ESPACIO-TIEMPO EN RELATIVIDAD DOBLEMENTE ESPECIAL

AUTOR:

Rafael J. García Leyva

DIRECTORES:

José Manuel Carmona Martínez

José Luis Cortés Azcoiti

Maykoll Anthonny Reyes Hung

Departamento de Física Teórica

Zaragoza, 16 de septiembre de 2025

Agradecimientos

Aunque la autoría de este trabajo me corresponda, su realización habría sido imposible sin la ayuda de mis tutores. Les agradezco enormemente que aceptaran mi propuesta, me ayudaran a modelarla, respondieran a todas mis preguntas, por filosóficas que fueran, y estuvieran siempre abiertos a debatir y corregir mis ideas y teorías.

Me gustaría agradecer también a la Universidad de Zaragoza por darme la oportunidad de completar mis estudios de grado y, en general, a la ciudad de Zaragoza por acogerme todos estos años.

Y, por supuesto, a mis padres por todo su apoyo, cariño y esfuerzo.

"Si he visto más lejos es por estar sobre los hombros de gigantes."
— Isaac Newton

"Detrás de las cosas tenía que haber algo profundamente oculto."
— Albert Einstein

"El problema no es el problema, el problema es tu actitud frente el problema."
— Jack Sparrow

Índice de contenidos

1. Introducción

Desde hace milenios los seres humanos han convivido cuestionándose la realidad, preguntándose: ¿qué es?, ¿de qué está hecha?, ¿cómo se formó? o ¿qué pasará en el futuro? Generación tras generación el entendimiento de la realidad ha ido evolucionando. Desde los primeros mitos y religiones hasta las corrientes filosóficas y físicas más modernas, existe un elemento común: siempre se ha intentado ubicar al hombre en un momento y lugar.

A lo largo del siglo XX la física teórica se dividió en dos corrientes principales: la física cuántica y la relatividad general, cada una de ellas enfocada en dar explicación a fenómenos distintos. Durante las últimas décadas, los físicos teóricos han dedicado sus esfuerzos a unificar ambas teorías bajo una única *teoría del todo*, una formulación capaz de explicar y predecir tanto los fenómenos cuánticos como gravitatorios. Para la construcción de este formalismo no solo es necesario conocer la física implicada, sino también ser capaz de incluirla en un marco espacio-temporal compatible con ambas teorías, ya que tanto el espacio como el tiempo juegan un papel esencial en la formulación y entendimiento de la realidad.

El objetivo principal de este trabajo es hacer un estudio de las nociones de espacio y tiempo a través de la física, desde las definiciones semi-filosóficas de Newton (1643-1727), hasta las abstracciones matemáticas más modernas. Se busca identificar estos elementos fundacionales de la realidad, deducir sus propiedades y estudiar sus efectos, prestando atención a cómo a medida que la formulación de la física evoluciona, también lo hace la comprensión del espacio y del tiempo. Para ello, se realiza un recorrido a través de los marcos teóricos establecidos; mecánica clásica, relatividad especial y general, física cuántica y teoría cuántica de campos. Se introducen los conceptos de *trayectorias* y *localidad*, definiendo un formalismo mediante la *acción* y construyendo un marco espacio-temporal a través de las *interacciones*. Se realiza un análisis de las implicaciones que presentan las construcciones de cada marco espacio-temporal para, posteriormente, determinar las propiedades que ha de presentar un espacio-tiempo que sea capaz de albergar una física tanto cuántica como gravitatoria. Finalmente se presenta la teoría de la *relatividad doblemente especial*, una propuesta moderna y un acercamiento a la teoría del todo a través de una reformulación de la relatividad especial de Einstein.

La metodología seguida para la redacción de este documento se divide en dos partes. Para las secciones comprendidas entre 2: *Espacio-tiempo en mecánica clásica* y 6: *Espacio-tiempo en teoría cuántica de campos*, se ha realizado una búsqueda de información en libros de texto, mientras que para las secciones posteriores, dedicadas a marcos más modernos de gravitación cuántica y relatividad doblemente especial, se ha recurrido principalmente a artículos científicos, algunos de los cuales vienen referenciados directamente dentro del texto. Al final de cada sección puede encontrarse un recopilatorio de la bibliografía consultada para su redacción.

2. Espacio-tiempo en mecánica clásica

La cuestión principal de la mecánica es el estudio del movimiento de los cuerpos; su variación en el espacio y en el tiempo. En su libro *"Philosophiæ naturalis principia mathematica (1687)"*, Newton identifica el *tiempo y espacio absolutos* como entidades distinguibles con naturaleza propia, cuyas propiedades no sufren alteraciones por ninguna causa externa. Todos los cuerpos se posicionan en el espacio en un orden de situación y en el tiempo en un orden de sucesión. Sin embargo, nuestros sentidos no son capaces de percibir estas entidades absolutas, por lo que estudiamos en su lugar mediciones sensibles de las mismas, es decir, *entidades relativas*. Una medición del tiempo nos indica la *duración* aparente del movimiento, mientras que una medición del espacio nos permite identificar la *posición*, que no es tanto el *lugar* o parte del espacio en el que se encuentra un cuerpo sino las propiedades de ese lugar. Las traslaciones a través de estos espacios y tiempos relativos conforman los *movimientos*.

Para el estudio de estos movimientos en el marco de la mecánica clásica se hace uso de un *sistema de referencia*. Éste consiste en la elección de un origen espacial junto a unos ejes, en pos de clasificar las distintas posiciones del espacio, y la elección de un origen temporal a partir del cual comenzar a medir los tiempos. Utilizando terminología moderna: se puede asociar a cada posición P de un espacio tridimensional un vector posicional $\mathbf{r}$ que especifique la distancia de P con respecto a un origen O. El tiempo se puede definir como un parámetro t que es común para todos los observadores. Aparte de la ambigüedad que puede originar la elección del origen de éste ($t_0 = 0$), todos los observadores coincidirán en el tiempo en el que suceden los eventos, es decir, en la duración de los mismos. Tanto las coordenadas espaciales como temporales serán continuas, y por lo tanto, tomarán valores reales. Considerando, además, que los tiempos medidos son comunes para todos los observadores, se puede describir la posición de los cuerpos utilizando éste como variable independiente:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{x}} + y(t)\hat{\mathbf{y}} + z(t)\hat{\mathbf{z}} \qquad\qquad d\mathbf{r}/dt = \dot{\mathbf{r}} \tag{1}$$

Las leyes de Newton describen el movimiento de los cuerpos a lo largo de *trayectorias* definidas. Se entiende como trayectoria una función $\mathbf{r}(t)$ que, para cada tiempo t_a, tiene un valor concreto $\mathbf{r}(t_a) = \mathbf{r}_a$. Posteriormente, se determina cuál de entre todas las posibles trayectorias representa el movimiento del cuerpo, a través del principio de mínima acción, o principio de Hamilton. Este principio atribuye a cada posible trayectoria un parámetro S llamado *acción*. La trayectoria que describe el movimiento es aquella que minimiza dicho parámetro. Éste se obtiene a través del Lagrangiano (L), que es una función que deriva de las leyes de Newton y a partir de la cual se puede obtener la evolución temporal de un sistema. Si la masa del cuerpo viene dada por m y está sometido a un potencial V obtenemos las siguientes expresiones para representar los movimientos:

$$\underset{\text{(Acción)}}{S = \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)dt} \qquad \underset{\text{(Lagrangiano)}}{L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}, t)} \qquad \underset{\text{(Ecuaciones de movimiento)}}{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0} \tag{2}$$

Galileo Galilei desarrolló las llamadas *transformaciones de Galileo* para analizar qué ocurre con las trayectorias al cambiar el sistema de referencia $O \to O'$. Este cambio puede deberse tanto a una rotación como a una traslación temporal, espacial o inercial. Mientras que las duraciones se mantienen invariantes independientemente del sistema de referencia, las distancias pueden verse modificadas si la traslación es inercial. Las transformaciones propuestas por Galileo permiten relacionar estas distancias medidas desde distintos sistemas de referencia y quedan resumidas en la siguiente tabla:

	T. temporal	T. espacial/Rotación	T. inercial ($\mathbf{r}$'= $\mathbf{r} - \mathbf{v}t$)
Tiempo origen	$t_0' \neq t_0$	$t_0' = t_0$	$t_0' \neq t_0$
Duración	$\triangle t' = \triangle t$	$\triangle t' = \triangle t$	$\triangle t' = \triangle t$
Posición origen	$\mathbf{r}_0' = \mathbf{r}_0$	$\mathbf{r}_0' \neq \mathbf{r}_0$	$\mathbf{r}_0' \neq \mathbf{r}_0$
Distancia	$\triangle \mathbf{r}' = \triangle \mathbf{r}$	$\triangle \mathbf{r}' = \triangle \mathbf{r}$	$\triangle \mathbf{r}' = \triangle \mathbf{r} - \mathbf{v} \triangle t$

Tabla 1: Cambios en las coordenadas de espacio-tiempo según las transformaciones de Galileo.

En otras palabras y volviendo a la terminología de Newton: los cuerpos se mueven por el espacio y el tiempo independientemente del sistema de referencia elegido, es decir, por un tiempo y un espacio absolutos. Sin embargo, desde distintos sistemas de referencia se pueden realizar mediciones distintas de estos movimientos, es decir, mediciones relativas. De esta forma, aunque sean absolutos, nuestra percepción del espacio y el tiempo está, en este sentido, sujeta al sistema de referencia que elijamos.

Pese a ello, cuando dos o más trayectorias coinciden en el mismo lugar y en el mismo instante, se produce una *interacción de contacto*. Si ésta se da en un sistema de referencia, sabremos, gracias a las transformaciones de Galileo, que se dará en cualquier otro sistema de referencia. Se puede definir así, a través de las interacciones obtenidas en nuestras mediciones, un marco espacio-temporal común para todos los observadores.

Existe otro tipo de interacciones que no son de contacto, como por ejemplo la electromagnética. Estas son las *interacciones a distancia* y se describen formalmente a través del concepto de campo. En la teoría clásica de campos, la *localidad* de las interacciones es un pilar básico. Esto quiere decir que el campo en un punto $\mathbf{r}$ a un tiempo t solo puede influir sobre una partícula que se encuentre en ese mismo punto $\mathbf{r}$ y tiempo t. Estas interacciones, pese a no ser necesarias para hacer una construcción del marco espacio-temporal, serán más adelante esenciales para representar sobre éste teorías físicas donde el marco no esté bien definido. De una manera no rigurosa, podríamos decir que utilizaremos los campos como una herramienta para convertir al mundo clásico fenómenos que escapan a nuestra percepción del mundo. Al fin y al cabo, la interacción del ser humano con su entorno se limita al dominio de la física clásica.

Referencias bibliográficas:[1][2][3][4][5]

3. Espacio-tiempo en relatividad especial

En 1887, Michelson y Morley realizaron un experimento para medir el movimiento de la Tierra a través del espacio. En este experimento comprobaron que la velocidad de la luz se mantenía constante en todas las direcciones, lo cual, de acuerdo a las transformaciones de Galileo, no tenía sentido si la Tierra estaba en movimiento. Esto llevó a Albert Einstein a publicar en 1905 los postulados de la relatividad especial.

- Las leyes de la física son iguales para todos los sistemas de referencia inerciales.
- La velocidad de la luz en el vacío (c) es la misma para todos los sistemas inerciales.

Estos postulados invalidan las transformaciones de Galileo, por lo que, para seguir utilizando el marco espacio-temporal común definido por las interacciones, se ha de emplear un nuevo juego de transformaciones. Para ello, se utiliza el *espacio-tiempo de Minkowski*, que agrupa en un mismo modelo matemático las cuatro coordenadas que se utilizan para medir posiciones; tres espaciales en un eje y una temporal en el otro. Los puntos dentro de este espacio-tiempo son *eventos*, los cuales corresponden a la partícula en un lugar y momento dado de su historia. Una rotación hiperbólica de este marco espacio-temporal equivaldrá a un movimiento relativo entre dos sistemas de referencia inerciales O y O', una forma esquemática y visual de representar estas rotaciones es la siguiente:

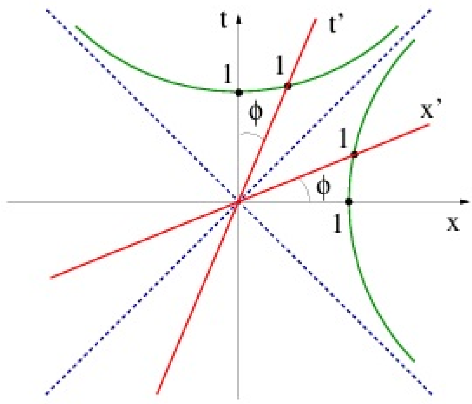


Figura 1: Relacion entre O y O' a través de una rotación hiperbólica.[6]

Lorentz desarrolló, a través de la geometría de estas rotaciones, las siguientes transformaciones que sustituyen a las de Galileo:

$$\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}t/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad\qquad t' = \frac{t - \mathbf{v}\mathbf{r}/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{3}$$

Estas expresiones dejan de ser válidas para velocidades mayores que la de la luz. Se puede estudiar la consecuencia de este resultado analizando la distancia espacio-temporal entre dos eventos de una misma trayectoria. Esta distancia entre eventos toma el nombre de *intervalo* s^2 y permite redefinir el concepto de acción S (que en el marco clásico se utilizaba para describir el movimiento de los cuerpos) de acuerdo a este nuevo marco espacio-temporal. Utilizando λ como parámetro arbitrario de la trayectoria, representando la métrica del espacio de Minkowski como $\eta_{\nu\mu}$ y los cuadrivectores dentro de éste espacio como $x^\mu = (-ct, \mathbf{r})$ se obtiene la siguiente relación entre el intervalo y la acción:[1]

$$s^2 = -(ct)^2 + \mathbf{r}^2 \qquad\qquad S = -m\int d\lambda \sqrt{-\eta_{\nu\mu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}} = m\int ds \tag{4}$$

[1]Anexo A: Acción relativista y consideración sobre el tiempo propio.

Esta nueva definición de la acción permite, de nuevo, estudiar el movimiento de los cuerpos mediante la minimización de S, lo que equivale a la minimización del intervalo ds. Pero, ¿qué ocurre con las partículas sin masa como el fotón? Para estas partículas no podemos minimizar la acción ya que el término de masa anula la propia función. Para estudiar éstas, se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange: aplicando la ligadura $p^{\mu}p_{\mu} = m^2$, que es la relación de energía-momento[2] de una partícula relativista donde p^{μ} representa su cuadrimomento[3] y se han tomando unidades naturales $c = 1$. Este cuadrimomento puede obtenerse a partir de la ecuación (4):

$$p^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{\mu}} = m\frac{\partial}{\partial \dot{x}_{\mu}}\left(\sqrt{\dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\mu}}\right) = m\frac{\dot{x}^{\mu}}{\sqrt{\dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\mu}}} = m\frac{\dot{x}^{\mu}}{\sqrt{c}} = m\dot{x}^{\mu} \tag{5}$$

Se puede entonces recuperar las mismas ecuaciones de movimiento que las desarrolladas a partir de la ecuación (4) para partículas con $m = 0$. Aplicando la ligadura a una expresión alternativa para la acción:

$$S = \int d\tau \left[p^{\mu}\dot{x}_{\mu} - \lambda\left[p^{\mu}p_{\mu} - m^2\right]\right] \tag{6}$$

De esta forma, se obtiene una expresión general que, al ser minimizada, describe la trayectoria de una partícula en el contexto de la relatividad especial, es decir, sus ecuaciones de movimiento $p^{\mu}(\tau)$ y $x_{\mu}(\tau)$, independientemente de si la partícula tiene masa o carece de ella.

Al analizar los posibles valores del intervalo relativista (tabla 2) se comprueba que hay una correlación directa entre el signo de éste y la velocidad de la partícula. Cómo se comentaba anteriormente, las transformaciones de Lorentz (3) dejan de ser válidas para velocidades superiores al umbral marcado por la luz. Así se concluye que, para que el movimiento de una partícula sea posible entre dos eventos, el intervalo entre estos ha de ser definido positivo:

$\mathbf{v} < c$	$\mathbf{v} = c$	$\mathbf{v} > c$
$\triangle s^2 > 0$	$\triangle s^2 = 0$	$\triangle s^2 < 0$

Tabla 2: Relación entre la velocidad y el intervalo.

Del mismo modo que ocurría en el marco de la física clásica, todos los observadores miden el tiempo y las distancias de manera similar; es al comparar las mediciones entre sistemas de referencia que aparecen las discrepancias. A través de las ecuaciones de Lorentz (3) se llega a la conclusión de que no solo las mediciones relativas de las distancias pueden variar dependiendo del observador, sino que también las duraciones entre eventos pueden verse modificadas. Sin embargo, al igual que en la física clásica, se puede construir a través de las interacciones un marco espacio-temporal común, relacionando los distintos sistemas de referencia inerciales entre sí. Utilizando para ello las transformaciones de Lorentz de forma análoga a como se utilizaban las de Galileo en el marco clásico. Además, como la velocidad de la luz en el vacío es un límite independiente del sistema de referencia, se deduce que es una propiedad intrínseca del espacio-tiempo absoluto.

Referencias bibliográficas:[4][5][6][7][8][9][10][11]

[2] $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$ — siendo E la energía, p el momento de la partícula y m_0 su masa en reposo.
[3] $p^{\mu} = (E/c\,, p)$ — Cuadrivector en el espacio de Minkowski.

4. Espacio-tiempo en relatividad general

Newton identificó que la intensidad con la que los objetos se atraen entre sí a causa de la gravedad está determinada por una propiedad que poseen todas las partículas de materia del universo, a la cual denominó *masa gravitacional* m_g. A su vez, la *masa inercial* m_i es una medida de la resistencia de un objeto a cambiar su estado de movimiento. Determinó entonces que ambas masas coinciden; esta idea condujo a Einstein a deducir que todos los efectos producidos por una aceleración son equivalentes a los producidos por la gravedad, postulando así el principio de equivalencia: "En cualquier pequeña región del espacio, los efectos producidos por la gravitación son los mismos que los producidos por una aceleración".

¿A qué se debe que este principio de equivalencia se aplique a pequeñas regiones del espacio? A que en caso contrario sí se podría hacer una distinción entre los efectos gravitatorios y una aceleración del sistema. Por ejemplo, pongámonos en el caso de dos partículas en caída libre bajo un potencial gravitatorio: si las partículas están lo suficientemente alejadas, no solo se apreciaría un movimiento de caída libre, sino que se vería cómo éstas se acercan también entre sí, fruto de los efectos gravitatorios. Dicho de otra forma: "En pequeñas regiones del espacio, las leyes de la física se reducen aproximadamente a las de la relatividad especial, por lo que es imposible detectar la existencia de un campo gravitatorio a partir de experimentos locales". Esta idea llevo a Einstein a entender la gravedad como una propiedad del fondo sobre el que se propaga la materia. Dicho de otra forma, que la gravedad sea una propiedad del fondo quiere decir que es intrínseca al espacio-tiempo absoluto.

En relatividad especial no se puede distinguir un sistema de referencia como "en reposo". Sin embargo, podemos considerar un conjunto de ellos que estén no acelerados unos respecto a otros, es decir, inerciales. En relatividad general ocurre algo similar, no existen cuerpos que no sufran la aceleración de la gravedad y, por tanto, puedan ser usados como referencia para medir la aceleración gravitatoria sufrida por el resto de cuerpos. Por ello, tiene más sentido definir el término "no acelerado" como "en caída libre" refiriéndose éste a moverse libremente en la presencia del campo gravitatorio de su alrededor. Se puede entonces definir como sistemas de referencia localmente inerciales a aquellos que siguen el movimiento de partículas individuales, en caída libre, en pequeñas regiones del espacio-tiempo. Manteniendo así una noción similar a la de los sistemas de referencia inerciales, pero descartando que sea extensible a todo el espacio-tiempo. Ésto nos impide hablar con certeza sobre la velocidad relativa de objetos lejanos, ya que los sistemas de referencia inerciales de esos objetos pueden ser completamente diferentes a los nuestros.

Se ha construido un modelo matemático que representa este espacio-tiempo que incluye la gravedad como propiedad intrínseca del mismo, utilizando una geometría curva. La gravedad sería una manifestación de esta curvatura. No podemos probar que la gravedad sea, de hecho, una curvatura del espacio-tiempo, pero la identificación del espacio-tiempo como una variedad con curvatura se fundamenta en la similitud entre la indetectabilidad de la gravedad en regiones locales, con nuestra capacidad de encontrar sistemas de coordenadas inerciales de una variedad. Localmente el espacio-tiempo parecerá plano, pero a grandes escalas se manifestará dicha curvatura. De esta forma, una reinterpretación de la última frase del párrafo anterior sería: *No* *podemos saber la aceleración que sufren los objetos lejanos porque la curvatura en esos puntos puede ser completamente distinta a la nuestra, no estaríamos midiendo con la misma vara.*

La curvatura del espacio-tiempo depende claramente de la métrica $g_{\mu\nu}$, que define la geometría de la variedad. Las formas en las que puede manifestarse esta curvatura se representan con las *conexiones*, las cuales proporcionan un modo de relacionar los vectores de los espacios tangentes de un punto con los de los puntos cercanos. El *símbolo de Christoffel* Γ incluye la conexión que se construye a partir de la métrica y está definido como:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \tag{7}$$

Y la expresión final de la curvatura viene dada por el tensor de Riemann

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \tag{8}$$

que recoge toda la información de interés sobre la curvatura de la variedad; esta será cero si la métrica es perfectamente plana. La posibilidad de encontrar sistemas de coordenadas inerciales en cada punto de una variedad

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \qquad\qquad \partial_\rho\, g_{\mu\nu} = 0 \tag{9}$$

conduce directamente al principio de acoplo mínimo o principio de covariancia general, a través del cual se puede coger una ley física válida en un sistema de coordenadas plano (inercial), escribirla en su forma tensorial y, comprobar así que la ley física resultante se mantiene válida para un espacio-tiempo con una geometría curva. Se puede estudiar así como se ven afectadas las trayectorias a lo largo de un espacio-tiempo con curvatura. Para el caso de una partícula libre se obtiene:[4]

$$\frac{d^2 x^\mu(\tau)}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho(\tau)}{d\tau} \frac{dx^\sigma(\tau)}{d\tau} = 0, \tag{10}$$

que se corresponde con la ecuación de una geodésica. A esta descripción de las trayectorias mediante geodésicas de un espacio-tiempo curvo se puede llegar también a través de la acción. Simplemente tomando la expresión para la acción relativista obtenida en la ecuación (6) e incluyendo en ella la métrica $g_{\mu\nu}$ en lugar de $\eta_{\mu\nu}$ (la cual está implícita en (6) al escribir $p^\mu p_\mu = p_\mu \eta^{\mu\nu} p_\nu$; ya que sería equivalente a multiplicar por la identidad). Obteniéndose así

$$S = \int d\tau \left[p_\mu \dot{x}^\mu - \lambda(\tau) \left[p_\mu g^{\mu\nu} p_\nu - m^2 \right] \right] \qquad\qquad p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\,, \tag{11}$$

expresión de la cual se puede obtener, al ser minimizada, tanto las trayectorias geodésicas de los cuerpos como sus ecuaciones de movimiento $\dot{x}^\mu$ y $\dot{p}_\mu$.[5]

Existen dos enfoques sobre la aplicación de la relatividad general: el primero es el marco de trabajo espacio-temporal y su curvatura, así como su influencia en la materia (cómo el campo gravitacional influye sobre la materia) y, el segundo es la dinámica de la métrica como respuesta a la energía y el momento (cómo la materia determina el campo gravitacional). La ecuación de campo de Einstein indica cómo la métrica responde a la energía y el momento, relacionando

[4] Anexo B: Partícula libre en relatividad general.

[5] Anexo C: Integral de camino de una acción jacobiana.

ciertos componentes del tensor de Riemann y el escalar de Ricci R[6] con el tensor de energía-momento T

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} &= 8\pi G T_{\mu\nu} \\
G_{\mu\nu} &= 8\pi G T_{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

La teoría de la relatividad general es, como su nombre indica, una generalización de la teoría de relatividad especial. Es capaz de explicar y predecir, con gran éxito, un elevado número de fenómenos que eran inexplicables utilizando únicamente la física no relativista. En el proceso, no solo deduce el por qué de ciertas discrepancias a la hora de realizar mediciones del espacio-tiempo desde sistemas de referencia diferentes, sino que atribuye propiedades y cualidades al espacio-tiempo absoluto, enriqueciendo nuestra comprensión del mismo. Sin embargo, la teoría genera, bajo ciertas condiciones, una serie de singularidades que son una evidencia de que la teoría o está incompleta, o es errónea. Otro aspecto convincente es el hecho de que se fundamenta sobre un espacio y tiempo clásicos, mientras que existen una serie de fenómenos que solo se explican si éste se comporta cuánticamente a nivel fundamental. Para estudiar esta teoría cuántica hay que dejar, de momento, de lado esta teoría de la gravitación y ver cómo se comporta la materia en regiones *muy* pequeñas del espacio y el tiempo.

Referencias bibliográficas:[5][8][9][10][11][12]

5. Espacio-tiempo en mecánica cuántica

Al realizar medidas de precisión sobre objetos microscópicos se obtienen resultados intrínsecamente probabilísticos. Al medir la posición de una partícula en un instante dado (t_0) se obtiene una distribución probabilística de resultados en una región $\triangle \mathbf{r}$ en torno a $\mathbf{r}_0$. La *densidad de probabilidad* $\Psi(\mathbf{r}, t)$ es la probabilidad de que una partícula esté, en el tiempo t, en un elemento de volumen $d^3\mathbf{r}$. A la amplitud de esta probabilidad se la conoce como *función de onda* ($\psi(\mathbf{r}, t)$) y contiene toda la información que es posible obtener de la partícula.

$$
\Psi(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \tag{13}
$$

En la descripción clásica, el estado de una partícula en un instante t está especificado por 6 parámetros que determinan su posición y velocidad (x, y, z; v_x, v_y, v_z), sin embargo, los estados cuánticos de una partícula están especificados por un número infinito de parámetros: los valores de la función de ondas $\psi(\mathbf{r}, t)$ para cada posición del espacio. Promediando estos infinitos parámetros se pueden obtener sus *valores esperados*, que no son más que el valor medio de los observables medidos. De esta forma se obtienen los valores esperados de magnitudes como la posición $\langle \mathbf{r} \rangle$ o el momento $\langle \mathbf{p} \rangle$. Sin embargo, la naturaleza probabilística de estas medidas conduce al principio de incertidumbre de Heisenberg, que establece la imposibilidad de medir con precisión arbitraria ambas magnitudes en un instante dado. Este principio de incertidumbre surge a partir de la no conmutación de los operadores de posición y momento, y relaciona las desviaciones estándar

[6] $R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$

(medidas de la incertidumbre) de ambas magnitudes $\sigma_\mathbf{r}$ y $\sigma_\mathbf{p}$ en una misma inecuación:

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \int \mathbf{r}\, \Psi(\mathbf{r},t) d\mathbf{r} \qquad ; \qquad \langle \mathbf{p} \rangle = \int \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Psi(\mathbf{r},t) d\mathbf{r} \qquad ; \qquad \sigma_\mathbf{r} \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{14}$$

Debido a esta incertidumbre, ya no se puede emplear la idea clásica de trayectoria (sucesión en el tiempo de las distintas posiciones ocupadas por la partícula), por lo que el principio de Hamilton, fundamentado en éstas, dejaría de ser válido. Como contrapartida, Richard Feynmann desarrolló una formulación de la mecánica cuántica en la que el movimiento entre dos posiciones queda descrito como la suma de todas las posibles trayectorias $\phi[\mathbf{r}(t)]$ entre ellas, teniendo en cuenta la contribución de cada una; no todas tendrán la misma probabilidad, ya que ésta dependerá de la acción S. A esta suma se le denomina *kernel* ($K(\mathbf{r}_b, \mathbf{r}_a)$) y se corresponde con la amplitud de probabilidad de ir desde $\mathbf{r}_a$ a $\mathbf{r}_b$.

$$K(\mathbf{r}_b, t_b; \mathbf{r}_a, t_a) = \sum_{\substack{\text{Todas las} \\ \text{trayectorias}}} \phi[\mathbf{r}(t)] \qquad ; \qquad \phi[\mathbf{r}(t)] = e^{(i/\hbar)S[\mathbf{r}(t)]} \tag{15}$$

Se puede entonces estudiar el movimiento de los cuerpos relacionando la función de ondas y el kernel de tal manera que la densidad de probabilidad de encontrar una partícula en $(\mathbf{r}, t)$ encontrándose previamente en $(\mathbf{r}_0, t_0)$ sea

$$\psi(\mathbf{r},t) = \int K(\mathbf{r},t;\mathbf{r}_0,t_0) \psi(\mathbf{r}_0,t_0) d^3\mathbf{r}_0 \tag{16}$$

En mecánica clásica se definían las interacciones a través de la coincidencia entre las trayectorias. Sin embargo, en mecánica cuántica no solo existe una, sino infinitas trayectorias para las partículas. A pesar de que las transformaciones de Galileo siguen siendo válidas en la mecánica cuántica (considerando un marco no relativista), las interacciones no definen un único punto en el marco espacio-temporal. ¿Qué implicaciones se derivan de esta imposibilidad de definir la posición de un cuerpo? Utilizando únicamente sistemas cuánticos no se puede hacer una distinción precisa entre los distintos puntos del espacio. No se puede decir, por ejemplo, dónde está situada una partícula ni qué trayectoria traza en un intervalo de tiempo. Entonces, ¿qué queremos decir cuando hablamos de la probabilidad de una partícula de *estar* en una posición?

No tiene sentido hablar de un espacio-tiempo definido de una manera intrínsecamente cuántica y por tanto, de interacciones de contacto. Sin embargo, podemos hacer interaccionar un sistema cuántico con un campo clásico y ver cómo evoluciona la función de onda en el tiempo. El campo empleado estará definido sobre el marco espacio-temporal clásico y, debido a la *localidad* de la interacción, se pueden utilizar las coordenadas del campo como argumentos de la función de onda. Esta localidad implica que un potencial clásico cualquiera $V(\mathbf{r}, t)$ afecta solo a la función de onda en las coordenadas $(\mathbf{r}, t)$ correspondientes. Esta relación entre un campo clásico y un sistema cuántico viene entonces sustentada por la localidad de la interacción mutua, cuya expresión formal fue desarrollada por Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r},t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r},t) \right] \Psi(\mathbf{r},t) \tag{17}$$

Esta ecuación se denomina *ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo* ya que describe la evolución temporal de un sistema cuántico, pero hay que notar que no lo hace bajo un marco espacial cuántico sino que lo torna clásico al evaluar la evolución del sistema al interaccionar con un campo clásico.

Retornando a la analogía empleada en los apartados previos, se puede inferir que el espacio-tiempo absoluto tiene equivalencia con ese espacio-tiempo cuántico del cual no se pueden realizar mediciones certeras con precisión arbitraria; un espacio-tiempo del que solo es posible realizar mediciones sensibles (o relativas) a través de evaluar los fenómenos emergentes frente a un marco espacio-temporal clásico previamente definido. El desconocimiento de la estructura espacio-temporal absoluta se deberá entonces, no sólo a la imposibilidad de elegir un sistema de referencia privilegiado sobre el resto, sino también a la incertidumbre inherente a las mediciones realizadas sobre él.

El siguiente paso en este recorrido a través de la evolución del entendimiento sobre el tejido espacio-temporal será entonces estudiar cómo se entrelazan las nociones de este marco cuántico con las de la relatividad especial. Con ese fin se desarrolló la teoría cuántica de campos.

Referencias bibliográficas:[12][13][14][15][16]

6. Espacio-tiempo en teoría cuántica de campos

Hay ciertos procesos en la naturaleza donde el número de partículas no se conserva. Por ejemplo, dependiendo de la energía implicada, una colisión entre un electrón y un positrón puede generar tanto una plétora de partículas como aniquilarse en un par de fotones. Estos procesos no están contemplados en los marcos teóricos previos, por lo que, para explicarlos, es necesaria una formulación más completa de la mecánica. Esta nueva formulación deberá ser, a su vez, capaz de explicar los fenómenos relativistas y cuánticos tratados en los marcos expuestos anteriormente. Hay dos vías directas para unificar ambos marcos: mediciones a nivel cuántico de sistemas relativistas y la aplicación de energías relativistas a sistemas cuánticos. Sin embargo, hay dos motivos principales por los cuales ninguno de estos procedimientos es viable. El primero es que el principio de incertidumbre dice que, al tratar de localizar una partícula en regiones inferiores a $\hbar/mc$, se requiere de energías del orden de mc^2 o mayores, lo cual da lugar a la posibilidad de que se produzcan o generen nuevas partículas en esa región, dejando así de tener sentido el concepto de posición precisa de una *única* partícula. El segundo motivo es que si se intenta implementar directamente en la formulación de la mecánica cuántica el hamiltoniano de la energía relativista, se llega a situaciones en las que las partículas pueden moverse a velocidades superiores a la velocidad de la luz, dando la posibilidad a la ruptura de la relación causa-efecto de las transformaciones de Lorentz.[7] El punto clave para el desarrollo de una teoría que explique estos fenómenos conjuntamente está en la sustitución de un modelo basado en la descripción de los cuerpos como sistemas puntuales por una basada en campos. Se puede expresar la posición y el momento de un sistema cuántico a través de la función de ondas, a partir de la cual se obtiene una densidad de probabilidad. La evolución temporal de estas funciones de onda es similar a la

[7] Anexo D: Problema de la causalidad en QFT.

de los campos. El ejemplo más simple es el de una onda plana ϕ_p.[8]

$$J^\mu = (\rho, \mathbf{j}) = i(\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*)\phi) \tag{18}$$

$$J^0 = \rho = i(\phi^* \partial_0 \phi - (\partial_0 \phi^*)\phi) \tag{19}$$

De esta forma se pueden escribir, a partir de una función de onda, una densidad de probabilidad J^0 y una corriente de probabilidad J^μ. Estos elementos permiten hacer una descripción de la mecánica de los sistemas. Recalquemos que los objetos a cuantizar en este nuevo modelo son los campos, es decir, las funciones de onda de la mecánica cuántica.

Con el objetivo de formular esta nueva teoría, veamos qué le ocurre a la suma de trayectorias de una partícula relativista. En un espacio métrico de Minkowski las coordenadas espaciales $\mathbf{r}$ y temporales t de la trayectoria de una partícula dependerán del observador. A pesar de ello, como el tiempo propio de la partícula siempre avanzará $\delta\tau > 0$, se podrán parametrizar ambas variables como variables dependientes del tiempo propio τ. Esto quiere decir que, mientras que la mecánica cuántica se centraba únicamente en las trayectorias que avanzaban en el tiempo newtoniano t, ahora se han de considerar caminos cuyo tiempo t medido podrá ser positivo o negativo, dependiendo del tramo de la trayectoria y del sistema de referencia del observador.[9] Si en la ecuación (4) para la acción relativista de un cuerpo se interpreta el parámetro independiente como el tiempo propio $\lambda = \tau$, y $x^\alpha(\tau)$ representa la curva parametrizada que conecta los eventos x_1 y x_2. La amplitud de propagación $K(x_2; x_1)$ se obtendrá al realizar la suma de caminos, limitándose únicamente a los caminos $x^i(\tau)$ que avancen en su tiempo propio τ.

$$\begin{aligned} K(x_2; x_1) &= \sum_{0,x_1}^{t,x_2} \exp\left[-im \int d\tau \sqrt{-\eta_{\nu\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}\right] \\ &= \sum_{0,x_1}^{t,x_2} \exp\left[-im \int_0^\tau d\tau \sqrt{\dot{t}^2 - \dot{\mathbf{r}}^2}\right] \end{aligned} \tag{20}$$

Si desde un sistema de referencia se considera, para la suma de caminos, una trayectoria que "viaje atrás en el tiempo", es decir, cuyo tiempo newtoniano tome valores negativos en algún tramo, se podrá descomponer su propagador T, herramienta equivalente a la amplitud de probabilidad dentro del contexto de los campos, en dos campos escalares invariantes bajo Lorentz ($\phi(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) + B(\mathbf{r})$) de tal forma que:

$$\begin{aligned} K(x_2; x_1) &= \langle 0| T[\phi(x_2)\phi^\dagger(x_1)] |0\rangle \\ &= \theta(t) \langle 0| A(\mathbf{r}_2) A^\dagger(\mathbf{r}_1) |0\rangle + \theta(-t) \langle 0| B(\mathbf{r}_1) B^\dagger(\mathbf{r}_2) |0\rangle \end{aligned} \tag{21}$$

Sean dos eventos distintos: que la partícula esté en $\mathbf{r}_1$ y que esté en $\mathbf{r}_2$. La noción de causalidad bajo las transformaciones de Lorentz indicará cuánto contribuye cada amplitud al kernel total, de tal forma que cuando $t < 0$, la propagación de una partícula $\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2$ estará gobernada por la propagación hacia adelante en el tiempo de una *antipartícula*, representada por los operadores B y $B^\dagger$.

- Si estamos en un sistema de referencia con $t > 0$, la amplitud G($\mathbf{r}_2$;$\mathbf{r}_1$) será la de una partícula propagándose de $\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2$

[8] $\phi_p = e^{\pm i(Et - \mathbf{px})} = e^{\pm i p^\mu x_\mu}$

[9] Anexo A: Acción relativista y consideración sobre el tiempo propio.

- Si estamos en un sistema de referencia con $t < 0$, la amplitud $\mathrm{G}(\mathbf{r}_2;\mathbf{r}_1)$ será la de una antipartícula propagándose de $\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1$

En cualquier sistema de referencia habremos creado siempre una partícula (o antipartícula) antes de destruirla, solucionando así el problema de la causalidad.

Ejemplo:

En un sistema de referencia un protón p_1 se desintegra en $\mathbf{r}_1$ en un neutrón n_1 y un pión positivo (π^+); este pión interacciona luego en $\mathbf{r}_2$ con otro neutrón distinto n_2 para dar lugar a un protón nuevo p_2. Desde otro sistema de referencia inercial primero interaccionan el pión con el neutrón en $\mathbf{r}_2$ y posteriormente se realiza la desintegración en $\mathbf{r}_1$. Este caso sería sorprendente, ya que el observador habría visto absorberse una partícula antes de ser producida. Sin embargo, desde su punto de vista, este mismo proceso podría entenderse de tal forma que en $\mathbf{r}_2$ un neutrón se desintegrase en un protón y un pión negativo π^- que luego avanzase hasta su absorción en $\mathbf{r}_1$ por un protón para dar lugar a un neutrón. Ambos procesos son equivalentes y ambos explican el mismo fenómeno. Aunque este pión negativo sería considerado por el primer observador como una antipartícula viajando hacia atrás en el tiempo, para el segundo observador sería el pión positivo el visto como una partícula que retrocede en el tiempo (se destruye antes de ser creado).

$$\begin{array}{ccc} p_1 \rightarrow n_1 + \pi^+ & \Longrightarrow & \pi^+ + n_2 \rightarrow p_2 \\ p_1 + \pi^- \rightarrow n_1 & \Longleftarrow & n_2 \rightarrow p_2 + \pi^- \end{array}$$

Para cada tipo de partícula cargada existe por tanto una partícula con carga opuesta, de igual masa, llamada *antipartícula*.

De esta forma, para integrar coherentemente los fenómenos cuánticos y relativistas simultáneamente, el espacio y el tiempo dejan de considerarse magnitudes independientes y se formulan como coordenadas de un único espacio-tiempo, tomando como parámetro fundamental el tiempo propio τ. Sin olvidar que el espacio-tiempo absoluto ha de ser esencialmente cuántico, el tiempo absoluto de Newton queda reemplazado conceptualmente por el tiempo propio τ, que desempeña un papel similar como parámetro común e invariante en la descripción de un sistema a lo largo de su línea de mundo. En este contexto, las mediciones del espacio y del tiempo no son independientes, sino que están relacionados a través de la métrica de Minkowski. Teniendo ésto en consideración, del mismo modo que era imposible definir un punto espacial de manera intrínsecamente cuántica, no es posible definir un punto espacio-temporal en la teoría cuántica de campos. Sin embargo, al igual que se utilizan los campos para realizar una interpretación clásica del espacio-tiempo cuántico, se puede hacer uso de los propagadores T que, al utilizar como argumentos los valores del cuadrivector $\mathbf{r}^i(\tau)$, asignan a cada interacción unas coordenadas espacio-temporales bajo una ordenación clásica. Permitiendo así estudiar la evolución de los sistemas desde un punto de vista clásico y realizar mediciones sensibles de los mismos que puedan ser representadas e interpretadas de manera coherente.

La teoría cuántica de campos no contempla la acción de la gravedad y está, por tanto, construida sobre un espacio-tiempo plano, es decir, bajo una métrica de Minkowski. Se podría pensar que la forma natural de incluir esta acción gravitatoria es construir una teoría cuántica de campos en un espacio-tiempo curvo, sobre el cual se propaguen los campos de materia. A pesar de que este formalismo con curvatura permite describir fenómenos cuánticos en presencia de gravedad clásica, y ha sido clave para entender procesos como la radiación de Hawking o el efecto Unruh, presenta la limitación de que la interacción materia–geometría no es completa, pues los campos de materia cuantizados influyen solo a través de su valor promedio en la geometría clásica de la métrica $g_{\mu\nu}$. Por esa razón, en lugar de detenernos en ese marco intermedio, avanzaremos hacia el estudio de teorías de gravitación cuántica, donde la propia estructura del espacio-tiempo se trate de manera cuántica y, tanto los cuerpos como la geometría interaccionen entre sí a nivel cuántico. Estas teorías aún inacabadas forman parte de los temas de vanguardia en la física teórica actual y, aunque en este trabajo no se pueda recoger una interpretación final de esta teoría completa, si es posible analizar las características que ha de tener el tejido espacio-temporal que albergue una teoría de gravitación cuántica.

Referencias bibliográficas:[11][12][14][15][17][18]

7. Espacio-tiempo en una teoría de gravitación cuántica

Llegados a este punto se han desarrollado paralelamente dos marcos teóricos físicos que explican fenómenos distintos, ambos apoyados sobre un espacio-tiempo clásico. Por un lado, la teoría cuántica de campos junta la relatividad especial y la mecánica cuántica para describir el comportamiento de los cuerpos sobre este espacio-tiempo y, por otro lado, la relatividad general, que curva el espacio-tiempo en función de los cuerpos que se encuentran en él. Actualmente los físicos son incapaces de unificar ambos marcos teóricos en uno común de manera satisfactoria pero se puede, sin embargo, deducir algunas de las características que un espacio-tiempo común habría de tener.

Así como hizo Newton, preguntémonos cómo serían las mediciones sensibles que podríamos hacer en un escenario en el cual hubiéramos de tener en cuenta tanto la relatividad general como la teoría cuántica de campos. Por un lado, la mínima distancia que pudiera ser medida entre dos cuerpos δl habría de ser mayor que la incertidumbre entre la posición de ambos. Por el principio de incertidumbre (14) se sabe que la posición de un cuerpo no puede conocerse con una precisión $\sigma_{\mathbf{r}}$ menor que $\sigma_{\mathbf{r}}\sigma_p = \hbar/2$. En la sección anterior se comentó también que al tratar de localizar una partícula en regiones inferiores a $\hbar/mc$, se requieren de energías del orden de mc^2 o mayores, es decir, $\sigma_p \leq mc$. Sin embargo, la relatividad general muestra que es necesario tener en consideración la curvatura del espacio-tiempo cuando uno se aproxima a un objeto de masa m a una distancia del orden de su radio de Schwarzchild $r_s = 2Gm/c^2$, ya que un objeto más pequeño que su radio de Schwarzchild es un *agujero negro*, y ninguna señal proveniente del interior del radio de Schwarzschild puede alcanzar el exterior. Se asume entonces que, efectivamente, el radio de Schwarzchild de cada cuerpo ha de ser menor que la distancia que los separa $r_s \leq \delta l$:

$$\delta l \geq \Delta l \geq \frac{\hbar}{\Delta p} \geq \frac{\hbar}{mc} \geq \frac{\hbar G}{c^3 \delta l} \tag{22}$$

$$\delta l \geq \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = l_{Pl} \tag{23}$$

Se puede asegurar que si tenemos en cuenta las propiedades antes mencionadas, la distancia mínima que se puede medir entre dos cuerpos no es menor que la llamada *longitud de Planck* l_{Pl}. A través de la relatividad especial se concluye que la velocidad máxima a la que puede moverse un cuerpo para no violar la relación de causalidad es la de la velocidad de la luz en el vacío c. Se puede deducir entonces de manera directa que el mínimo instante de tiempo que es posible medir es la duración que tarda la luz en recorrer la longitud de Planck en el vacío $\delta t \geq l_{Pl}/c$, el tiempo de Planck:

$$t_{Pl} = \frac{l_{Pl}}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \tag{24}$$

Si se quiere construir una física que permita describir tanto los fenómenos descritos por la relatividad general como por la teoría cuántica de campos, se habrá de tener en consideración que ambas se construyen sobre un espacio-tiempo que, por propia su propia naturaleza, no permite mediciones por debajo de la *escala de Planck*. Pero, por otro lado, las transformaciones de Lorentz (3) permiten contraer las longitudes arbitrariamente al considerar observadores con velocidades relativas suficientemente altas. Esto implicaría que, desde un sistema de referencia adecuado, una distancia podría verse contraída por debajo de l_{Pl}. Si todos los observadores inerciales son equivalentes, puesto que no existe un sistema de referencia privilegiado sobre el resto, ¿cómo se puede compatibilizar esta longitud mínima universal con las transformaciones de Lorentz?

Referencias bibliográficas:[19][20]

8. Relatividad Doblemente Especial

Al plantear una cohesión entre la física cuántica y la relatividad general se observa la existencia de una escala mínima de medida, la longitud de Planck l_{Pl}, por debajo de la cual las mediciones sensibles del espacio y el tiempo dejan de tener significado operacional. Esta escala mínima emerge directamente de las propiedades del espacio-tiempo, por lo tanto es propio de él e independiente del sistema de referencia. Con el objetivo de formular una teoría concordante con este espacio-tiempo, la relatividad doblemente especial propone deformar las transformaciones de Lorentz de tal forma que coexistan dos invariantes universales: la velocidad de la luz c y la longitud de Planck l_{Pl}.

8.1. Transformaciones κ-Lorentz

A través de la longitud de Planck l_{Pl} se puede definir una escala de energía asociada κ[10]. Esta escala de energía es extremadamente alta ($\approx 10^{19}$ GeV) comparada con lo alcanzable en experimentos ($\sim 10^4$ GeV).[11] En consecuencia, a energías mucho menores que κ, los efectos de la relatividad doblemente especial son despreciables y la relatividad especial clásica funciona perfectamente. Actualmente se investiga cómo podrían manifestarse estos efectos cuántico-gravitatorios

[10] $[E] = [1/L]$

[11] En el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) se han llegado a alcanzar energías de 13 TeV.

en procesos de altas energías, como la posible dispersión de la radiación electromagnética en el vacío, que podría observarse a través de los estallidos de rayos gamma asociados a explosiones cósmicas de gran energía, o la aparición de anomalías en los umbrales de la producción de partículas, cuyos valores predichos por la relatividad clásica no coincidirían con los datos astronómicos. Este tipo de fenómenos son compatibles con un espacio-tiempo con longitud mínima y su formulación obligaría a realizar cambios en la relación de dispersión de los cuerpos,[12] teniendo en cuenta esta escala de energía κ. Estos cambios en la relación de dispersión se ven reflejados en una deformación de las transformaciones de Lorentz, dando lugar a las denominadas *transformaciones κ-Lorentz*.

Del mismo modo que, para conservar la velocidad de la luz, se construían las transformaciones de Lorentz reemplazando la suma de velocidades clásica por una composición no trivial de éstas,

$$\vec{v} + \vec{u} \longrightarrow \vec{v} \oplus \vec{u}\,, \tag{25}$$

para conservar la energía κ habremos de reemplazar la suma de momentos por una composición no trivial de éstos,

$$p + q \longrightarrow p \oplus q\,. \tag{26}$$

Una composición de momentos se puede interpretar como una traslación en el espacio de momentos. Así, la composición lineal de relatividad especial correspondería a un espacio de momentos llano, con traslaciones conmutativas, mientras que la composición no lineal (26) se correspondería con un espacio de momentos curvo, con curvatura determinada por la escala κ. Un espacio de curvatura constante positiva es maximalmente simétrico y se le denomina *de Sitter*, puede observarse la geometría de un espacio de este tipo en la siguiente imagen:

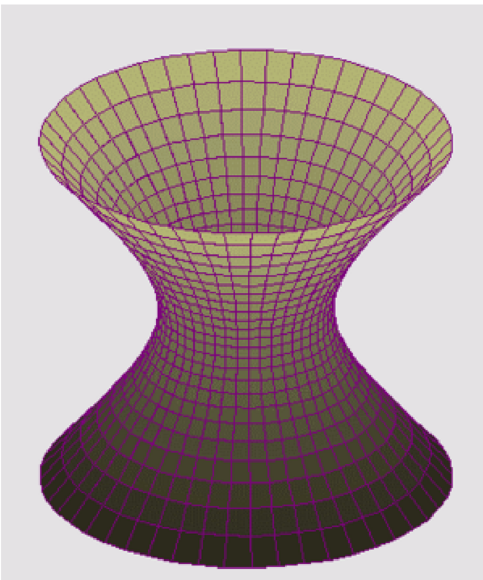


Figura 2: Espacio de de Sitter.[13]

[12] $E^2 = m^2 + p^2$

[13] `https://fr.wikipedia.org/wiki/Espace_de_de_Sitter`

Por el principio de invariancia general en el espacio de momentos —inspirado en la equivalencia y la covariancia general de la relatividad general—, las cantidades físicas definidas en este espacio de fases deben ser independientes del sistema de referencia considerado. Esto proporciona una libertad de elección entre las variables de energía-momento y las posibles deformaciones de los generadores que permite estudiar distintos formalismos de relatividad doblemente especial. Un ejemplo de ello serían los formalismos propuestos por Amelino-Camelia (DSR1) o por Magueijo y Smolin (DSR2)[14] que surgen de utilizar diferentes sistemas de coordenadas sobre el espacio de de Sitter. El hecho de que las interacciones sean invariantes bajo las isometrías de este espacio de momentos curvo conduce a una consecuencia asombrosa: la localidad de las interacciones en el espacio-tiempo convencional se pierde, dando paso a lo que se conoce como *localidad relativa*.

8.2. Localidad Relativa

Hasta ahora se ha analizado cómo la consideración de la longitud de Planck l_{Pl} como constante universal conduce a la formulación de un espacio de momentos curvo pero, ¿qué consecuencias tiene esto en el desarrollo del marco espacio-temporal? Para responder a esta pregunta se estudia cómo afecta la composición no lineal de momentos a la acción de una interacción. Si ésta ocurre en un instante $\tau = 0$ puede describirse como la suma del lagrangiano libre de las partículas involucradas —las que llegan y las que se van— junto con el lagrangiano de interacción, sobre el cual se imponen la ley de composición de momentos deformada

$$\begin{aligned} S = &\sum_i \int_{-\infty}^{0} d\tau \left(x^{\mu}_{(i)}(\tau)\, \dot{p}^{(i)}_{\mu}(\tau) + N_{(i)}(\tau) \left[C(p^{(i)}) - m^2_{(i)} \right] \right) \\ &+ \sum_j \int_{0}^{\infty} d\tau \left(x^{\mu}_{(j)}(\tau)\, \dot{p}^{(j)}_{\mu}(\tau) + N_{(j)}(\tau) \left[C(p^{(j)}) - m^2_{(j)} \right] \right) \\ &+ z^{\mu} \left(P^{(\text{out})}_{\mu}(0) - P^{(\text{in})}_{\mu}(0) \right) , \end{aligned} \tag{27}$$

donde $C(p)$ es la función que define la relación de dispersión, $N(\tau)$ es el multiplicador de Lagrange que la implementa, $P_{\alpha}(\tau)$ representa el cuadrimomento total obtenido a través de la ley de composición deformada de las partículas entrantes y salientes, y z^{α} es el multiplicador de Lagrange que implementa la conservación de energía y momento de la interacción.

Aplicando el principio variacional, se obtiene que las trayectorias están caracterizadas por un momento constante, independiente de τ, y las coordenadas espacio-temporales de los puntos final e inicial de las trayectorias de entrada y salida respectivamente quedan de la forma:

$$\text{(Entrada)}: \quad x^{\mu}_{i}(0) = z^{\nu}\, \frac{\partial P^{(in)}_{\nu}}{\partial p^{i}_{\nu}} \qquad\qquad \text{(Salida)}: \quad x^{\mu}_{j}(0) = z^{\nu}\, \frac{\partial P^{(out)}_{\nu}}{\partial p^{j}_{\nu}} \tag{28}$$

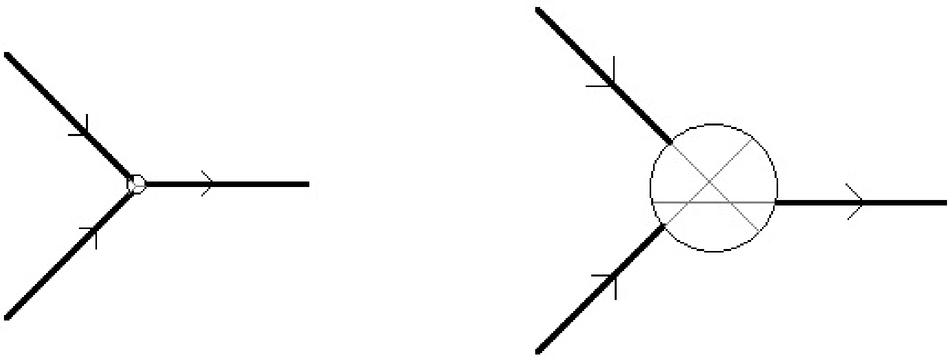
En los casos donde la ley de composición no está deformada, como en relatividad especial, se obtiene $x^{\mu}_{i}(0) = x^{\mu}_{j}(0) = z^{\mu}$. En este resultado las trayectorias coinciden en la misma coordenada y, por tanto, representan una interacción local. Sin embargo, una ley de composición deformada conduce a una pérdida de localidad en la que las trayectorias no coinciden sobre la misma coordenada. Así, la interacción será únicamente interpretada como local en el sistema de referencia que

[14] Puede encontrarse más información en el artículo de la bibliografía:[21]

asigne a interacción un valor $z^\mu = 0$, cualquier otro sistema de referencia con un valor distinto de z^μ no observará las trayectorias coincidir sobre una única coordenada x^μ. Los valores z^μ de los distintos sistemas de referencia están relacionados a través del cuadrimomento total P_μ, es decir, estarán relacionadas por traslaciones de distintos sistemas de coordenadas dentro del espacio de momentos. De esta forma se obtiene lo que se denomina *localidad relativa de las interacciones.*

Una forma más intuitiva de entender este fenómeno es pensar que, mientras que en relatividad especial todos los observadores coinciden en situar el vértice de interacción en el mismo punto del espacio-tiempo, en la relatividad doblemente especial cada observador asigna a una misma interacción una región distinta de su espacio-tiempo propio. Esta discrepancia constituye la localidad relativa; para cada observador solo serán locales las interacciones ubicadas en su mismo lugar espacio-temporal. Sin embargo, es dentro del espacio de momentos curvo donde, a través de las transformaciones κ-Lorentz, se garantiza un acuerdo universal sobre la interacción mediante la ley de conservación deformada; lo que cambia entre observadores es dónde sitúan el vértice de interacción en sus respectivos espacio-tiempo. Puesto que cada observador construye a partir de su espacio de fases una proyección distinta de espacio-tiempo.

Por ello, al considerar las características que surgen de los fenómenos cuántico-gravitatorios, no se puede a priori construir un marco espacio-temporal común para todos los observadores. Lo que para un observador será un evento puntual dentro de su espacio-tiempo, para otro dicho evento abarcará una pequeña región de su espacio-tiempo. Dichas regiones de tamaño $\ell \sim 1/\kappa$, además, variarán de forma y extensión en función del observador, cuanto mayor sea la distancia a la interacción, mayor será la deformación de la región, de acuerdo a las coordenadas (28) asociadas a dicha interacción.



(a) Interacción en $z^\mu = 0$.

(b) Interacción en $z^\mu \neq 0$.

Figura 3: Localidad relativa en DSR.

Para resolver el problema aparente de la localidad relativa, se ha propuesto abandonar la idea de utilizar coordenadas espacio-temporales canónicas para representar el movimiento de los cuerpos. En su lugar se pueden utilizar una serie de coordenadas generalizadas

$$\tilde{x}^\alpha_{(1)} = x^\mu_{(1)}\phi^\alpha_\mu(p^{(1)}) + x^\mu_{(2)}\phi^{(2)\alpha}_{(1)\mu}(p^{(2)}) \qquad \tilde{x}^\alpha_{(2)} = x^\mu_{(2)}\phi^\alpha_\mu(p^{(2)}) + x^\mu_{(1)}\phi^{(1)\alpha}_{(2)\mu}(p^{(1)}) \tag{29}$$

para un sistema de 2 cuerpos, donde $\phi(p)$ es una función dependiente del momento que cumple

$$\phi^{(2)\alpha}_{(1)\mu}(0) = \phi^{(1)\alpha}_{(2)\mu}(0) = 0 \qquad\qquad \phi^{\alpha}_{\mu}(0) = \delta^{\alpha}_{\mu} \tag{30}$$

para asegurar la localidad de las interacciones. A través de este método de generalización se obtienen dos elecciones posibles para las coordenadadas de una partícula:

$$\tilde{x}^{\alpha} = x^{\mu} \lim_{l\to 0} \frac{\partial (l \oplus p)_{\mu}}{\partial l_{\alpha}} \qquad o \qquad \tilde{x}^{\alpha} = x^{\mu} \lim_{l\to 0} \frac{\partial (p \oplus l)_{\mu}}{\partial l_{\alpha}} \tag{31}$$

Utilizando estas coordenadas generalizadas en lugar de las del espacio-tiempo canónico, se obtienen expresiones locales para las interacciones, por tanto, se puede construir un marco físico del mismo modo que se construían marcos espacio-temporales comunes para todos los observadores. Sin embargo, hay que aclarar que este juego de coordenadas no construye un marco espacio-temporal canónico, sino un marco matemático sobre el cual las interacciones son locales para todos los observadores. El hecho de que estas coordenadas generalizadas se construyan utilizando tanto coordenadas como funciones dependientes del momento, sugieren que se ha de poder construir una descripción geométrica del espacio-tiempo dependiente de la energía. La formulación de la métrica asociada a esta geometría dependerá, por tanto, del sistema de coordenadas definido sobre el espacio de momentos.[15]

A diferencia de la relatividad especial, donde todos los observadores medían el tiempo y las distancias de manera similar, y era al comparar estas mediciones donde surgían las discrepancias; desde el foco de la relatividad doblemente especial, las diferencias surgen directamente al realizar las mediciones relativas, ya que son ahora las posiciones y los momentos de los mismos eventos sobre los que discrepan los observadores. Ya no se discute sobre *cómo de largo* o *durante cuánto tiempo*, ahora las preguntas son *¿cuándo?* y *¿dónde?*

8.3. Problemas abiertos

A pesar de todo lo previamente establecido con respecto a la relatividad doblemente especial, la teoría presenta una serie de problemas que han abierto debate entre los físicos que trabajan a diario para asentar está nueva física. Algunos de estos problemas a contemplar son el *problema del balón de fútbol* o el *problema del espectador*.

El problema del balón de fútbol señala incongruencias al realizar la suma macroscópica de momentos. Debido a la no linealidad de la composición de momentos, cuando se intenta realizar la suma de un número elevado de partículas, por ejemplo, las que componen un balón de fútbol, se obtienen predicciones de la energía de este balón extremadamente altas en comparación con lo que experimentamos a diario. Físicos como G. Amelino-Camelia proponen caracterizar los sistemas multipartícula a través de una ley de composición producida por el analisis de la invariancia traslacional. Donde las escalas de energía necesarias para apreciar los efectos a nivel macroscópico son mucho mayores que la escala de energía para niveles microscópicos, es decir, la escala de energía es propocional al número de constituyentes del cuerpo.[16] Otros como J.M. Carmona, J.L. Cortés o M.A. Reyes, directores de este trabajo, sugieren que los efectos procedentes de la

[15] Más información en los artículos de la bibliografía: [22][23]

[16] Más información en el artículo de la bibliografía: [24]

relatividad doblemente especial proceden únicamente de las desviaciones en la localidad de las interacciones entre partículas elementales.[17]

Por otro lado el problema del espectador surge al analizar una interacción de dos partículas en presencia de una tercera que actúe como espectador: la definición del momento total puede hacer que la partícula espectadora afecte formalmente a la conservación de la interacción a pesar de no participar en ella, perdiéndose así la propiedad de clusterización. De nuevo, para este problema hay numerosas interpretaciones y muchos físicos han escrito al respecto: Camelia, Carmona, Cortes, Reyes o F. Girelli son algunos ejemplos entre otros.[18]

Por último, no hay que olvidar que la relatividad doblemente especial es una reformulación de la relatividad especial de Einstein, dentro de una descripción del espacio-tiempo coherente con la coexistencia de fenómenos tanto cuánticos como gravitatorios. Sin embargo, no es una teoría cuántica, ni tiene en consideración la acción gravitatoria in situ. En caso de lograrse una formulación completa de la teoría, sería lógico continuar la búsqueda de una gravitación cuántica a través del estudio de una teoría cuántica de campos doblemente especial, así como de una teoría de relatividad general doblemente especial.

Referencias bibliográficas: [21][22][23][24][25][26][27][28][29][30][31][32][33]

9. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha estudiado la evolución de las nociones de espacio y tiempo a través de diferentes marcos teóricos de la física. A partir de la concepción de Newton de estas nociones como entidades propias en sí mismas y de una naturaleza inmutable o absoluta, y entendiendo que de estas entidades solo se pueden obtener abstracciones que permiten la comprensión de la realidad, se alcanza una concepción platónica que sirve como base para la formulación de una física teórica. Esta física permite el estudio del espacio-tiempo a través de lo inherente a la realidad, esto es, mediante el estudio de invariantes bajo cambios de sistemas de referencia. Estos invariantes los encuentra gracias a las interacciones entre los cuerpos, ya que estas han de ocurrir en un lugar y momento concretos.

Más adelante se ha comprobado cómo esta física queda obsoleta y se han descubierto nuevas propiedades de lo que han de ser los absolutos newtonianos. Con la física relativista se interpreta la velocidad de la luz en el vacío como una propiedad emergente directamente del espacio y del tiempo y, con la inclusión de la gravitación, se asocia al espacio una geometría curva. Con la física cuántica se modifica el significado de ubicarse en un lugar concreto del espacio, otorgándole propiedades intrínsecas de indeterminación a los absolutos. La teoría cuántica de campos busca unificar ambas físicas y, para ello, fusiona al espacio y el tiempo en una única entidad: el espacio-tiempo. Sin embargo se ve incapaz de incluir la gravitación en la formulación de esta descripción espacio-temporal.

A partir de aquí, el objetivo principal de la física teórica es encontrar una teoría capaz de explicar

[17] Mas información en el artículo de la bibliografía: [25]
[18] Mas información en los artículos de la bibliografía: [25][26][27]

los fenómenos gravitatorios y cuánticos de manera unificada y satisfactoria. Se puede enfocar este problema por dos vías distintas: ora a través de una formulación cuantificada de la gravitación, ora mediante una descripción del espacio-tiempo cuántico que permita una representación geométrica de la gravedad. Por esta segunda vía, se induce que un espacio-tiempo de estas características ha de incluir, así como la velocidad de la luz en el vacío, la escala de energía de Planck como invariante.

La relatividad doblemente especial busca construir una reformulación de la relatividad especial consonante con dicho espacio-tiempo. En el proceso se teoriza sobre distintos fenómenos que emergen de manera natural: de especial interés es la llamada localidad relativa de las interacciones, fenómeno que distorsiona la estructura espacial de las regiones alejadas del observador. Esta distorsión provoca que, dependiendo del sistema de referencia, cada observador perciba un espacio-tiempo distinto, perdiéndose por tanto la capacidad de formular un marco espacio-temporal común. Esto no impide a los físicos trabajar con esta teoría, ya que se puede construir una formulación a partir del espacio de momentos que sí es común para todos los observadores.

Todas estas teorías físicas no son más que intentos de explicar la realidad que experimentamos, una forma de responder a las preguntas fundamentales. Sin embargo, todavía estamos lejos de entender el verdadero funcionamiento de ésta. Es posible que, en la búsqueda de una teoría del todo, se descubran nuevas leyes de la naturaleza, se reformulen las existentes y, quizá, se alcance una nueva forma de concebir la realidad. El camino hasta aquí ha sido largo y nada indica que la meta esté cerca. Así, este trabajo no pretende dar respuestas cerradas, sino sumarse a ese esfuerzo colectivo y continuo por comprender mejor el tejido del espacio y del tiempo. Lo que sí pretende este trabajo es retornar el foco a las preguntas esenciales, ya que quizá sean éstas las más importantes.

10. Bibliografía

[1] Isaac Newton. *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Daniel Adee, 45 Liberty street, 1846.

[2] Jerry B. Marion. *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Editorial Reverté, S.A., 1998.

[3] John R. Taylor. *Classical Mechanics*. University Science Books, 2005.

[4] V. Petkov. *Relativity and the nature of spacetime*. Springer, 2005.

[5] Robert Disalle. *Understanding Space-Time: The philosophical Development of Physics from Newton to Einstein*. Cambridge University Press, 2006.

[6] José Ignacio Illana. *Descubre la Relatividad*. Departamento de Física Teórica y del Cosmos de la Universidad de Granada, 2013.

[7] A. O. Barut. *Electrodynamics and classical theory of fields and particles*. Dover Publications, 1980.

[8] Albert Einstein. *Relativity: The Special and General Theory*. Penguin Books, 2006.

[9] Sean M. Carroll. *An introduction to General Relativity, Spacetime and Geometry*. Cambridge University Press, 2024.

[10] Delo E. Mook y Thomas Vargish. *La relatividad: Espacio, tiempo y movimiento*. McGraw Hill, 1993.

[11] Thanu Padmanabhan. *Quantum Field Theory: The Why, What and How*. Springer, 2016.

[12] Rodolfo Gambini y Jorge Pullin. *A first course in loop quantum gravity*. Oxford University Press, 2011.

[13] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu y Franck Laloë. *Quantum Mechanics 01: Basic Concepts, Tools, and Applications*. Wiley-VCH, 2019.

[14] David J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics, second edition*. Cambridge University Press, 2018.

[15] R.P. Feynmann y A.R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill Book Company, 1965.

[16] Hong Wang y Jin Wang. «Spacetime representation of quantum mechanics and a proposal for quantum gravity». En: *arXiv preprint arXiv:2407.14528* (2024).

[17] Steven Weinberg. *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge University Press, 2005. ISBN: 9780521670531, 9780511252044.

[18] Michael E. Peskin y Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press (Addison-Wesley), 1995.

[19] Christoph Schiller. «Does matter differ from vacuum?» En: (1996). arXiv: `gr-qc/9610066 [gr-qc]`.

[20] Sabine Hossenfelder. «Minimal Length Scale Scenarios for Quantum Gravity». En: *Living Rev.Rel.* 16 (2013), pág. 2. DOI: `10.12942/lrr-2013-2`. arXiv: `1203.6191 [gr-qc]`.

[21] Simon Judes y Matt Visser. «Conservation laws in 'Doubly special relativity'». En: *Phys.Rev.* D68 (2003), pág. 045001. DOI: 10.1103/PhysRevD.68.045001. arXiv: gr-qc/0205067 [gr-qc].

[22] Giovanni Amelino-Camelia et al. «The principle of relative locality». En: *Phys. Rev. D* 84 (2011), pág. 084010. DOI: 10.1103/PhysRevD.84.084010. arXiv: 1101.0931 [hep-th].

[23] S. A. Franchino-Viñas y J. J. Relancio. «Geometrizing the Klein–Gordon and Dirac equations in doubly special relativity». En: *Class. Quant. Grav.* 40.5 (2023), pág. 054001. DOI: 10.1088/1361-6382/acb4d4. arXiv: 2203.12286 [hep-th].

[24] Giovanni Amelino-Camelia. «Planck-scale soccer-ball problem: a case of mistaken identity». En: *Entropy* 19.8 (2017), pág. 400. DOI: 10.3390/e19080400. arXiv: 1407.7891 [gr-qc].

[25] J. M. Carmona et al. «A new perspective on Doubly Special Relativity». En: (ene. de 2023). arXiv: 2301.08070 [gr-qc].

[26] Giovanni Amelino-Camelia. «Doubly special relativity: First results and key open problems». En: *Int. J. Mod. Phys. D* 11 (2002), pág. 1643. DOI: 10.1142/S021827180200302X. arXiv: gr-qc/0210063.

[27] Florian Girelli y Etera R. Livine. «Physics of deformed special relativity: Relativity principle revisited». En: (dic. de 2004). arXiv: gr-qc/0412004.

[28] Maykoll A. Reyes. «Exploration of Possible Signals beyond Special Relativity Using High-Energy Astroparticle Physics». Tesis doct. Universidad de Zaragoza, jul. de 2023. arXiv: 2307.03462 [hep-ph]. (Visitado 10-07-2023).

[29] Giovanni Amelino-Camelia. «Relativity in space-times with short distance structure governed by an observer independent (Planckian) length scale». En: *Int. J. Mod. Phys. D* 11 (2002), págs. 35-60. DOI: 10.1142/S0218271802001330. arXiv: gr-qc/0012051.

[30] G. Amelino-Camelia et al. «Tests of quantum gravity from observations of gamma-ray bursts». En: *Nature* 393 (1998), págs. 763-765. DOI: 10.1038/31647. arXiv: astro-ph/9712103.

[31] Giovanni Amelino-Camelia. «Doubly-Special Relativity: Facts, Myths and Some Key Open Issues». En: *Symmetry* 2 (2010), págs. 230-271. DOI: 10.3390/sym2010230. arXiv: 1003.3942 [gr-qc].

[32] Jerzy Kowalski-Glikman. «De sitter space as an arena for doubly special relativity». En: *Phys. Lett. B* 547 (2002), págs. 291-296. DOI: 10.1016/S0370-2693(02)02762-4. arXiv: hep-th/0207279.

[33] José Manuel Carmona, José Luis Cortés y José Javier Relancio. «Curved Momentum Space, Locality, and Generalized Space-Time». En: *Universe* 7.4 (2021), pág. 99. DOI: 10.3390/universe7040099. arXiv: 2104.07336 [gr-qc].

Anexos

A. Acción relativista y consideración sobre el tiempo propio

A la hora de convertir las coordenadas del espacio métrico de Minkowski en variables dependientes del tiempo propio surgen ciertas consideraciones a tener en cuenta, pero antes de valorar la acción de una partícula relativista, hagamos una pequeña consideración sobre el tiempo propio.

El tiempo propio de una partícula τ es estrictamente positivo. Como comprobación, consideraremos el tiempo propio como la medida de tiempo entre dos eventos desde un sistema de referencia en el que ambos ocurren en la misma posición espacial, es decir, dos eventos de una linea espacio-temporal de tipo tiempo. En este sistema de referencia podemos ordenar ambos eventos en un orden de sucesión, digamos que primero sucede el evento A y a un $t + \Delta t$ posterior sucede el evento B. Desde cualquier otro sistema de referencia inercial podremos medir el tiempo transcurrido entre ambos eventos y, aunque este valor dependa del sistema de referencia, el orden de los eventos se mantendrá invariable independientemente del sistema en que se midan.

Esta ordenación solo se mantiene estricta en sucesiones de eventos de tipo tiempo, pero es justamente esto lo que interpretaremos como tiempo propio τ. Si asignamos a cada evento de una partícula un valor $(\tau_1, \tau_2, \tau_3...)$ podemos ordenarlos de forma que $\delta\tau > 0$.

Veamos ahora qué le ocurre a la acción de una partícula no relativista al parametrizar la variable temporal t con respecto a un parámetro (τ) de tal forma que:

$$t \Rightarrow t(\tau) \qquad\qquad x(t) \Rightarrow x(t(\tau)) \Rightarrow x(\tau) \tag{32}$$

La acción de una partícula libre no relativista se puede expresar de la siguiente forma:

$$S_{NR} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\frac{dt}{d\tau}\right) \frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{r}/d\tau}{dt/d\tau}\right)^2 \tag{33}$$

Ahora veamos lo que ocurre al realizar la misma parametrizacion sobre la trayectoria de una partícula relativista libre dentro del marco espacio-temporal de Minkowski:

$$S_R = -m \int_{t_1}^{t_2} dt\, \sqrt{1 - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2} = -m \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \sqrt{d\mathbf{r}^{\mu} \eta_{\mu\nu} d\mathbf{r}_{\nu}} = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\, \sqrt{\frac{d\mathbf{r}^{\mu}}{d\tau} \eta_{\mu\nu} \frac{d\mathbf{r}_{\nu}}{d\tau}} \tag{34}$$

En este caso, lo que queda dentro de la última integral se corresponde con un intervalo del espacio de Minkowski, es decir:

$$S_R = -m \int ds \tag{35}$$

Entonces; la acción de una partícula libre relativista acepta una parametrización que la relacione con los intervalos del espacio-tiempo de Minkowski. Esto es de gran importancia, ya que sabemos que, para que no se viole la causalidad, los intervalos han de ser estrictamente positivos. Por tanto, si admiten una parametrización:

$$ds^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2 > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right)^2 > 0 \tag{36}$$

Esta última expresión nos permite notar un detalle importante: mientras que; en un marco newtoniano la variable temporal es monótona y estrictamente creciente, lo que implica que su derivada respecto al parámetro también lo sea, en el marco relativista la variable temporal no tiene un signo definido y, por lo tanto, su derivada tampoco.

$$\left.\frac{dt}{d\tau}\right|_{NR} > 0 \qquad\qquad \left.\frac{dt}{d\tau}\right|_{R} \in \mathbb{R}$$

Nada nos impide dar una interpretación física a este parámetro. Podemos, entonces, definir τ como el tiempo medido por un reloj que se mueve junto a la partícula, es decir, su tiempo propio. Esto nos conduce a la siguiente reflexión: **si esta descripción nos permite tratar las coordenadas espaciales y temporales de la trayectoria de una partícula, respecto a cualquier observador inercial, como variables dependientes del tiempo propio de la partícula.** Al realizar la suma sobre las trayectorias que avanzan en la variable independiente τ, debemos considerar trayectorias cuya variación temporal con respecto a τ sea tanto positiva como negativa. En este contexto, trataremos la variable $t(\tau)$ del mismo modo que tratamos las variables espaciales $\mathbf{r}(\tau)$, es decir, como componentes de un cuadrivector en el espacio-tiempo de Minkowski.

B. Partícula libre en relatividad general

La segunda ley de Newton dice que:

$$\frac{d^2x^\mu(\tau)}{d\tau^2} = 0 \tag{37}$$

Pero ésta no es una ecuación tensorial (en coordenadas generalizadas) ya que si, por ejemplo, se utilizase un sistema de coordenadas polares se estaría describiendo el movimiento de un cuerpo en círculos. Usando entonces la regla de la cadena:

$$\frac{d^2x^\mu(\tau)}{d\tau^2} = \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau}\partial_\nu \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \tag{38}$$

Se puede generalizar esta ecuación a un espacio-tiempo curvo escribiéndola en su forma tensorial convirtiendo la derivada parcial en una derivada covariante:

$$\frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}\partial_\nu \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \longrightarrow \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}\nabla_\nu \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu(\tau)}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho(\tau)}{d\tau}\frac{dx^\sigma(\tau)}{d\tau} \tag{39}$$

De esta forma se obtiene que la trayectoria de una partícula libre en un espacio-tiempo curvo se puede describir a partir de la ecuación de una geodésica, la cual se ha obtenido desarrollando una versión relativista-general de la segunda ley de Newton:

$$\frac{d^2x^\mu(\tau)}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho(\tau)}{d\tau}\frac{dx^\sigma(\tau)}{d\tau} = 0 \tag{40}$$

C. Integral de camino de una acción jacobiana

Desde el contexto no relativista; la forma clásica de la acción $A[x^\alpha(t)]$ se corresponde con una integral en el tiempo del lagrangiano $L = T(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) - V(x^\alpha)$. Minimizándola de forma que $\delta A = 0$ obtenemos las ecuaciones de movimiento a través de las trayectorias $x^\alpha(t)$ que satisfacen las condiciones de contorno $\delta x^\alpha = 0$. Este procedimiento no solo determina el camino seguido por las partículas en el espacio, sino también las coordenadas de estas como función del tiempo t.

Supongamos que estamos únicamente interesados en la ecuación de camino que siguen las partículas en el espacio. Podemos entonces utilizar un principio de acción diferente —la *acción de Jacobi-Maupertuis*— cuya condición extremal conduce directamente a la trayectoria.

Si consideramos un lagrangiano cuyo término de energía cinética T es una función cuadrática homogénea de la velocidad:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\ell}{d\lambda}\right)^2 = \frac{1}{2}m(g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta) \tag{41}$$

Donde $d\ell^2 = g_{\alpha\beta}\,(x^\mu)x^\alpha x^\beta$ es el elemento de linea espacial y λ es el tiempo, siendo $\dot{x}^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$. Como los lagrangianos no tienen una dependencia explícita con el tiempo podemos considerar $t_1 = 0$, $t_2 = t$. Utilizando la relacion entre el lagrangiano y el hamiltoniano $L = p_\alpha\dot{x}^\alpha - H$, podemos escribir el funcional de la acción como:

$$S = \int_0^t d\lambda\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{d\ell}{d\lambda}\right)^2 - V(x^\alpha)\right] \tag{42}$$

$$= \int_0^t d\lambda[p_\alpha\dot{x}^\alpha - H] \tag{43}$$

Esta acción nos conduce a considerar un nuevo funcional para la acción:

$$S_J \equiv \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} p_\alpha dx^\alpha = \int_{\lambda_1}^{\lambda_1} d\lambda\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\alpha}\right)\dot{x}^\alpha \tag{44}$$

Se puede comprobar que aplicado el principio variacional a todas las trayectorias que conectan los puntos x_1^α y x_2^α cuando $\delta S_J = 0$ obtenemos, como resultado, las trayectorias en el espacio, éstas tendrán energía E pero no contendrán información acerca de la coordenada temporal.

Podemos reescribir esta expresión S_J utilizando el hecho de que el lagrangiano L es una función cuadrática de las velocidades:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right)\dot{x}^\alpha = 2T = m\left(\frac{d\ell}{d\lambda}\right)^2 = 2[E - V(x^\alpha)] \tag{45}$$

Sustituyendo entonces en la ecuación (44) obtenemos:

$$S_J = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} m\left(\frac{d\ell}{d\lambda}\right)^2 d\ell = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\ell\sqrt{2m(E - V(x^\alpha))} \tag{46}$$

El resultado de S_J para un cierto valor de E,

Si consideramos el espacio métrico $G_{\alpha\beta} \equiv 2m(E-V)g_{\alpha\beta}$, el resultado de S_J para un cierto valor de E es la longitud de un camino calculado con esta métrica $G_{\alpha\beta}$. Los caminos (en el espacio) seguidos por las partículas serán las geodésicas de un espacio con esta métrica. Aplicando este método a la ecuación (11) se obtienen las trayectorias geodésicas en el espacio-tiempo dentro de una métrica $g^{\mu\nu}$.

D. Problema de la causalidad en QFT

En mecánica relativista la variación en la ordenación temporal de dos sucesos relacionados no genera problemas, ya que se asume que ninguna partícula viaja más rápido que la luz. Si al aplicar las transformaciones de Lorentz a una sucesión de eventos vemos que, para que se produzcan, alguno de los cuerpos implicados ha de viajar por encima de esa velocidad, se consecuencia que los sucesos no pueden estar relacionados. Sin embargo, en mecánica cuántica, el principio de incertidumbre nos dice que al especificar que una partícula está en $\mathbf{r}_1$ con $r^{(0)} = t_1$, no podemos definir su velocidad con precisión. La probabilidad de que una partícula alcance $\mathbf{r}_2$ desde $\mathbf{r}_1$ es no nula siempre que se cumpla:

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - (r_1^{(0)} - r_2^{(0)})^2 \lesssim \frac{\hbar^2}{m^2} \tag{47}$$

Mientras ésto se cumpla, nada nos impide que una partícula viaje más rápido que la luz, y por ende, creando paradojas en cuanto a la causalidad de eventos relacionados entre sí.

¿Por qué no podemos cuantificar partículas relativistas de la misma forma que cuantificamos partículas no relativistas? Quizá el mejor acercamiento sea ver que le ocurre al representar la evolución de una partícula con energías relativistas. Comprobaremos que lleva a estados de energía negativa y otras incongruencias. Consideremos la amplitud de una partícula libre que se propaga de $\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{r}$

$$U(t) = \langle \mathbf{r}|\, e^{-iHt}\, |\mathbf{r}_0\rangle \tag{48}$$

En mecánica cuántica no relativista tenemos que $E = \mathbf{p}^2/2m$:

$$\begin{aligned}
U(t) &= \langle \mathbf{r}| \, e^{-i(\mathbf{p}^2/2m)t} \, |\mathbf{r}_0\rangle && (49)\\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{r}| \, e^{-i(\mathbf{p}^2/2m)t} \, |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}|\mathbf{r}_0\rangle && (50)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-i(\mathbf{p}/2m)t} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} && (51)\\
&= \left(\frac{m}{2\pi i t}\right)^{\frac{3}{2}} e^{im(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2/2t} && (52)\\
& && (53)
\end{aligned}$$

Esta expresión no se anula independientemente de los valores de $\mathbf{r}$ y t, indicando que la partícula puede propagarse entre dos puntos cualesquiera en un tiempo arbitrariamente pequeño. En una teoría relativista esta conclusión significaría una violación de la causalidad, por ello sería de esperar que la corrección se obtuviese al utilizar la expresión relativista $E = \sqrt{p^2 + m^2}$:

$$\begin{aligned}
U(t) &= \langle \mathbf{r}| \, e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} \, |\mathbf{r}_0\rangle && (54)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \; e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} && (55)\\
&= \frac{1}{2\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \int_0^\infty dp \; p \sin(p|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|) e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} && (56)
\end{aligned}$$

Esta integral se puede evaluar explícitamente en términos de funciones de Bessel. Pero nos podemos contentar con estudiar su comportamiento asintótico para $\mathbf{r}^2 \gg t^2$ (afuera del cono de luz) utilizando el método de la fase estacionaria. La fase $p\mathbf{r} - t\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ tiene un punto estacionario en $p = imx/\sqrt{\mathbf{r}^2 - t^2}$. Introduciendo este valor para p, obtenemos que:

$$U(t) \sim e^{-m\sqrt{\mathbf{r}^2-t^2}} \tag{57}$$

La amplitud de propagación es pequeña, pero no es cero fuera del cono de luz, y la causalidad sigue violándose.