



**Universidad**  
Zaragoza

# Trabajo Fin de Grado

**Evolución lineal de perturbaciones para Lambda-CDM y  
Fuzzy-DM**

**Autor**

Álvaro Sánchez Barón

**Director**

Manuel Membrado Ibáñez

Facultad de Ciencias. Departamento de Física Teórica  
Año 2025

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Objetivos</b>	<b>4</b>
<b>3. Desarrollo</b>	<b>4</b>
3.1. Evolución lineal de perturbaciones en el modelo $\Lambda$ CDM . . . . .	4
3.2. Evolución lineal de perturbaciones en el modelo Fuzzy-DM . . . . .	5
3.3. Expansión en serie de Fourier . . . . .	7
3.4. Acondicionamiento de las ecuaciones . . . . .	9
3.5. Método Runge-Kutta . . . . .	10
<b>4. Resultados</b>	<b>12</b>
4.1. Modelo $\Lambda$ CDM . . . . .	12
4.2. Modelo Fuzzy-DM . . . . .	12
4.3. Comparación de resultados . . . . .	12
<b>5. Conclusiones</b>	<b>14</b>

# 1. Introducción

Las primeras observaciones que mostraron indicios de la existencia de una gran cantidad de materia no visible presente en un objeto astronómico fueron realizadas por Fritz Zwicky en el cúmulo de Coma [1]; y él decidió bautizar esta materia invisible como materia oscura. Más tarde, con las observaciones de la rotación de galaxias realizadas por Vera Rubin en los años 70 [2], se constató la existencia generalizada en el universo de este extraño tipo de materia de naturaleza desconocida que no emite radiación ni interactúa apreciablemente con el resto de materia, excepto gravitacionalmente. Desde entonces, numerosas observaciones han confirmado la gran importancia de este tipo de materia abundante en grandes cantidades en todas las estructuras visibles en el universo. Las observaciones del fondo cósmico de microondas, especialmente de las oscilaciones acústicas de bariones, demostró que la materia oscura no es materia bariónica. Los últimos resultados de la misión Planck muestran una densidad de materia en el universo  $\Omega_m = 0,32$  de la cual la materia oscura representa un 83.9 %, siendo el resto materia bariónica [3].

Por el momento, no se ha observado ningún tipo de interacción no gravitatoria de la materia oscura con la materia ordinaria así como ningún tipo de emisión de radiación. Por ello, la materia oscura, hasta ahora, solo ha sido estudiada observando sus efectos sobre la materia visible. La gran abundancia de materia oscura hace que la formación de estructuras en el universo venga dominada por su acción gravitatoria, por lo tanto, el estudio de la evolución de estas estructuras es una de las principales fuentes de información para restringir las características que deben tener los modelos que intenten explicar este tipo de materia. Es de gran importancia analizar las consecuencias que tienen los distintos modelos en la abundancia de estructuras para poder contrastar las predicciones con las observaciones.

En este respecto, el modelo Cold Dark Matter ha sido el modelo de materia oscura más exitoso, consiguiendo explicar la estructura cósmica en un amplio rango de redshift. Este modelo entiende la materia oscura como un conjunto de partículas puntuales que interactúan muy débilmente entre si y que no se mueven a velocidades cercanas a la de la luz, es decir, como un fluido ideal no relativista. El éxito de este modelo junto con el descubrimiento de la aceleración de la expansión del universo dieron lugar al modelo  $\Lambda$ CDM, llamado modelo estándar de la cosmología, que ha tenido enormes éxitos observacionales. Sin embargo, simulaciones de N-cuerpos mostraron inconsistencias entre el modelo y las observaciones en escala galáctica y sub-galáctica. Entre estas inconsistencias las más importantes son la abundancia de galaxias satélites, que es menor que la predicha por las simulaciones, y la densidad de materia en los centros galácticos, que se observa constante a diferencia de la predicción de las simulaciones con las que se obtiene un perfil más concentrado en el centro [4]. Aunque estas dificultades pueden ser resueltas para galaxias de gran tamaño a través de procesos de eyección de masa debidos a la física de la materia bariónica durante la formación de la galaxia y al efecto de las supernovas, para galaxias enanas esta posible solución pierde fundamento al no ser suficientemente energéticos los procesos de formación como para justificar el suavizamiento del perfil de densidad observado [5].

Un candidato alternativo al modelo CDM es el llamado modelo Fuzzy-CDM. Este modelo entiende que la materia oscura esta formada por partículas sin espín asociadas a un campo cuántico escalar. Estas partículas se deberían mover a velocidades mucho menores que la de la luz, al igual que CDM, y deberían ser muy ligeras ( $m \sim 10^{-22}$  eV), de forma que su naturaleza

cuántica tendría consecuencias a escalas astrofísicas [6]. Esta naturaleza cuántica es la que ha convertido a este modelo en uno de los principales candidatos alternativos para materia oscura, puesto que resuelve naturalmente el problema de los perfiles de densidad en los núcleos galácticos, debido a que el principio de incertidumbre evita que este tipo de materia oscura se concentre en exceso en ellos, además de resolver el problema de la abundancia de galaxias satélites sin perder sus buenas predicciones en otros campos como la rotación de las galaxias y el espectro de potencias del fondo cósmico de microondas [7].

## 2. Objetivos

En este trabajo vamos a comparar las predicciones sobre la formación de estructuras de los modelos CDM y Fuzzy-CDM. Los objetivos son: plantear las ecuaciones que gobiernan la evolución lineal de perturbaciones para ambos modelos, resolver numéricamente estas ecuaciones para estudiar como cambian las predicciones entre estos y comparar los resultados obtenidos.

Para ello, primero estudiaremos en la sección 3.1 qué es la evolución lineal de perturbaciones y como la materia oscura influye en ella. En la sección 3.2 plantearemos las modificaciones necesarias para introducir Fuzzy-CDM en las ecuaciones de evolución. En la sección 3.3 veremos como la expansión en serie de Fourier nos permite estudiar las estructuras en diferentes escalas y, tras acomodar las ecuaciones diferenciales en la sección 3.4, en la sección 3.5 describiremos el método numérico utilizado para su resolución. Por último, en la sección 4 analizaremos los resultados obtenidos.

## 3. Desarrollo

### 3.1. Evolución lineal de perturbaciones en el modelo $\Lambda$ CDM

Consideremos un universo plano, homogéneo e isótropo descrito por la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker  $(d\tau)^2 = (c \cdot dt)^2 - a^2(d\vec{x})^2$ . En esta métrica describimos las posiciones de los cuerpos mediante el vector  $\vec{r} = a\vec{x}$ , donde  $\vec{x}$  son las coordenadas comoving, coordenadas asociadas a observadores que se mueven siguiendo la expansión del universo unicamente.

Consideremos que este universo contiene materia oscura de tipo Cold Dark Matter con una densidad de energía  $\rho = \rho_b + \delta\rho$ , donde  $\rho_b$  es la densidad de energía homogénea de la componente de materia del fondo cosmológico y  $\delta\rho$  es el exceso de densidad de energía debido a la perturbación de la materia.

El comportamiento de esta materia viene dado por las ecuaciones de un fluido ideal no relativista, que en coordenadas comoving son: la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}\rho) = 0; \quad (1)$$

y la ecuación de conservación del momento

$$\dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{a}\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} = -\frac{c^2}{\rho} \frac{\nabla_{\mathbf{x}}P}{a} - \frac{\nabla_{\mathbf{x}}\Phi}{a}, \quad (2)$$

donde el punto sobre una variable indica la derivada con respecto al tiempo manteniendo las coordenadas comoving constantes,  $\mathbf{v} = a\dot{\mathbf{x}}$  es la velocidad peculiar,  $P$  es la presión del gas y  $\Phi$

es el exceso de potencial gravitacional sobre el potencial del fondo cosmológico.

Podemos aplicar la ecuación de la conservación de la energía en relatividad general  $\nabla_0 T^{00} = 0$  para obtener

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}T^{00})_0 + \Gamma_{\alpha\beta}^0 T^{\alpha\beta} = 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + \dot{\rho} = 0 \quad (3)$$

donde  $g = \det(g_{\mu\nu}) = -a^6$ ,  $T^{\mu\nu}$  es el tensor energía-momento asociado a la materia oscura y se ha despreciado el término de presión por estar considerando un gas ideal no relativista.

La densidad de energía  $\rho$  la podemos expresar en función del contraste de densidad  $\delta$  definido como  $\rho = \rho_b(1 + \delta)$ , donde  $\delta \ll 1$ . Teniendo en cuenta esto y la ecuación 3, la ecuación 1 queda

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4)$$

donde nuevamente se ha despreciado el término de presión.

La ecuación 2 en coordenadas comoving, asumiendo que la velocidad peculiar de la materia oscura es mucho menor que la del flujo de Hubble  $v \ll \dot{a}x$  y despreciando el término de presión, queda

$$\dot{\mathbf{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} = -\frac{\nabla_{\mathbf{x}}\Phi}{a}. \quad (5)$$

Usando las ecuaciones 4 y 5, podemos escribir:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{\delta} + \frac{\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}}{a}\right) - \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} + \frac{\nabla_{\mathbf{x}}\Phi}{a}\right) = 0 \quad (6)$$

El potencial gravitatorio generado por la materia oscura en la aproximación newtoniana viene dado por

$$\nabla_{\mathbf{x}}\Phi = -\frac{G}{c^2}a^2\rho_b \int dx' \frac{\delta(\mathbf{x}', t)(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}, \quad (7)$$

por lo tanto

$$\nabla^2\Phi = \frac{4\pi G}{c^2}a^2\rho_b\delta, \quad (8)$$

y entonces la ecuación 6 nos permite obtener la evolución de las perturbaciones con el tiempo como

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = \frac{4\pi G}{c^2}\rho_b\delta. \quad (9)$$

### 3.2. Evolución lineal de perturbaciones en el modelo Fuzzy-DM

Supongamos ahora que el mismo universo plano, homogéneo e isótropo contiene materia oscura de tipo Fuzzy-DM distribuida también de manera uniforme. En este modelo la materia oscura esta formada por partículas descritas por un campo escalar  $\psi$ . Consideramos que estas partículas se mueven a velocidades no relativistas. Cuando tenemos una gran colección de partículas sumidas en un campo gravitatorio  $\Phi$ , el campo  $\psi$  sigue la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\left(\dot{\psi} + \frac{3\dot{a}}{2a}\psi\right) = \left(-\frac{\hbar^2}{2ma^2}\nabla^2 + m\Phi\right)\psi, \quad (10)$$

y podemos definir la densidad  $\rho$  y la velocidad  $\vec{v}$  del fluido de materia oscura como

$$\rho \equiv \frac{m\psi^2}{e^{2i\theta}}, \quad (11)$$

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{am} \nabla\theta. \quad (12)$$

Utilizando estas definiciones en la ecuación 10 se pueden obtener las ecuaciones

$$\begin{aligned} ie^{i\theta} \left( \frac{\hbar\dot{\rho}}{2\sqrt{m\rho}} + \hbar\frac{3\dot{a}}{2a}\sqrt{\frac{\rho}{m}} - \frac{\hbar^2}{2m^{3/2}a^2}(\sqrt{\rho}\nabla^2\theta + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla\rho \cdot \nabla\theta) \right) &= 0 \\ e^{i\theta} \left( m\Phi\sqrt{\frac{\rho}{m}} + \hbar\sqrt{\frac{\rho}{m}}\dot{\theta} - \frac{\hbar^2}{2m^{3/2}a^2}(\nabla^2(\sqrt{\rho}) - \sqrt{\rho}(\nabla\theta)^2) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

que pueden ser reescritas como

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + \frac{1}{a}\nabla(\rho\mathbf{v}) &= 0 \\ \dot{\mathbf{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} + \frac{1}{a}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\frac{\nabla\Phi}{a} + \frac{\hbar^2}{2a^3m^2}\nabla \cdot \left( \frac{\nabla^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Al comparar la segunda de las ecuaciones 14 con la ecuación 2, vemos que la materia oscura de tipo Fuzzy-DM se comporta como un fluido con presión

$$P = -\frac{\hbar^2\rho}{2a^2m^2c^2} \left( \frac{\nabla^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) \quad (15)$$

Ahora consideramos, como para  $\Lambda$ CDM, que la densidad no es homogénea, si no que viene descrita por  $\rho = \rho_b(1+\delta)$  con  $\delta \ll 1$ . Entonces las ecuaciones 14 pueden ser escritas, desarrollando  $\sqrt{1+\delta} \approx 1 + \delta/2 + \delta^2/8 + \dots$  y realizando una aproximación lineal, como

$$\begin{aligned} \dot{\delta} + \frac{1}{a}\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \dot{\mathbf{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} &= -\frac{\nabla\Phi}{a} + \frac{\hbar^2}{4a^3m^2}\nabla(\nabla^2\delta). \end{aligned} \quad (16)$$

Y utilizando el mismo procedimiento que con el modelo  $\Lambda$ CDM obtenemos

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = \frac{\nabla^2\Phi}{a^2} - \frac{\hbar^2}{4a^4m^2}\nabla^2(\nabla^2\delta). \quad (17)$$

Así, la presión cuántica viene expresada por

$$P_Q \equiv -\frac{\hbar^2\rho_b}{4a^2m^2c^2}\nabla^2\delta, \quad (18)$$

con lo que la ecuación 17 queda

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = \frac{4\pi G}{c^2}\rho_b\delta + \frac{c^2}{a^2\rho_b}\nabla^2P_Q. \quad (19)$$

Como puede verse en la ecuación 18, la presión cuántica aparece cuando tenemos perturbaciones de materia.

### 3.3. Expansión en serie de Fourier

Como estamos considerando en todo momento un universo plano, podemos hacer un desarrollo en series de Fourier donde cada uno de los modos de las magnitudes utilizadas en las ecuaciones anteriores será una onda plana. Para ello, consideraremos al universo como una caja de lado  $L$  sobre la que forzaremos condiciones de contorno armónicas, de modo que los números de onda permitidos para cada una de las coordenadas (los que cumplen con estas condiciones de contorno) serán

$$k_j = n_j \frac{2\pi}{L}, \quad (20)$$

donde  $n_j$  toma los valores  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Así, la sobredensidad y la presión cuántica serán

$$\begin{aligned} \delta &= \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ P_Q &= \sum_{\mathbf{k}} P_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (21)$$

donde  $\delta_{\mathbf{k}}$  y  $P_{\mathbf{k}}$  son los modos  $\mathbf{k}$  de Fourier del contraste de densidad de energía y de la presión cuántica, respectivamente.

Si consideramos una esfera de radio comoving  $X$  centrada en  $\mathbf{x}_c$ , la masa de la componente de materia oscura del fondo cosmológico que contiene es

$$\bar{M}(X) = \rho_b a^3 V_X \quad (22)$$

con  $V_X \equiv \frac{4\pi}{3} X^3$  el volumen comoving de la esfera. A su vez, la masa contenida en ella teniendo en cuenta la sobredensidad será

$$M_{\mathbf{x}_c}(X) = \bar{M}(X) \left[ 1 + \frac{2\pi}{V_X} \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_c} \int_0^X X'^2 dX' \int_0^\pi e^{-ikX' \cos \theta'} \sin \theta' d\theta' \right]. \quad (23)$$

El contraste de masa de la esfera será

$$\frac{M_{\mathbf{x}_c}(X) - \bar{M}(X)}{\bar{M}(X)} = \frac{1}{V_X} \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}} \int_{V_X} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_c + X')} d^3 X' = \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_c} \frac{3[\sin(kX) - (kX) \cos(kX)]}{(kX)^3}, \quad (24)$$

donde la función  $\frac{3[\sin(kX) - (kX) \cos(kX)]}{(kX)^3}$  actúa como un filtro que elimina las ondas planas con  $k$  mayor que un cierto valor, que es  $\propto 1/X$ , como se puede ver en la figura 1. Por lo tanto, la expansión en serie de Fourier nos permite estudiar la sobredensidad en diferentes escalas.

Sustituyendo la expansión de la sobredensidad en la ecuación 9, que describe la evolución de la sobredensidad para el modelo  $\Lambda$ CDM, obtenemos la ecuación

$$\sum_{\mathbf{k}} (\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{\mathbf{k}}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{4\pi G}{c^2} \rho_b \delta_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (25)$$

Como esta ecuación se debe cumplir para cualquier vector  $\mathbf{x}$ , podemos eliminar el sumatorio

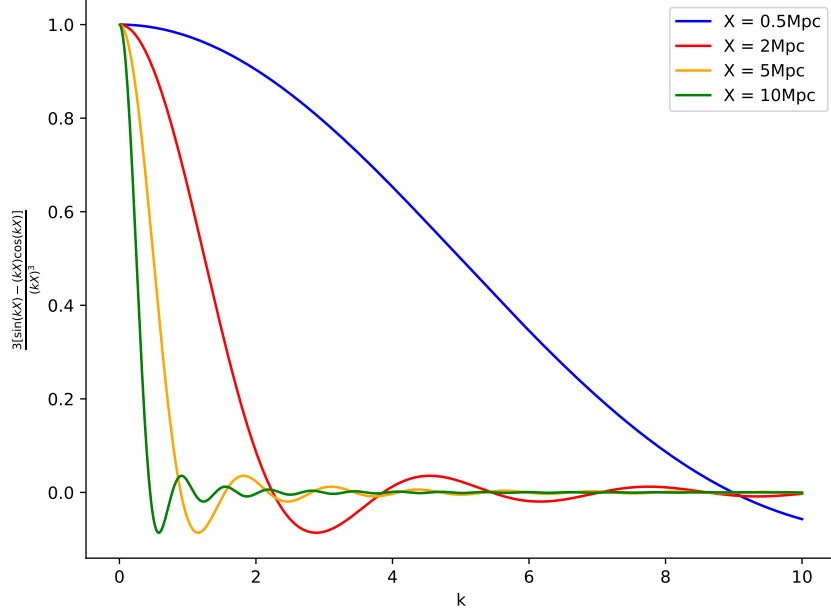


Figura 1: Curvas de la función  $\frac{3[\sin(kX) - (kX)\cos(kX)]}{(kX)^3}$  para diferentes valores del radio  $X$ , se puede ver como la función actúa como un filtro de valores grandes de  $k$ , tanto más cuanto mayor es el radio.

y escribir

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi G}{c^2}\rho_b\delta_{\mathbf{k}}. \quad (26)$$

Sustituyendo ahora las expansiones 21 en la ecuación 19, que describe la evolución de la sobredensidad para el modelo Fuzzy-DM, obtenemos la ecuación:

$$\sum_{\mathbf{k}} \left( \ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{\mathbf{k}} \right) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{4\pi G}{c^2}\rho_b\delta_{\mathbf{k}} + \frac{c^2}{a^2\rho_b}P_{\mathbf{k}}k^2 \right) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (27)$$

que nuevamente se debe cumplir para cualquier valor de  $\mathbf{x}$ , por lo que podemos eliminar los sumatorios.

La velocidad del sonido en un fluido se define como

$$c_s^2 \equiv \frac{dP}{d\rho}, \quad (28)$$

por lo tanto, aplicando esta definición a la ecuación 18 y teniendo en cuenta las expansiones de Fourier 21, se deduce que el modo  $k$  de la velocidad del sonido de materia oscura de tipo Fuzzy-DM es

$$c_{\mathbf{k}}^2 = \frac{\hbar^2 k^2}{4a^2 m^2}. \quad (29)$$

Sin embargo, esta velocidad puede ser mayor que la velocidad de la luz si  $a/k \leq \hbar/2mc$ , por

lo que debemos redefinir la presión cuántica como

$$P_{\mathbf{k}} = \left( \frac{c_{\mathbf{k}}^2}{c^2} \right) \rho_b \delta_{\mathbf{k}}$$

$$\frac{c_{\mathbf{k}}^2}{c^2} = \begin{cases} 1, & a/k \leq \hbar/2mc \\ \frac{\hbar^2 k^2}{4a^2 m^2 c^2}, & a/k > \hbar/2mc \end{cases} \quad (30)$$

Teniendo esto en cuenta, la ecuación 27 queda

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{\mathbf{k}} = \delta_{\mathbf{k}} \left( \frac{4\pi G}{c^2} \rho_b + \frac{c_{\mathbf{k}}^2}{a^2} k^2 \right). \quad (31)$$

### 3.4. Acondicionamiento de las ecuaciones

Antes de resolver numéricamente las ecuaciones de la evolución de los modos de la sobre-densidad de materia, debemos primero reescribir dichas ecuaciones de una forma más adecuada para el cálculo numérico. Para ello, primero substituiremos todas las derivadas temporales por derivadas con respecto al parámetro de expansión  $a$ . Para la ecuación 26

$$\dot{a} \left( \frac{d\dot{a}}{da} \frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}}{da} + \dot{a} \frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}}{\partial a^2} \right) + 2\frac{\dot{a}^2}{a} \frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}}{\partial a} = \frac{4\pi G}{c^2} \rho_b \delta_{\mathbf{k}} \quad (32)$$

y para la ecuación 31

$$\dot{a} \left( \frac{d\dot{a}}{da} \frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}}{da} + \dot{a} \frac{\partial^2 \delta_{\mathbf{k}}}{\partial a^2} \right) + 2\frac{\dot{a}^2}{a} \frac{\partial \delta_{\mathbf{k}}}{\partial a} = \delta_{\mathbf{k}} \left( \frac{4\pi G}{c^2} \rho_b + \frac{c_{\mathbf{k}}^2}{a^2} k^2 \right). \quad (33)$$

Ahora usando la ecuación de Friedmann

$$\frac{\dot{a}}{a} = \left( \frac{8\pi G \bar{\rho}}{3c^2} \right)^{1/2} \quad (34)$$

podemos deducir

$$\frac{d\dot{a}}{da} = \left( \frac{8\pi G \bar{\rho}}{3c^2} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left( \frac{8\pi G}{3c^2} \right)^{1/2} \frac{a}{\bar{\rho}^{1/2}} \frac{d\bar{\rho}}{da} \quad (35)$$

y reescribir la ecuación 32 como

$$a^2 \frac{d^2 \delta_{\mathbf{k}}}{da^2} + a \frac{d\delta_{\mathbf{k}}}{da} \left( 3 + \frac{1}{2} \frac{a}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{da} \right) = \frac{3}{2} \frac{\rho_b}{\bar{\rho}} \delta_{\mathbf{k}}; \quad (36)$$

y la ecuación 33 como

$$a^2 \frac{d^2 \delta_{\mathbf{k}}}{da^2} + a \frac{d\delta_{\mathbf{k}}}{da} \left( 3 + \frac{1}{2} \frac{a}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{da} \right) = \left( \frac{3}{2} \frac{\rho_b}{\bar{\rho}} - \left( \frac{k}{a_0} \right)^2 \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 \frac{c^2 \bar{\rho}_0}{H_0^2 \bar{\rho}} c_{\mathbf{k}}^2 \right) \delta_{\mathbf{k}}. \quad (37)$$

donde el subíndice 0 indica el valor actual,  $H_0^2 = \left( \frac{\dot{a}_0}{a_0} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \bar{\rho}_0$  y  $\bar{\rho}$  es la densidad media total de energía, esto es  $\bar{\rho} = \bar{\rho}_m + \bar{\rho}_r + \bar{\rho}_\Lambda$  donde  $\bar{\rho}_r$  es la densidad media de energía asociada a la radiación,  $\bar{\rho}_\Lambda$  es la densidad media de energía asociada a la energía oscura y  $\bar{\rho}_m = \bar{\rho}_0 \Omega_{m0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 = \rho_b$ .

Definimos ahora el parámetro  $y$  tal que  $a/a_0 = 10^y$  y substituímos en las ecuaciones 36 y 37 para obtener

$$\frac{d^2 \delta_{\mathbf{k}}}{dy^2} = \frac{\bar{\rho}_0 (\ln 10)^2}{\bar{\rho}} \left[ \frac{3 \Omega_{m0}}{2 \cdot 10^{3y}} \delta_{\mathbf{k}} - \frac{1}{\ln 10} \left( 2 \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0} + \frac{\bar{a}}{2} \frac{d\bar{\rho}}{d(a/a_0)} \right) \frac{d\delta_{\mathbf{k}}}{dy} \right] \quad (38)$$

y

$$\frac{d^2 \delta_{\mathbf{k}}}{dy^2} = \frac{\bar{\rho}_0 (\ln 10)^2}{\bar{\rho}} \left[ \left( \frac{3 \Omega_{m0}}{2 \cdot 10^{3y}} - \left( \frac{k}{a_0} \right)^2 \frac{c^2}{10^{2y} H_0^2 c_k^2} \right) \delta_{\mathbf{k}} - \frac{1}{\ln 10} \left( 2 \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0} + \frac{\bar{a}}{2} \frac{d\bar{\rho}}{d(a/a_0)} \right) \frac{d\delta_{\mathbf{k}}}{dy} \right], \quad (39)$$

donde  $\bar{\rho}$  se puede expresar como

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 \left( \Omega_{m0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{r0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_{\Lambda} \right) \quad (40)$$

por lo que

$$\frac{d\bar{\rho}}{d(a/a_0)} = -\bar{\rho}_0 \left( 3\Omega_{m0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^4 + 4\Omega_{r0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^5 \right). \quad (41)$$

### 3.5. Método Runge-Kutta

Para la resolución numérica de las ecuaciones 38 y 39 vamos a utilizar el método de Runge-Kutta de orden 4. Este método nos permite resolver numéricamente un problema de valor inicial del tipo

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t), \quad y(t_0) = y_0 \quad (42)$$

donde  $y$  es una función que depende de  $t$ . El método consiste en, dado un intervalo  $\Delta t$ , iterar

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (43)$$

con

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \Delta t \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \Delta t \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t \cdot k_3) \end{aligned} \quad (44)$$

donde

$$\begin{aligned} y_n &= y(t_n) \\ t_n &= t_0 + n\Delta t. \end{aligned} \quad (45)$$

Sin embargo nuestras ecuaciones 38 y 39 son ecuaciones diferenciales de segundo grado. Para poder utilizar este método con ellas es necesario reescribirlas como dos ecuaciones de primer

grado. Para ello, dada la ecuación diferencial de segundo grado genérica

$$\frac{d^2y}{dt^2} = F\left(\frac{dy}{dt}, y, t\right) \quad (46)$$

escribiremos la ecuación vectorial de primer grado

$$\frac{dx}{dy} = \begin{pmatrix} D \\ F(D, y, t) \end{pmatrix}, \quad (47)$$

donde  $x \equiv \begin{pmatrix} y \\ dy/dt \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y \\ D \end{pmatrix}$ .

La inversa de la función de Hubble-Lemâitre es la escala de tiempos del universo; es decir, es el tiempo que transcurre para que el universo se haya expandido un factor  $e$ . Lo que recorre la luz en ese tiempo es lo que se denomina radio de Hubble ( $R_H$ ).

$$R_H = \frac{c}{H_0} \left[ \Omega_{m0} \left( \frac{a_0}{a_{enter}} \right) + \Omega_{r0} \left( \frac{a_0}{a_{enter}} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (48)$$

En consecuencia, solo modos con longitud de onda propia  $\lambda \frac{a}{a_0} < 2R_H$  pueden ser tratados con gravitación newtoniana ( $\lambda = 2\pi a_0/k$  es la longitud de onda comoving). Para cada número de ondas  $k$ , hay un parámetro de expansion  $a_{enter}(k)$  para el que  $\frac{\pi a_{enter}(k)}{k} = R_H$ . Para  $a = a_{enter}(k)$  se dice que el modo  $k$  entra en el radio de Hubble. Para parámetros de expansión  $a < a_{enter}(k)$  se debe aplicar la relatividad general para tratar la evolución de los modos  $k$ .

Como en este trabajo solo hacemos uso de la gravitación newtoniana, resolveremos la ecuación 39 a partir de  $a_{enter}(k)$ . Para determinar las condiciones de contorno en  $a_{enter}(k)$ , haremos uso de estimaciones de  $\delta_k(a \leq a_{enter}(k))$  (ver, por ejemplo, [8]).

En el dominio de la radiación,

$$\delta_k(a \leq a_{enter}(k)) \approx \delta_k(a_{enter}(k)) \left( \frac{a}{a_{enter}(k)} \right)^2, \quad (49)$$

mientras que en el dominio de la materia,

$$\delta_k(a \leq a_{enter}(k)) \approx \delta_k(a_{enter}(k)) \left( \frac{a}{a_{enter}(k)} \right) \quad (50)$$

Los valores iniciales de la derivada  $d\delta_k/da$  serán por ende, en el dominio de la radiación,

$$\left. \frac{d\delta_k}{da} \right|_{a=a_{enter}(k)} = \frac{2}{a_{enter}(k)} \delta_k(a_{enter}(k)), \quad (51)$$

y en el dominio de la materia,

$$\left. \frac{d\delta_k}{da} \right|_{a=a_{enter}(k)} = \frac{1}{a_{enter}(k)} \delta_k(a_{enter}(k)). \quad (52)$$

Los valores de los parámetros cosmológicos que vamos a utilizar serán

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_{b0}; \quad H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}; \quad h = 0,68$$

$$\begin{aligned}\Omega_{m0} &= \frac{\rho_{m0}}{\rho_{b0}} \approx 0,30 \\ \Omega_{r0} &= \frac{\rho_{r0}}{\rho_{b0}} = 1,68\Omega_{\gamma0} \\ \Omega_{\gamma0} &= \frac{\rho_{\gamma0}}{\rho_{b0}} = 2,56 \times 10^{-5} h^{-2} \\ \Omega_{\Lambda} &= \frac{\rho_{\Lambda}}{\Omega_0} = 1 - (\Omega_{m0} + \Omega_{r0})\end{aligned}$$

## 4. Resultados

Para ambos modelos, hemos resuelto la ecuación diferencial de la evolución de la sobredensidad tomando como valores de  $k/a_0$   $100 \text{ Mpc}^{-1}$ ,  $10 \text{ Mpc}^{-1}$ ,  $1 \text{ Mpc}^{-1}$  y  $0,1 \text{ Mpc}^{-1}$ , cubriendo por lo tanto diferentes escalas de estructuras, desde las más pequeñas a las más grandes.

### 4.1. Modelo $\Lambda$ CDM

Los resultados obtenidos para el modelo  $\Lambda$ CDM se pueden ver en la figura 2. Podemos ver como para todas las escalas la sobredensidad crece con el redshift, siendo las pequeñas escalas ( $k/a_0 = 100 \text{ Mpc}^{-1}$  y  $k/a_0 = 10 \text{ Mpc}^{-1}$ ) las que mayor valor de la sobredensidad alcanzan.

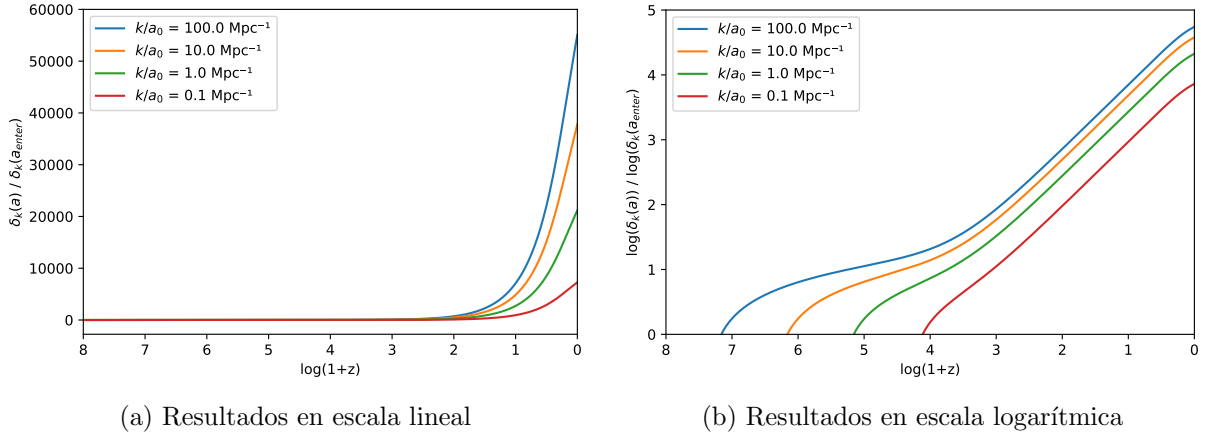


Figura 2: Resultados numéricos de la resolución de la ecuación 38 con los valores iniciales y parámetros cosmológicos descritos en la sección 3.5

### 4.2. Modelo Fuzzy-DM

Los resultados obtenidos para el modelo Fuzzy-DM se pueden ver en la figura 3. En este caso las escalas más pequeñas no crecen con el redshift en todo momento y conforme este se acerca a 0 la sobredensidad en escalas grandes ( $k/a_0 = 1 \text{ Mpc}^{-1}$  y  $k/a_0 = 0,1 \text{ Mpc}^{-1}$ ) supera enormemente a la de las escalas pequeñas ( $k/a_0 = 100 \text{ Mpc}^{-1}$  y  $k/a_0 = 10 \text{ Mpc}^{-1}$ ).

### 4.3. Comparación de resultados

En la figura 4 se puede ver una comparación de los resultados obtenidos para ambos modelos en escala logarítmica. Se constata como para los valores de  $k/a_0$  más grandes, correspondientes a las menores escalas, el modelo Fuzzy-DM predice una sobredensidad significativamente menor e incluso para la escala más pequeña ( $k/a_0 = 100 \text{ Mpc}^{-1}$ ) el modelo no predice siquiera un

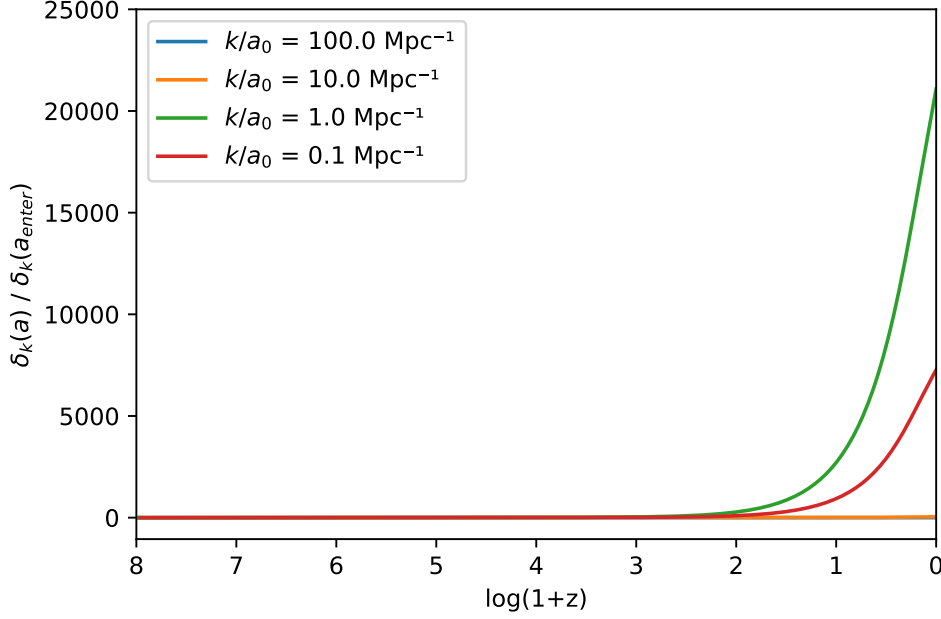


Figura 3: Resultados numéricos de la resolución de la ecuación 39 con los valores iniciales y parámetros cosmológicos descritos en la sección 3.5, en escala lineal

crecimiento conforme aumenta el redshift y nos acercamos por lo tanto a la época actual, a diferencia de la predicción del modelo  $\Lambda$ CDM, que supone aproximadamente un crecimiento exponencial en las pequeñas escalas. Sin embargo en las escalas más grandes ( $k/a_0 = 100 \text{ Mpc}^{-1}$  y  $k/a_0 = 10 \text{ Mpc}^{-1}$ ) para las que el modelo  $\Lambda$ CDM cosechó enormes éxitos, vemos que la evolución de ambos modelos es indistinguible.

En la tabla 1 podemos ver como el modelo Fuzzy-DM llega a predecir sobredensidades negativas para  $k/a_0 = 100 \text{ Mpc}^{-1}$ , es decir, para las escalas más pequeñas, en el momento actual. También podemos ver como según el valor de  $k/a_0$  disminuye, la predicción de los valores de la sobredensidad de ambos modelos en el momento actual se hace cada vez más similar.

$k/a_0$	$\Lambda$ CDM	Fuzzy-DM
$100 \text{ Mpc}^{-1}$	55070.326	-0.003
$10 \text{ Mpc}^{-1}$	37821.997	38.889
$1 \text{ Mpc}^{-1}$	21175.268	20185.920
$0,1 \text{ Mpc}^{-1}$	7269.654	7268.653

Cuadro 1: Valores de la sobredensidad en el momento actual predicho por cada uno de los modelos para los diferentes valores de  $k/a_0$  considerados.

En la figura 4, vemos que para  $k/a_0 = 10 \text{ Mpc}^{-1}$  ( $\lambda = 630 \text{ kpc}$ ), las oscilaciones de  $\delta_k$  llegan hasta  $z = 100$ ; aunque a partir de ahí  $\delta_k$  crece, el contraste de densidad en el presente apenas es diez veces mayor que su valor en  $a_{enter}(k)$ , por lo que podría mantener el comportamiento lineal. Para  $k/a_0 \approx 100 \text{ Mpc}^{-1}$  ( $\lambda = 63 \text{ kpc}$ ), las oscilaciones de  $\delta_k$  llegan hasta el presente; esto significa que este modo no alcanza el comportamiento no lineal. Una esfera de radio comoving  $\pi a_0/k$  alberga una masa  $M = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_{m,0}}{c^2} \left(\frac{\pi a_0}{k}\right)^3 = \frac{H_0^2 \Omega_{m,0}}{2G} \left(\frac{\pi a_0}{k}\right)^3$ , donde  $\rho_{m,0}$  es la densidad de energía de la componente de materia del fondo cosmológico en el presente. Para  $a_0/k = 10 \text{ Mpc}^{-1}$ ,  $M \approx 5 \cdot 10^9 M_\odot$ ; esto indicaría que el número de estructuras viralizadas con esta masa o inferiores

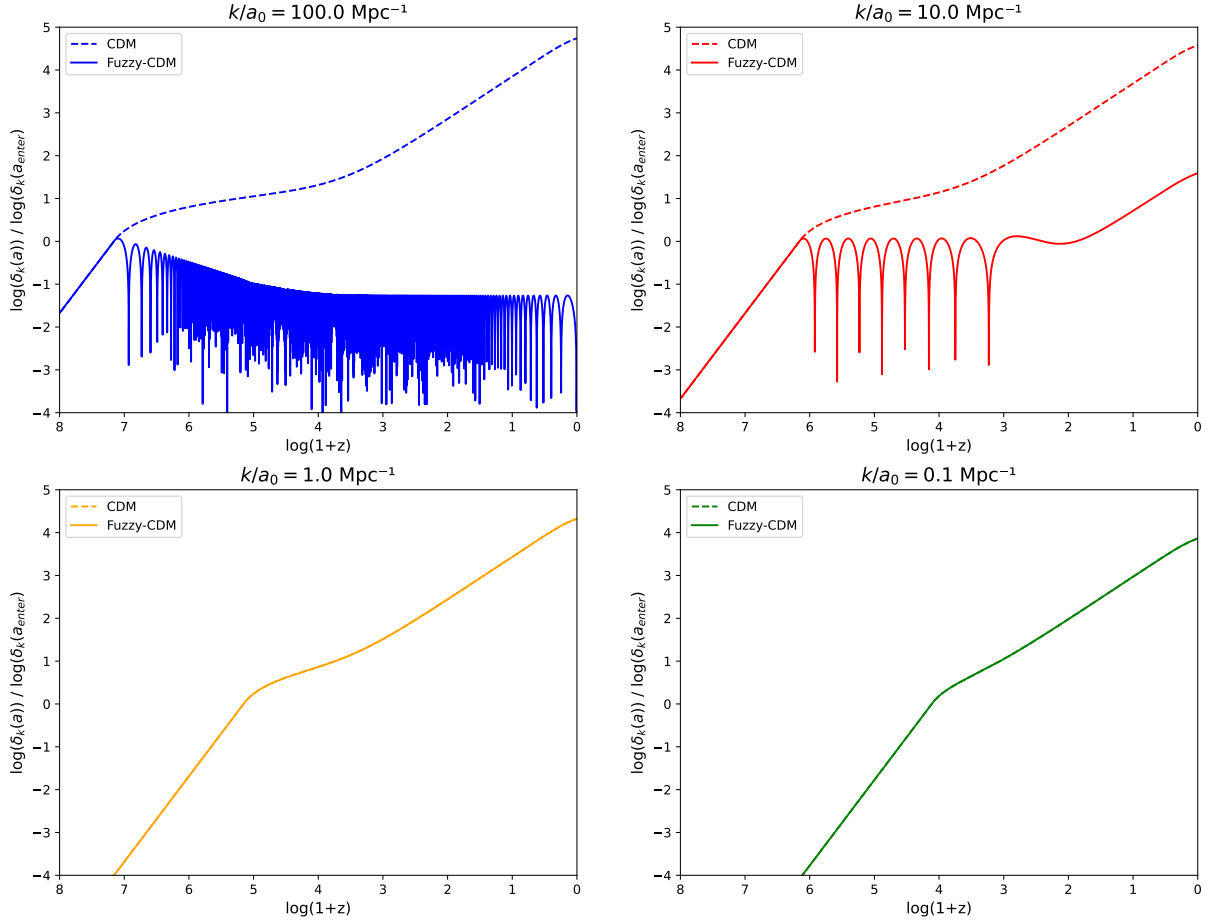


Figura 4: Comparación de los resultados, en escala logarítmica, obtenidos para ambos modelos para los diferentes valores de  $k$  considerados. Las líneas discontinuas corresponden al modelo  $\Lambda$ CDM mientras las líneas continuas corresponden al modelo Fuzzy-DM

estaría reducido con respecto a las que habrían según el modelo estandar  $\Lambda$ CDM. Para el Grupo Local, Klypin, Kravstov, Valenzuela [9] mostraron que el número de galaxias satélites con más de  $3 \cdot 10^8 M_{\odot}$  obtenido a partir de simulaciones de  $\Lambda$ CDM es mucho mayor que el observado (300 frente a 40 galaxias satélites). Para  $a_0/k = 100 \text{ Mpc}^{-1}$ ,  $M \approx 5 \cdot 10^6 M_{\odot}$ ; ésta sería una estimación de la masa por encima de la cual las estructuras podrían colapsar y virializar. Para el grupo de la Vía Láctea, Membrado y Pacheco [10] usaron bosones newtonianos sin colisiones para modelar los halos oscuros de galaxias enanas esferoidales; así, de acuerdo con el modelo, mostraron que no hay galaxias enanas esferoidales con masas inferiores a  $M \approx 10^7 M_{\odot}$ .

## 5. Conclusiones

Como conclusión, en este trabajo hemos visto como el estudio indirecto de la materia oscura, en concreto el estudio de sus consecuencias cosmológicas, nos permite extraer predicciones observables que nos ayudan a estudiar la posible naturaleza de esta misteriosa forma de materia. En concreto, hemos podido constatar como el modelo Fuzzy Dark Matter es capaz de corregir los problemas asociados al modelo vigente de materia oscura, Cold Dark Matter, reproduciendo a su vez aquellos éxitos observacionales por los que este modelo consiguió sobreponerse a otros modelos alternativos. El comportamiento cuántico de la Fuzzy-DM conlleva la adición de una

presión cuántica en sus ecuaciones que evita la concentración de una gran densidad de materia oscura en escalas subgalácticas, lo que supone el mayor reto para CDM.

En este trabajo, hemos tratado con varios números de ondas para los modos de Fourier del contraste de densidad. Para  $k/a_0 = 1 \text{ Mpc}^{-1}$  o superiores, no hay diferencia en la evolución de  $\delta_k$  entre el modelo estándar  $\Lambda$ CDM y el modelo Fuzzy-DM tratado; a partir de un determinado redshift, estos modos deberían ser tratados con teorías no lineales que los mezclan y conducen a estructuras virializadas. Sin embargo, para números de onda inferiores, la diferencia es notable, ya que  $\delta_k$  presenta oscilaciones y no alcanza valores suficientemente elevados como para tener que usar teorías no lineales. En este estudio hemos estimado que el número de estructuras virializadas con masas del orden o inferiores a  $10^{10}M_\odot$  estaría reducido con respecto a las obtenidas a partir del modelo  $\Lambda$ CDM. Una cota inferior para las masas virializadas sería de  $10^6M_\odot$ .

Sin embargo, las posibles explicaciones alternativas a los problemas asociados a CDM, como los procesos debidos a la materia bariónica, dificultan la adopción de esta forma de materia oscura como el modelo imperante. La búsqueda de los axiones, partículas que cumplen con las propiedades de Fuzzy-DM, es un trabajo aún necesario para poder confirmar si la materia oscura está formada realmente por partículas que se comportan según este modelo.

Los problemas observacionales encontrados en las últimas décadas con el modelo Cold Dark Matter nos fuerzan a estudiar más profundamente no solo los posibles nuevos modelos de materia oscura, si no también los modelos de evolución no lineal de las estructuras astrofísicas, como la formación de galaxias, abriendo así las puertas a nueva física que nos permita entender mejor la historia de nuestro universo.

## Referencias

- [1] F. Zwicky. «Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln». En: *Helvetica Physica Acta* 6 (ene. de 1933). An English version was later published as: Zwicky, F., «On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae», *ApJ*, 86, 217 (1937), págs. 110-127. URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1933AcPh...6..110Z>.
- [2] V. C. Rubin, W. K. Ford Jr. y N. Thonnard. «Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 (R=4kpc) to UGC 2885 (R=122kpc).» En: *The Astrophysical Journal* 238 (jun. de 1980), págs. 471-487. DOI: 10.1086/158003.
- [3] Planck Collaboration et al. «Planck 2018 results - VI. Cosmological parameters». En: *A&A* 641 (2020), A6. DOI: 10.1051/0004-6361/201833910. URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>.
- [4] Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk y Simon D. M. White. «A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering». En: *The Astrophysical Journal* 490.2 (dic. de 1997), pág. 493. DOI: 10.1086/304888. URL: <https://dx.doi.org/10.1086/304888>.
- [5] David H. Weinberg et al. «Cold dark matter: controversies on small scales». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 112.40 (oct. de 2015), págs. 12249-12255. DOI: 10.1073/pnas.1308716112. URL: <https://doi.org/10.1073/pnas.1308716112>.
- [6] Wayne Hu, Rennan Barkana y Andrei Gruzinov. «Cold and fuzzy dark matter». En: *Physical Review Letters* 85 (2000), págs. 1158-1161. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.1158. arXiv: astro-ph/0003365.

- [7] Tonatiuh Matos, Luis A. Ureña-López y Jae-Weon Lee. «Short review of the main achievements of the scalar field, fuzzy, ultralight, wave, BEC dark matter model». En: *Frontiers in Astronomy and Space Sciences* 11, 1347518 (feb. de 2024), pág. 1347518. DOI: 10.3389/fspas.2024.1347518. arXiv: 2312.00254 [astro-ph.CO].
- [8] T. Padmanabhan. *Structure formation in the universe*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. ISBN: 0-521-42486-0.
- [9] Anatoly Klypin et al. «Where Are the Missing Galactic Satellites?» En: *The Astrophysical Journal* 522.1 (sep. de 1999), págs. 82-92. DOI: 10.1086/307643. arXiv: astro-ph/9901240 [astro-ph].
- [10] M. Membrado y A. F. Pacheco. «Bose-Einstein condensate haloes embedded in dark energy». En: *Astronomy & Astrophysics* 611, A81 (abr. de 2018), A81. DOI: 10.1051/0004-6361/201731447.