Criterios de convergencia de series

Gonzalo Cazcarro Asensio
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Julio 2025

SUMMARY

Studying the convergence of series is not only essential from a mathematical point of view, but also for ensuring the validity of models that depend on them. For instance, Fourier series, which allow the representation of periodic functions, are a key tool in many theoretical and applied contexts. Determining when these series converge is a deep question with crucial practical implications.

Therefore, this work focuses on understanding what it means for a series to converge and what criteria we can use to determine that. Deciding whether an infinite sum "makes sense" or not is a vital issue in many cases.

The study of infinite series dates back to antiquity, starting with Archimedes, who used an infinite sum to calculate the area under a parabola. Centuries later, figures such as Euler, Gauss, and the Bernoulli brothers made significant contributions to this field. One of the most impressive results was demonstrated by Leonhard Euler in 1734, when he proved that the infinite sum of the reciprocals of the natural squares equals $\pi^2/6$. This result was enough to spark the curiosity of mathematicians and establish series as a relevant subject of study for the following centuries, during which major advances were made.

Such discoveries motivated the development of formal criteria to determine the convergence of infinite series. Initially, simpler tests such as the root test and the ratio test were studied—these are fundamental in mathematical analysis. This work will focus primarily on the study of series of positive real numbers. We will begin by revisiting these tests, as they form the logical basis for more complex criteria. Furthermore, we will formally compare the relationships between these basic tests.

The study of the convergence of infinite series has been a central concern in the development of mathematical analysis since the 18th century. In the first half of the 19th century, transcendental tests were developed, such as the one introduced by the Swiss mathematician Joseph Ludwig Raabe in 1832, and the one by the German mathematician Ernst Eduard Kummer in 1835—which, although developed later, offers a more general criterion than Raabe's. These are some of the tests we will study in depth throughout the first chapter of this manuscript, which is largely inspired by the work of Sarah Fix in [1]. We will conclude the first chapter with a section based on the article [3], dedicated to Carl Friedrich Gauss's test from 1812, and include a relevant example such as the hypergeometric series.

In the second chapter, we will study contemporary 21st-century tests, such as the second ratio test presented by Sayel A. Ali in [4] (2008), and the second Raabe test published by Edward Huynh in [5] (2022). Each test will have its own section in which we explore the advantages of each. Both tests work across a wide range of series and, in some cases, require fewer computations than their predecessors.

We will also examine numerous examples, some of which are especially relevant—such as p-series or the hypergeometric series—which will appear throughout the work to show how the various criteria succeed or fail when applied.

RESUMEN

Estudiar la convergencia de series no solo es esencial desde el punto de vista matemático, sino también para garantizar la validez de los modelos que dependen de ellas. Por ejemplo, las series de Fourier, que permiten representar funciones periódicas, son una herramienta clave en muchos contextos teóricos y aplicados. Determinar cuándo estas series convergen es una cuestión profunda, con consecuencias prácticas esenciales.

Por eso, este trabajo se centrará en entender qué significa que una serie converja y qué criterios podemos usar para determinarlo. Porque decidir si una suma infinita "tiene sentido" o no, es una cuestión vital en muchos casos.

El estudio de las series infinitas tiene sus raíces en la antigüedad, comenzando con Arquímedes, quien utilizó una suma infinita para calcular el área bajo una parábola. Siglos más tarde, figuras como Euler, Gauss y los hermanos Bernoulli contribuyeron significativamente a este campo. Uno de los resultados más impresionantes fue demostrado por Leonhard Euler en 1734, quien probó que la suma infinita de los inversos de los cuadrados naturales es igual a $\pi^2/6$, que fue motivo suficiente para despertar la curiosidad de los matemáticos y hacer de las series una materia de estudio relevante durante los siguientes siglos en los que hubo grandes avances.

Este tipo de hallazgos motivó el desarrollo de criterios formales para determinar la convergencia de series infinitas. Inicialmente se estudiaron pruebas más simples como el criterio de la raíz y el del cociente, fundamentales en el análisis matemático. Este trabajo se centramos principalmente en el estudio de series de números reales positivos. Recordaremos primero estas pruebas, ya que constituyen la base lógica para criterios más complejos. Además, se compara formalmente la relación entre estos tests básicos.

El estudio de la convergencia de series infinitas ha sido, desde el siglo XVIII, una preocupación central en el desarrollo del análisis matemático. Durante la primera mitad el siglo XIX se desarrollaron test trascendentales como son el desarrollado el matemático suizo Joseph Ludwing Raabe en 1832 o el del alemán Ernest Eduard Kummer en 1835 que aunque fue posterior da un criterio más general que el de Raabe. Estos son algunos de los criterios que estudiaremos en profundidad a lo largo del primer capítulo de este manuscrito, inspirado gran medida en el trabajo de Sarah Fix en [1]. Terminaremos el primer capítulo con una sección basada en el artículo de [3] dedicada el test de Carl Friedrich Gauss de 1812 y algún ejemplo relevante como es el de la serie hipergeométrica.

Durante el segundo capítulo estudiaremos test contemporáneos del siglo XXI como son el segundo test del cociente presentado por Sayel A. Ali en [4] (2008) y el segundo test de Raabe publicado por Edward Huynh en [5] (2022). Cada uno de ellos tiene sección propia en que exploraremos ventajas que tiene cada uno, ambos tests funcionan en una amplia gama de series, requiriendo en algunos casos menos cálculos que sus predecesores.

También abordaremos multitud de ejemplos, algunos de ellos que tienen mayor relevancia como p-serie o la serie hipergeométrica serán recurrentes durante todo el trabajo para poder ver como aciertan o fallan los distintos criterios que vayamos estudiando.

Índice general

Capítulo 1

Test clásicos de convergencia

En este capítulo presentaremos un compendio de criterios clásicos de convergencia de series, organizados según su origen histórico y relevancia teórica. Comenzaremos con el criterio del cociente, también conocido como criterio de D'Alembert, que data del siglo XVIII y constituye uno de los primeros métodos sistemáticos para evaluar la convergencia. A continuación, abordaremos el criterio de la raíz y el criterio de la integral, formulados en el siglo XIX. Ya que estos criterios son contenido habitual de las asignaturas de Análisis Matemático, incluiremos sus demostraciones en el apéndice por completitud.

Dedicaremos luego una sección al criterio de Kummer, desarrollado en la década de 1840, así como a otros resultados que pueden derivarse de él, como los criterios de Raabe o Bertrand. Finalizaremos el capítulo con una discusión detallada del test de Gauss, reconocido por su potencia y generalidad en el estudio de series de términos positivos.

Antes de adentrarnos en los distintos criterios, recordaremos brevemente tres resultados clásicos que, aunque no serán demostrados aquí, se emplearán puntualmente a lo largo del capítulo: La serie geométrica, el test de series alternadas y el Criterio de condensación.

- La serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$ converge si $0 < |r| < 1$ y diverge si $|r| \geq 1$,
- Test de series alternadas (Criterio de Leibniz). Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona decreciente de términos positivos con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.

TEOREMA 1.1 (Criterio de condensación)**.** Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos decrecientes tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (resp. diverge) si y solo si $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge (resp. diverge).

1.1. Criterios del cociente, la raíz y la integral

Los criterios que vamos a ver en esta sección fueron vistos en la asignatura de Análisis Matemático I, dedicada al estudio de funciones de una variable real.

TEOREMA 1.2 (Test del cociente)**.** Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no nulos. Supongamos que existe el límite

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

entonces:

- Si $0 \leq L < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $1 < L \leq \infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración. Ver anexo. □

TEOREMA 1.3 (Test de la raíz)**.** Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números reales. Supongamos que existe el límite
$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$
entonces:

- Si $0 \leq \rho < 1,$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $1 < \rho \leq \infty,$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración. Ver anexo. □

Veamos que el test de la raíz es más *fuerte* que el del cociente:

Nota 1.4. Si la convergencia de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se puede decidir por el criterio del cociente, entonces también se puede decidir por el criterio de la raíz.

Demostración. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no nulos. Si existe $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ veamos que también existe $\exists \rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ y que $\rho = L$.

Sea $0 < L < \infty$, $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande. Entonces las siguientes desigualdades se cumplen $\forall n \geq N$

$$\begin{gathered}
L - \varepsilon < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < L + \varepsilon \\
(L-\varepsilon)\,|a_n| < |a_{n+1}| < (L+\varepsilon)\,|a_n| \\
(L-\varepsilon)^2\,|a_n| < (L-\varepsilon)\,|a_{n+1}| < |a_{n+2}| < (L+\varepsilon)\,|a_{n+1}| < (L+\varepsilon)^2\,|a_n| \\
\vdots \\
(L-\varepsilon)^i\,|a_n| < |a_{n+i}| < (L+\varepsilon)^i\,|a_n| \\
(L-\varepsilon)^{n-N}\,|a_N| < |a_n| < (L+\varepsilon)^{n-N}\,|a_N| \\
(L-\varepsilon)^{1-\frac{N}{n}}\,\sqrt[n]{|a_N|} < \sqrt[n]{|a_n|} < (L+\varepsilon)^{1-\frac{N}{n}}\,\sqrt[n]{|a_N|}
\end{gathered}$$

Como el limite inferior y superior de una sucesión siempre existen podemos decir que
$$L - \varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq L + \varepsilon$$
Tomando $\varepsilon \to 0$ tenemos que el límite inferior y superior coinciden por lo que el límite existe y tiene su mismo valor.
$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

Por lo que $\rho = L$. □

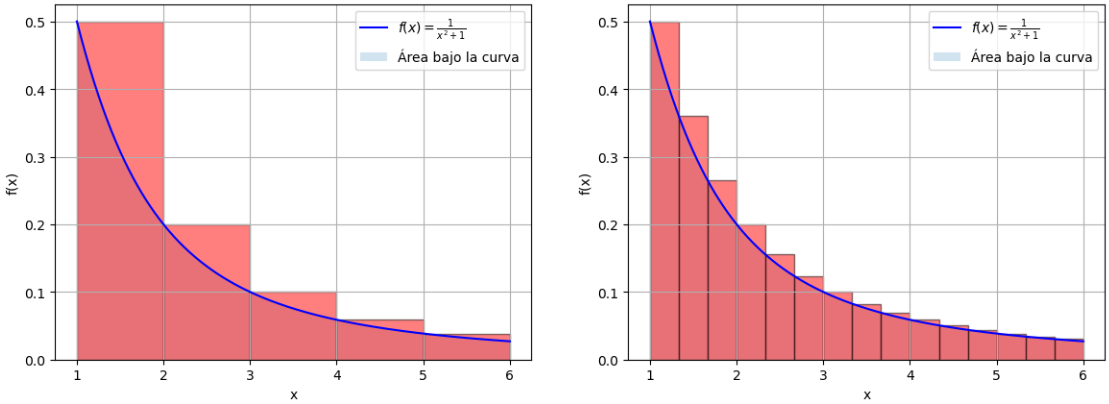
El siguiente ejemplo nos muestra que hay ocasiones en que el test de la raíz funciona mientras que el del cociente falla, por lo que estos test no son equivalentes y el de la raíz es estrictamente más *fuerte*.

Ejemplo 1.5. Estudiemos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, con $a_n = \frac{1}{2^n}$ si n es par y $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ si n es impar.

- El test del cociente no es concluyente ya que $\nexists \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ puesto que los valores de la fracción son 1 y 1/4 según la paridad de n.
- El test de la raíz nos dice que la serie es convergente ya que:

- $\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2k]{2^{2k}}} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2k+1]{2^{2k+2}}} = \frac{1}{2}$

Las siguientes dos figuras ilustran visualmente el criterio de la integral, que permite determinar la convergencia o divergencia de una serie mediante la comparación con una integral impropia.



- En la primera imagen, se representa la función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ junto con una aproximación tipo suma de Riemann, utilizando "pocos rectángulos", uno por cada número natural. Esta figura corresponde a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

  y muestra cómo puede visualizarse como una suma de áreas de rectángulos (base 1, altura $f(n)$), comparándose con el área bajo la curva, es decir, la integral impropia.

- En la segunda imagen, se muestra la misma función, pero ahora con una "mayor cantidad de rectángulos", lo que proporciona una mejor aproximación del área bajo la curva $f(x)$. Esta mayor resolución ilustra con más claridad cómo la suma discreta se acerca al valor de la integral.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx.$$

Estas representaciones gráficas motivan el uso del criterio de la integral que enunciamos a continuación, basado en la idea de la integral de Riemann, y cuya demostración inspirada por el libro de Apostol [6], pp. 485.

TEOREMA 1.6 (Criterio de la integral)**.** Sea $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ monótona decreciente positiva y sea $a_n = f(n)$. Entonces son equivalentes

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (resp. diverge).
2. $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ es una integral impropia convergente (resp. divergente).

Demostración. Ver anexo. □

El siguiente ejemplo es una de las series más importantes y será recurrente durante todo el escrito.

Ejemplo 1.7. Estudiamos la convergencia de la p-serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $\forall p \in \mathbb{R}$.

- Aplicando test del cociente, no concluimos nada:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$$

- Aplicando test de la raíz, no concluimos nada:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{p}{n}\log n} = 1$$

- Aplicando el criterio de la integral:

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

  Calculamos la integral para $p \neq 1$ se tiene que $I = \int_1^{\infty} x^{-p}\, dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^{\infty}$.

  Evaluando los límites:

  - Si $p > 1$, entonces $x^{-p+1} \to 0$ cuando $x \to \infty$, lo que da $I = \frac{1}{p-1}$ Por el criterio de la integral, la serie también converge.
  - Si $p = 1$, entonces $I = [\log x]_1^{\infty} = \infty$ Por lo que la integral diverge y la serie también.
  - Si $p < 1$, se tiene que el término x^{-p+1} tiende a infinito. En este caso, la integral diverge, por lo que la serie también lo hace.

  Por lo tanto, concluimos que la serie $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

1.2. Test de Kummer y sus consecuencias

Ahora que ya hemos visto los criterios más básicos vamos a avanzar unos años y a situarnos en los avances del siglo XIX. En 1832 el matemático suizo Joseph Ludwing Raabe publica un test que mejora el test del cociente. Poco después, en 1835, el matemático alemán Ernest Eduard Kummer dio con un test más general. En este trabajo introducimos los test en orden inverso a su publicación ya que facilita la demostración.

En lo que resta del trabajo podemos asumir que los términos de las series son términos positivos no nulos salvo que se indique lo contrario.

TEOREMA 1.8 (Test de Kummer)**.** Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos no nulos y sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión con $B_n > 0$, $\forall n$. Supongamos que existe el límite

$$L = \lim_{n\to\infty} \left[B_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - B_{n+1}\right],$$

entonces:

- Si $L > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $L \leq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{B_n}$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración.

- Caso $L > 0$. Tomamos un r tal que $L > r > 0$ y un N lo suficientemente grande. Entonces las siguientes desigualdades se cumplen $\forall n \geq N$.

$$B_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - B_{n+1} > r \Leftrightarrow B_n a_n - B_{n+1} a_{n+1} > r a_{n+1}$$

Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, dado un $m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, vamos a sumar las siguientes desigualdades.

$$\begin{array}{rccccc}
 & B_N a_N & - & \cancel{B_{N+1} a_{N+1}} & > & r a_{N+1} \\
 & \cancel{B_{N+1} a_{N+1}} & - & \cancel{B_{N+2} a_{N+2}} & > & r a_{N+2} \\
 & & \vdots & & & \\
+ & \cancel{B_{N+m-1} a_{N+m-1}} & - & B_{N+m} a_{N+m} & > & r a_{N+m} \\
\hline
 & B_N a_N & - & B_{N+m} a_{N+m} & > & r(a_{N+1} + \cdots + a_{N+m}) = r(S_{N+m} - S_N)
\end{array}$$

Por lo que tenemos que

$$r S_{N+m} < r S_N + B_N a_N - B_{N+m} a_{N+m} < r S_N + B_N a_N$$

Así tenemos que $S_{N+m} < \frac{r S_N + B_N a_N}{r} = C$ constante para cada m, de lo que se deduce que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k < C, \quad \forall n = N + m > N$$

tomando el límite tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < C$ por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente ya que es una serie de términos positivos.

- Caso $L \leq 0$.

Tomamos un N lo suficientemente grande de manera que se cumplan las siguientes inecuaciones $\forall n \geq N$.

$$B_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - B_{n+1} \leq 0$$

Por tanto $B_n a_n \leq B_{n+1} a_{n+1}, \quad \forall n \geq N$ y deducimos que

$$B_N a_N \leq B_n a_n, \quad \forall n \geq N$$

Tomando $B_N a_N = C$ constante entonces tenemos que

$$\frac{C}{B_n} \leq a_n, \ \forall n \geq N$$

y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{B_n}$ diverge tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \left(\geq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{B_n} \right)$ también diverge.

$\square$

Recientemente se ha demostrado que las condiciones dadas en el test de Kummer no solo son suficientes, también son necesarias. Veamoslo en el siguiente teorema, cuya demostración esta basada en [2].

TEOREMA 1.9. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos no nulos entonces tenemos que

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces existe una sucesión $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $B_n > 0$ tal que $\lim_{n \to \infty} \left[B_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - B_{n+1} \right] > 0$.

2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces existe una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $B_n > 0$ y con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{B_n}$ divergente de forma que $\lim_{n\to\infty} \left[B_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - B_{n+1}\right] \leq 0$.

Demostración.

1. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, vamos a tomar $M = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $B_k = \frac{M - \sum_{n=1}^{k} a_n}{a_k}$ que es positivo $\forall k \in \mathbb{N}$ y que además

$$B_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - B_{k+1} = \frac{M - \sum_{n=1}^{k} a_n}{a_{k+1}} - \frac{M - \sum_{n=1}^{k+1} a_n}{a_{k+1}} = \frac{a_{k+1}}{a_{k+1}} = 1 > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

2. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, vamos a tomar $B_k = \frac{\sum_{n=1}^{k} a_n}{a_k} > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Se cumple que

$$B_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - B_{k+1} = \frac{\sum_{n=1}^{k} a_n}{a_{k+1}} - \frac{\sum_{n=1}^{k+1} a_n}{a_{k+1}} = -\frac{a_{k+1}}{a_{k+1}} = -1 \leq 0.$$

Ya solo queda probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{B_n}$ diverge. Para ello veamos que $\forall m, \ \exists M > m$ tal que $\sum_{n=m}^{M} \frac{1}{B_n} > \frac{1}{2}$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge y es una serie de términos positivos entonces $\forall m, \ \exists M > m$ tal que $a_m + \cdots + a_M > a_1 + \cdots + a_{m-1}$. Por tanto

$$\sum_{n=m}^{M} \frac{1}{B_n} = \frac{a_m}{a_1 + \cdots + a_m} + \cdots + \frac{a_M}{a_1 + \cdots + a_M} > \frac{a_m + \cdots + a_M}{a_1 + \cdots + a_M} = \frac{1}{1 + \frac{a_1 + \cdots + a_{m-1}}{a_m + \cdots + a_M}} > \frac{1}{2}$$

Por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{B_n}$ diverge por el criterio de Cauchy para la divergencia de términos no negativos,

□

Nota 1.10. El criterio de Cauchy al que nos referimos en la demostración anterior es el siguiente:
Sea $\{b_n\}$ una sucesión de números reales no negativos, es decir, $b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, son equivalentes:

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.
- $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall m \in \mathbb{N}, \ \exists M > m$ con $\sum_{n=m}^{M} b_n > \varepsilon$.

Así tenemos que en cierto sentido, no puede haber ningún test más *fuerte* que Kummer. Veamos ahora algunos que se deducen de él.

Usando $B_n = 1$ podemos deducir el test de cociente por lo que este último es un caso particular de Kummer. Veamos ahora el llamado test de Raabe, probado por el matemático suizo Joseph Ludwing Raabe en 1832, que es el caso particular del test de Kummer con $B_n = n$.

TEOREMA 1.11 (Test de Raabe). Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos no nulos. Asumiendo que el siguiente límite existe.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \tag{1.1}$$

Entonces:

- Si $\rho > 1, \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $\rho < 1, \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración. Aplicamos el test de Kummer con $B_n = n$. Tenemos

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \right) = \lim_{n\to\infty} \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right) - 1 = \rho - 1$$

- Caso $\rho > 1$. Se tiene $L > 0$ por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge por el test de Kummer.
- Caso $\rho < 1$. Se tiene $L < 0$ y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge por el test de Kummer.

□

El test de Raabe se ha popularizado con diversos enunciados equivalentes, uno de ellos que además emplearemos en el capítulo 2 es el siguiente:

TEOREMA 1.12 (Test de Raabe, enunciado equivalente)**.** Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos no nulos. Sea $\varepsilon_n \to 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ y supongamos que se cumple la igualdad:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \tag{1.2}$$

Entonces:

- Si $\beta > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $\beta < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración. Vamos a ver la equivalencia entre enunciados:

- Veamos que el Teorema 1.11 implica el Teorema 1.12: Apliquemos el test de Raabe usando la igualdad (1.2) como hipótesis.

  Llamamos $R_n = n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$. Tenemos que

  $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}} \overset{\text{Taylor}}{=} 1 + \frac{\beta}{n} - \frac{\varepsilon_n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

  Por tanto

  $$R_n = \left(1 + \frac{\beta}{n} - \frac{\varepsilon_n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right)$$

  de donde tenemos que $R_n = \beta - \varepsilon_n + o\left(\frac{1}{n}\right) n$. Así tenemos que $\lim_{n\to\infty} R_n = \beta$. Usando el test de Raabe tenemos que el enunciado de 1.12 es cierto.

- Veamos ahora que 1.12 implica 1.11: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie con $a_n > 0$ $\forall n$. Supongamos que existe el límite 1.1. Entonces tenemos que:

  $$\delta_n = \rho - n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \Rightarrow \frac{\delta_n}{n} = \frac{\rho}{n} - \frac{a_n}{a_{n+1}} + 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{n} - \frac{\delta_n}{n}}$$

  Por lo que

  $$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= 1 - \frac{\rho}{n} + \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 + \frac{\rho}{n} \right) \\ &= 1 - \frac{\rho}{n} + \left(\frac{1}{1 + \frac{\rho}{n} - \frac{\delta_n}{n}} - 1 + \frac{\rho}{n} \right) \\ &= 1 - \frac{\rho}{n} + \left(\frac{1 - \left(1 + \frac{\rho}{n} - \frac{\delta_n}{n}\right) + \frac{\rho}{n}\left(1 + \frac{\rho}{n} - \frac{\delta_n}{n}\right)}{1 + \frac{\rho}{n} - \frac{\delta_n}{n}} \right) \\ &= 1 + \frac{\rho}{n} + \underbrace{\left(\frac{\frac{\delta_n}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} - \frac{\rho\delta_n}{n^2}}{1 + \frac{\rho}{n} - \frac{\delta_n}{n}} \right)}_{\epsilon_n} \end{aligned}$$

  Notemos que $\epsilon_n \to 0$. Por tanto se cumplen las hipótesis de 1.12 con $\beta = \rho$. Así que

- $\rho > 1 \Rightarrow \beta > 1 \overset{1.12}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- $\rho < 1 \Rightarrow \beta < 1 \overset{1.12}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Por lo que tenemos que 1.12 es cierto y equivalente a 1.11. □

Bajo las condiciones del test de Raabe 1.11, veamos que el test de Raabe es más *fuerte* que el del cociente.

Nota 1.13. Si la convergencia de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se puede decidir por el test del cociente entonces también se puede decidir por el test de Raabe.

Demostración. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos no nulos. Si $\exists L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \neq 1$ entonces, si aplicamos el test de Raabe tendremos que:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \overset{L\neq 1}{=} \lim_{n\to\infty} n\,(L-1) = \begin{cases} -\infty & \text{si } L < 1 \\ \infty & \text{si } L > 1 \end{cases}$$

Por lo que si el test del cociente nos dice que la serie converge (respectivamente diverge) entonces el test de Raabe también se cumple y nos dirá que converge (respectivamente diverge). □

El siguiente ejemplo muestra que el test de Raabe nos da información cuando el test del cociente no lo hizo en 1.7, aunque en este caso Raabe no aporta información en $p = 1$.

Ejemplo 1.14. Estudiamos la convergencia de la p-serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $\forall p \in \mathbb{R}$, que ya hemos estudiado en el Ejemplo 1.7. En efecto, aplicando test de Raabe:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^p - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1\right) \overset{\text{Taylor}}{=}$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) = p$$

Por lo que:

- Si $p > 1$, entonces la p-serie converge.
- Si $p < 1$, entonces la p-serie diverge.

Esto coincide con lo que nos decía el criterio de la integral en el Ejemplo 1.7.

Veamos ahora el llamado test de Bertrand, publicado por el matemático y economista francés Joseph Louis François Bertrand en 1862, que es el caso particular de Kummer con $B_n = n \log n$.

TEOREMA 1.15 (Test de Bertrand)**.** Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos no nulos. Asumiendo que el siguiente límite existe.

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \log n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right]$$

Entonces:

- Si $\delta > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $\delta < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración. Es fácil de deducir a partir del test de Kummer, ya que usando $B_n = n\log n$ se tiene que

$$\begin{aligned} B_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - B_{n+1} &= n\log n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\log(n+1) = n\log n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\log\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= n\log n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\log n - \log\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &= \log n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right] - \log\left(1+\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Hacemos tender n a ∞ y aplicamos el test de Kummer. □

Veamos que el test de Bertrand es más *fuerte* que el de Raabe.

Nota 1.16. Si la convergencia de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se puede decidir por el test de Raabe entonces también se puede decidir por el test de Bertrand.

Demostración. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos no nulos. Sea $\rho = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$, supongamos que el test de Raabe nos aporta información siendo así $\rho \neq 1$. Entonces, al aplicar el test de Bertrand tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \log n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right] \overset{\rho\neq 1}{=} \lim_{n\to\infty} \log n\,[\rho-1] = \begin{cases} -\infty & \text{si } \rho < 1 \\ \infty & \text{si } \rho > 1 \end{cases}$$

Por lo que si el test de Raabe nos dice que la serie converge (diverge) entonces el test de Bertrand también se cumple y nos dirá que converge (diverge). □

Veamos ahora un ejemplo en el que el test de Bertrand se satisface pero el de Raabe no nos aporta información.

Notación 1.17. Vamos a introducir la expresión doble factorial (!!), que consiste en el producto de todos los pares o impares menores y positivos del número dado según si este es par o impar.

$$\begin{aligned} (2n)!! &= 2n\cdot(2n-2)\cdots 2\cdot 1, \quad \forall n\in\mathbb{N} \\ (2n+1)!! &= (2n+1)\cdot(2n-1)\cdots 3\cdot 1, \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

Por tanto, $(2n+1)!!(2n)!! = (2n+1)!, \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Ejemplo 1.18. Analicemos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^a}_{a_n}$, con $a\in\mathbb{R}$.

- Aplicamos el test del cociente.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n+1)!!(2n)!!}{(2n-1)!!(2n+2)!!}\right]^a = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n+1)!}{(2n+2)!\frac{1}{2n+1}}\right]^a = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n+1}{2n+2}\right]^a = 1$$

  Por lo que el test del cociente no aporta información.

- Aplicamos el test de Raabe.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}\right)^a - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^a - 1\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2n}}\right)^a - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1+\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{a}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right) \\ &= \frac{a}{2} + o(1) = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Por lo que el test de Raabe nos dice que si $a > 2$, la serie converge y que si $a < 2$ la serie diverge. Pero no aporta informacion cuando $a = 2$, ¿qué ocurre en dicho punto?

- Aplicamos el test de Bertrand en $a = 2$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \log n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] &= \lim_{n\to\infty} \log n \left[n \left[\left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)^2 - 1 \right] - 1 \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \log n \left[n \left[\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+4n+1} - 1 \right] - 1 \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \log n \left[n \left[\frac{4n+3}{4n^2+4n+1} \right] - 1 \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \log n \left[\frac{4n^2+3n}{4n^2+4n+1} - 1 \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \log n \left[- \frac{n+1}{4n^2+4n+1} \right] = 0 < 1
\end{aligned}$$

Por lo que el test de Bertrand nos dice que en $a = 2$, la serie diverge.

Ejemplo 1.19. Analicemos el intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{n!} x^n$

- Aplicamos el test del cociente para determinar el radio de convergencia.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n+1)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)} \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3n+1}{n+1} x \right| = 3\,|x|$$

Por lo que la serie converge si $|3x| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$.

- ¿Qué ocurre en los extremos? Comencemos viendo en $x = \frac{1}{3}$.Tenemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{n!} \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

Aplicando el test de Raabe con $a_n = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{n!3^n}$ tenemos que la serie diverge. En efecto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{n+1}{3n+1} 3 - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{3n+3}{3n+1} - 1 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \frac{2}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1
\end{aligned}$$

Veamos ahora en $x = -\frac{1}{3}$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n$ tiene términos negativos por lo que no se puede aplicar el test de Raabe. Podemos aplicar el criterio de Leibniz ya que a_n es monótonamente decreciente y su límite es 0, por lo que la serie alternada converge en $x = -\frac{1}{3}$. Concluimos que la serie converge si $x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

1.3. Test de Gauss

Vamos a terminar el capítulo con el test del alemán Carl Friedrich Gauss. El test de Gauss se demuestra empleando el test de Bertrand pero nos da un enfoque distinto en su aplicación que, en algunos casos, facilitará los cálculos.

Así como pasaba en la sección anterior en que Kummer (1835) aparecía antes que el test de Raabe (1832) pese a ser posterior para facilitar las demostraciones. Se tiene que el test de Gauss es de 1812 y puede que sirviera de inspiración para el desarrollo de los test antes nombrados.

TEOREMA 1.20 (Test de Gauss)**.** Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos no nulos. Asumiendo que existe $p, r \in \mathbb{R},\ r > 1$ y una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ acotada tal que se cumple:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + \frac{B_n}{n^r}, \quad \forall n$$

Entonces:

- Si $p > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $p \leq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración. Comencemos viendo que

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + \frac{B_n}{n^r}, \quad r > 1$$

Aplicando el test de Bertrand.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} R_n &= \lim_{n\to\infty} \log n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] = \lim_{n\to\infty} \log n \left[p + \frac{B_n}{n^r} - 1 \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} (p-1)\log n + \frac{B_n}{n^r} \log n = \lim_{n\to\infty} (p-1)\log n = \begin{cases} +\infty & \text{si } p > 1 \\ 0 & \text{si } p = 1 \\ -\infty & \text{si } p < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

De acuerdo al test de Bertrand tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$. □

La demostración que acabamos de realizar nos muestra que el test de Gauss se deduce aplicando el test de Bertrand, por lo que si el test de Gauss funciona en una serie esta también cumplirá el test de Bertrand.

Ejemplo 1.21. Analicemos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^a$, $a > 0$, que ya hemos estudiado en el Ejemplo 1.18. Según lo que vimos, el test de Raabe nos dice que la serie converge cuando $a > 2$ y diverge cuando $a < 2$ pero no nos da información en $a = 2$.

Para aplicar el test de Gauss vamos a realizar los siguientes pasos:

- Calculamos el valor de p. Para ello veamos que:

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{p}{n} + \frac{B_n}{n^r} \right) = \lim_{n\to\infty} p + \frac{B_n}{n^r} = p$$

  que en nuestro ejemplo es el mismo cálculo realizado en el Ejemplo 1.18 al usar el test de Raabe. Por tanto,

$$p = \lim_{n\to\infty} n \left[\left(\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}} \right)^2 - 1 \right] = 1$$

- Calculamos $\frac{B_n}{n^r}$. Para ello recordemos que el test de Gauss nos dice que

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + \frac{B_n}{n^r}, \quad \forall n$$

  Por lo tanto

$$\frac{B_n}{n^r} = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{p}{n} = \left(\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}} \right)^2 - 1 - \frac{1}{n} = -\frac{n+1}{4n^3 + 4n^2 + n}$$

- Veamos si B_n está acotado, para ello multiplicamos la expresión anterior por n^r, $r > 1$

$$B_n = -n^r \frac{n+1}{4n^3 + 4n^2 + n} = -\frac{n^{r+1} + n^r}{4n^3 + 4n^2 + n}$$

  Si tomamos $r = 2$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} B_n < \infty$, teniendo así B_n acotado. Y como $p = 1$ el test de Gauss nos dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge en $a = 2$. Esto coincide con lo que nos decía el test de Bertrand.

El test de Gauss es conocido por resolver, entre otras, la convergencia de las series hipergeométricas. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 1.22. Estudiamos la convergencia de la serie hipergeométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, con

$$a_n = \frac{[\alpha \cdots (\alpha + (n-1))]\,[\beta \cdots (\beta + (n-1))]}{n!\,[\gamma \cdots (+(n-1))]} = \frac{1}{n!} \frac{(\alpha + n - 1)!}{(\alpha - 1)!} \frac{(\beta + n - 1)}{(\beta - 1)!} \frac{(\gamma - 1)!}{(\gamma + n - 1)!}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

- Aplicando el test del cociente, no concluimos nada:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(n+1)(\gamma + n)} = 1$$

- Aplicando el test de Raabe:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{(n+1)(\gamma + n)}{(\alpha + n)(\beta + n)} - 1 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{(n+1)(\gamma + n) - (\alpha + n)(\beta + n)}{(\alpha + n)(\beta + n)} \right) \\
&= 1 + \gamma - \alpha - \beta,
\end{aligned}$$

  por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $\alpha + \beta < \gamma$ y diverge si $\alpha + \beta > \gamma$. Pero no sabemos que pasa en si $\alpha + \beta = \gamma$.

- Para aplicar el test de Gauss vamos a realizar los siguientes pasos:

  - Calculamos el valor de p. Para ello veamos que:

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{p}{n} + \frac{B_n}{n^r} \right) = \lim_{n\to\infty} p + \frac{B_n}{n^r} = p$$

    Por tanto,

$$p = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{(n+1)(\gamma + n)}{(\alpha + n)(\beta + n)} - 1 \right) = 1 + \gamma - \alpha - \beta$$

  - Calculamos $\frac{B_n}{n^r}$. Recordando el test de Gauss tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{B_n}{n^r} = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{p}{n} &= \frac{(n+1)(\gamma + n) - (\alpha + n)(\beta + n)}{(\alpha + n)(\beta + n)} - \frac{1 + \gamma - \alpha - \beta}{n} \\
&= \frac{n(1 + \gamma - \alpha - \beta) + \gamma - \alpha\beta}{n^2 + n(\alpha + \beta) + \alpha\beta} - \frac{1 + \gamma - \alpha - \beta}{n} \\
&= \frac{n(\gamma - \alpha\beta) - [n(\alpha + \beta) - \alpha\beta]\,(1 + \gamma - \alpha - \beta)}{n^3 + n^2(\alpha + \beta) + n\alpha\beta}
\end{aligned}$$

- Veamos si B_n está acotado, para ello multiplicamos la expresión anterior por $n^r,\ r > 1$

$$\begin{aligned} B_n &= n^r \frac{n(\gamma - \alpha\beta) - [n(\alpha+\beta) - \alpha\beta]\,(1+\gamma-\alpha-\beta)}{n^3 + n^2(\alpha+\beta) + n\alpha\beta} \\ &= \frac{n^{r+1}(\gamma - \alpha\beta) - \left[n^{r+1}(\alpha+\beta) - n^r\alpha\beta\right](1+\gamma-\alpha-\beta)}{n^3 + n^2(\alpha+\beta) + n\alpha\beta} \end{aligned}$$

  Si tomamos $r = 2$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} B_n < \infty$, teniendo así B_n acotado. Y como $p = 1 + \gamma - \alpha - \beta$, el test de Gauss nos dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $\alpha + \beta < \gamma$ y diverge si $\alpha + \beta \geq \gamma$.

Finalizamos el capítulo dando un diagrama a modo de resumen indicando las relaciones de *fuerza* que hemos visto durante el capítulo.

Observación 1.23.

$$\text{Raíz} \longrightarrow \text{Cociente}$$

$$\text{Kummer} \longrightarrow \text{Bertrand} \longrightarrow \text{Raabe} \longrightarrow \text{Cociente}$$

Capítulo 2

Test de convergencia contemporáneos

Demos un salto temporal hasta el siglo XXI, en los últimos 20 años han habido ciertos avances en el área de los test de convergencia. Nos centraremos en dos de ellos, dedicando una sección completa a cada uno. En la primera, vemos el segundo test del cociente publicado por Sayel A. Ali en 2008 en el artículo [4]. En la segunda, vemos el segundo test de Raabe publicado por Edward Huynh en 2022 en el artículo [5].

2.1. Segundo test de cociente

En esta sección nos centraremos en el segundo test del cociente que viene a ser una versión del test del cociente basada en razones modificadas como son

$$\frac{a_{2n}}{a_n} \quad \text{y} \quad \frac{a_{2n+1}}{a_n}.$$

Estos cocientes permiten formular un criterio de convergencia simple pero potente en determinados casos. Este nuevo test:

- Funciona en una amplia gama de series, incluyendo aquellas que normalmente requerirían los tests de Raabe o Gauss.
- Requiere pocos cálculos, lo que lo hace accesible incluso para problemas en libros típicos de cálculo.
- Será usado también para probar de forma alternativa el test de Raabe, reforzando así su validez y utilidad.

TEOREMA 2.1 (Segundo test del cociente). Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos no nulos. Definimos L como

$$L = \max\{\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}\}$$

y l como

$$l = \min\{\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}\}$$

entonces:

- Si $L < \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $l > \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración.

- Supongamos que $L < \frac{1}{2}$. Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $L < r < \frac{1}{2}$. Por definición de límite superior $\exists N$ tal que
$$\frac{a_{2n}}{a_n} \leq r \quad \text{y} \quad \frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq r, \quad \forall n \geq N$$
Además
$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_{2^k N} + a_{2^k N+1} + \cdots + a_{2^{k+1}N-1}\right)$$
Sea $S_k = a_{2^k N} + a_{2^k N+1} + \cdots + a_{2^{k+1}N-1}$, con $k = 0, 1, \ldots$. Podemos ver que
$$\begin{aligned} S_k &= \left(a_{2^k N} + a_{2^k N+1}\right) + \left(a_{2^k N+2} + a_{2^k N+3}\right) + \cdots + \left(a_{2^{k+1}N-2} + a_{2^{k+1}N-1}\right) \\ &\leq 2(a_{2^{k-1}N})r + 2(a_{2^{k-1}N+1})r + \cdots + 2(a_{2^k N-1})r \\ &= 2r(a_{2^{k-1}N} + a_{2^{k-1}N+1} + \cdots + a_{2^k N-1}) = 2rS_{k-1} \end{aligned}$$
siendo $k = 1, 2, \ldots$. Haciendo inducción sobre k tenemos que
$$S_k \leq 2^k r^k S_0, \quad \forall k \geq 1$$
Entonces,
$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} S_0 (2r)^k < \infty$$
ya que $r < \frac{1}{2}$. Por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $L < \frac{1}{2}$.
- Supongamos que $l > \frac{1}{2}$. Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{2} < r < l$. Es fácil ver que $\exists N$ tal que
$$\frac{a_{2n}}{a_n} > r \quad \text{y} \quad \frac{a_{2n+1}}{a_n} > r, \quad \forall n \geq N$$
De forma análoga a la del caso anterior podemos probar que $S_k \geq S_0(2r)^k, \quad \forall k \geq 1$. Entonces,
$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \geq \sum_{k=0}^{\infty} S_0 (2r)^k = \infty$$
Ya que $\frac{1}{2} < r$. Por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si $l > \frac{1}{2}$.

□

Nota 2.2. Si $l \leq \frac{1}{2} \leq L$ el test no aporta información. Veamos este caso aplicado a la serie de Bertrand:
$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{1}{n(\log n)^p}$$

- Aplicando el criterio de la integral tenemos que
$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^p} \overset{u=\log x}{=} \int_{\log 2}^{\infty} \frac{du}{u^p}$$
y analizando la convergencia de la integral tenemos que la serie converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

- Aplicando el segundo test del cociente tenemos que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n[\log n]^p}{2n\,[\log(2n)]^p} = \frac{1}{2}$$
análogamente
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n[\log n]^p}{(2n+1)[\log(2n+1)]^p} = \frac{1}{2}$$
por lo que $L = l = \frac{1}{2}$ sin dependencia de p, por lo que el test no aporta información.

Si los límites de $\frac{a_{2n}}{a_n}$ y $\frac{a_{2n+1}}{a_n}$ existen, se simplifica mucho el segundo test del cociente. Veamos un corolario que lo muestre.

Corolario 2.3. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos no nulos. Suponiendo que existen los siguientes límites:

$$L_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \quad \text{y} \quad L_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}$$

Sean $L = \max\{L_1, L_2\}$ y $l = \min\{L_1, L_2\}$, entonces:

- Si $L < \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $l > \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- Si $l \leq \frac{1}{2} \leq L$, entonces el test no aporta información.

Corolario 2.4. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos no nulos y decrecientes entonces:

- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} > \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración.

- Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{1}{2}$. Entonces, por ser $\{a_n\}$ decreciente, tenemos

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}$$

  y por tanto

  $$L = \max\{\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}\} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{1}{2}$$

  Por el Teorema 2.1, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

- Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} > \frac{1}{2}$. Entonces, por ser $\{a_n\}$ decreciente,

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}$$

  y por tanto

  $$l = \min\{\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}\} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} > \frac{1}{2}$$

  Por el Teorema 2.1, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

□

Veamos que el Corolario 2.4 se deduce también a partir del criterio de condensación.

Demostración. Por ser $\{a_n\}$ decreciente, tenemos que

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = L$$

- Si $L < \frac{1}{2}$, usando el test del cociente en la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ tenemos que

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} a_{2^{n+1}}}{2^n a_{2^n}} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2(2^n)}}{a_{2^n}} = 2L < 1$$

  Por lo que si $L < \frac{1}{2}$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge y por el criterio de condensación tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también.

- Si $l > \frac{1}{2}$, usando el test del cociente en la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} a_{2^{n+1}}}{2^n a_{2^n}} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2(2^n)}}{a_{2^n}} \geq 2l > 1$$

  Por lo que si $l > \frac{1}{2}$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ diverge y por el criterio de condensación tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también.

$\square$

Veamos ahora varios ejemplos en los que el test del cociente falla pero el segundo test del cociente determina la convergencia.

Ejemplo 2.5. Estudiamos la convergencia de la p-serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $\forall p \in \mathbb{R}$, que ya hemos estudiado en los Ejemplos 1.7 y 1.14, aplicando el segundo test del cociente, con $a_n = \frac{1}{n^p}$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^p} < \frac{1}{2}$, si $p > 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2+\frac{1}{n})^p} = \frac{1}{2^p} > \frac{1}{2}$, si $p < 1$

Por lo que

- Si $p > 1$, entonces la p-serie converge.
- Si $p < 1$, entonces la p-serie diverge.

Ejemplo 2.6. Estudiamos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, con $a_n = \frac{(2n-1)!!}{2^n (n+1)!}$. Veamos primero que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+4}{2n+1} > 1 \Rightarrow a_n > a_{n+1}$$

- Aplicando el test del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2n+1}{2n+4} \right| = 1$$

  por lo que el test no aporta información.

- Aplicando el segundo test del cociente:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{2n+1}}{a_n} < \frac{a_{2n}}{a_n} &= \frac{(4n-1)!!}{(2n-1)!!} \frac{2^n}{4^n} \frac{(n+1)!}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} \frac{\cancel{(2n+1)}(2n+3)(2n+5)\cdots(4n-1)}{2^{n-1}(n+2)(n+3)\cdots(2n)\cancel{(2n+1)}} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2n+3}{2n+4}\right) \left(\frac{2n+5}{2n+6}\right) \cdots \left(\frac{4n-1}{4n}\right) < \frac{1}{2} \left(\frac{4n-1}{4n}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

  Como $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{n-1} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$, tenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{1}{2\sqrt[4]{e}} < \frac{1}{2}$$

  por lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Ejemplo 2.7. Estudiamos la convergencia de la serie hipergeométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, que ya hemos estudiado en Ejemplo 1.22. Aplicando el segundo test del cociente:

$$\begin{aligned}\frac{a_{2n}}{a_n} &= \frac{n!}{(2n)!}\frac{(\alpha+2n-1)!}{(\alpha+n-1)!}\frac{(\beta+2n-1)}{(\beta+n-1)!}\frac{(\gamma+n-1)!}{(\gamma+2n-1)!}\\ &= \frac{1}{2}\left[\prod_{k=n}^{2n-1}\frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{k(\gamma+k)}\right]\end{aligned}$$

Definimos

$$f(x) = \frac{(\alpha+x)(\beta+x)}{x(\gamma+x)} = 1 + \frac{(\alpha+\beta-\gamma)x+\alpha\beta}{x(\gamma+x)}$$

por lo que

$$f'(x) = \frac{(\alpha+\beta-\gamma)(1-x)-\alpha\beta}{x(\gamma+x)}$$

Vamos a distinguir dos casos:

- Si $\alpha+\beta<\gamma$ entonces, por definición del límite $\exists N$ tal que $f(x)$ es creciente $\forall x > N$ ya que

  $$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{(\alpha+\beta-\gamma)}^{<0}(1-x)-\alpha\beta}{x(\gamma+x)} > 0$$

  Así podemos ver que, tomando $n > N$,

  $$\frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{1}{2}\left[\prod_{k=n}^{2n-1}\underbrace{\frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{k(\gamma+k)}}_{f(k)}\right] \leq \frac{1}{2}\left[f(2n-1)\right]^{n-1} = \frac{1}{2}(1+b_n)^{n-1}$$

  donde $b_n = \frac{(\alpha+\beta-\gamma)(2n-1)+\alpha\beta}{(\gamma+2n-1)(2n-1)}$. Notemos que $b_n \to 0$. Por tanto $\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+b_n)}{b_n} = 1$. Tomando el límite superior tenemos que

  $$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n} &\leq \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1+b_n)^{n-1} = \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty} e^{(n-1)\log(1+b_n)}\\ &= \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty} e^{(n-1)b_n} = \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty} e^{(n-1)\frac{(\alpha+\beta-\gamma)(2n-1)+\alpha\beta}{(\gamma+2n-1)(2n-1)}}\\ &= \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty} e^{\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}} < \frac{1}{2}\end{aligned}$$

  Usando que

  $$\frac{a_{2n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(2n+1)!}\frac{(\alpha+2n)!}{(\alpha+n-1)!}\frac{(\beta+2n)!}{(\beta+n-1)!}\frac{(\gamma+n-1)!}{(\gamma+2n)!} = \prod_{k=n}^{2n}\frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(k+1)(\gamma+k)}$$

  con un razonamiento análogo al usado para $\frac{a_{2n}}{a_n}$, se puede ver que $\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$. Así tendremos que

  $$\max\{\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}, \limsup_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_n}\} < \frac{1}{2}$$

  y usando el segundo test del cociente sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $\alpha+\beta<\gamma$.

- Si $\alpha+\beta\geq\gamma$ la serie diverge tal como vimos en el Ejercicio 1.22.

Nota 2.8. Podemos usar el segundo test del cociente para dar una nueva prueba del test de convergencia de Raabe.

Demostración. En efecto, sea $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\epsilon_n}{n}$, con $a_n > 0$ y $\epsilon_n \to 0$. Al estar demostrando la parte de convergencia, suponemos que $\beta > 1$ y tomamos un α tal que $\beta > \alpha > 1$. Además $\exists N$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 - \frac{\alpha}{n}, \quad \forall n \geq N$$

sabiendo que $1 - x \leq e^{-x}$, $\forall x \in (0, 1)$

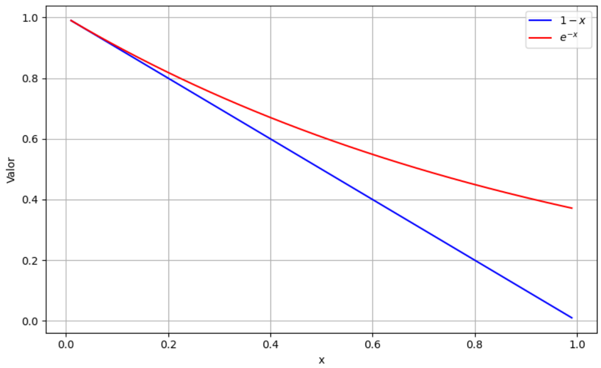


Figura 2.1: Las funciones $1 - x$ y e^{-x} para $x \in [0, 1]$

tenemos que

$$\frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \cdots \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} < \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{\alpha}{2n-1}\right) \leq e^{-\left(\frac{\alpha}{n} + \cdots + \frac{\alpha}{2n-1}\right)}$$

recordando el razonamiento del criterio de la integral es fácil ver que

$$\frac{a_{2n}}{a_n} < e^{-\left(\frac{\alpha}{n} + \cdots + \frac{\alpha}{2n-1}\right)} \leq e^{-\alpha \int_n^{2n} \frac{dx}{x}} = e^{-\alpha[\log 2n - \log n]} = e^{-\alpha \log 2} = \frac{1}{2^\alpha}$$

Análogamente,

$$\frac{a_{2n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \cdots \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} < \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{\alpha}{2n}\right) \leq e^{-\left(\frac{\alpha}{n} + \cdots + \frac{\alpha}{2n}\right)}$$
$$\leq e^{-\alpha \int_n^{2n+1} \frac{dx}{x}} = e^{-\alpha[\log(2n+1) - \log n]} \leq e^{-\alpha \log 2} = \frac{1}{2^\alpha}$$

Sabiendo que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \leq \frac{1}{2^\alpha} < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{2^\alpha} < \frac{1}{2}$$

podemos aplicar el segundo test del cociente y ver que es convergente. □

Notemos que esta demostración muestra que si la convergencia de una serie se puede garantizar gracias al test de Raabe, entonces también se puede garantizar por el segundo test del cociente.

2.2. Segundo test de Raabe

Aunque el test de la anterior sección representa un avance, aún puede fallar si los valores límite de estos cocientes rodean a $1/2$, es decir, cuando:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \leq \frac{1}{2} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \quad \text{y también para } \frac{a_{2n+1}}{a_n}.$$

Ante este nuevo caso inconcluso, el propósito de esta sección es extender el Test de Raabe para abordar también las limitaciones del Segundo Test del Cociente. El segundo test de Raabe fue publicado por Edward Huynh en 2022 en el artículo [5].

TEOREMA 2.9 (Segundo test de Raabe)**.** Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos no nulos y $\lambda > 0$. Sean

$$\liminf_{n\to\infty} \log \lambda n \left(\frac{1}{2} - \frac{a_{2n}}{a_n}\right) = m_1, \quad \liminf_{n\to\infty} \log \lambda n \left(\frac{1}{2} - \frac{a_{2n+1}}{a_n}\right) = m_2$$
$$\limsup_{n\to\infty} \log \lambda n \left(\frac{1}{2} - \frac{a_{2n}}{a_n}\right) = M_1, \quad \limsup_{n\to\infty} \log \lambda n \left(\frac{1}{2} - \frac{a_{2n+1}}{a_n}\right) = M_2$$

siendo $m = \min\{m_1, m_2\}$ y $M = \max\{M_1, M_2\}$. Tenemos que

1. Si $m > \frac{\log 2}{2}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
2. Si $M < \frac{\log 2}{2}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
3. Si $m \leq \frac{\log 2}{2} \leq M$, entonces el test no aporta información.

Para demostrar el teorema, usaremos el siguiente lema:

Lema 2.10. Sea $p \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \log \lambda n \left(\frac{1}{2} - \frac{(\log n)^p}{2(\log 2n)^p}\right) = \frac{p \log 2}{2} \tag{2.1}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \log \lambda n \left(\frac{1}{2} - \frac{n(\log n)^p}{(2n+1)(\log(2n+1))^p}\right) = \frac{p \log 2}{2} \tag{2.2}$$

Demostración. Solo probaremos (2.1) ya que la demostración de (2.2) es análoga. Reescribimos (2.1) y usamos la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \log \lambda n \left(\frac{1}{2} - \frac{(\log n)^p}{2(\log 2n)^p}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \left(\frac{\log n}{\log 2n}\right)^p}{\frac{1}{\log \lambda n}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-p\left(\frac{\log n}{\log 2n}\right)^{p-1}\left(\frac{\log 2n - \log n}{n(\log 2n)^2}\right)}{-\frac{1}{n(\log \lambda n)^2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(p\left(\frac{\log n}{\log 2n}\right)^{p-1}\log 2\left(\frac{\log \lambda n}{\log 2n}\right)^2\right) \\
&= \frac{p\log 2}{2}
\end{aligned}$$

□

Demostración. [del Teorema 2.9] Sean m y M definidos como en el enunciado del teorema.

1. Sea $m > \frac{\log 2}{2}$ podemos asumir sin pérdida de generalidad que $m = m_1 \leq m_2$. Sean α, β tal que $m > \alpha > \beta > \frac{\log 2}{2}$. Asumimos que existe un N_1 tal que $\alpha < \log \lambda n \left(\frac{1}{2} - \frac{a_{2n}}{a_n}\right), \quad \forall n \geq N_1$ y que además $\log \lambda N_1 > 0$. Por lo que

$$\frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\log \lambda n}, \quad \forall n \geq N_1$$

Definimos $b_n = \frac{1}{n(\log n)^{\frac{2\beta}{\log 2}}}$ con lo que tenemos $\frac{b_{2n}}{b_n} = \frac{(\log n)^{\frac{2\beta}{\log 2}}}{2(\log 2n)^{\frac{2\beta}{\log 2}}}$ y usando la fórmula (2.1) del lema anterior obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \log \lambda n \left(\frac{1}{2} - \frac{b_{2n}}{b_n}\right) = \beta < \alpha$$

Notemos que existe un $N_2 \geq N_1$ tal que $\log \lambda n \left(\frac{1}{2} - \frac{b_{2n}}{b_n}\right) < \alpha$ de lo que es fácil ver que

$$\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\log \lambda n} < \frac{b_{2n}}{b_n}, \quad \forall n \geq N_2$$

Juntando las expresiones anteriores vemos que

$$\frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\log \lambda n} < \frac{b_{2n}}{b_n}, \quad \forall n \geq N_2$$

por lo que $\frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{b_{2n}}{b_n}, \quad \forall n \geq N_2$.

Ahora tratamos de obtener las mismas desigualdades para $\frac{a_{2n+1}}{a_n}$ y $\frac{b_{2n+1}}{b_n}$. Como $\alpha < m_1 \leq m_2$, asumimos que existe $N_3 \geq N_2$ tal que $\alpha < \log \lambda n \left(\frac{1}{2} - \frac{a_{2n+1}}{a_n}\right), \quad \forall n \geq N_3$. Por lo que

$$\frac{a_{2n+1}}{a_n} < \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\log \lambda n}, \quad \forall n \geq N_3$$

Usando la misma definición de b_n anterior tenemos que $\frac{b_{2n+1}}{b_n} = \frac{n(\log n)^{\frac{2\beta}{\log 2}}}{(2n+1)(\log(2n+1))^{\frac{2\beta}{\log 2}}}$ y usando la fórmula (2.2) del lema anterior obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \log \lambda n \left(\frac{1}{2} - \frac{b_{2n+1}}{b_n}\right) = \beta < \alpha$$

Notemos que existe un $N \geq N_3$ tal que $\log \lambda n \left(\frac{1}{2} - \frac{b_{2n+1}}{b_n}\right) < \alpha$ de lo que es fácil ver que

$$\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\log \lambda n} < \frac{b_{2n+1}}{b_n}, \quad \forall n \geq N$$

Juntando las expresiones anteriores vemos que

$$\frac{a_{2n+1}}{a_n} < \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\log \lambda n} < \frac{b_{2n+1}}{b_n}, \quad \forall n \geq N$$

Por lo que $\frac{a_{2n+1}}{a_n} < \frac{b_{2n+1}}{b_n}, \quad \forall n \geq N$. Se tiene también que $\frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{b_{2n}}{b_n}, \quad \forall n \geq N$.

Notemos que $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ converge ya que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ converge si $p > 1$, como vimos en el Ejemplo 2.2. Además por el test de comparación del cociente tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

2. Sea $M < \frac{\log 2}{2}$ podemos asumir sin pérdida de generalidad que $M = M_1 \geq M_2$. Sean α, β tal que $M < \alpha < \beta < \frac{\log 2}{2}$. La demostración es análoga a la de 1, en particular podemos ver que $N \geq 1$, $\log \lambda n > 0$ tal que $\frac{b_{2n}}{b_n} < \frac{a_{2n}}{a_n}$ y $\frac{b_{2n+1}}{b_n} < \frac{a_{2n+1}}{a_n}, \quad \forall n \geq N$, donde b_n está definida como en 1.

   Notemos que $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ diverge ya que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ diverge si $p < 1$, como vimos en el Ejemplo 2.2. Además por el test de comparación del cociente tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

$\square$

Si los límites de los cocientes existen entonces podemos simplificar el segundo test de Raabe considerablemente.

Corolario 2.11. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos no nulos y $\lambda > 0$. Supongamos que

$$\frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{1}{2} - \frac{\beta_1}{\log \lambda n} + \frac{\epsilon_n}{\log \lambda n}$$

y

$$\frac{a_{2n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} - \frac{\beta_2}{\log \lambda n} + \frac{\tilde{\epsilon}_n}{\log \lambda n}$$

donde β_1 y β_2 son independientes de n y ϵ_n, $\tilde{\epsilon}_n \to 0$, cuando $n \to \infty$.

Definimos $m = \min\{\beta_1, \beta_2\}$ y $M = \max\{\beta_1, \beta_2\}$. Tenemos que

- Si $m > \frac{\log 2}{2}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $M < \frac{\log 2}{2}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Usando este corolario, podemos deducir una versión que puede ser interpretada como un caso especial del "Segundo test de Gauss".

Corolario 2.12. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos no nulos decrecientes. Supongamos que

$$\frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{1}{2} - \frac{\beta}{\log n} + \frac{B_n}{(\log n)^p}$$

donde $p > 1$ y β es independiente de n y B_n está acotado. Podemos ver que

- Si $\beta > \frac{\log 2}{2}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $\beta \leq \frac{\log 2}{2}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración. Consideramos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, donde $b_n = 2^n a_{2^n}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2a_{2(2^n)}}{a_{2^n}} &= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\log 2^n} + \frac{B_{2^n}}{(\log 2^n)^p}\right) \\ &= 1 - \frac{\frac{2\beta}{\log 2}}{n} + \frac{2B_{2^n}}{n^p (\log 2)^p} \end{aligned}$$

Por el criterio de condensación, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen o divergen simultáneamente. Consideremos varios casos según el valor de β.

- Si $\beta > \frac{\log 2}{2}$, entonces $\frac{2\beta}{\log 2} > 1$ y por el test de Gauss, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge y por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.
- Si $\beta \leq \frac{\log 2}{2}$, entonces $\frac{2\beta}{\log 2} \leq 1$ y por el test de Gauss, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge y por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también diverge.

□

Ejemplo 2.13. Estudiamos la convergencia de la p-serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $\forall p \in \mathbb{R}$, que ya hemos estudiado en los Ejemplos 1.7, 1.14 y 2.5. Al estudiar la convergencia cuando $p = 1$, los test estudiados anteriormente, excepto el criterio de la integral, fallan. Usemos el segundo test de Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} \log n \left(\frac{1}{2} - \frac{a_{2n}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \log n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \log n \left(\frac{1}{2} - \frac{a_{2n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \log n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Notemos que también podríamos haber usado el Corolario 2.12.

Ejemplo 2.14. Estudiamos la convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty}$, con $a_n = \frac{1}{n\log^p(\log n)}$ y $p > 0$.

Antes de aplicar test veamos que:

$$\begin{aligned}\log(\log(n+1)) &= \lim_{n\to\infty} \log\left(\log\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\right) = \log\left(\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \log\left(\log n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \log\left(\log n\left(1+\frac{1}{n\log n} + o\left(\frac{1}{n\log n}\right)\right)\right)\\ &= \log(\log n) + \log\left(1+\frac{1}{n\log n} + o\left(\frac{1}{n\log n}\right)\right)\\ &= \log(\log n) + \frac{1}{n\log n} + o\left(\frac{1}{n\log n}\right)\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$.

- Aplicando el test de la raíz tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n\log^p(\log n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{\log(\log n)}^p}$$

sabiendo que

$$1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{\log(\log n)} \leq \sqrt[n]{n} = e^{\frac{\log n}{n}}$$

haciendo tender n a infinito tenemos que $\sqrt[n]{n} = 1$ y que $\sqrt[n]{\log(\log n)} = 1$ por la regla del sándwich. Por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

Por lo que no concluimos nada con el test de la raíz y recordando el diagrama de 1.23 tenemos que el test del cociente tampoco aporta información.

- Aplicando el test de Raabe tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] &= \lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{\log(\log n) + \frac{1}{n\log n} + o\left(\frac{1}{n\log n}\right)}{\log(\log n)}\right)^p - 1\right]\\ &= \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n\log n\log(\log n)} + o\left(\frac{1}{n\log n\log(\log n)}\right)\right)^p - 1\right]\\ &= \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{p}{n\log n\log(\log n)} + o\left(\frac{1}{n\log n\log(\log n)}\right)\right) - 1\right]\end{aligned}$$

Realizando el producto tenemos

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{n} + \frac{p}{n\log n\log(\log n)} + o\left(\frac{1}{n\log n\log(\log n)}\right) + \frac{p}{n^2\log n\log(\log n)} + o\left(\frac{1}{n^2\log n\log(\log n)}\right)\right]$$

Como

$$o\left(\frac{1}{n\log n\log(\log n)}\right) + \frac{p}{n^2\log n\log(\log n)} + o\left(\frac{1}{n^2\log n\log(\log n)}\right) = o\left(\frac{1}{n\log n\log(\log n)}\right)$$

resulta que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] &= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{n} + \frac{p}{n\log n\log(\log n)} + o\left(\frac{1}{n\log n\log(\log n)}\right)\right]\\ &= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{p}{\log n\log(\log n)} + o\left(\frac{1}{\log n\log(\log n)}\right) = 1\end{aligned}$$

Por lo que no concluimos nada con el test de Raabe.

- Aplicando el segundo test del cociente tenemos que

$$\frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{\log^p(\log n)}{2\log^p(\log 2n)} \to \frac{1}{2}, \quad \text{cuando } n \to \infty$$

y

$$\frac{a_{2n+1}}{a_n} = \frac{n\log^p(\log n)}{(2n+1)\log^p(\log(2n+1))} \to \frac{1}{2}, \quad \text{cuando } n \to \infty$$

Por lo que no concluimos nada con el segundo test del cociente.

- Aplicando el segundo test de Raabe tenemos que

$$\log n\left(\frac{1}{2} - \frac{a_{2n}}{a_n}\right) \leq \log n\left(\frac{1}{2} - \frac{a_{2n+1}}{a_n}\right)$$

por ser $\{a_n\}$ una sucesión decreciente $\forall n \geq 2$. Sea $M = \limsup_{n\to\infty} \log n\left(\frac{1}{2} - \frac{a_{2n+1}}{a_n}\right)$, veamos que el límite existe y vale 0.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \log n\left(\frac{1}{2} - \frac{a_{2n+1}}{a_n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \log n\left(\frac{1}{2} - \frac{n\log^p(\log n)}{(2n+1)\log^p(\log(2n+1))}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} - \frac{n\log^p(\log n)}{(2n+1)\log^p(\log(2n+1))}}{\frac{1}{\log n}}\end{aligned}$$

aplicando la regla de L'Hôpital se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^2\left(\frac{\log^p(\log n)}{\log^p(\log(2n+1))}\frac{\log^2 n}{n} + \frac{\begin{array}{c}\log(2n+1)\log^{p-1}(\log n)\log^p(\log(2n+1))\\ -\log n\log^p(\log n)\log^{p-1}(\log(2n+1))\end{array}}{\log^{2p}(\log(2n+1))}\frac{(2+\frac{1}{n})p\log^2 n}{\log n\log(2n+1)}\right)$$

para mayor claridad vamos a emplear ahora las notaciones O-grande y o-pequeña

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} O(1)\left(o(1) + \frac{(2+\frac{1}{n})p\log^{p-1}(\log n\log^{p-1}(\log(2n+1)))}{\log^{2p-2}(\log(2n+1))}\frac{\log(2n+1)\log(\log(2n+1)) - \log n\log(\log n)}{\log^2(\log(2n+1))}O(1)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} O(1)\left(o(1) + O(1)O(1)o(1)O(1)\right) = \lim_{n\to\infty} o(1) = 0\end{aligned}$$

Luego $\lim_{n\to\infty} \log n\left(\frac{1}{2} - \frac{a_{2n+1}}{a_n}\right) = 0$ $\forall p > 0$ y $M = 0 < \frac{\log 2}{2}$. Por tanto, aplicando el segundo test de Raabe tenemos que $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ diverge $\forall p > 0$.

- Aplicando el criterio de la integral a $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ tenemos que

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\log^p(\log x)} \overset{u=\log(\log x)}{=} \int_{\log(\log 2)}^{\infty} \frac{e^u}{u^p}du$$

lo que diverge para todo $p > 0$ con lo que $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ diverge.

Anexo

Demostración del test del cociente 1.2.

- Caso $L < 1$. Sea r tal que $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r < 1$. Tenemos que $\exists N$ tal que

  $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r \Leftrightarrow |a_{n+1}| < |a_n|\, r, \quad \forall n \geq N$$

  Así, igualando n a N,$N+1$,$N+2$,... tendremos que

  $$\begin{aligned} |a_{N+1}| &< |a_N|\, r \\ |a_{N+2}| &< |a_{N+1}|\, r < |a_N|\, r^2 \\ |a_{N+3}| &< |a_{N+2}|\, r < |a_{N+1}|\, r^2 < |a_N|\, r^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

  Por lo que en general, tenemos que

  $$|a_{N+k}| < |a_N|\, r^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

  Así tenemos que, para una cierta constante $C > 0$,

  $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{N} |a_n|}_{C} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| < C + \sum_{k=1}^{\infty} |a_N|\, r^k$$

  Y como $\sum_{k=1}^{\infty} |a_N|\, r^k = |a_N| \sum_{k=1}^{\infty} r^k$ es una serie geométrica que converge ya que $|r| < 1$, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es convergente.

- Caso $L > 1$. Puesto que $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, existe $K \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tal que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, $\forall n \geq K$ por lo que

  $$|a_{n+1}| > |a_n| > |a_K| > 0, \quad \forall n \geq K$$

  Por lo que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración del test de la raíz 1.3.

- Caso $0 \leq \rho < 1$.
  Sea r tal que $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < r < 1$ tenemos que $\exists N$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < r$, $\forall n \geq N$ y por tanto $|a_n| < r^n$, $\forall n \geq N$. Así, para una cierta constante $C > 0$.

  $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} |a_n|}_{C} + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < C + \sum_{n=N}^{\infty} r^n < C + \sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

  Y como $|r| < 1$ tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge, por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

- Caso $\rho > 1$.

  Por la definición de límite superior, existe un número $\epsilon > 0$ y un K tal que

  $$\sqrt[n]{|a_n|} > 1 + \epsilon, \quad \forall n \geq K$$

  Así tenemos que $|a_n| > (1+\epsilon)^n$ por lo que $|a_n| \not\to 0$ cuando $n \to \infty$, ya que la convergencia a 0 de los términos es una condición necesaria para la convergencia, tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración del criterio de la integral 1.6.

- Supongamos primero que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Entonces $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ es una integral impropia convergente.

  $$\sum_{n=1}^{k} a_n \geq \sum_{n=1}^{k} \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_1^{k+1} f(x)dx \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \int_1^{\infty} f(x)dx$$

  Por tanto, $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ es una integral impropia convergente.

- Supongamos ahora que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Entonces $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ es una integral impropia convergente.

  $$\begin{aligned}\int_1^{k+1} f(x)dx = \sum_{n=1}^{k} \int_n^{n+1} f(x)dx \geq \sum_{n=1}^{k} a_{n+1} \Rightarrow \\ \Rightarrow a_1 + \int_1^{k+1} f(x)dx \geq \sum_{n=1}^{k+1} a_n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_1^{\infty} f(x)dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n\end{aligned}$$

  Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente.

Con razonamientos análogos se puede ver que también se cumple la divergencia.

Bibliografía

[1] Sarah Fix, *Advanced Tests for Convergence*, Whitman College, 2019.

[2] Jingcheng Tong, *Kummer's Test Gives Characterizations for Convergence or Divergence of all Positive Series*, The American Mathematical Monthly , May, 1994, Vol. 101, No. 5 (May, 1994), pp. 450-452.

[3] František Duriš, *Infinite series: Convergence tests*, Bachelor tesis at Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky Univerzita Komenskeho, Bratislava. pp. 19-22.

[4] Sayel A. Ali, *The mth Ratio Test: New Convergence Tests for Series*, (2008). The American Mathematical Monthly, 115(6), pp. 514–524.

[5] Edward Huynh, *A Second Raabe's Test and Other Series Tests*, (2022). The American Mathematical Monthly, 129(9), pp. 865–875.

[6] Tom M. Apostol, *Calculus Vol. 1 Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*, editorial Reverte, S. A. pp. 485