-r^n)|^2 < \varepsilon/2\ \forall r,\ R\leq r < 1$. Así, finalmente,

$$\forall r,\ R\leq r<1,\quad \|f^*-f\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{n=0}^{N}|a_n|^2|(1-r^n)|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|^2|(1-r^n)|^2 < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

(c) Para probar esta implicación notamos que podemos escribir la función f_r como la integral de Poisson de su valor frontera f^*. De hecho,

$$P[f^*](e^{in\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)f^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^*(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{in(\theta-t)}dt.$$

Ahora podemos intercambiar serie e integral por la convergencia absoluta de la serie de Poisson y de nuevo usamos que los coeficientes de Fourier de f^* son conocidos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{in\theta}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^*(t)e^{-int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)(re^{i\theta})^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(re^{i\theta})^n = f_r(e^{i\theta}).$$

Finalmente aplicamos el Teorema 1.22, ya que $f^*\in L_2(\mathbb{T})\subset L_1(\mathbb{T})$ y se tiene el límite

$$f_r(e^{i\theta}) = f^* * P_r(\theta) \xrightarrow{r\to 1^-} f^* \quad a.e \text{ en } \mathbb{T}.$$

□

Con esta última prueba queda por tanto demostrado que se puede expresar la norma de una función f en H^2 a partir de la norma L_2 de su valor frontera f^*. Notar de hecho que en la demostración del Teorema 2.2 se ha definido la función $\psi:\ell_2(\mathbb{N}_0)\to H^2$. Entendiendo H^2 como un subconjunto de $L_2(\mathbb{T})$ esta aplicación no es más que la inversa de la transformada de Fourier discreta, es decir, la antitransformada de Fourier, definida en Teorema 1.25 restringiendo los espacios dominio e imagen. Por tanto, para los subconjuntos $\ell_2(\mathbb{N}_0)\subset\ell_2(\mathbb{Z})$ y $H^2\subset L^2(\mathbb{T})$ el isomorfismo isométrico se mantiene.

Para acabar la sección caracterizamos el producto escalar de dos funciones en H^2 a partir de sus valores frontera mediante la Identidad de Polarización.

Corolario 2.6. *Sean $f,g\in H^2$ y sean $f^*,g^*\in L_2(\mathbb{T})$ sus correspondientes valores frontera. Entonces, se puede expresar el producto escalar de f y g como*

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^*(e^{i\theta})\overline{g^*(e^{i\theta})}d\theta. \tag{2.9}$$

Demostración. Sean $f,g\in H^2$. Por ser H^2 espacio vectorial, $\lambda f+\mu g\in H^2$, con $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$. Además, $((\lambda f+\mu g)^* * P_r)(\theta) = \lambda(f^* * P_r)(\theta)+\mu(g^* * P_r)(\theta)$ porque el producto de convolución es lineal en su primer argumento. Se toma el límite cuando $r\to 1^-$ en ambos extremos de la expresión,

$$\lambda f^*+\mu g^* = \lambda\lim_{r\to 1^-}(f^* * P_r)(\theta)+\mu\lim_{r\to 1^-}(g^* * P_r)(\theta) = \lim_{r\to 1^-}(\lambda f+\mu g)^* * P_r(e^{i\theta}) = (\lambda f+\mu g)^*.$$

Por tanto, el valor frontera de cualquier combinación lineal de funciones en H^2 está bien definido.

Se recuerda la Identidad de Polarización, que permite escribir el producto escalar de f y g en función de las normas de combinaciones lineales de dichas funciones:

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - i\|f-ig\|^2\right).$$

Desarrollando la norma de las funciones en H^2 según el Teorema 2.5, (a), y simplificando llegamos al resultado.

□

La caracterización de la norma en H^2 según el Teorema 2.4 permite alcanzar otro resultado interesante respecto a las funciones en H^2 si consideramos la norma dada por el valor absoluto en $\mathbb{C}$ de dichas funciones. Definimos, en semejanza a como se define H^2, el espacio

$$H^\infty = \{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \forall z \in \mathbb{D} \mid |f(z)| < \infty \quad \forall z \in \mathbb{D}\}, \tag{2.10}$$

donde a_n denota el n-ésimo coeficiente de Taylor de la función f. En H^∞ la norma se define a partir del supremo, en semejanza a como se define la norma en L_∞,

$$\|f\|_{H_\infty} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|. \tag{2.11}$$

Notar que como estamos exigiendo a las funciones en H^∞ que sean analíticas, y por tanto, continuas, no hace falta definir el supremo eliminando los conjuntos de medida nula como sí lo hemos hecho con L_∞.

Proposición 2.7. $H^\infty \subset H^2$.

Demostración. Sea $f \in H^\infty$ tal que $\|f\|_{H^\infty} = C$. Entonces, por el Teorema 2.4,

$$\|f\|_{H^2}^2 = \lim_{r\longrightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq C^2 \lim_{r\longrightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta = C^2.$$

□

2.2.2. El operador multiplicación en H^2

Caracterizado el espacio de Hardy, retornemos a nuestro objetivo y veamos qué forma adopta el operador shift en dicho espacio. Identificando en la definición de S la serie con los coeficientes del desarrollo en serie de una función en el espacio de Hardy, aplicando la antitransformada de Fourier entre $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ y H^2 (Teorema 2.2), la acción del operador resulta ser

$$\begin{aligned} S \quad : \quad H^2 \quad &\longrightarrow \quad H^2 \\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad &\longmapsto \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n = zf(z). \end{aligned}$$

Luego observamos que el operador shift se convierte en el operador multiplicación por z en el espacio de Hardy, donde $|z| < 1$ puesto que $z \in \mathbb{D}$. Dicho operador está bien definido en H^2.

Proposición 2.8. *Dado $g \in H^\infty$, el operador multiplicación*

$$\begin{aligned} M_g : H^2 &\longrightarrow H^2 \\ f(z) &\longmapsto g(z)f(z), \end{aligned}$$

está bien definido y se tiene $\|M_g\|_{\mathscr{B}(H^2)} \leq \|g\|_{H^\infty}$.

Demostración. Es obvio que gf es analítica. Además, para comprobar que el operador está bien definido hace falta probar que, dada $g \in H^\infty$, $gf \in H^2$.

$$\|M_g f\|_{H^2} = \|gf\|_{H^2} = \left(\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta}) f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2}$$

$$\leq \|g\|_{H^\infty} \left(\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2} = \|g\|_{H^\infty} \|f\|_{H^2} < \infty.$$

En cuanto a la desigualdad para la norma del operador, basta recordar como se ha definido la norma de un operador lineal y acotado $T : X \to X$ en el capítulo 1, según la ecuación (1.1). Aplicándolo a nuestro caso,

$$\|M_g\|_{\mathscr{B}(H^2)} = \sup_{\|f\|_{H^2}=1} \|M_g f\|_{H^2} \leq \|g\|_{H^\infty}.$$

□

2.2.3. Productos de Blaschke

La expresión del operador S como operador multiplicación en el espacio de Hardy explica por qué hemos llevado a cabo la transformación del espacio original $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ a este espacio. La expresión $M_z(f) = zf$ nos dice, en particular, que para cada función $f \in H^2$ cuyo conjunto de ceros sea $\{\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n\} \in \mathbb{D}$, la función $h(z) = zf(z)$ tendrá esos mismos ceros y uno más en el origen[1]. Por ello, dado el subespacio $N \subset H^2$ formado por las funciones que se anulan en $\{\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n\}$, este será invariante por el operador M_z. El objetivo es ver que los subespacios de esta forma son los únicos invariantes bajo este operador.

Con esta idea en mente, vamos a introducir **los productos de Blaschke**, funciones para las que por construcción fijamos sus ceros en el disco unidad.

Definición 2.9. Sea $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión en $\mathbb{D}$, tal que $\alpha_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ y de forma que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty.$$

Sea $k \in \mathbb{N}_0$. Definimos, $\forall z \in \mathbb{D}$,

$$B(z) = z^k \prod_{n=0}^{\infty} b_n = z^k \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}. \tag{2.12}$$

La función $B(z)$ recibe el nombre de producto de Blaschke.

Teorema 2.10. *$B \in H^\infty$ y solo se anula en el conjunto $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ (además de anularse en el origen si $k > 0$).*

Como queríamos, hemos construido una función cuyos ceros están totalmente determinados. Se entiende aquí que si alguno de los α_i se repite k veces, $B(z)$ tendrá un cero de orden k en ese punto.

Por otro lado, la condición impuesta para la sucesión de ceros en forma de serie convergente garantiza que el producto (que puede ser infinito) este bien definido. Además, como $B \in H^\infty$, por la Proposición 2.7, $B \in H^2$. Para probar el teorema es necesario un lema técnico.

[1] Si ya tenía un cero de orden k en el origen, se tiene un cero de orden k+1 tras aplicar el operador.

Lema 2.11. *[[1], Teorema 15.21] Sea $\Omega \in \mathbb{R}$ una región y sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω tales que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |1-f_n|$ converge uniformemente para todo compacto $K \subset \Omega$. Entonces el producto*

$$f(z) = \prod_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad z \in \Omega,$$

converge uniformemente para todo K compacto de Ω y por tanto, f es holomorfa en Ω. Además, si $m(f_n, \alpha_i)$ es orden de α_i como cero de f_n, se tiene que $m(f, \alpha_i) = \sum_{n=0}^{\infty} m(f_n, \alpha_i)$.

La demostración de esta proposición requiere de algunos resultados previos por lo que aquí no se incluye por falta de espacio. Este resultado nos permite demostrar que el producto de Blaschke está bien definido para el caso de $\Omega = \mathbb{D}$.

Demostración. (*Del Teorema 2.10*). Sea B como en el enunciado del teorema. Para cada término del productorio se tiene

$$|1-b_n| = \left|1 - \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\right| = \left|\frac{(z|\alpha_n| + \alpha_n)(1-|\alpha_n|)}{(1-\overline{\alpha_n}z)\alpha_n}\right| = \left|\frac{1+z|\alpha_n|/\alpha_n}{1-\overline{\alpha_n}z}\right|(1-|\alpha_n|).$$

Recordamos que $z, \alpha_n \in \mathbb{D}$. Consideramos las z tales que $|z| \leq r$ con $r \in (0,1)$. En este caso, podemos realizar la siguiente acotación para el denominador: $|\overline{\alpha_n}z| \leq |z| \leq r \Rightarrow 1 - |\overline{\alpha_n}z| \geq 1-|z| \geq 1-r \Rightarrow \frac{1}{1-|\overline{\alpha_n}z|} \leq \frac{1}{1-|z|} \leq \frac{1}{1-r}$. Respecto al numerador, $\left|\frac{|\alpha_n|z}{\alpha_n}\right| = |z| \leq r \Rightarrow |1+z|\alpha_n|/\alpha_n| \leq 1 + |z|\alpha_n|/\alpha_n| \leq 1+r$. Así,

$$\left|\frac{1+z|\alpha_n|/\alpha_n}{1-\overline{\alpha_n}z}\right|(1-|\alpha_n|) \leq \frac{1+r}{1-r}(1-|\alpha_n|)$$

si $|z| \leq r$. Como $\sum_{n=0}^{\infty}(1-|\alpha_n|) < \infty$ por hipótesis, en concreto se cumple $\sum_{n=0}^{\infty} |1-b_n| < \infty$ y tenemos la convergencia para compactos $K \subset \mathbb{D}$. Además, observar que cada término b_n es holomorfo en $\mathbb{D}$ $\forall n$, ya que en ningún caso el denominador se anula en $\mathbb{D}$. Se cumplen pues para la sucesión de funciones $\{b_n\}_n$ las hipótesis del Lema 2.11 y por tanto, la función $B = z^k \prod_{n=0}^{\infty} b_n$ es holomorfa en $\mathbb{D}$. Además, su conjunto de ceros es aquel formado por los ceros de cada uno de los factores, con la multiplicidad de cada cero la suma de las veces que se repite más el cero de orden k en el origen por el factor z^k.

Por otro lado, cada factor del producto tiene módulo menor que 1, ya que

$$|\alpha_n - z|^2 - |1-\overline{\alpha_n}z|^2 = \left(|\alpha_n|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{\alpha_n}z) + |z|^2\right) - \left(1 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{\alpha_n}z) + |\alpha_n|^2|z|^2\right) = (|\alpha_n|^2-1)(1-|z|^2) < 0,$$

dado que $|\alpha_n| < 1, |z| < 1$. Entonces, $|\alpha_n - z|^2 < |1-\overline{\alpha_n}z|^2 \Longrightarrow \left|\frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\right| < 1$ y $|B(z)| < 1$. Por tanto, $B \in H^\infty$. □

Al estar $B \in H^2$, su valor frontera B^* está bien definido y se prueba lo siguiente:

Teorema 2.12. *Sea B un producto de Blaschke. Entonces $|B^*| = 1$ a.e en $\mathbb{T}$.*

Demostración. $B \in H^\infty \subset H^2$. Por lo tanto, B^* está bien definido y se tiene por el apartado (c) del Teorema 2.5 que $|B^*| \leq 1$. Falta ver que es exactamente $|B^*| = 1$. Consideramos la función B/B_N, donde $B_N = z^k \prod_{n=0}^{N} b_n$, que está en H^∞ en cuanto numerador y denominador lo están y B se anula, al menos, en los mismos puntos que B_N. Aplicando el Teorema 2.4 y el Teorema del límite radial para B/B_N se tiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |B/B_N(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |B/B_N(re^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |(B/B_N)^*(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Observamos que B_N está bien definida en $\overline{\mathbb{D}}$ por lo que $B_N = B_N^*$ $a.e$ en $\mathbb{T}$ aplicando de nuevo el apartado (c) del Teorema 2.5. Además, se cumple que $|B_N^*| = 1$ en $\mathbb{T}$ dado que cada término del productorio tiene norma unidad: para $|z| = 1$ se cumple

$$\left|\frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\right| = \left|\frac{\alpha_n - e^{i\theta}}{1-\overline{\alpha_n}e^{i\theta}}\right|\left|\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\right| = \frac{1}{|e^{i\theta}|}\left|\frac{\alpha_n - e^{i\theta}}{\overline{e^{i\theta} - \alpha_n}}\right| = 1.$$

Así, $|(B/B_N)^*| = |B^*|$. Por otro lado, para la integral de la izquierda, usamos de nuevo la convergencia uniforme de B_N a B en todo compacto contenido en $\mathbb{D}$ y, en concreto, en $r\mathbb{T}$, con $0 \leq r < 1$. Tomando pues el límite cuando $N \to \infty$ e intercambiando límite e integral por la convergencia uniforme de B/B_N queda

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B/B_N d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 d\theta = 1 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |B^*(e^{i\theta})|^2 d\theta,$$

y, finalmente, como habíamos visto que $|B^*| \leq 1$, debe ser $|B^*| = 1$ $a.e$ en $\mathbb{T}$. □

Hemos introducido los productos de Blaschke porque son funciones de las que conocemos todos sus ceros. Consideramos de nuevo una variedad N de las funciones que se anulan en $\{\alpha_1, ...\alpha_n\}$, que sabemos que son invariantes por el operador shift y sea B el producto de Blaschke (finito) que se anula exactamente en dichos puntos. Es fácil ver que $f \in N \iff f/B \in H^2$, es decir, $f \in M_B H^2$. Por tanto, todos los subespacios de la forma $M_B H^2$, con B un producto de Blaschke finito son invariantes por M_z. Lo que probaremos con el teorema de Beurling es que podemos extender los productos de Blaschke a unas funciones más generales, con una cantidad de ceros infinita, las funciones interiores.

2.2.4. Funciones interiores

Definición 2.13. Una **función interior** es una función $\phi \in H^\infty$ tal que $|\phi^*| = 1$ en casi todo $\mathbb{T}$.

Con esta definición, todos los productos de Blaschke son funciones interiores. Para terminar el capítulo, introduciremos el teorema que nos caracteriza las funciones interiores a partir de sus ceros y las medidas singulares respecto a la medida de Lebesgue. Definimos primero este concepto.

Definición 2.14. Sea m_1 la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{T}$. Sea μ una medida de Borel positiva y finita sobre el mismo espacio. Se define la derivada de Radon-Nykodym como la función $f \in L_1(\mathbb{T})$ tal que $d\mu = f dm_1$. Si $f = 0$ $a.e$ en $\mathbb{T}$ se dice que μ es singular respecto a m_1.

Teorema 2.15. *Sea $\theta \in \mathbb{R}$, B un producto de Blaschke, μ una medida de Borel finita y positiva en $\mathbb{T}$, que es singular con respecto a la medida de Lebesgue y sea*

$$\phi(z) = e^{i\theta}B(z)exp\left(-\int_{\mathbb{T}}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(e^{it})\right), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{2.13}$$

Entonces $\phi(z)$ es una función interior y toda función interior es de esta forma.

La demostración de este teorema requiere introducir algún concepto extra. Para empezar, definimos la integral de Poisson de una medida de Borel positiva μ en $\mathbb{T}$ como la función

$$P[d\mu](z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|2}{|e^{it}-z|^2} d\mu(e^{it}),$$

donde $z \in \mathbb{D}, e^{it} \in \mathbb{T}$.

Nota que si tomamos $z = re^{i\theta}$, el término $\frac{1-|z|2}{|e^{it}-z|^2} = \frac{1-|re^{i\theta}|2}{|e^{it}-re^{i\theta}|^2} = P_r(\theta - t)$ no es más que el núcleo de Poisson definido previamente en Definición 1.18. Además, si la medida μ es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue m_1, el Teorema de Radon-Nikodym [1, Teorema 6.10] nos dice que $d\mu = gdm_1$, con $g \in L_1(\mathbb{T})$ coincidiendo con la Definición 1.21, por lo que la definición es coherente.

Proposición 2.16. *Sea u una función armónica en $\mathbb{D}$ y sean $u_r(e^{i\theta}) = u(re^{i\theta})$ con $0 < r < 1$. Supongamos que*

$$\sup_{0<r<1} \|u_r\|_{L_1(\mathbb{T})} < \infty.$$

Entonces, existe una única medida de Borel positiva compleja μ en $\mathbb{T}$ tal que $u = P[d\mu]$. Además, toda función armónica positiva en $\mathbb{D}$ es la integral de Poisson de una única medida de Borel positiva en $\mathbb{T}$.

La demostración de esta proposición se pueden encontrar en [1, Teorema 11.16].

Demostración. (*Del teorema 2.15*). $\Longrightarrow$ Sea ϕ como en la expresión (2.13). Definimos $h = \phi/B$, con B el producto de Blaschke que contiene todos los ceros de la función ϕ, por lo que la función $\log|h| = \int_{\mathbb{T}} Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)(-d\mu(e^{it}))$ está bien definida. Como $Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}$, $\log|h| = -P[d\mu]$, con μ medida positiva por hipótesis. Así, $\log|h| \leq 0$ y $h \in H^\infty$ y, por consiguiente, $\phi \in H^\infty$. Ahora notar que por definición, $h^* = \lim_{r\to 1^-} e^{i\theta} exp\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}} d\mu(e^{it})\right)$ *a.e* en $\mathbb{T}$, y, por tanto, $\log|h^*| = (-P[d\mu])^* a.e$ en $\mathbb{T}$ ya que se puede intercambiar el orden entre el límite y tomar la parte real de un número complejo. Además, como μ es singular respecto a m_1, la derivada de Radon-Nykodym es 0 *a.e* en $\mathbb{T}$ y por tanto, el límite radial de $P[d\mu]$ es nulo, ver [1, Teorema 11.22]. Así, $\log|h^*| = 0$ y $|\phi^*| = |h^*||B^*| = 1$ *a.e* en $\mathbb{T}$. Hemos probado que ϕ es interior.

$\Longleftarrow$ Probaremos que todas las funciones interiores son de la forma (2.13). Sea ϕ una función interior cualquiera y sea B el producto de Blaschke que contiene exactamente los ceros de la función ϕ. Sea $h = \phi/B$. Observamos que $g \neq 0\ \forall z \in \mathbb{D}$, $|g| \in H^\infty$ y $|g^*| = 1$ *a.e* en $\mathbb{T}$. De aquí, como g es la integral de Poisson de g^* y $|P_r| \leq 1 \forall r \in [0,1)$ se tiene que $|g| \leq 1$ en $\mathbb{D}$.

Consideramos ahora la función $\log|h|$, que es armónica en $\mathbb{D}$ por ser la parte real del logaritmo de la función holomorfa h. Además, $-\infty < \log|g| \leq 0$ en $\mathbb{D}$. Por la Proposición 2.16, $\log|g|$ es la integral de Poisson de $-d\mu$, con μ medida positiva en $\mathbb{T}$. En concreto, $\log|g|$ es la parte real de la función

$$G(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}(-d\mu(e^{it})), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Por lo que $g = Cexp(G(z))$, con $C \in \mathbb{T}$, que es la forma funcional que buscábamos.

Por último, como $\log|g^*| = 0$ *a.e* en $\mathbb{T}$, la derivada de Radon-Nikodym respecto a la medida de Lebesgue es nula *a.e* $\mathbb{T}$, por lo que μ es singular con respecto a la medida de Lebesgue. $\square$

Capítulo 3

El Teorema de Beurling

Presentamos finalmente después de los resultados previos el Teorema de Beurling.

Teorema 3.1 (Teorema de Beurling)**.** *Se cumple en H^2 lo siguiente:*

(I) *Para cada función interior ϕ el espacio $M_\phi H^2$ es un subespacio invariante de M_z en H^2.*

(II) *Cada subespacio invariante Y de H^2 diferente del subespacio nulo contiene una función interior ϕ de forma que $Y = M_\phi H^2$.*

Antes de ver la demostración, cabe remarcar que el teorema caracteriza todos los subespacios invariantes del operador. Es decir, no solo nos dice que los subespacios de la forma $M_\phi H^2$ son invariantes por M_z (implicación (I)) sino que va más allá. En concreto, en (II) nos dice que ***todos*** los subespacios invariantes de M_z son de esa forma, no existen más. Conseguimos pues caracterizar por completo el retículo de subespacios invariantes de M_z, que era el objetivo y por lo que hemos desarrollado toda la teoría precedente.

Demostración. I. Sea ϕ función interior, es decir, $\phi \in H^\infty$ y $|\phi^*| = 1$ $a.e$ en $\mathbb{T}$. Consideramos el operador M_ϕ, que es una isometría en H^2. Para probarlo, dada una función $f \in H^2$, basta considerar su valor frontera f^* y la igualdad $\|f\|_{H^2} = \|f^*\|_{L_2(\mathbb{T})}$, demostrada en el Teorema 2.5, (a). Se tiene:

$$\|M_\phi f\|_{H^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi^*(e^{i\theta})|^2 |f^*(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{i\theta})|^2 d\theta = \|f\|_{H^2}^2.$$

Por ser M_ϕ una isometría el conjunto $M_\phi H^2$ es cerrado. Para probarlo, consideramos una sucesión en $M_\phi H^2$, es decir, una sucesión de la forma $(\phi f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to g \in H^2$, donde $f_n \in H^2$ y tenemos que ver que $g \in M_\phi H^2$. Al ser la sucesión convergente en H^2, en concreto, es de Cauchy en este espacio. En consecuencia, que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy. De hecho, si $(\phi f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall m,n > N \quad \|\phi f_n - \phi f_m\|_{H^2} < \varepsilon.$$

Así, $\forall m,n > N$, $\|\phi(f_n - f_m)\|_{H^2} = \|f_n - f_m\|_{H^2} < \varepsilon$ por ser M_ϕ isometría y se prueba que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en H^2. Como el espacio es completo, existe límite $f_n \to f \in H^2$ y se tiene que $\phi f_n \to \phi f \in M_\phi f$. [1]

[1] Formalmente se prueba igual que para demostrar la convergencia de Cauchy, aplicando que M_ϕ es una isometría.

Visto que $M_\phi H^2$ es una variedad lineal cerrada, falta solo demostrar que $M_\phi H^2$ es invariante por M_z. El resultado se sigue de que ambos operadores conmutan. Tomando $M_\phi f \in M_\phi H^2$ se cumple

$$M_z(M_\phi f) = M_\phi(M_z f) = M_\phi(zf) \in M_\phi H^2,$$

puesto que si $f \in H^2 \Rightarrow zf \in H^2$. Hemos probado la inclusión $M_z(M_\phi H^2) \subset M_\phi H^2$.

II. Sea ahora $Y \subset H^2$ un subespacio invariante no trivial de M_z. Sea $f \in Y$ la función de la forma

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \hat{f}(n) z^n \quad z \in \mathbb{D},$$

con $\hat{f}(k) = 1$ y tal que $k \in \mathbb{N}_0$ es mínimo. Observamos que dicho k siempre existe pues todas las funciones en H^2 son analíticas y se pueden desarrollar en serie de Taylor en el disco y el subespacio invariante, al ser propio, contiene al menos una función $f \neq 0$. Por otro lado, si fuese $\hat{f}(k) \neq 1$ para tener $\hat{f}(k) = 1$ bastaría escoger la función $g = \frac{f}{\hat{f}(k)}$.

Se considera ahora el subespacio $M_z Y$. Por hipótesis Y es invariante por M_z, luego $M_z Y \subset Y$. Dicha inclusión es estricta: hemos visto por construcción que $f \notin M_z Y$, ya que si no k no sería el mínimo.

Se tiene además que $M_z Y$ es subespacio cerrado propio de Y. Para ver que es cerrado, se toma una sucesión $(zf_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M_z Y$ convergente en Y, con $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$. Ahora, como Y es cerrado, $f_n \to f \in Y$. Por tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n > N, \|f_n - f\|_{H^2} < \varepsilon.$$

Entonces dado $N \in \mathbb{N}$, $\forall n > N$ $\|zf_n - zf\|_{H^2} \leq \|z\|_{H^\infty} \|f_n - f\|_{H^2} < \varepsilon$ por ser $\|z\|_{H^\infty} \leq 1 (z \in \mathbb{D})$, luego $zf_n \to zf \in M_z Y$.

Probar que es propio es inmediato: $f \notin M_z Y$ y no contiene solo la función nula porque $zf \in M_z Y$ por ser Y invariante.

Y es un espacio de Hilbert en sí mismo al ser un subconjunto cerrado de H^2, lo que garantiza la completitud. Existe pues el complementario ortogonal del cerrado $M_z Y$ en Y, según el Teorema 1.10. $M_z Y^\perp$ además no se reduce solo a la función nula por ser $M_z Y$ propio, sino que existe $\phi \in M_z Y^\perp$ tal que $\|\phi\|_{H^2} = 1$ [2]. Se tiene en particular que $\phi \perp z^n \phi \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, hemos visto que el producto escalar de las funciones en H^2 se puede expresar en función de sus valores frontera, según el Corolario 2.6,

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{i\theta}) \overline{g^*(e^{i\theta})} d\theta.$$

En concreto, el producto escalar de ϕ y $z^n \phi$ es nulo por ser ortogonales,

$$0 = \langle \phi, z^n \phi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\phi^*(e^{i\theta})|^2 e^{-in\theta} d\theta = \widehat{|\phi^*|^2}(n).$$

Vemos que la integral es la expresión, para cada $n \in \mathbb{N}$, del n-ésimo coeficiente de Fourier de la función $|\phi^*|^2$, como se ha definido en (1.6). Por tanto, $\widehat{|\phi^*|^2}(n) = 0 \quad \forall n > 0$. Conjugando la

[2] De nuevo si $\|\phi\|_{H^2} = k$ tomo $\phi' = \phi/k$, con $k \neq 0$ porque hemos dicho que ϕ no es la función nula

expresión anterior, se tiene

$$0 = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi^*(e^{i\theta})|^2 e^{-in\theta} d\theta} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi^*(e^{i\theta})|^2 e^{-i(-n)\theta} d\theta = \widehat{|\phi^*|^2}(-n),$$

y son también nulos $\widehat{|\phi^*|^2}(n) = 0 \quad \forall n < 0$. Para $n = 0$ se tiene $\widehat{|\phi^*|^2}(0) = \|\phi\|_{H^2}^2 = \|\phi^*\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = 1$.

Por la unicidad de las series de Fourier, dos funciones en $L_1(\mathbb{T})$ con los mismos coeficientes de Fourier coinciden $a.e$ en el toro, según la Proposición 1.26. Entonces, como $\phi \in L_2(\mathbb{T})$, ya hemos visto anteriormente que $\phi \in L_1(\mathbb{T})$, por ser $\mathbb{T}$ compacto. Así, como la función costante 1 en el toro tiene los mismos coeficientes de Fourier que la función $|\phi^*|^2$, se tiene que $|\phi^*| = 1 \quad a.e$ en $\mathbb{T}$.

Además, como ϕ es la integral de Poisson de ϕ^*, y $|P_r| \leq 1 \forall r \in [0,1)$ se tiene

$$|\phi| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_r(\theta - t)||\phi^*(\theta)| d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} 1 d\theta = 1$$

en $\mathbb{D}$, así que $\phi \in H^\infty$ y es una función interior.

Usamos de nuevo que Y es invariante por M_z por hipótesis. Ello implica $z^n\phi \in M_zY \subset Y \quad \forall n \geq 0$, y en particular que, para cualquier polinomio p, $p\phi \in Y$. Como los polinomios son densos en H^2 [1, Teorema 4.18], para cualquier $f \in H^2$, límite de la sucesión de polinomios $(p_n)_n$ tal que $|f - p_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$ se tiene $|f\phi - p_n\phi| \leq |f - p_n||\phi| \leq |f - p_n| \to 0$. Siendo Y es cerrado, dicho límite está en Y. Por tanto, $\forall f \in H^2$, $p_n\phi \to f\phi \in Y$ y $M_\phi H^2 \subset Y$.

Basta por tanto ver que de hecho los espacios coinciden, $M_\phi H^2 = Y$ para demostrar al tesis. Para ello, notamos primero que $M_\phi H^2$ es cerrado[3] en Y. Por el Teorema 1.10, si demostramos que la única función $h \in Y$ tal que $h \in (M_\phi H^2)^\perp$ es la función nula, se tiene automáticamente $M_\phi H^2 = Y$.

Tomamos pues una función $h \in Y$ tal que $h \perp M_\phi H^2$ y utilizamos la ortogonalidad de h para calcular los coeficientes de Fourier de la función $h^*\overline{\phi^*}$. Como $z^n\phi \in M_\phi H^2 \quad \forall n \geq 0$,

$$0 = \langle h, z^n\phi \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h^*(e^{i\theta})\overline{\phi^*(e^{i\theta})} e^{-in\theta} d\theta = \widehat{(h^*\overline{\phi^*})}_n.$$

Igualmente, como $h \in Y$ y el subespacio es invariante por M_z, $z^nh \in Y \quad \forall n \geq 1$ y por la elección de ϕ ortogonal a M_zY,

$$0 = \langle z^nh, \phi \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h^*(e^{i\theta})\overline{\phi^*(e^{i\theta})} e^{-i(-n)\theta} d\theta = \widehat{(h^*\overline{\phi^*})}_{-n}.$$

Por tanto, todos los coeficientes de Fourier de la función $h^*\overline{\phi^*} \in H^2$ son nulos. De nuevo por la unicidad de los coeficientes de Fourier de las funciones en $L_1(\mathbb{T})$, $h^*\overline{\phi^*} = 0$ $a.e$ en $\mathbb{T}$. Pero $|\phi^*| = 1$ $a.e$ en $\mathbb{T}$, por lo que debe ser $h^* = 0$ $a.e$ en $\mathbb{T}$, es decir,

$$\|h^*\|_{L_2(\mathbb{T})} = \|h\|_{H^2} = 0.$$

Hemos probado pues que $h = 0$ en H^2 y $M_\phi H^2 = Y$ sigue de ello.

$\square$

[3] Lo hemos probado en el apartado (I) de esta demostración, con ϕ función interior, con la diferencia que antes era $M_\phi H^2$ como subespacio de H^2 y no de Y pero las conlusiones son las mismas al ser Y cerrado y por tanto, espacio de Hilbert en sí mismo.

En el capítulo 1 se ha probado que el conjunto de subespacios invariantes de un operador es un retículo. Con el **Teorema de Beurling** se consigue caracterizar, formalmente, el retículo del operador M_z en H^2. De consiguiente, para obtener el retículo del operador S en $\ell_2(\mathbb{N}_0)$, consideramos el isomorfismo isométrico entre ambos espacios, $\psi : \ell_2(\mathbb{N}_0) \to H^2$. Basta aplicar la inversa de la aplicación ψ^{-1} a los subespacios invariantes. Así, todos los **subespacios invariantes del operador** S en $\ell_2(\mathbb{N}_0)$ son de la forma:

$$\text{Lat}\, S = \{\psi^{-1}(M_\phi H^2) \quad | \quad \phi \text{ es una función interior }\}.$$

Aunque hayamos conseguido la caracterización formal de estos subespacios, la descripción no es del todo satisfactoria, ya que aún no es conocida la caracterización de los coeficientes de Taylor de las funciones ϕf, con $f \in H^2$ y ϕ interior y en consecuencia, no podemos decir mucho más sobre estas funciones. No obstante, sí se pueden deducir algunas propiedades de orden en el retículo de subespacios invariantes de H^2.

3.0.1. Algunas propiedades del retículo de subespacios invariantes de H^2

Corolario 3.2. *Sean ϕ_1 y ϕ_2 funciones interiores.*

I. $M_{\phi_1}H^2 \subset M_{\phi_2}H^2$ *si y solo si* ϕ_1/ϕ_2 *es interior.*

II. $M_{\phi_1}H^2 = M_{\phi_2}H^2$ *si y solo si* ϕ_1/ϕ_2 *es constante. Es decir, cualquier subespacio* $Y \in Lat\, M_z$ *viene identificado unívocamente por una función interior salvo por un término de fase de módulo 1.*

Demostración. I. $\Longrightarrow$ Si $M_{\phi_1}H^2 \subset M_{\phi_2}H^2$, como $id = 1 \in H^2$, entonces $\phi_1 \in M_{\phi_2}H^2$, es decir, existe $f \in H^2$ tal que $\phi_1 = \phi_2 f$. Así, $\phi_1/\phi_2 \in H^\infty$ en cuanto ϕ_2 tiene, a lo sumo, los mismos ceros que ϕ_1 (y del mismo o menor orden si son múltiples) y ambas funciones están en H^∞ por ser interiores. Igualmente tomando el límite radial, $\lim_{r\to 1^-} \phi_{1_r}/\phi_{1_r} = \phi_1^*/\phi_2^*$, y $|\phi_1^*/\phi_2^*| = |\phi_1^*|/|\phi_2^*| = 1$ $a.e$ en $\mathbb{T}$.

$\Longleftarrow$ Sea ϕ_1/ϕ_2 función interior. Entonces si $\phi_1 f \in M_{\phi_1}H^2 \Longrightarrow \phi_1 f = \phi_2(\phi_1/\phi_2 f) \in M_{\phi_2}H^2$, en cuanto $\phi_1/\phi_2 \in H^\infty$ y por tanto, $\phi_1/\phi_2 f \in H^2 \quad \forall f \in H^2$.

II. $\Longrightarrow$ Por el apartado anterior, ϕ_1/ϕ_2 es interior, e igualmente ocurre con ϕ_2/ϕ_1 y ambos cocientes están por tanto en H^∞. Definimos $\phi = \phi_1/\phi_2$ y sea $h = \phi + 1/\phi \in H^\infty \subset H^2$. Como $|\phi^*| = 1$ $a.e$ en $\mathbb{T}$, entonces $1/\phi^* = \overline{\phi^*}$ y por tanto, $h^* = \phi^* + 1/\phi^* = \phi^* + \overline{\phi^*} = 2Re(\phi^*)$. Es decir, h^* es real $a.e$ en $\mathbb{T}$. Por ser h la integral de Poisson de h^*, se sigue que h es real en $\mathbb{D}$. Como h es real en la región $\mathbb{D}$, es conocido de la teoría variable compleja que h es constante en $\mathbb{D} \Rightarrow \phi = k$, con k constante. Además, como $|\phi^*| = 1$, se tiene $\phi_r = k \to \phi^*$, $r \to 1^-$ $a.e$ en $\mathbb{T}$. Por tanto, $\phi \in \mathbb{T}$.

$\Longleftarrow$ Si $\phi_1/\phi_2 = k$, con k constante, entonces en concreto, $\phi_1/\phi_2 \in H^\infty$ es interior, y por el apartado (I) $M_{\phi_1}H^2 \subset M_{\phi_2}H^2$. Igualmente, $\phi_2/\phi_1 = 1/k$, y por tanto, $M_{\phi_2}H^2 \subset M_{\phi_1}H^2$.

□

Por otro lado, con la caracterización de función interior que se ha obtenido en el Teorema 2.15 se pueden deducir estas mismas propiedades de orden del retículo, obteniéndolas a partir de los ceros de las funciones interiores que caracterizan los subespacios y sus medidas asociadas, sin necesidad de comprobar las propiedades del cociente ϕ_1/ϕ_2. Esto tiene sentido porque, como acabamos de ver, existe una única función interior, salvo un término de fase de módulo 1, asociada a cada subespacio invariante.

Corolario 3.3. *Sean ϕ_1 y ϕ_2 dos funciones interiores y sean μ_1 y μ_2 las medidas asociadas a dichas funciones interiores, según 2.13.*

I. $M_{\phi_1}H^2 \subset M_{\phi_2}H^2$ *si y solo si todos los ceros de ϕ_1 son ceros de ϕ_2 y $\mu_1 - \mu_2$ es una medida positiva.*

II. $M_{\phi_1}H^2 = M_{\phi_2}H^2$ *si y solo si ϕ_1 y ϕ_2 tienen los mismos ceros y $\mu_1 = \mu_2$.*

Demostración. I. Por el corolario anterior, $M_{\phi_1}H^2 \subset M_{\phi_2}H^2$ si y solo si ϕ_1/ϕ_2 es interior. Escribiendo

$$\phi_1(z) = e^{i\theta_1}B_1(z)exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu_1(e^{it})\right), \quad z \in \mathbb{D},$$

$$\phi_2(z) = e^{i\theta_2}B_2(z)exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu_2(e^{it})\right), \quad z \in \mathbb{D},$$

donde $B_1(z)$ y $B_2(z)$ son los productos de Blasckhe y μ_1 y μ_2 las medidas positivas y singulares asociadas a su correspondiente función interior. Entonces,

$$\frac{\phi_1(z)}{\phi_2(z)} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}\frac{B_1(z)}{B_2(z)}\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d(\mu_1-\mu_2)(e^{it})\right).$$

Por el Teorema 2.15, $\frac{\phi_1(z)}{\phi_2(z)}$ es interior si y solo si el cociente $\frac{B_1(z)}{B_2(z)}$ es un producto de Blaschke y $\mu_1 - \mu_2$ es una medida finita, positiva y singular respecto a la medida de Lebesgue. Es evidente que como μ_1 y μ_2 son finitas y singulares respecto a la medida de Lebesgue, su resta también lo es. Necesitamos requerir que la resta sea una medida positiva, porque no está garantizado en general. Respecto al cociente de B_1 y B_2, es un producto de Blaschke si y solo si todos los ceros de ϕ_2 son ceros de ϕ_1, de forma que sea holomorfa.

II. De nuevo, usando el corolario anterior tenemos que $M_{\phi_1}H^2 = M_{\phi_2}H^2$ si y solo si ϕ_1/ϕ_2 es constante. Escribimos el cociente como antes,

$$\frac{\phi_1(z)}{\phi_2(z)} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}\frac{B_1(z)}{B_2(z)}\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d(\mu_1-\mu_2)(e^{it})\right).$$

Dicho cociente es constante si y solo si $B_1(z)/B_2(z)$ es constante, y por tanto ϕ_1 y ϕ_2 tienen los mismos ceros, y $\mu_1 = \mu_2$.

$\square$

Bibliografía

[1] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, Inc., 1987.

[2] W. RUDIN, *Functional Analysis*. McGraw-Hill, Inc., 1991.

[3] E. STEIN, R. SHAKARCHI, *Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces.* Princeton University Press, Princeton, 2005.

[4] N. ARONSZAJN, K. T. SMITH, "Invariant subspaces of completely continuous operators", *Annals of Mathematics*, Vol. 60, No. 2, 1954.

[5] P.R. HALMOS, "Invariant subspaces of polynomially compact operators", *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 16, 1966.

[6] V. LOMONOSOV, "Invariant subspaces for the family of operators which commute with a completely continuous operator", *Functional Analysis and Its Applications*, Vol.7, 1973. DOI: 10.1007/BF01080698.

[7] H. RADJAVI, P.ROSENTHAL, *Invariant subspaces*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[8] L. GRAFAKOS, *Classical Fourier Analysis*. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2014.

[9] G.FOLLAND, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* Wiley, 1999.