

El producto de volúmenes y la conjetura de Mahler



Laura Miramón Martínez
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo: David Alonso Gutiérrez y
Luis Carlos García Lirola

Junio de 2025

Resumen

Dado un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ su cuerpo polar se define como

$$K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n ; \langle x, u \rangle \leq 1, \forall u \in K\},$$

y el producto de los volúmenes de K y K° se conoce como el producto de volúmenes o producto de Mahler, $P(K)$. El principal objetivo de este trabajo es abordar el problema de encontrar un minimizador y un maximizador de este producto. Mientras que el problema de encontrar un maximizador está resuelto, siendo la bola Euclídea dicho maximizador, el problema de encontrar un minimizador sigue abierto.

Para esto, en el capítulo 1 presentaremos algunas nociones básicas en convexidad. Definiremos la distancia de Haudorff y mostraremos algunas de sus propiedades. Por ejemplo, demostraremos que dada una sucesión de cuerpos convexos tales que convergen a la bola euclídea cerrada de radio 1, la sucesión de sus cuerpos polares también converge a la bola euclídea cerrada de radio 1. Este hecho será fundamental en el problema de maximización de $P(K)$.

Después, demostraremos la desigualdad de Brunn-Minkowski, que afirma que dados dos conjuntos no vacíos medibles Borel A, B en \mathbb{R}^n , se cumple

$$\text{vol}_n(A+B)^{1/n} \geq \text{vol}_n(A)^{1/n} + \text{vol}_n(B)^{1/n},$$

donde $A+B$ denota la suma de Minkowski definida como $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$. Obtendremos esta desigualdad como consecuencia de la desigualdad funcional de Prékopa-Leindler.

Por otra parte, demostraremos la desigualdad de Borell-Brascamp-Lieb, que extiende la de Prékopa-Leindler. Es una desigualdad muy importante y citada en la literatura de la que, sin embargo, es complicado encontrar una demostración detallada.

Una vez vistas todas las nociones previas, podremos comenzar a estudiar el objetivo principal del trabajo: maximizar y minimizar el producto de volúmenes.

En 1923 Balschke demostró que, para $n \leq 3$, el maximizador era la bola euclídea cerrada de radio 1 y en 1948, Santaló demostró que esto era cierto también para $n > 3$.

En el capítulo 2 mostraremos dos posibles demostraciones de este resultado. La primera hace uso de la simetrización de Steiner, que, como veremos, aumenta el volumen del polar. Además, se puede obtener una sucesión de cuerpos convexos aplicando simetrizaciones de Steiner a un cuerpo inicial de manera que converge a un múltiplo de la bola euclídea cerrada de radio 1.

La segunda aplica la noción de sistema de sombras, definido por primera vez por Shephard en 1964, siendo la simetrización de Steiner un caso particular de un sistema de sombras concreto. La ventaja de esta técnica es que nos servirá también para abordar el problema del máximo en el capítulo siguiente.

En 1930 Mahler conjeturó que el minimizador es la bola de radio 1 con la norma infinito, el cubo n -dimensional. Sin embargo, esto sólo se ha podido demostrar para algunos casos concretos. Mahler lo probó en dimensión $n = 2$ pero no fue hasta años más tarde, en 2020, que Iriyeh-Shibata lo demostraron para dimensión $n = 3$.

En el capítulo 3, demostraremos que es cierto para dimensión 2, así como para un tipo de cuerpo convexo en dimensión arbitraria, denominado cuerpo incondicional. Aunque la primera demostración de este hecho la dio Saint-Raymond, en este trabajo damos la demostración de Meyer.

Finalmente, observemos que demostrar que el minimizador es el que conjeturó Mahler es muy complicado ya que, en tal caso, existen múltiples posibles minimizadores. Estos son los politopos de Hanner, que estudiaremos en el trabajo. El producto de volúmenes de este tipo de cuerpos convexos es exactamente el mínimo conjeturado.

Abstract

Given a convex body $K \subset \mathbb{R}^n$ its polar body is defined as

$$K^\circ = \{x; \langle x, u \rangle \leq 1, \forall u \in K\},$$

and the product of the volume of K and K° is called the volume product or Mahler product, $P(K)$. Our main purpose will be to approach the problem of maximizing and minimizing this product. Even though the maximizer is already known to be the Euclidean ball, the problem of finding a minimizer remains open.

To this end, we first show some basic notions on convexity. We define the Hausdorff distance and show some of its properties. For example, we show that given a sequence of convex bodies that converges to the Euclidean closed ball of radius 1, the sequence of their polar bodies also converges to the Euclidean closed ball of radius 1. This will be a fundamental fact for the problem of maximizing $P(K)$.

We then prove the Brunn-Minkowski inequality, that states that given two non-empty Borel measurable sets A, B in \mathbb{R}^n , then

$$\text{vol}_n(A+B)^{1/n} \geq \text{vol}_n(A)^{1/n} + \text{vol}_n(B)^{1/n},$$

where $A+B$ denotes the Minkowski sum, defined as $A+B = \{a+b; a \in A, b \in B\}$. We obtain this inequality as a consequence of the Prékopa-Leindler functional inequality.

After this, we prove the Borell-Brascamp-Lieb inequality, which is an extension of the Prékopa-Leindler inequality. It is also a very important inequality that is cited multiple times in literature but such that it is hard to find a properly detailed proof.

Once we have seen all the needed previous notions, we can get back on track with our main objective: maximizing and minimizing the volume product.

In 1923 Blaschke proved that, for $n \leq 3$, the maximizer was the euclidean closed ball of radius 1 and in 1948, Santaló proved this was also true for all $n > 3$. In chapter 2, we show two different approaches to prove this. The first one applies the Steiner symmetrization, which increases the volume of the polar body. It is used to find a sequence of convex bodies obtained by applying multiple Steiner symmetrizations to a given initial convex body such that it converges to a multiple of the euclidean closed ball of radius 1.

The second way to prove this result applies the notion of shadow system, first defined by Shephard in 1964. The Steiner symmetrization is a particular case of a specific shadow system. The advantage of this technique is that it will be useful when the problem of maximizing $P(K)$ is approached.

In 1930, Mahler conjectured that the minimizer is the ball of radius 1 with the infinity norm, the n -dimensional cube. However, this has only been proved for some specific scenarios. Mahler proved it for dimension 2 but it was not until 2020 that Iriyeh-Shibata proved it for dimension 3.

In chapter 3, we prove this for dimension 2, as well as for a specific type of convex body for an arbitrary dimension, known as unconditional body. Even though the first proof of this fact was given by

Saint-Raymond, in this dissertation we show Meyer's proof.

Finally, observe that proving that the minimizer is the one Mahler conjectured is extremely difficult due to the fact that, in such case, there are multiple possible minimizers. These are the Hanner polytopes, which are studied in this dissertation. These convex bodies' product volume is exactly the same as that of the conjectured minimizer.

Índice general

Resumen	III
Abstract	V
1. Preliminares	1
1.1. Nociones básicas en convexidad	1
1.2. El producto de volúmenes	4
1.3. Desigualdad de Brunn-Minkowski	5
1.4. Desigualdad de Borell-Brascamp-Lieb	8
2. Desigualdad de Blaschke-Santaló	13
2.1. La simetrización de Steiner	13
2.2. Sistemas de sombras	18
3. La conjetura de Mahler	21
3.1. Conjetura de Mahler en $n = 2$	21
3.2. Cuerpos incondicionales	22
3.3. Polítopos de Hanner	24
Bibliografía	27

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo introduciremos las nociones básicas que aparecerán a lo largo del trabajo, además de introducir el producto de volúmenes, tema central de este trabajo. Presentaremos ciertas propiedades del conjunto polar que pueden encontrarse en [8]. También enunciaremos y demostraremos dos importantes desigualdades, la de Brunn-Minkowski (Teorema 1.9) y la de Borell-Brascamp-Lieb (Teorema 1.12).

1.1. Nociones básicas en convexidad

Antes de introducir el producto de volúmenes, fijamos cierta notación que aparecerá lo largo de todo el trabajo e introducimos algunos conceptos generales.

Denotamos por B_p^n a la bola cerrada de radio 1 con la norma $\|\cdot\|_p$ en \mathbb{R}^n , con $1 \leq p \leq +\infty$, que viene dada por $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ si $1 \leq p < +\infty$ y $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, $\text{vol}_n(A)$ denota la medida de Lebesgue de A en \mathbb{R}^n . Cuando sea claro cuál es la dimensión n , escribiremos $\text{vol}(A)$.

Definición (Cuerpo convexo). Dado un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es un cuerpo convexo si es compacto, tiene interior no vacío y cumple que para cualesquiera $x, y \in K$ se tiene que

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in K, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

La clausura convexa de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se denotará por $\text{conv}(A)$ y está definida como $\text{conv}(A) = \bigcap_{A \subset B, B \text{ convexo}} B$. Llamamos cuerpo 0-simétrico a un cuerpo $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $K = -K = \{-x; x \in K\}$.

Dado un cuerpo convexo y 0-simétrico K , siempre existe una norma $\|\cdot\|_K$ tal que K es la bola unidad definida mediante el funcional de Minkowski $\|x\|_K = \inf\{r > 0; x \in rK\}$. Así, podremos entender los cuerpos convexos y 0-simétricos como bolas unidad de ciertas normas.

A lo largo de este trabajo, la noción de continuidad de cuerpos viene dada por la distancia de Hausdorff:

Definición (Distancia de Hausdorff). Dados $A, B \subset \mathbb{R}^n$ compactos,

$$\delta(A, B) := \max \left\{ \max_{x \in A} \min_{y \in B} |x - y|, \max_{y \in B} \min_{x \in A} |x - y| \right\}.$$

Se puede ver que esto es en efecto una distancia en el conjunto de los compactos de \mathbb{R}^n y por tanto podemos definir una topología y así obtener una noción de continuidad. La siguiente proposición nos permite escribir la noción de distancia de Hausdorff de una manera diferente para un caso concreto, la usaremos más adelante para ver un resultado de continuidad.

Proposición 1.1. Dado $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo y $\lambda > 0$ un escalar,

$$\delta(K, \lambda B_2^n) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid K \subset (\lambda + \varepsilon)B_2^n \wedge \lambda B_2^n \subset K + \varepsilon B_2^n\}.$$

Demostración. Denotamos $d(K, \lambda B_2^n) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid K \subset (\lambda + \varepsilon)B_2^n \wedge \lambda B_2^n \subset K + \varepsilon B_2^n\}$.

Ahora, supongamos que $d(K, \lambda B_2^n) = \varepsilon$. Entonces, $\forall x \in K, \exists y \in B_2^n$ tal que $x = (\lambda + \varepsilon)y$ y por tanto, $|x - \lambda y| \leq \varepsilon$ y así, $\min_{\bar{y} \in \lambda B_2^n} \{|x - \bar{y}|\} = \min_{y \in B_2^n} \{|x - \lambda y|\} \leq \varepsilon$.

Análogamente, $\forall y \in B_2^n, \exists x \in K$ y $\exists \bar{y} \in B_2^n$ tales que $\lambda y = x + \varepsilon \bar{y}$ y entonces, $|x - \lambda y| \leq \varepsilon$ por lo que $\min_{x \in K} \{|x - \lambda y|\} \leq \varepsilon$. De esto deducimos que $\delta(K, \lambda B_2^n) \leq \varepsilon = d(K, \lambda B_2^n)$.

Por otro lado, supongamos que $\delta(K, \lambda B_2^n) = \varepsilon$. Entonces, por la definición sabemos que $\forall x \in K, \exists y \in B_2^n$ tal que $|x - \lambda y| \leq \varepsilon$ y entonces $x \in (\lambda + \varepsilon)B_2^n$. Además, $\forall y \in B_2^n, \exists x \in K$ tal que $|x - \lambda y| \leq \varepsilon$ y también $\lambda y \in K + \varepsilon B_2^n$. Por tanto, $d(K, \lambda B_2^n) \leq \varepsilon = \delta(K, \lambda B_2^n)$.

Entonces, $\delta(K, \lambda B_2^n) = d(K, \lambda B_2^n)$. \square

Ahora sí, introducimos los conceptos principales del trabajo.

Definición (Conjunto polar). Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se define su conjunto polar, A° como

$$A^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n ; \langle x, a \rangle \leq 1, \forall a \in A\}.$$

Un conocido ejemplo es $(B_p^n)^\circ = B_q^n$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En la Figura 1.1 se ilustra el caso $p = \infty, q = 1$.

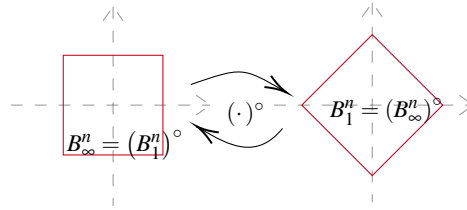


Figura 1.1: Ejemplos conjunto polar

Vemos también una serie de propiedades de este, que aparecerán en lo que sigue.

Proposición 1.2. Dadas A, B, A_i $i \in I$ subconjuntos no vacíos de \mathbb{R}^n , se verifican las siguientes propiedades:

1. $(\cup_{i \in I} A_i)^\circ = \cap_{i \in I} A_i^\circ$.
2. A° es cerrado, convexo y $0 \in A^\circ$.
3. Si $A \subset B$ entonces $B^\circ \subset A^\circ$.
4. $(\text{conv} A)^\circ = A^\circ$.
5. Dado $\lambda > 0$, $(\lambda A)^\circ = (1/\lambda)A^\circ$.
6. Dada $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\det M \neq 0$, entonces $(MA)^\circ = (M^-)^T A^\circ$, donde M^- denota la matriz inversa de M .
7. $A \subset (A^\circ)^\circ =: A^{\circ\circ}$.

Demostración. 1. Es inmediato por la definición.

2. Notar que dado $a \in \mathbb{R}^n$, se tiene $\{a\}^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n ; \langle x, a \rangle \leq 1\}$, que es un subconjunto cerrado y convexo. Entonces, $A^\circ = (\cup_{a \in A} \{a\})^\circ = \cap_{a \in A} \{a\}^\circ$. Es decir, es intersección de conjuntos cerrados y convexos y por tanto es convexo y cerrado. Es inmediato ver que contiene al origen.

3. Como $A \subset B$ podemos escribir $B = A \cup (B \setminus A)$ y entonces $B^\circ = (A^\circ \cap (B \setminus A)^\circ) \subset A^\circ$.

4. Como $A \subset \text{conv}(A)$ ya sabemos que $\text{conv}(A)^\circ \subset A^\circ$. Tomamos ahora $x \in A^\circ$, es decir $\langle x, a \rangle \leq 1$ $\forall a \in A$ y sea $\bar{a} \in \text{conv}(A)$. Entonces, $\bar{a} = \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i$ donde $a_i \in A, \lambda_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, N$ y $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$ y así es inmediato ver que

$$\langle x, \bar{a} \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i \rangle = \sum_{i=1}^N \lambda_i \langle x, a_i \rangle \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$$

y entonces $x \in \text{conv}(A)^\circ$.

5. Es inmediato por las propiedades del producto escalar y la propia definición.
6. Por las propiedades del producto escalar tenemos que

$$\begin{aligned} (MA)^\circ &= \{x \in \mathbb{R}^n ; \langle x, a \rangle \leq 1, \forall a \in MA\} = \{x \in \mathbb{R}^n ; \langle x, Ma \rangle \leq 1, \forall a \in A\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n ; \langle M^T x, a \rangle \leq 1, \forall a \in A\} = \{(M^T)^- x \in \mathbb{R}^n ; \langle x, a \rangle \leq 1, \forall a \in A\} \\ &= (M^T)^- \{x \in \mathbb{R}^n ; \langle x, a \rangle \leq 1, \forall a \in A\} = (M^T)^- A^\circ. \end{aligned}$$

7. Es directo por la definición. □

A continuación definimos los conceptos de funciones soporte y radial, la primera nos permitirá ver un resultado respecto de la continuidad de la aplicación polar.

Definición. Dado un cuerpo convexo K , se define la *función soporte* de K , $h_K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, como

$$h_K(u) = \text{máx}\{\langle z, u \rangle ; z \in K\}.$$

Si $0 \in \text{int}(K)$ se define la *función radial* de K , $\rho_K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, como

$$\rho_K(u) := \text{máx}\{\lambda \geq 0 ; \lambda u \in K\}.$$

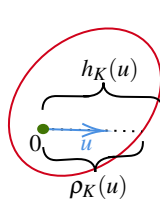


Figura 1.2: Función soporte y función radial

Es inmediato comprobar que dados dos cuerpos convexos K, L se cumple $h_{K+L} = h_K + h_L$ y también es sencillo ver que $K \subset L$ si y solo si $h_K(u) \leq h_L(u); \forall u \in \mathbb{R}^n$ si y solo si $h_K(u) \leq h_L(u); \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Además, si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo 0-simétrico, dado $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\forall x \in K$ se tiene que $\langle x, \frac{u}{h_K(u)} \rangle \leq 1$ y por tanto, $\frac{u}{h_K(u)} \in K^\circ$. Esto implica que $\rho_{K^\circ}(u) \geq \frac{1}{h_K(u)}$. Recíprocamente, $\rho_{K^\circ}(u)u \in K^\circ$ y entonces $\langle x, u \rangle \leq \frac{1}{\rho_{K^\circ}(u)}$, $\forall x \in K$ y por tanto $h_K(u) \leq \frac{1}{\rho_{K^\circ}(u)}$. Así, hemos demostrado que

$$\rho_K(u) = \frac{1}{h_{K^\circ}(u)} \quad \forall u \neq 0. \tag{1.1}$$

Veamos ahora el resultado de continuidad mencionado anteriormente.

Proposición 1.3. Dados $K_m \subset \mathbb{R}^n$ cuerpos convexos tales que $K_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \lambda B_2^n$, donde $\lambda > 0$ es un escalar, entonces se cumple que

$$K_m^\circ \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} B_2^n.$$

Demostración. Notar que como $K_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \lambda B_2^n$ entonces, si $\delta(K_m, \lambda B_2^n) = \varepsilon_m$, se cumple que $\varepsilon_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Sea ahora $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo tal que $\delta(K, \lambda B_2^n) < \varepsilon$. Entonces, por la Proposición 1.1 sabemos que $K \subset (\lambda + \varepsilon)B_2^n$ y $\lambda B_2^n \subset K + \varepsilon B_2^n$.

Veamos primero que $\lambda B_2^n \subset K + \varepsilon B_2^n \iff (\lambda - \varepsilon)B_2^n \subset K$ para todo $0 < \varepsilon < \lambda$.

Sabemos que $\lambda B_2^n \subset K + \varepsilon B_2^n \iff \lambda h_{B_2^n}(u) \leq h_K(u) + \varepsilon h_{B_2^n}(u); \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Notar ahora que $h_{B_2^n}(u) = \|u\|_2; \forall u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Esto se demuestra viendo la doble desigualdad. Notar que $h_{B_2^n}(u) \geq \langle \frac{u}{\|u\|_2}, u \rangle = \|u\|_2$ y por otro lado, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$h_{B_2^n}(u) = \sup_{x \in B_2^n} |\langle x, u \rangle| \leq \sup_{x \in B_2^n} \|x\|_2 \|u\|_2 = \|u\|_2.$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda B_2^n \subset K + \varepsilon B_2^n &\iff \lambda \leq h_K(u) + \varepsilon; \forall u \in \mathbb{S}^{n-1} \iff (\lambda - \varepsilon) \leq h_K(u); \forall u \in \mathbb{S}^{n-1} \\ &\iff (\lambda - \varepsilon)B_2^n \subset K. \end{aligned}$$

Ahora, por las propiedades del conjunto polar, notar que $K^\circ \subset \frac{1}{\lambda - \varepsilon} B_2^n \subset (\frac{1}{\lambda} + 2\frac{\varepsilon}{\lambda^2}) B_2^n$ para un ε suficientemente pequeño.

Por otro lado, $K^\circ \supset \frac{1}{\lambda + \varepsilon} B_2^n \supset (\frac{1}{\lambda} - 2\frac{\varepsilon}{\lambda^2}) B_2^n$ para un ε suficientemente pequeño. Aplicando lo anterior, obtenemos que entonces $\frac{1}{\lambda} B_2^n \subset K^\circ + 2\frac{\varepsilon}{\lambda^2} B_2^n$.

Ahora, volviendo a la sucesión de cuerpos convexos, hemos visto que si $\delta(K_m, \lambda B_2^n) < \varepsilon_m$ para un ε_m suficientemente pequeño, entonces $\delta(K_m^\circ, \frac{1}{\lambda} B_2^n) < 2\frac{\varepsilon_m}{\lambda^2}$ y por lo tanto, si $\varepsilon_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, entonces,

$\delta(K_m^\circ, \frac{1}{\lambda} B_2^n) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ y

$$K_m^\circ \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} B_2^n.$$

□

Proposición 1.4. Dada una sucesión de cuerpos convexos $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{R}^n tal que $K_m \rightarrow \lambda B_2^n$ para $\lambda > 0$ un escalar, entonces

$$\text{vol}_n(K_m) \rightarrow \text{vol}_n(\lambda B_2^n).$$

Demostración. Sea K un cuerpo convexo tal que $\delta(K, \lambda B_2^n) < \varepsilon < \lambda$, entonces por lo visto en la demostración anterior sabemos que $K \subset (\lambda + \varepsilon)B_2^n$ y $(\lambda - \varepsilon)B_2^n \subset K$. Entonces,

$$(\lambda - \varepsilon)^n \text{vol}_n(B_2^n) \leq \text{vol}_n(K) \leq (\lambda + \varepsilon)^n \text{vol}_n(B_2^n).$$

Así, si $\delta(K_m, \lambda B_2^n) = \varepsilon_m \rightarrow 0$, entonces,

$$\text{vol}_n(K_m) \rightarrow \lambda^n \text{vol}_n(B_2^n) = \text{vol}_n(\lambda B_2^n).$$

□

1.2. El producto de volúmenes

A continuación definimos el tema central del trabajo, el producto de volúmenes. El objetivo a continuación será demostrar que el máximo del producto de volúmenes es el dado por B_2^n y presentar algunos casos en los que se ha podido demostrar que el mínimo es el mínimo conjeturado, el dado por B_∞^n .

Definición. Dado $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, se define el producto de volúmenes como

$$P(K) = \text{vol}(K) \text{vol}(K^\circ).$$

Notar que de manera inmediata, por las propiedades del conjunto polar, obtenemos que el producto de volúmenes es invariante bajo transformaciones lineales.

Antes de seguir, calculemos el valor de $P(B_\infty^n)$, ya que es el mínimo conjeturado.

Lema 1.5. *Dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que el producto de volúmenes de B_∞^n es:*

$$P(B_\infty^n) = P(B_1^n) = \frac{4^n}{n!}.$$

Demostración. Sabemos que $(B_\infty^n)^\circ = B_1^n$ y, entonces, $P(B_\infty^n) = \text{vol}(B_\infty^n) \text{vol}(B_1^n) = 2^n \text{vol}(B_1^n)$. Este volumen, $\text{vol}_n(B_1^n)$, lo estudiamos en general para un $1 \leq p < +\infty$.

Notar que; aplicando la definición de norma, el teorema de Fubini y la paridad de la función $|\cdot|$ en cada integral, obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|t\|_p^p} dt = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-|t_1|^p} \dots e^{-|t_n|^p} dt_1 \dots dt_n = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|^p} dx \right)^n = 2^n \left(\int_0^\infty e^{-x^p} dx \right)^n.$$

Por otro lado, como $\int_{\|x\|_p^p}^\infty e^{-t} dt = e^{-\|x\|_p^p}$, podemos escribir lo siguiente:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_p^p} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\|x\|_p^p}^\infty e^{-t} dt dx$$

que, aplicando el teorema de Fubini, es

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_p^p} dx = \int_0^\infty e^{-t} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[0,t^{1/p}]}(\|x\|_p) dx dt = \text{vol}(B_p^n) \int_0^\infty e^{-t} t^{n/p} dt = \text{vol}(B_p^n) \Gamma(1 + n/p).$$

Así,

$$\text{vol}(B_p^n) = \frac{2^n}{\Gamma(1 + n/p)} \left(\int_0^\infty e^{-x^p} dx \right)^n$$

y, en particular, $\text{vol}(B_1^n) = \frac{2^n}{n!}$ y por tanto $P(B_\infty^n) = \frac{4^n}{n!}$. □

Otro importante resultado respecto del producto de volúmenes que aplicaremos más tarde es el siguiente lema.

Lema 1.6. *Sean $K, K_m \subset \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, cuerpos convexos 0-simétricos de modo que $K_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} K$. Entonces,*

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} P(K_m) = P(K)$$

La demostración de este resultado puede encontrarse en el Lema 3 de [5]. Observamos que, en el caso particular de que $K = \lambda B_2^n$ para algún $\lambda > 0$, este lema se deduce de la Proposición 1.3 y la Proposición 1.4.

1.3. Desigualdad de Brunn-Minkowski

El siguiente objetivo de este capítulo es demostrar la desigualdad de Brunn-Minkowski (Teorema 1.9), que afirma que dados dos conjuntos no vacíos medibles Borel en \mathbb{R}^n , A y B , se cumple

$$\text{vol}_n(A + B)^{1/n} \geq \text{vol}_n(A)^{1/n} + \text{vol}_n(B)^{1/n},$$

donde $A + B$ denota la suma de Minkowski definida como $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Para obtenerla, demostraremos primero la desigualdad de Prékopa-Leindler. La demostraremos siguiendo [1, pág. 137–140], en donde se sigue la demostración de Ball [3]. Más adelante veremos que también se puede obtener como caso límite de la desigualdad de Borell-Brascamp-Lieb (Teorema 1.12).

Antes, debemos ver un lema previo.

Lema 1.7. Dado $\gamma > 0$ un escalar y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ tal que f^γ es integrable Borel en \mathbb{R}^n se cumple:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\gamma = \int_0^\infty \gamma t^{\gamma-1} \text{vol}_n(\{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) \geq t\}) dt.$$

Demostración. Notar que $\text{vol}_n(\{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) \geq t\}) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) \geq t\}}(x) dx$ y entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \gamma t^{\gamma-1} \text{vol}_n(\{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) \geq t\}) dt &= \int_0^\infty \gamma t^{\gamma-1} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) \geq t\}}(x) dx dt \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \gamma t^{\gamma-1} \chi_{\{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) \geq t\}}(x) dx dt. \end{aligned}$$

Podemos aplicar el teorema de Fubini obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \gamma t^{\gamma-1} \text{vol}_n(\{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) \geq t\}) dt &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \gamma t^{\gamma-1} \chi_{\{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) \geq t\}}(x) dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{f(x)} \gamma t^{\gamma-1} dt dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^\gamma(x) dx. \end{aligned}$$

Este es el resultado que buscábamos. □

Ahora sí, podemos demostrar la desigualdad de Prékopa-Leindler.

Teorema 1.8 (Prékopa-Leindler). Sean f, g, h tres funciones no negativas y medibles Borel definidas en \mathbb{R}^n y $0 \leq \lambda \leq 1$ tal que $f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda \leq h(z)$ siempre que $z = (1-\lambda)x + \lambda y$. Entonces,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \right)^\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^n} h(z) dz.$$

Demostración. Vamos a realizar esta demostración mediante un argumento de inducción en la dimensión. Así, sea $n = 1$.

Supongamos primero que $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$. Notar que para cualesquiera $A, B \subset \mathbb{R}$ compactos no vacíos se cumple lo siguiente:

$$A + B \supseteq (\text{mín}A + B) \cup (A + \text{máx}B)$$

y por otro lado, $(\text{mín}A + B) \cap (A + \text{máx}B) = \{\text{mín}A + \text{máx}B\}$ que tiene medida nula. Entonces, $\text{vol}_1(A + B) \geq \text{vol}_1(A) + \text{vol}_1(B)$. Esto es cierto para compactos, pero también puede extenderse a cualquier conjunto medible debido a que la medida de Lebesgue es regular. Esto puede verse en la Proposición 1.2.3 de [6].

Sea ahora $0 \leq t \leq 1$ y consideremos $H_t = \{x \in \mathbb{R} ; h(x) \geq t\}$, $F_t = \{x \in \mathbb{R} ; f(x) \geq t\}$ y $G_t = \{x \in \mathbb{R} ; g(x) \geq t\}$. Estos dos últimos son no vacíos precisamente porque las normas de f y g son 1. Entonces, $(1-\lambda)F_t + \lambda G_t \subset H_t$ y aplicando el Lema 1.7, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(z) dz &= \int_0^\infty \text{vol}_1(\{x \in \mathbb{R} ; h(x) \geq t\}) dt \geq \int_0^1 \text{vol}_1(H_t) dt \\ &\geq (1-\lambda) \int_0^1 \text{vol}_1(F_t) dt + \lambda \int_0^1 \text{vol}_1(G_t) dt. \end{aligned}$$

De nuevo, como $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} h(z) dz \geq (1-\lambda) \int_0^1 \text{vol}_1(F_t) dt + \lambda \int_0^1 \text{vol}_1(G_t) dt = (1-\lambda) \int_0^\infty \text{vol}_1(F_t) dt + \lambda \int_0^\infty \text{vol}_1(G_t) dt$$

y si volvemos a aplicar el Lema 1.7, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(z) dz &\geq (1-\lambda) \int_0^\infty \text{vol}_1(F_t) dt + \lambda \int_0^\infty \text{vol}_1(G_t) dt = (1-\lambda) \int_{\mathbb{R}} f(x) dx + \lambda \int_{\mathbb{R}} g(x) dx \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} g(y) dy \right)^\lambda, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos aplicado la desigualdad aritmético-geométrica.

Ahora, si $\|f\|_\infty$ o $\|g\|_\infty$ son nulas, el resultado es trivial y, si no son nulas ni 1, debemos considerar las funciones $\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|_\infty}$ y $\tilde{g} = \frac{g}{\|g\|_\infty}$ que sí tienen norma 1. Tomando también $\tilde{h} = \frac{h}{\|f\|_\infty^{1-\lambda} \|g\|_\infty^\lambda}$ tenemos que \tilde{f} , \tilde{g} y \tilde{h} cumplen las hipótesis del teorema y por lo que acabamos de demostrar tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(y) dy \right)^\lambda &= \frac{1}{\|f\|_\infty^{1-\lambda} \|g\|_\infty^\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} g(y) dy \right)^\lambda \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \tilde{h}(z) dz = \frac{1}{\|f\|_\infty^{1-\lambda} \|g\|_\infty^\lambda} \int_{\mathbb{R}} h(z) dz \end{aligned}$$

y entonces,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} g(y) dy \right)^\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} h(z) dz.$$

Finalmente, solo nos queda aplicar el paso de inducción. Entonces, supongamos que se cumple para funciones definidas en \mathbb{R}^n y consideremos f, g y h definidas en \mathbb{R}^{n+1} tales que cumplen los requisitos del teorema. Ahora, fijamos $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ y definimos $f_{x_1} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ como $f_{x_1}(x_2, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ y de manera análoga definimos g_{y_1} y h_{z_1} donde $z_1 = (1-\lambda)x_1 + \lambda y_1$. Entonces es fácil comprobar que estas funciones cumplen las hipótesis del teorema y además están definidas en \mathbb{R}^n por lo que, por el paso de inducción, cumplen

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_{x_1}(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g_{y_1}(y) dy \right)^\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^n} h_{z_1}(z) dz.$$

Ahora, podemos definir otras tres nuevas funciones definidas en \mathbb{R} y dadas por $\tilde{f}(x_1) = \int_{\mathbb{R}^n} f_{x_1}(x) dx$ y las análogas para g y h . Entonces, por lo que acabamos de escribir estas tres funciones cumplen que $\tilde{f}(x_1)^{1-\lambda} \tilde{g}(y_1)^\lambda \leq \tilde{h}(z_1)$ para todo z_1 tal que $z_1 = (1-\lambda)x_1 + \lambda y_1$ y entonces,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(y) dy \right)^\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} \tilde{h}(z) dz.$$

Si aquí aplicamos la definición de estas nuevas funciones y el teorema de Fubini enseguida obtenemos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} g(y) dy \right)^\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^{n+1}} h(z) dz$$

y así acabamos la prueba del teorema. □

Como consecuencia de la desigualdad de Prékopa-Leindler podemos obtener la desigualdad de Brunn-Minkowski.

Teorema 1.9 (Brunn-Minkowski). Sean A, B dos conjuntos de Borel no vacíos en \mathbb{R}^n . Entonces, dado $0 \leq \lambda \leq 1$ se cumple que $\text{vol}_n(A)^{1-\lambda} \text{vol}_n(B)^\lambda \leq \text{vol}_n((1-\lambda)A + \lambda B)$. Además,

$$\text{vol}_n(A)^{1/n} + \text{vol}_n(B)^{1/n} \leq \text{vol}_n(A+B)^{1/n}.$$

Demostración. Dados dos conjuntos de Borel no vacíos A y B , $\forall \lambda \in [0, 1]$ se cumple que

$$\text{vol}_n(A)^{1-\lambda} \text{vol}_n(B)^\lambda \leq \text{vol}_n((1-\lambda)A + \lambda B)$$

ya que podemos aplicar el Teorema 1.8 a las funciones $f \equiv \chi_A$, $g \equiv \chi_B$ y $h \equiv \chi_{(1-\lambda)A + \lambda B}$, que cumplen las hipótesis de la desigualdad de Prékopa-Leindler.

Ahora, veamos que esto implica que $\text{vol}_n(A)^{1/n} + \text{vol}_n(B)^{1/n} \leq \text{vol}_n(A+B)^{1/n}$.

Si $\text{vol}(A)$ o $\text{vol}(B)$ son nulos, el resultado es inmediato por lo que podemos suponer que no lo son y definir $A' = \frac{A}{\text{vol}_n(A)^{1/n}}$ y $B' = \frac{B}{\text{vol}_n(B)^{1/n}}$. Definimos también $0 \leq \lambda = \frac{\text{vol}_n(B)^{1/n}}{\text{vol}_n(A)^{1/n} + \text{vol}_n(B)^{1/n}} \leq 1$ y entonces,

$$1 - \lambda = \frac{\text{vol}_n(A)^{1/n}}{\text{vol}_n(A)^{1/n} + \text{vol}_n(B)^{1/n}},$$

y,

$$\text{vol}_n((1-\lambda)A' + \lambda B') = \frac{\text{vol}_n(A+B)}{(\text{vol}_n(A)^{1/n} + \text{vol}_n(B)^{1/n})^n} \geq \left(\frac{\text{vol}_n(A)}{(\text{vol}_n(A)^{1/n})^n} \right)^{1-\lambda} \left(\frac{\text{vol}_n(B)}{(\text{vol}_n(B)^{1/n})^n} \right)^\lambda = 1.$$

Así, $\text{vol}_n(A)^{1/n} + \text{vol}_n(B)^{1/n} \leq \text{vol}_n(A+B)^{1/n}$. \square

1.4. Desigualdad de Borell-Brascamp-Lieb

Ahora vamos a demostrar la desigualdad de Borell-Brascamp-Lieb (ver Teorema 1.12), que usaremos más adelante. Este resultado puede verse como una extensión de la desigualdad de Prékopa-Leindler (Teorema 1.8), demostrada en la sección anterior. Es importante notar que, pese a que este resultado aparece citado múltiples veces en la literatura, es difícil encontrar una demostración detallada. Así, seguimos las ideas presentadas en [7] y escribimos la demostración detallada.

Proposición 1.10 (Generalización de la desigualdad de Hölder). *Dados $r, p, q > 0$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ y $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ se cumple*

$$\left(\int_{\Omega} |fg|^r d\mu \right)^{1/r} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

Demostración. Notar primero que si $r = 1$, entonces p y q se denominan exponentes conjugados y podemos escribir $F = (\int_{\Omega} |f|^p d\mu)^{1/p}$ y $G = (\int_{\Omega} |g|^q d\mu)^{1/q}$. Podemos asumir que tanto F como G son distintas de 0 ya que en otro caso el resultado sería trivial (las funciones serían nulas en casi todo punto). Ahora,

$$\int_{\Omega} \frac{|f|}{F} \frac{|g|}{G} d\mu \leq \int_{\Omega} \frac{|f|^p}{pF^p} d\mu + \int_{\Omega} \frac{|g|^q}{qG^q} d\mu = \frac{1}{p} \frac{F^p}{F^p} + \frac{1}{q} \frac{G^q}{G^q} = 1,$$

donde hemos aplicado la desigualdad de Young, es decir, dados $a, b \geq 0$ se cumple, $\forall p, q > 0$ exponentes conjugados lo siguiente: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Esta desigualdad puede obtenerse de la concavidad de la función \log en $(0, +\infty)$. Así, si $r = 1$ el resultado es cierto.

Ahora, si $r \neq 1$ podemos escribir $p' = p/r$ y $q' = q/r$ y entonces $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$ y por lo anterior

$$\int_{\Omega} |fg|^r d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |f|^{rp'} d\mu \right)^{1/p'} \left(\int_{\Omega} |g|^{rq'} d\mu \right)^{1/q'} = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{r/p} \left(\int_{\Omega} |g|^q d\mu \right)^{r/q}$$

aplicando el caso $r = 1$ para las funciones $|f|^{r/p}$ y $|g|^{r/q}$.

Finalmente, notar que si $r = \infty$ entonces $q = p = \infty$ y denotando por $\|\cdot\|_{\infty}$ la norma en $\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)$ tenemos que $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \|f\|_{\infty}\|g\|_{\infty}$ para casi todo $x \in \Omega$ y por tanto, $\|fg\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}\|g\|_{\infty}$ \square

Observación: Notar que cuando $r, p, q < 0$ la desigualdad se invierte ya que en este caso $1/f \in \mathcal{L}^{-p}(\Omega)$, $1/g \in \mathcal{L}^{-q}(\Omega)$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ con lo que podemos aplicar el resultado para $-p, -q, -r > 0$ y obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} (1/|fg|)^{-r} d\mu \right) &\leq \left(\int_{\Omega} (1/|f|)^{-p} d\mu \right)^{-r/p} \left(\int_{\Omega} (1/|g|)^{-q} d\mu \right)^{-r/q} \Rightarrow \\ \left(\int_{\Omega} |fg|^r d\mu \right) &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{r/p} \left(\int_{\Omega} |g|^q d\mu \right)^{r/q}. \end{aligned}$$

Como $r < 0$, al elevar a $1/r$ la desigualdad se invierte de manera que queda

$$\left(\int_{\Omega} |fg|^r d\mu \right)^{1/r} \geq \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

Como consecuencia podemos obtener el Lema 1.11, que será necesario para demostrar la desigualdad de Borell-Brascamp-Lieb.

Antes de enunciar y demostrar este lema, introducimos una nueva notación.

Sean $a, b \geq 0$, $\lambda \in [0, 1]$ y $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Primero, si $ab = 0$ se define $M_\alpha^\lambda(a, b) = 0$.

Ahora, supongamos $ab \neq 0$. Entonces, si $\alpha \neq 0$, se define $M_\alpha^\lambda(a, b) = ((1 - \lambda)a^\alpha + \lambda b^\alpha)^{1/\alpha}$.

Por otro lado, $M_0^\lambda(a, b) = a^{(1-\lambda)}b^\lambda$. Y finalmente $M_{+\infty}^\lambda(a, b) = \max\{a, b\}$ y $M_{-\infty}^\lambda(a, b) = \min\{a, b\}$

Lema 1.11. *Dados $a, b, c, d \geq 0$, $\lambda \in [0, 1]$ y α, β, γ tales que $\alpha + \beta \geq 0$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\gamma}$ si α y β no son nulos y $\gamma = 0$, si lo es cualquiera de los dos. Entonces,*

$$M_\alpha^\lambda(a, b)M_\beta^\lambda(c, d) \geq M_\gamma^\lambda(ac, bd). \quad (1.2)$$

Demostración. Notar que para demostrar el caso $\alpha = \gamma = 0$ y análogamente $\beta = \gamma = 0$ simplemente debemos aplicar la desigualdad aritmético-geométrica.

$$M_0^\lambda(a, b)M_\beta^\lambda(c, d) = a^{(1-\lambda)}b^\lambda((1-\lambda)c^\beta + \lambda d^\beta)^{1/\beta} \geq a^{(1-\lambda)}b^\lambda c^{(1-\lambda)}d^\lambda = (ac)^{(1-\lambda)}(bd)^\lambda = M_0^\lambda(ac, bd)$$

Ahora podemos asumir que $\alpha, \beta \neq 0$. Para el resultado en este caso, definimos $\Omega = \{z_1, z_2\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ y $\mu(\{z_1\}) = 1 - \lambda$, $\mu(\{z_2\}) = \lambda$ y $\mu(\Omega) = 1$, $\lambda \in [0, 1]$. Entonces $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida.

Ahora, definimos $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(z_1) = a$, $f(z_2) = b$ y $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(z_1) = c$, $g(z_2) = d$. Es fácil ver que dada una función $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, su integral en este espacio será $\int_\Omega h d\mu = (1 - \lambda)h(z_1) + \lambda h(z_2)$.

Notar que si $\alpha, \beta > 0$ entonces solo tenemos que aplicar la desigualdad de Hölder generalizada con valores $p = \alpha$, $q = \beta$ y $r = \gamma$ para las funciones descritas antes. Ahora, si $\alpha < 0$ y $\alpha + \beta \geq 0$ entonces $\beta > 0$ necesariamente. Entonces tomamos $r = \alpha$, $p = \gamma$ y $q = -\beta$ y así $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ con $r < 0$. Sabemos que en este caso la desigualdad de Hölder se invierte por lo que, aplicándola a las funciones que teníamos, nos queda que

$$M_r^\lambda(a, b) \geq M_p^\lambda(ac, bd)M_q^\lambda(1/c, 1/d)$$

y escribiendo la definición esto es lo mismo que

$$\begin{aligned} ((1 - \lambda)a^\alpha + \lambda b^\alpha)^{1/\alpha} &\geq ((1 - \lambda)(ac)^\gamma + \lambda (bd)^\gamma)^{1/\gamma} ((1 - \lambda)(1/c)^{-\beta} + \lambda (1/d)^{-\beta})^{-1/\beta} \\ &= ((1 - \lambda)(ac)^\gamma + \lambda (bd)^\gamma)^{1/\gamma} ((1 - \lambda)(c)^\beta + \lambda (d)^\beta)^{-1/\beta} \end{aligned}$$

y entonces $M_\alpha^\lambda(a, b)M_\beta^\lambda(c, d) \geq M_\gamma^\lambda(ac, bd)$. □

Ahora ya estamos listos para demostrar la desigualdad de Borell-Brascamp-Lieb.

Teorema 1.12 (Desigualdad de Borell-Brascamp-Lieb). *Dados $0 < \lambda < 1$, $-1/n \leq p \leq \infty$ y f, g, h funciones no negativas e integrables Borel en \mathbb{R}^n tales que*

$$h((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq M_p^\lambda(f(x), g(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) dx \geq M_{\frac{p}{np+1}}^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx, \int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \right).$$

Demostración. Antes de continuar, notar que si $p = +\infty$ el resultado es inmediato y si $p = 0$ se trata de la desigualdad de Prékopa-Leindler (Teorema 1.8), por lo que podemos suponer $0 \neq p < +\infty$. Vamos a realizar la prueba por inducción en la dimensión, empezamos por el caso $n = 1$. Llamamos $F = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ y $G = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx$, podemos asumir que $F, G > 0$ ya que en otro caso el resultado será trivial. Ahora definimos dos funciones $u, v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera,

$$u(t) := \min \left\{ u \in \mathbb{R} : t = \frac{1}{F} \int_{-\infty}^u f(x) dx \right\}$$

y v se define de manera análoga para G y $g(x)$. Así, para cada t

$$t = \frac{1}{F} \int_{-\infty}^{u(t)} f(x) dx = \frac{1}{G} \int_{-\infty}^{v(t)} g(x) dx. \quad (1.4)$$

Estas funciones pueden no ser continuas pero es inmediato que sí son estrictamente crecientes y, por lo tanto, diferenciables en casi todo punto. Ahora derivamos en (1.4) respecto de t y obtenemos lo siguiente,

$$1 = \frac{u'(t)f(u(t))}{F} = \frac{v'(t)g(v(t))}{G}.$$

Definimos ahora $w(t) = (1 - \lambda)u(t) + \lambda v(t)$ y entonces,

$$w'(t) = (1 - \lambda)u'(t) + \lambda v'(t) = (1 - \lambda) \left(\frac{F}{f(u(t))} \right) + \lambda \left(\frac{G}{g(v(t))} \right).$$

Notar que $w'(t) > 0$ para todo $t \in [0, 1]$ y entonces podemos tomar el cambio de variable $x = w(t)$ de un $[0, 1]$ en un intervalo I de \mathbb{R} en $\int_I h(x) dx$ de manera que obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(x) dx &\geq \int_I h(x) dx = \int_0^1 h(w(t)) w'(t) dt \\ &\geq \int_0^1 M_p^\lambda(f(u(t)), g(v(t))) \left((1 - \lambda) \frac{F}{f(u(t))} + \lambda \frac{G}{g(v(t))} \right) dt. \end{aligned}$$

Ahora podemos aplicar (1.2) tomando $\beta = 1$, $\alpha = p$, $\gamma = \frac{p}{p+1}$ y $a = f(u(t))$, $b = g(v(t))$, $c = F/f(u(t))$ y $d = G/g(v(t))$, entonces,

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) dx \geq \int_0^1 \left((1 - \lambda) F^{\frac{p}{p+1}} + \lambda G^{\frac{p}{p+1}} \right)^{\frac{p+1}{p}} dt = \left((1 - \lambda) F^{\frac{p}{p+1}} + \lambda G^{\frac{p}{p+1}} \right)^{\frac{p+1}{p}}.$$

Así hemos obtenido el resultado para $n = 1$.

Ahora hacemos el paso de inducción. Supongamos que el resultado es cierto $\forall m \leq n$. Definimos, para cada $z_1 \in \mathbb{R}$, $h_{z_1}(z_2, \dots, z_n) = h(z_1, z_2, \dots, z_n)$ que es una función integrable de \mathbb{R}^{n-1} . Análogamente definimos f_{x_1} y g_{y_1} para cada $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, y entonces,

$$h_{(1-\lambda)x_1 + \lambda y_1}((1 - \lambda)x_2 + \lambda y_2, \dots, (1 - \lambda)x_n + \lambda y_n) \geq M_p^\lambda(f_{x_1}(x_2, \dots, x_n), g_{y_1}(y_2, \dots, y_n)).$$

Por tanto, podemos aplicar el resultado en \mathbb{R}^{n-1} y así,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{(1-\lambda)x_1 + \lambda y_1}(\tilde{z}) d\tilde{z} \geq M_{\frac{p}{(n-1)p+1}}^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{x_1}(\tilde{x}) d\tilde{x}, \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{y_1}(\tilde{y}) d\tilde{y} \right).$$

Ahora, podemos definir $\tilde{h}(\tilde{z}) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_z(\tilde{z}) d\tilde{z}$, que es una función integrable en \mathbb{R} . Análogamente definimos \tilde{f} y \tilde{g} . Notar que estas funciones cumplen la hipótesis del teorema con $\tilde{p} = \frac{p}{(n-1)p+1}$ y, por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{h}(\tilde{z}) d\tilde{z} \geq M_{\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}+1}}^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\tilde{z}) d\tilde{z}, \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(\tilde{x}) d\tilde{x} \right).$$

Ahora, observar que $\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}+1} = \frac{p}{pn+1}$ y, además, podemos aplicar el teorema de Fubini de manera que $\int_{\mathbb{R}} \tilde{h}(\tilde{z}) d\tilde{z} = \int_{\mathbb{R}^n} h(z) dz$ (y lo mismo para \tilde{f} , \tilde{g}) y entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) dx \geq M_{\frac{p}{np+1}}^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx, \int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \right).$$

Así acabamos la prueba. □

Un importante (para lo que sigue) corolario de este resultado tratará de funciones cóncavas. Dada una función no negativa f en \mathbb{R}^n se llama p -cóncava sobre un cuerpo convexo A ($p \neq 0$) si $f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq ((1-\lambda)f(x)^p + \lambda f(y)^p)^{1/p}$, para todo $x, y \in A$ y $0 < \lambda < 1$.

Corolario 1.13. Sea $F(x, y)$ una función p -cóncava en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ con $p \geq -1/n$. Entonces, si $\forall y \in \mathbb{R}^m$ existe, $\int_{\mathbb{R}^n} F(x, y) dx$ es una función $\frac{p}{np+1}$ -cóncava en y .

Demostración. Dados $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^m$ y $\lambda \in (0, 1)$ definimos $y_\lambda = (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1$, $f(x) = F(x, y_0)$, $g(x) = F(x, y_1)$ y $h(x) = F(x, y_\lambda)$. Entonces, se cumple la hipótesis del Teorema 1.12 por la p -concavidad de F y podemos aplicar la desigualdad de Borell-Brascamp-Lieb (Teorema 1.12). El resultado tras aplicar la desigualdad es precisamente el deseado. □

Notar ahora que la desigualdad de Prekopa-Leindler (Teorema 1.8), que es el caso particular de $p = 0$ en la de Borell-Brascamp-Lieb (Teorema 1.12), se puede obtener además como caso límite cuando $p \rightarrow 0$ en dicha desigualdad. Para ver esto, notar que dados $a, b \geq 0$ tenemos lo siguiente:

$$\lim_{p \rightarrow 0} ((1-\lambda)a^p + \lambda b^p)^{1/p} = \lim_{p \rightarrow 0} e^{\frac{1}{p} \log((1-\lambda)a^p + \lambda b^p)}$$

además,

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\log((1-\lambda)a^p + \lambda b^p)}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\log a(1-\lambda)a^p + \log b \lambda b^p}{(1-\lambda)a^p + \lambda b^p} = (1-\lambda) \log a + \lambda \log b$$

aplicando la regla de l'Hôpital. Por tanto $\lim_{p \rightarrow 0} ((1-\lambda)a^p + \lambda b^p)^{1/p} = (\log a)^{(1-\lambda)} (\log b)^\lambda$.

Entonces, simplemente nos queda sustituir a, b por f, g primero y por $\int_{\mathbb{R}^n} f, \int_{\mathbb{R}^n} g$ después y tomar p y $\frac{p}{np+1}$ respectivamente.

Capítulo 2

Desigualdad de Blaschke-Santaló

El problema de maximizar el producto de volúmenes sobre todos los cuerpos convexos 0-simétricos fue resuelto por Blaschke en 1923 para el caso $n \leq 3$, viendo que este se encontraba en $P(B_2^n)$. En 1948 Santaló pudo demostrar que también era máximo para $n > 3$. De esta manera, se resolvió el problema del máximo para un cuerpo convexo cualquiera, dando lugar a la desigualdad de Blaschke-Santaló que presentamos en este capítulo.

En 1990, Meyer, junto con Pajor, publicaron otra demostración usando la simetrización de Steiner; esta es precisamente la primera que presentamos en este trabajo y puede encontrarse en [11].

Notar que, puesto que el producto de volúmenes es invariante bajo transformaciones lineales, $P(K)$ también es máximo cuando K es un elipsoide. Sin embargo, no fue hasta 2019 que Meyer y Reisner pudieron demostrar que los elipsoides eran los únicos máximos locales, esta demostración puede encontrarse en [12].

2.1. La simetrización de Steiner

Como ya hemos comentado, empezamos presentando la demostración que aplica la simetrización de Steiner. Seguiremos [2] y [8].

Antes de poder demostrar la desigualdad de Blaschke-Santaló debemos definir la simetrización de Steiner, que podremos realizar sucesivamente sobre un mismo cuerpo, buscando estudiar la convergencia de la sucesión de conjuntos resultante.

En lo que sigue, $K|H$ denotará la proyección ortogonal de un cuerpo K sobre un hiperplano H .

Definición (Simetrización de Steiner). Sea K un cuerpo convexo y H un hiperplano de \mathbb{R}^n y denotamos por $H^\perp = \langle u \rangle$ donde $u \in S^{n-1}$ al complemento ortogonal de H . Entonces, $\forall x \in K|H$, $x + H^\perp$ corta a K en un segmento de longitud $\text{vol}_1(K \cap (x + H^\perp))$, que denotaremos $|K \cap (x + H^\perp)|$. Consideramos $s(x + H^\perp)$ el segmento de longitud $|K \cap (x + H^\perp)|$ pero esta vez con punto medio x . Entonces definimos la simetrización de Steiner como

$$\text{st}_H(K) := \cup_{x \in K|H} s(x + H^\perp) = \left\{ x + \lambda u ; x \in K|H \wedge |\lambda| \leq \frac{1}{2} |K \cap (x + H^\perp)| \right\}.$$

Es inmediato ver que este conjunto es simétrico respecto al hiperplano H .

Proposición 2.1. Sean K, K' dos conjuntos convexos y compactos en \mathbb{R}^n y H un hiperplano. Entonces,

1. $\text{vol}_n(K) = \text{vol}_n(\text{st}_H(K))$.
2. Si $K \subset K'$ entonces $\text{st}_H(K) \subset \text{st}_H(K')$.
3. Si $0 \in H$ entonces $\text{st}_H(B_2^n) = B_2^n$.

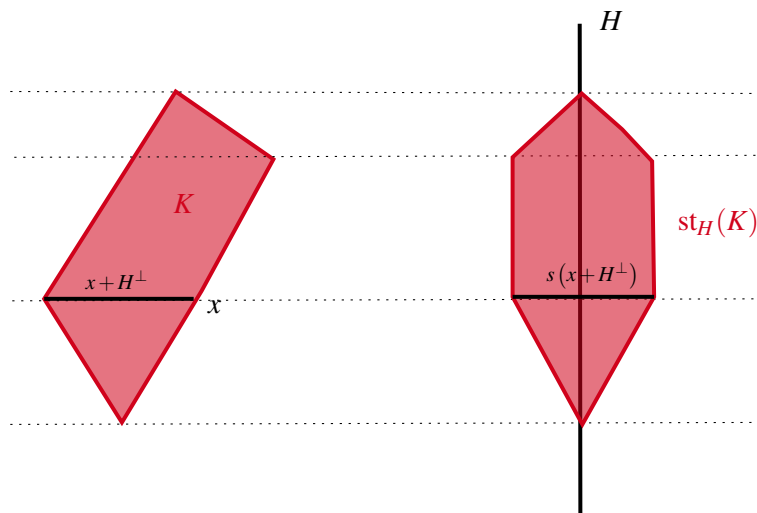


Figura 2.1: Simetrización de Steiner

4. Si $0 \in H$ entonces $st_H(\lambda K) = \lambda st_H(K)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. $st_H(K)$ es convexo y compacto.
6. $st_H(K \cap K') \subset st_H(K) \cap st_H(K')$, sin embargo el recíproco no es cierto en general.
7. $conv(st_H(K) \cup st_H(K')) \subset st_H(conv(K \cup K'))$, de nuevo, el recíproco no es cierto en general.
8. Si $0 \in H$, entonces $st_H(K) + st_H(K') \subset st_H(K + K')$.

Demostración. 1. Inmediato aplicando Fubini.

2. Si $K \subset K'$ entonces es inmediato que $K \cap (x + H^\perp) \subset K' \cap (x + H^\perp)$ para todo $x \in K|H$ y entonces, $s_K(x + H^\perp) \subset s_{K'}(x + H^\perp)$ donde estos denotan los segmentos de la definición para K y K' respectivamente. Ahora, por la definición de la simetrización tenemos que $st_H(K) \subset st_H(K')$.
3. Como $0 \in H$, B_2^n es simétrica respecto a este y entonces, $s(x + H^\perp) = x + H^\perp$, $\forall x \in B_2^n|H$, así $st_H(B_2^n) = B_2^n$.
4. Esta claro que $|\lambda K \cap \lambda(x + H^\perp)| = |\lambda| |K \cap (x + H^\perp)|$ para todo $x \in K|H$ y entonces, denotando por $\tilde{s}(y + H^\perp)$ a los segmentos de la definición en λK tenemos que, $\tilde{s}(\lambda x + H^\perp) = \lambda s(x + H^\perp)$ y como $0 \in H$ tenemos que $(\lambda K)|H = \lambda(K|H)$ y entonces

$$st_H(\lambda K) = \cup_{x \in K|H} \tilde{s}(\lambda x + H^\perp) = \cup_{x \in K|H} \lambda s(x + H^\perp) = \lambda st_H(K).$$

5. Primero, notar que la simetrización de Steiner describe una aplicación biyectiva de K en $st_H(K)$. Además, se puede probar que $st_{x+H}(K) = x|H^\perp + st_H(K)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ y por tanto, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $0 \in H$. Ahora, vamos a demostrar que dado K convexo y compacto $st_H(K)$ también es convexo y compacto.

En primer lugar, dado K acotado sabemos que $\exists \delta > 0$ tal que $K \subset \delta B_2^n$ y como podemos asumir que $0 \in H$, si aplicamos las propiedades que ya hemos demostrado, tenemos que $st_H(K) \subset st_H(\delta B_2^n) = \delta st_H(B_2^n) = \delta B_2^n$ y por tanto, $st_H(K)$ está acotado.

Veamos ahora que también es cerrado. Sea $\{x_i\} \subset st_H(K)$ una sucesión que converge a x , queremos ver que $x \in st_H(K)$. Entonces, para cada i sabemos que $x_i \in st_H(K)$ y por tanto $\exists \tilde{x}_i \in K|H$ y λ_i escalares tal que $|\lambda_i| \leq \frac{1}{2} |K \cap (\tilde{x}_i + H^\perp)|$ y $x_i = \tilde{x}_i + \lambda_i u$. Sean ahora $\tilde{x} \in H$ y λ tales que $x = \tilde{x} + \lambda u$, queremos ver que $|\lambda| \leq \frac{1}{2} |K \cap (\tilde{x} + H^\perp)|$.

Ahora, dado $y \in K|H$ denotaremos por $\alpha(y) := \min\{\mu \in \mathbb{R} ; y + \mu u \in K\}$ y

$\beta(y) := \max\{\mu \in \mathbb{R} ; y + \mu u \in K\}$, que cumplen que $\beta(y) - \alpha(y) = |K \cap (y + H^\perp)|$. Notar además que, como la proyección ortogonal es una función continua, se cumple que $\lim_i \tilde{x}_i = \lim_i (x_i|H) = x|H = \tilde{x}$ y como $\lim_i x_i = x$ tenemos que $\lim_i \lambda_i = \lambda$.

A continuación, vamos a definir $y_i = \tilde{x}_i + \alpha(\tilde{x}_i)u \in K$ y $z_i = \tilde{x}_i + \beta(\tilde{x}_i)u \in K$ que, como K es compacto, tienen subsucesiones que convergen a $y \in K$ y $z \in K$ respectivamente. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\lim_i y_i = y$ y $\lim_i z_i = z$, además como $\lim_i \tilde{x}_i = \tilde{x}$ si escribimos $\alpha_0 = \lim_i \alpha(\tilde{x}_i)$ y $\beta_0 = \lim_i \beta(\tilde{x}_i)$ y entonces se cumple que $\alpha_0 \leq \beta_0$ y $y = \tilde{x} + \alpha_0 u$, $z = \tilde{x} + \beta_0 u$. Entonces,

$$|\lambda| = \lim_i |\lambda_i| \leq \frac{1}{2} \lim_i (\beta(\tilde{x}_i) - \alpha(\tilde{x}_i)) = \frac{1}{2} (\beta_0 - \alpha_0) = \frac{1}{2} |z - y| \leq \frac{1}{2} |K \cap (\tilde{x} + H^\perp)|$$

y entonces $st_H(K)$ es un cerrado acotado y por tanto es compacto.

Sólo falta ver que también es convexo, si tomamos dos puntos $x, y \in st_H(K)$ y $\lambda \in (0, 1)$ queremos ver que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in st_H(K)$. Notar que $x = \tilde{x} + \delta u$ y $y = \tilde{y} + \mu u$ donde $\delta \leq \frac{1}{2} |K \cap (\tilde{x} + H^\perp)|$ y $\mu \leq \frac{1}{2} |K \cap (\tilde{y} + H^\perp)|$. Entonces, si llamamos $\tilde{z} = \lambda \tilde{x} + (1 - \lambda)\tilde{y}$ tenemos que $\tilde{z} \in K|H$ y además, $\lambda(K \cap (\tilde{x} + H^\perp)) + (1 - \lambda)(K \cap (\tilde{y} + H^\perp)) \subset K \cap (\tilde{z} + H^\perp)$ y por tanto, $|\lambda \delta + (1 - \lambda)\mu| \leq \frac{1}{2} |K \cap (\tilde{z} + H^\perp)|$ y entonces, $\lambda x + (1 - \lambda)y = \tilde{z} + (\lambda \delta + (1 - \lambda)\mu)u \in st_H(K)$. Así, $st_H(K)$ es convexo y compacto.

- Esto es inmediato aplicando la primera propiedad, ya que $K \cap K' \subset K, K'$ y por lo tanto $st_H(K \cap K') \subset st_H(K), st_H(K')$ y $st_H(K \cap K') \subset st_H(K) \cap st_H(K')$. Es sencillo encontrar contra ejemplos tomando rectángulos y triángulos adecuados. Un ejemplo se puede observar en la figura 2.2:

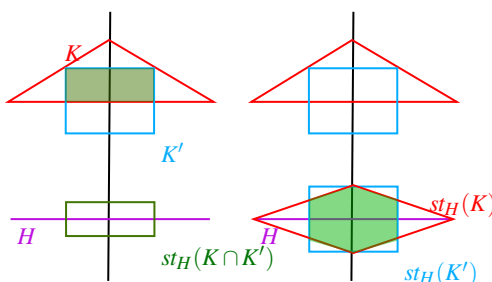


Figura 2.2: $st_H(K) \cap st_H(K') \not\subset st_H(K \cap K')$

- Siguiendo un razonamiento similar, sabemos que $K, K' \subset \text{conv}(K \cup K')$ y por lo tanto $st_H(K) \cup st_H(K') \subset st_H(\text{conv}(K \cup K'))$. Además, sabemos que este último es un conjunto convexo y por tanto $\text{conv}[st_H(K) \cup st_H(K')] \subset st_H(\text{conv}(K \cup K'))$. Se construyen contraejemplos sencillos tomando bolas correctamente localizadas respecto al hiperplano. Un ejemplo se observa en la figura 2.3:

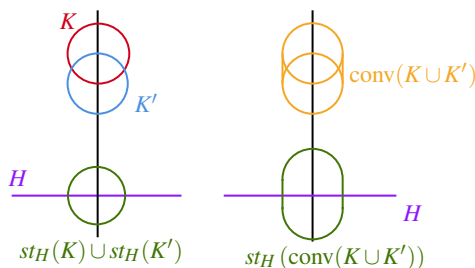


Figura 2.3: $st_H(\text{conv}(K \cup K')) \not\subset \text{conv}(st_H(K) \cup st_H(K'))$

- Finalmente, vamos a tomar $x \in st_H(K)$ y $y \in st_H(K')$, entonces $x = \tilde{x} + \lambda_x u$, $y = \tilde{y} + \lambda_y u$ donde $\tilde{x} \in K|H$ y $|\lambda_x| \leq |K \cap (\tilde{x} + H^\perp)|$, se cumple lo mismo para y . Entonces, $x + y = \tilde{x} + \tilde{y} + (\lambda_x + \lambda_y)u$

donde $\tilde{x} + \tilde{y} \in K|H + K'|H = (K + K')|H$ y además,

$$|\lambda_x + \lambda_y| \leq |\lambda_x| + |\lambda_y| \leq \frac{1}{2} \left(\left| K \cap (\tilde{x} + H^\perp) \right| + \left| K' \cap (\tilde{y} + H^\perp) \right| \right) \leq \frac{1}{2} \left| (K + K') \cap (\tilde{x} + \tilde{y} + H^\perp) \right|.$$

Así, tenemos que $x + y \in \text{st}_H(K + K')$. □

Presentamos ahora un resultado sin demostración que nos da la convergencia de una sucesión de simetrizaciones de Steiner. La demostración puede encontrarse en [8]. De este resultado podemos ver quién será el candidato a máximo para el producto de volúmenes.

Teorema 2.2 (Teorema de esfericidad de Gross). *Sea K un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n y \mathcal{K} el conjunto de todos los cuerpos convexos obtenidos tras realizar una cantidad finita de simetrizaciones de Steiner a K respecto a hiperplanos que contengan el origen de coordenadas. Entonces, existe una sucesión $K_i \in \mathcal{K}$, $i \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\lim_i K_i = \left(\frac{\text{vol}_n(K)}{\text{vol}_n(B_2^n)} \right)^{1/n} B_2^n.$$

Lema 2.3. *Dado $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo 0-simétrico y H un hiperplano conteniendo al origen. Entonces,*

$$\text{vol}_n(\text{st}_H(K)^\circ) \geq \text{vol}_n(K^\circ).$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $H = \{x \in \mathbb{R}^n ; x_n = 0\}$. Entonces,

$$\text{st}_H(K) = \left\{ \left(x, \frac{1}{2}(b-a) \right) \in \mathbb{R}^n ; (x, 0) \in K|H, (x, a), (x, b) \in K \right\}.$$

Veámoslo:

Es inmediato que $(x, \frac{1}{2}(b-a)) = (x, 0) + \frac{1}{2}(b-a)e_n$, donde e_n denota el vector correspondiente de H^\perp . Además, $|\frac{1}{2}(b-a)| = \frac{1}{2}|b-a| \leq \frac{1}{2}|K \cap ((x, 0) + H^\perp)|$ y por tanto

$$\text{st}_H(K) \supset \left\{ \left(x, \frac{1}{2}(b-a) \right) \in \mathbb{R}^n ; (x, 0) \in K|H, (x, a), (x, b) \in K \right\}.$$

Por otro lado, es fácil ver que cualquier λ como los que aparecen en la definición de simetrización de Steiner puede escribirse como $\frac{1}{2}(b-a)$. Podemos escoger a como el “primer” elemento del segmento y $b = a + 2\lambda$. Así, tenemos la igualdad de conjuntos.

Además,

$$K^\circ = \{(y, t) \in \mathbb{R}^n ; \langle x, y \rangle + st \leq 1, (x, 0) \in K|H, (x, s) \in K\}$$

y

$$\text{st}_H(K)^\circ = \left\{ (y, t) \in \mathbb{R}^n ; \langle x, y \rangle + \frac{1}{2}(a-b)t \leq 1, (x, 0) \in K|H, (x, a), (x, b) \in K \right\}.$$

Ahora, dado $A \subset \mathbb{R}^n$ definimos $A(t) := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} ; (x, t) \in A(t)\}$. Veamos que $\frac{1}{2}(K^\circ(t) + K^\circ(-t)) \subset \text{st}_H(K)^\circ(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $K^\circ(t) \neq \emptyset$. Para esto, tomamos $y_1 \in K^\circ(t)$ e $y_2 \in K^\circ(-t)$. Entonces, si $(x, a), (x, b) \in K$ se cumple que

$$\left\langle x, \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \right\rangle + \frac{1}{2}(a-b)t = \frac{1}{2}\langle x, y_1 \rangle + \frac{1}{2}\langle x, y_2 \rangle + \frac{1}{2}at + \frac{1}{2}b(-t) \leq 1.$$

Así obtenemos lo que buscábamos ya que hemos obtenido que $(\frac{y_1 + y_2}{2}, t) \in \text{st}_H(K)^\circ$ y así,

$$\frac{1}{2}(K^\circ(t) + K^\circ(-t)) \subset \text{st}_H(K)^\circ(t).$$

Por otro lado, como K es 0-simétrico, K° también lo es, es decir $K^\circ(t) = -K^\circ(-t)$ y por lo tanto

$$\text{vol}_{n-1}(K^\circ(t)) = \text{vol}_{n-1}(K^\circ(-t)).$$

Si ahora aplicamos la desigualdad de Brunn-Minkowski (Teorema 1.9) obtenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} \text{vol}_{n-1}(\text{st}_H(K)^\circ(t))^{1/(n-1)} &\geq \text{vol}_{n-1}\left(\frac{1}{2}(K^\circ(t) + K^\circ(-t))\right) \\ &\geq \frac{1}{2} \text{vol}_{n-1}(K^\circ(t))^{1/(n-1)} + \frac{1}{2} \text{vol}_{n-1}(K^\circ(-t))^{1/(n-1)} \\ &= \text{vol}_{n-1}(K^\circ(t))^{1/(n-1)} \end{aligned}$$

cuando $t \in \mathbb{R}$ tal que $K^\circ(t) \neq \emptyset$. Si ahora integramos en t , obtenemos el resultado,

$$\text{vol}_n(\text{st}_H(K)^\circ) \geq \text{vol}_n(K^\circ).$$

□

Finalmente, obtenemos el resultado más importante del capítulo, que nos da el máximo del producto de volúmenes. Como esperábamos, este se da en la bola euclídea cerrada de radio 1, B_2^n .

Teorema 2.4 (Desigualdad de Blaschke-Santaló). *Sea K un cuerpo convexo, 0-simétrico en \mathbb{R}^n . Entonces,*

$$\text{vol}_n(K) \text{vol}_n(K^\circ) \leq \text{vol}_n(B_2^n)^2.$$

Demostración. Por el Teorema 2.2, existe una sucesión $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de cuerpos convexos obtenidos al realizar una cantidad finita de simetrizaciones de Steiner a K respecto a hiperplanos que contienen el origen de coordenadas, tal que

$$K_i = \text{st}_{H_{s_i}^{H_i}} \circ \dots \circ \text{st}_{H_1^{H_i}}(K) \rightarrow \left(\frac{\text{vol}_n(K)}{\text{vol}_n(B_2^n)}\right)^{1/n} B_2^n.$$

Y por la continuidad de la aplicación polar vista en la Proposición 1.3 vemos que

$$K_i^\circ \rightarrow \left(\frac{\text{vol}_n(K)}{\text{vol}_n(B_2^n)}\right)^{-1/n} B_2^n.$$

Entonces, por la continuidad del volumen respecto de la distancia de Hausdorff vista en la Proposición 1.4, vemos que

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \text{vol}_n(K_i) \text{vol}_n(K_i^\circ) &= \left(\frac{\text{vol}_n(K)}{\text{vol}_n(B_2^n)}\right)^{1/n} \text{vol}_n(B_2^n) \left(\frac{\text{vol}_n(K)}{\text{vol}_n(B_2^n)}\right)^{-1/n} \text{vol}_n(B_2^n) \\ &= \text{vol}_n(B_2^n)^2. \end{aligned}$$

Por otra parte, para cada $i \in \mathbb{N}$ fijo, por Lema 2.3 y como la simetrización de Steiner preserva el volumen, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(K_i) \text{vol}_n(K_i^\circ) &= \text{vol}_n(\text{st}_{H_{s_i}^{H_i}} \circ \dots \circ \text{st}_{H_1^{H_i}}(K)) \text{vol}_n((\text{st}_{H_{s_i}^{H_i}} \circ \dots \circ \text{st}_{H_1^{H_i}}(K))^\circ). \\ &\geq \text{vol}_n(K) \text{vol}_n(K^\circ). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\text{vol}_n(K) \text{vol}_n(K^\circ) \leq \text{vol}_n(B_2^n)^2.$$

□

2.2. Sistemas de sombras

En la siguiente sección, vamos a ver otra posible demostración de la desigualdad de Blaschke-Santaló (Teorema 2.4). La idea es similar a la de la simetrización de Steiner, pero antes debemos introducir algunos conceptos nuevos. La demostración del teorema principal se basa en la de [4].

Necesitaremos algunas nociones respecto a integración en coordenadas polares, que introducimos a continuación. Usaremos la siguiente notación:

- $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\|_2 = 1\}$
- Dados $A \subset (0, +\infty)$, $B^n \subset \mathbb{S}^{n-1}$, $A \cdot B = \{ru \in \mathbb{R}^n ; r \in A, u \in B\}$
- Dado $A \subset \mathbb{S}^{n-1}$, $\tilde{A} := \{tx ; x \in A, t \in [0, 1]\}$

Ahora sí, definimos la medida de Borel en \mathbb{S}^{n-1} como $\sigma(A) = n \text{vol}_n(\tilde{A})$ para $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{n-1})$. Con esta medida, se tiene la siguiente fórmula de integración en coordenadas polares en \mathbb{R}^n :

Para toda $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty r^{n-1} f(ru) dr d\sigma.$$

Una demostración como ejercicio guiado se puede ver en [13, Capítulo 8, Ej. 6]. Entonces, tomando $K \subset \mathbb{R}^n$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(K) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(x) dx = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty r^{n-1} \chi_K(ru) dr d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{\rho_K(u)} r^{n-1} dr d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\rho_K(u)^n}{n} d\sigma. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\text{vol}_n(K) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (\rho_{K^\circ}(u))^n d\sigma. \quad (2.1)$$

A continuación introducimos la noción de sistema de sombras y un importante resultado respecto de estos.

Definición. Un *sistema de sombras* es una familia de cuerpos convexos $K_t \subset \mathbb{R}^n$ dados por

$$K_t := \text{conv}\{x + \alpha(x)t\theta : x \in B\}$$

$t \in [a, b]$, donde

- $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ es la dirección del sistema,
- $B \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado (base del sistema),
- $\alpha : B \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada (velocidad).

Observar que la simetrización de Steiner es precisamente un elemento de un cierto sistema de sombras donde la base es el borde del cuerpo convexo.

Teorema 2.5 (Campi, Gronchi 2006). *Sea $K_t \subset \mathbb{R}^n$, $t \in [0, 1]$ un sistema de sombras tal que K_t es 0-simétrico para todo t . Entonces, $\text{vol}_n(K_t^\circ)^{-1}$ es una función convexa en t .*

Demostración. Primero, dada $h_{K_t}(u) = \max_{x \in K_t} \langle u, x \rangle$ la función soporte de cada K_t para cada $t \in [0, 1]$, notar que $h_{K_t}(u) = \max_{x \in B} \langle u, x + \alpha(x)t\theta \rangle = \max_{x \in B} \langle u + t\langle u, \theta \rangle e_{n+1}, x + \alpha(x)e_{n+1} \rangle$ ya que $x, u, \theta \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha(x), t \in \mathbb{R}$. Así, si definimos $\tilde{K} := \text{conv}\{x + \alpha(x)e_{n+1} : x \in B\} \subset \mathbb{R}^n$, tenemos que $h_{\tilde{K}}(u + t\langle u, \theta \rangle e_{n+1}) =$

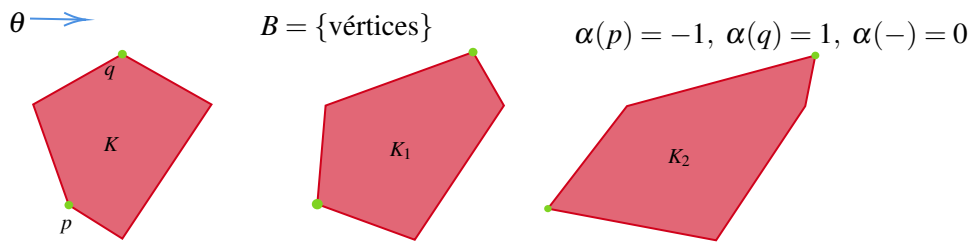


Figura 2.4: Sistema de sombras

máx_{x∈B}⟨u + t⟨u, θ⟩e_{n+1}, x + α(x)e_{n+1}⟩ y por tanto, $h_{K_t}(u) = h_{\tilde{K}}(u + t\langle u, \theta \rangle e_{n+1})$
 Por otro lado, por (2.1) sabemos que

$$\text{vol}_n(K_t^\circ) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (\rho_K(u))^n d\sigma = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{K_t}(u)^{-n} du,$$

y por la simetría de K_t° tenemos que

$$\text{vol}_n(K_t^\circ) = \frac{2}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1} \cap \{u : \langle u, \theta \rangle \geq 0\}} h_{K_t}(u)^{-n} du.$$

Notar ahora que la superficie $\mathbb{S}^{n-1} \cap \{u : \langle u, \theta \rangle \geq 0\}$ puede parametrizarse mediante

$$\begin{aligned} \phi : B_2^{n-1} \cap \theta^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \cap \theta^\perp : \|x\|_2 \leq 1\} && \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \cap \{u : \langle u, \theta \rangle \geq 0\} \\ x &&& \mapsto x + \sqrt{1 - \|x\|_2^2} \theta = (x, \sqrt{1 - \|x\|_2^2}). \end{aligned}$$

Así, el vector normal de esta superficie será $N = \left(\frac{-x_1}{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}}, \dots, \frac{-x_{n-1}}{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}}, 1 \right)$ que tiene norma $\|N\|_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}}$.

Entonces, la integral anterior aplicando la integración sobre superficies queda

$$\begin{aligned} n \text{vol}_n(K_t^\circ) &= 2 \int_{B_2^{n-1} \cap \theta^\perp} \frac{h_{K_t} \left(x + \sqrt{1 - \|x\|_2^2} \theta \right)^{-n}}{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}} dx \\ &= 2 \int_{B_2^{n-1} \cap \theta^\perp} \frac{h_{\tilde{K}} \left(x + \sqrt{1 - \|x\|_2^2} \theta + t \langle x + \sqrt{1 - \|x\|_2^2} \theta, \theta \rangle e_{n+1} \right)^{-n}}{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}} dx \\ &= 2 \int_{B_2^{n-1} \cap \theta^\perp} \frac{h_{\tilde{K}} \left(x + \sqrt{1 - \|x\|_2^2} (\theta + t e_{n+1}) \right)^{-n}}{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}} dx \\ &= 2 \int_{B_2^{n-1} \cap \theta^\perp} \frac{h_{\tilde{K}} \left(\frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}} + \theta + t e_{n+1} \right)^{-n}}{(1 - \|x\|_2^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx. \end{aligned}$$

Ahora, vamos a continuar aplicando de nuevo coordenadas polares. Para facilitar la escritura llamamos $f(x) = h_{\tilde{K}}(x + \theta + t e_{n+1})^{-n}$. Notar que las coordenadas n -ésimas de $x + \theta + t e_{n+1}$ son fijas y por tanto f se puede ver como una función en \mathbb{R}^{n-1} . Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{B_2^{n-1} \cap \theta^\perp} \frac{f\left(\frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}}\right)}{(1 - \|x\|_2^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx &= \int_{B_2^{n-1}} \frac{f\left(\frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}}\right)}{(1 - \|x\|_2^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx = \int_{\mathbb{S}^{n-2}} \int_0^1 r^{n-2} \frac{f\left(\frac{ru}{\sqrt{1 - r^2}}\right)}{(1 - r^2)^{\frac{n+1}{2}}} dr d\sigma(u) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-2}} \int_0^1 \left(\frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \right)^{n-2} \frac{f\left(\frac{ru}{\sqrt{1 - r^2}}\right)}{(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}} dr d\sigma(u). \end{aligned}$$

Ahora realizamos el cambio de variable $s = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$ de manera que $ds = \frac{1}{(1-r^2)^{3/2}} dr$ y la integral queda $\int_{\mathbb{S}^{n-2}} \int_0^{+\infty} s^{n-2} f(su) ds d\sigma(u)$, entonces podemos aplicar de nuevo las coordenadas polares (esta vez deshaciendo el cambio) y obtenemos que

$$\text{vol}_n(K_t^\circ) = \frac{2}{n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy = \frac{2}{n} \int_{\mathbb{R}^n} h_{\bar{K}}(y + \theta + te_{n+1})^{-n} dy.$$

Notar ahora que como $h_{\bar{K}}$ es convexa, tenemos que llamando $F(y, t) = h_{\bar{K}}(y + \theta + te_{n+1} + \langle y, \theta \rangle te_{n+1})^{-n}$ esta es una función $(-1/n)$ -cóncava. Así, aplicando el Corolario 1.13 tenemos que la función $t \mapsto \text{vol}_n(K_t^\circ)$ es $\frac{-1/n}{(-1/n)(n-1)+1} = (-1)$ -cóncava.

Entonces, la función $t \mapsto \text{vol}_n(K_t^\circ)^{-1}$ es convexa (en t). \square

Notemos que con este resultado obtenemos una nueva prueba del Lema 2.3. Dado $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo 0-simétrico y H un hiperplano conteniendo al origen, podemos construir un sistema de sombras $\{K_t\}_{t \in [0,1]}$ de modo que $K_0 = K$, $K_{1/2} = \text{st}_H(K)$. Además, la función $t \mapsto \text{vol}_n(K_t)$ será constante y la función $t \mapsto \text{vol}_n(K_t^\circ)$ simétrica respecto de $t = 1/2$. Como además, por el Teorema 2.5, la función $t \mapsto \text{vol}_n(K_t^\circ)^{-1}$ es convexa vemos que

$$\text{vol}_n(K^\circ)^{-1} \geq \min\{\text{vol}_n(K_t^\circ)^{-1} ; t \in [0, 1]\} = \text{vol}_n(K_{1/2}^\circ)^{-1} = \text{vol}_n((\text{st}_H(K))^\circ)^{-1}.$$

Entonces, obtenemos el Lema 2.3:

$$\text{vol}_n(K^\circ) \leq \text{vol}_n(\text{st}_H(K)^\circ).$$

A partir de este resultado podemos demostrar la desigualdad de Blaschke-Santaló 2.4.

Además de permitirnos dar una demostración alternativa para el Lema 2.3, los sistemas de sombras y el Teorema 2.5 son importantes resultados que dan pie a una demostración de la conjetura de Mahler en el caso $n = 2$. Esta demostración la veremos en el próximo capítulo.

Capítulo 3

La conjetura de Mahler

Al contrario que en el caso del máximo, el problema de minimizar el producto de volúmenes sobre los cuerpos convexos 0-simétricos sigue abierto. Según la conjetura de Mahler, el mínimo debería encontrarse en $P(B_\infty^n)$ pero este resultado sólo está demostrado para algunos casos particulares.

En 1939 Mahler demostró que es cierto para $n = 2$, pero no fue hasta 2020 que Iriyeh y Shibata demostraron que también es cierto para $n = 3$, esta demostración puede verse en [9]. Antes de esto, Saint-Raymond demostró que la conjetura era correcta para unos ciertos cuerpos llamados incondicionales; la demostración que presentó puede encontrarse en [14]. En este capítulo daremos la prueba dada por Meyer en 1986, que puede encontrarse en [10]. También, esta vez gracias a Reisner, se sabe que es cierto para los cuerpos llamados zonoides.

Como veremos más adelante, la dificultad principal a la hora de demostrar la conjetura para un caso general viene de que cuerpos como los polítopos de Hanner cumplen que su producto de volúmenes es precisamente $P(B_\infty^n)$.

3.1. Conjetura de Mahler en $n = 2$

En esta sección vamos a demostrar la conjetura de Mahler en el caso $n = 2$ aplicando los sistemas de sombras descritos en el capítulo anterior. Esta idea está tomada del Teorema 3 de [4].

Veamos primero que dado $K \subset \mathbb{R}^2$ un polígono simétrico se cumple $P(K) \geq P(B_\infty^2)$. Para ello, asumimos que K tiene al menos 6 vértices, denotamos el número de vértices de K por m .

Tomamos v_1, v_2 y v_3 vértices consecutivos de K y $u \in \mathbb{S}^1$ vector en la dirección de la recta que une v_1 con v_3 . Así, tomamos un sistema de sombras (2.2) dado por $B = \{\text{vértices de } K\}$, $\alpha(v_2) = 1$, $\alpha(-v_2) = -1$ y $\alpha(\cdot) = 0$ en otro caso. Tomamos como intervalo de definición $[a, b]$, tal que el área de K_t es constante $\forall t \in [a, b]$.

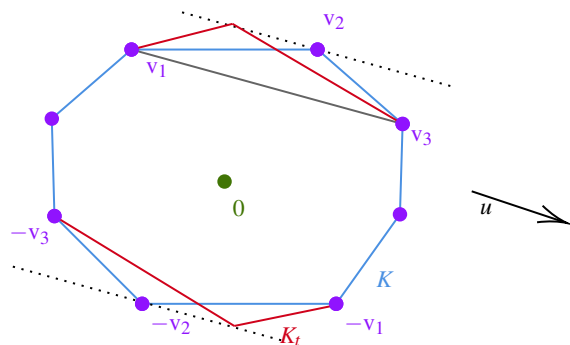


Figura 3.1: Sistema de sombras K_t

Observar que entonces $K_0 = K$ y, además, K_a, K_b son polígonos con $m - 2$ vértices.

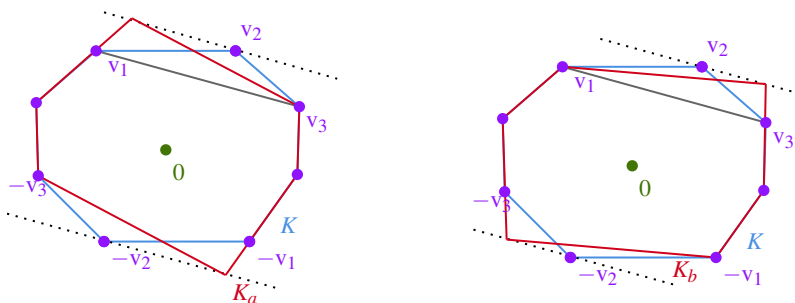


Figura 3.2: Sistema de sombras K_t para $t = a$ y $t = b$

Ahora, sabemos por el Teorema 2.5 que la función $t \mapsto \text{vol}_n(K_t^\circ)^{-1}$ es convexa y por tanto

$$\text{vol}_n(K_0^\circ)^{-1} \leq \text{máx}\{\text{vol}_n(K_a^\circ)^{-1}, \text{vol}_n(K_b^\circ)^{-1}\}$$

y entonces

$$P(K) = P(K_0) = \text{vol}_n(K_0) \text{vol}_n(K_0^\circ) \geq \text{vol}_n(K_0) \text{mín}\{\text{vol}_n(K_a^\circ), \text{vol}_n(K_b^\circ)\}$$

además, como $\text{vol}_n(K_0) = \text{vol}_n(K_a) = \text{vol}_n(K_b)$ esto es

$$P(K) \geq \text{vol}_n(K_0) \text{mín}\{\text{vol}_n(K_a^\circ), \text{vol}_n(K_b^\circ)\} = \text{mín}\{P(K_a), P(K_b)\}.$$

Observar que ahora podemos repetir este proceso con K_a o K_b , el que dé el mínimo producto de volúmenes, de manera que eliminamos otros dos vértices. Reiterando este proceso sucesivamente llegamos a $P(K) \geq P(L)$ donde L es un polígono simétrico de 4 vértices, o lo que es lo mismo, un paralelogramo.

Ahora, es fácil ver que existe una transformación lineal $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $AL = B_\infty^2$ y por tanto

$$P(K) \geq P(L) = P(L^{-1}B_\infty^2) = P(B_\infty^2).$$

Por lo tanto hemos visto que dado $K \subset \mathbb{R}^2$ un polígono 0-simétrico la conjetura de Mahler es cierta. Tomando ahora $K \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo convexo 0-simétrico sabemos que existe una sucesión de polígonos simétricos K_j tales que $K_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} K$. Este resultado se deduce del Teorema 1.8.16 de [15]. Entonces, por el Lema 1.6,

$$P(K) = \lim_{j \rightarrow +\infty} P(K_j) \geq P(B_\infty^2).$$

3.2. Cuerpos incondicionales

En esta sección demostraremos que los cuerpos convexos incondicionales verifican la conjetura de Mahler. Seguimos la demostración en [5].

Definición (Cuerpo incondicional). Dado $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, se dice que es incondicional si para alguna base $\{e_i\}_{i=1}^n$ de \mathbb{R}^n se tiene que $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in K$ si y sólo si $|x_1| e_1 + \dots + |x_n| e_n \in K$. Decimos que K es casi incondicional si para alguna base $\{e_i\}_{i=1}^n$ de \mathbb{R}^n y $\forall 1 \leq i \leq n$ se tiene que $K|H_i = K \cap H_i$ donde H_i es el hiperplano generado por $\{e_j ; j \neq i\}$.

Notar que si K es un cuerpo incondicional con respecto a la base $\{b_i\}_{i=1}^n$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ es la base canónica y B la matriz de cambio de base de la inicial a la canónica, tenemos que $P(BK) = P(K)$ y además, el conjunto BK es incondicional con respecto a la base canónica. Esto nos indica que en lo siguiente, podemos asumir que el conjunto K es incondicional con respecto a la base canónica.

Observar también que si un conjunto es incondicional, entonces es simétrico con respecto al origen y casi incondicional.

Los ejemplos más básicos de cuerpos incondicionales son las bolas B_p^n con $1 \leq p \leq +\infty$.

Veremos ahora la conjetura de Mahler para cuerpos incondicionales. Recordemos que en el Lema 1.5 hemos visto que $P(B_\infty^n) = \frac{4^n}{n!}$.

Teorema 3.1 (Saint-Raymond, 1981). *Dado $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo incondicional, se cumple que*

$$P(K) \geq P(B_\infty^n).$$

Demostración. Vamos a realizar esta prueba por inducción en la dimensión, entonces notar que tomando $n = 1$ el resultado es trivial. Así, supongamos que se cumple para $1 \leq i < n$.

Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base canónica de \mathbb{R}^n . Dado K como en el enunciado, definimos $K_+ = K \cap \mathbb{R}_+^n$, donde $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n ; x_i > 0, i = 1, \dots, n\}$, y $K_+^\circ = K^\circ \cap \mathbb{R}_+^n$ y entonces, $P(K) = 4^n \text{vol}_n(K_+) \text{vol}_n(K_+^\circ)$ por ser K un cuerpo incondicional. Por otro lado, para cada $1 \leq i \leq n$ definimos $K_i := K \cap \{x \in \mathbb{R}^n ; x_i = 0\}$ y es inmediato comprobar que esto es un cuerpo incondicional de e_i^\perp , identificado con \mathbb{R}^{n-1} y además, $(K_i)^\circ = (K^\circ)_i$ tomando la polaridad en e_i^\perp , identificado con \mathbb{R}^{n-1} .

Consideramos $(K_i)_+$ definido como antes, $x \in K_+$ y definimos $C_i(x)$ la envoltura convexa de $\{x\}$ con $(K_i)_+$, que será un cono de base $(K_i)_+$ y vértice x con lo que $\text{vol}_n(C_i(x)) = \frac{x_i}{n} \text{vol}_{n-1}((K_i)_+)$.

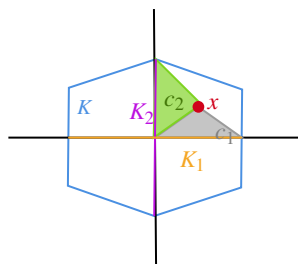


Figura 3.3:

Notar que $\cup_{i=1}^n C_i(x) \subset K_+$ por la propia definición (además, K_+ es convexo) y por lo tanto $\text{vol}_n(K_+) \geq \text{vol}_n(\cup_{i=1}^n C_i(x)) = \sum_{i=1}^n \text{vol}_n(C_i(x)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{vol}_{n-1}((K_i)_+)$ donde la primera igualdad se debe a que estos conjuntos sólo coinciden en conjuntos de medida nula. De aquí deducimos que

$$\frac{1}{n \text{vol}_n(K_+)} \sum_{i=1}^n x_i \text{vol}_{n-1}((K_i)_+) \leq 1$$

y por lo tanto, si definimos

$$a = \frac{1}{n \text{vol}_n(K_+)} (\text{vol}_{n-1}((K_1)_+), \dots, \text{vol}_{n-1}((K_n)_+)) \in \mathbb{R}^n$$

tenemos que $\langle a, x \rangle \leq 1 \forall x \in K_+$ lo que significa que $a \in K_+^\circ$.

Ahora, si repetimos este proceso de manera completamente análoga en K° obtendremos

$$a^\circ := \frac{1}{n \text{vol}_n(K_+^\circ)} (\text{vol}_{n-1}((K_1^\circ)_+), \dots, \text{vol}_{n-1}((K_n^\circ)_+)) \in \mathbb{R}^n$$

tal que $a^\circ \in K_+$. Entonces, $\langle a, a^\circ \rangle \leq 1$ y esto es lo mismo que

$$\frac{\sum_{i=1}^n \text{vol}_{n-1}((K_i)_+) \text{vol}_{n-1}((K_i^\circ)_+)}{n^2 \text{vol}_n(K_+) \text{vol}_n(K_+^\circ)} \leq 1.$$

Notar que entonces,

$$P(K) = 4^n \text{vol}_n(K_+) \text{vol}_n(K_+^\circ) \geq \frac{4^n}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{vol}_{n-1}((K_i)_+) \text{vol}_{n-1}((K_i^\circ)_+).$$

Ahora, notar que por ser K_i un cuerpo incondicional se cumple que $\text{vol}_{n-1}(K_i) = 2^{n-1} \text{vol}_{n-1}((K_i)_+)$, $\forall 0 \leq i \leq n$ y entonces $\text{vol}_{n-1}((K_i)_+) \text{vol}_{n-1}((K_i^\circ)_+) = 4^{1-n} \text{vol}_{n-1}(K_i) \text{vol}_{n-1}(K_i^\circ)$. Además, como los K_i

son cuerpos incondicionales de \mathbb{R}^{n-1} , por hipótesis de inducción se cumple que $P(K_i) \geq \frac{4^{n-1}}{(n-1)!}$ para todo i y entonces, reescribiendo todo tenemos que

$$P(K) \geq \frac{4^n}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-1)!} = \frac{4^n}{n!} = P(B_\infty^n).$$

□

Así, hemos visto que para los cuerpos incondicionales la conjetura de Mahler se cumple.

3.3. Polítopos de Hanner

Como ya hemos comentado, uno de los motivos principales por los que encontrar un mínimo general para el producto de volúmenes es difícil es porque, pese a tener un candidato, B_∞^n , también existen muchos otros cuerpos convexos cuyo producto de volúmenes es precisamente $\frac{4^n}{n!}$. Estos son los polítopos de Hanner, que estudiaremos en este capítulo.

Este tipo de cuerpo se define recursivamente, basándonos en unas “sumas” definidas en cuerpos convexos 0-simétricos.

Definición. Dados $K \subset \mathbb{R}^n$, $L \subset \mathbb{R}^m$ cuerpos convexos 0-simétricos, definimos la suma ℓ_∞ como

$$K \oplus_\infty L = K \times \{0\} + \{0\} \times L \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

o, equivalentemente, la bola unidad de $\|(x, y)\|_{K \oplus_\infty L} = \max\{\|x\|_K, \|y\|_L\}$.

Definimos la suma ℓ_1 como

$$K \oplus_1 L = \text{conv}(K \times \{0\} \cup \{0\} \times L) \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

o, equivalentemente, la bola unidad de $\|(x, y)\|_{K \oplus_1 L} = \|x\|_K + \|y\|_L$.

Notar que $(K \oplus_1 L)^\circ = K^\circ \oplus_\infty L^\circ$ y, equivalentemente, $(K \oplus_\infty L)^\circ = K^\circ \oplus_1 L^\circ$.

Vamos a probar la primera. Tomamos $(x, y) \in (K \oplus_1 L)^\circ$, es decir, para cada $(a, b) \in K \oplus_1 L$ se cumple que

$$\langle (x, y), (a, b) \rangle_{K \oplus_1 L} \leq 1.$$

Ahora, es fácil ver que esto puede escribirse como $\langle (x, y), (a, b) \rangle_{K \oplus_1 L} = \langle x, a \rangle_K + \langle y, b \rangle_L \leq 1$ y por tanto $x \in (\lambda K)^\circ \forall \lambda \in [0, 1]$ y en particular $x \in K^\circ$. Análogamente $y \in L^\circ$ por lo que $(x, y) \in K^\circ \oplus_\infty L^\circ$.

Recíprocamente, tomamos $(x, y) \in K^\circ \oplus_\infty L^\circ$ y $(a, b) \in K \oplus_1 L$. Entonces,

$$\langle (x, y), (a, b) \rangle_{K \oplus_1 L} = \langle x, a \rangle_K + \langle y, b \rangle_L.$$

Además, tenemos que (a, b) puede ser $(\lambda \tilde{a} + (1 - \lambda)\bar{a}, 0)$, $(0, \lambda \tilde{b} + (1 - \lambda)\bar{b})$ o $(\lambda \tilde{a}, (1 - \lambda)\tilde{b})$ donde $\tilde{a}, \bar{a} \in K$, $\tilde{b}, \bar{b} \in L$ y $\lambda \in [0, 1]$. Así,

$$\langle (x, y), (a, b) \rangle_{K \oplus_1 L} = \langle x, a \rangle_K + \langle y, b \rangle_L \leq 1$$

y, por tanto, $(x, y) \in (K \oplus_1 L)^\circ$ y $(K \oplus_1 L)^\circ = K^\circ \oplus_\infty L^\circ$.

Definición (Politopo de Hanner). Un politopo de Hanner se define de manera recursiva. Así, un cuerpo convexo 0-simétrico se dice que es un politopo de Hanner si es 1-dimensional, o si es de la forma $M \oplus_1 L$ o $M \oplus_\infty L$ donde M, L son politopos de Hanner.

Equivalentemente podemos considerar los politopos de Hanner como los conjuntos de la forma $I \oplus \cdots \oplus I$ donde $I = [-1, 1]$ y $\oplus = \oplus_1$ o $\oplus = \oplus_\infty$.

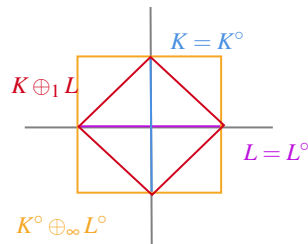


Figura 3.4: Sumas ℓ_∞ y ℓ_1

Proposición 3.2. *Dados $K \subset \mathbb{R}^n$, $L \subset \mathbb{R}^m$ cuerpos convexos y 0-simétricos, se cumple*

$$P(K \oplus_1 L) = P(K \oplus_\infty L) = \frac{n!m!}{(n+m)!} P(K)P(L).$$

Demostración. Notar que $|K \oplus_\infty L| = |K| |L|$ y así

$$P(K \oplus_1 L) = |K \oplus_1 L| |K^\circ| |L^\circ| \quad \text{y} \quad P(K \oplus_\infty L) = |K| |L| |K^\circ \oplus_1 L^\circ|.$$

Estudiemos cómo es $|K \oplus_1 L|$. Razonando como en el Lema 1.5, notar que dado $M \subset \mathbb{R}^n$ convexo y 0-simétrico tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_M} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\|x\|_M}^{\infty} e^{-t} dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\infty} e^{-t} \chi_{[0,t]}(\|x\|_M) dt dx = \int_0^{\infty} e^{-t} |\{x; \|x\|_M \leq t\}| dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} |tM| dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n |M| dt = |M| \Gamma(n+1) = n! |M| \end{aligned}$$

donde hemos aplicado el teorema de Fubini. Recordar que $\|\cdot\|_M$ denota la norma dada por el funcional de Minkowski. Entonces,

$$|K \oplus_1 L| (n+m)! = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} e^{-\|(x,y)\|_{K \oplus_1 L}} d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\|x\|_K} e^{-\|y\|_L} dy dx = n! |K| m! |L|.$$

Entonces hemos acabado, ya que

$$P(K \oplus_1 L) = |K^\circ| |L^\circ| |K \oplus_1 L| = \frac{n!m!}{(n+m)!} |K^\circ| |L^\circ| |K| |L| = \frac{n!m!}{(n+m)!} P(K)P(L) = P(K \oplus_\infty L).$$

□

Sabemos que $P([-1, 1]) = 4$, vamos a aplicar un paso de inducción para ver que dado K un politopo de Hanner en \mathbb{R}^n se cumple $P(K) = \frac{4^n}{n!} = P(B_1^n) = P(B_\infty^n)$. Asumimos que se cumple para todo $m < n$ y tomamos $K \subset \mathbb{R}^n$ un politopo de Hanner. Entonces $K = M \oplus L$ donde $\oplus = \oplus_1$ o $\oplus = \oplus_\infty$ y $M \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $L \subset \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, son politopos de Hanner. Aplicando el resultado que acabamos de ver, obtenemos lo siguiente:

$$P(K) = \frac{n_1!n_2!}{(n_1+n_2)!} P(M)P(L) = \frac{n_1!n_2!}{n!} \frac{4^{n_1}}{n_1!} \frac{4^{n_2}}{n_2!} = \frac{4^n}{n!}$$

aplicando el paso de inducción.

Hemos obtenido un tipo de cuerpo convexo 0-simétrico, los politopos de Hanner, que no tienen por qué ser B_∞^n y sin embargo su producto de volúmenes es $P(B_\infty^n) = \frac{4^n}{n!}$. Esto complica en mayor medida la demostración de la conjetura, ya que si bien para maximizar el producto sólo teníamos una posibilidad, ahora encontramos muchas opciones nuevas y esto dificulta el problema.

Bibliografía

- [1] D. ALONSO-GUTIÉRREZ Y J. BASTERO, *Approaching the Kannan-Lovász-Simonovits and Variance Conjectures*, Lecture Notes in Mathematics 2131, Springer, pp. 137-140, 2015.
- [2] S. ARTSTEIN-AVIDAN, A. GIANNOPOULOS Y V.D. MILMAN, *Asymptotic Geometric Analysis, Part I*, American Mathematical Society, 202, 2015.
- [3] K. BALL, *Logarithmically concave functions and sections of convex sets in \mathbb{R}^n* , *Studia Mathematica*, 88, pp. 69-89, 1988.
- [4] S. CAMPI Y P. GRONCHI, *On volume product inequalities for convex sets*, American Mathematical Society, 134.8, pp. 2393-2402, 2006.
- [5] M. FRADELIZI, M. MEYER Y A. ZVAVITCH, *Volume product*, *Harmonic Analysis and Convexity*, pp. 163-222, 2023.
- [6] J.A. FACENDA Y F. J. FRENICHE, *Integración de funciones en varias variables*, Ediciones Pirámide, p. 43, 2002.
- [7] R.J. GARDNER, *The Brunn-Minkowski inequality*, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 39.3, pp. 355-405, 2002.
- [8] M. DE LOS ÁNGELES HERNÁNDEZ CIFRE Y J. YEPES NICOLÁS, *Una introducción a la geometría convexa y discreta*, Aula Magna Proyecto Clave McGraw Hill, 2021.
- [9] H. IRIYEH Y M. SHIBATA, *Symmetric Mahler's conjecture for the volume product in the 3-dimensional case*, *Duke Mathematical Journal*, 169.6, PP. 1077-1134, 2020.
- [10] M. MEYER, *Une caractérisation volumique de certains espaces normés*, *Israel J. Math.* 55.3 pp. 317-326, 1986.
- [11] M. MEYER Y A. PAJOR, *On the Blascke-Santló inequality*, *Archiv der Mathematik*, 55, pp. 82-93, 1990.
- [12] M. MEYER Y S. REISNER, *Ellipsoids are the only local maximizers of the volume product*, *Mathematika*, 65.3, pp. 500-504, 2019.
- [13] W. RUDIN, *Real and complex analysis. Third edition*, McGraw-Hill Book Co., pp. 175-176, 1987.
- [14] J. SAINT-RAYMOND, *On the volume of symmetric convex bodies*, *Publ. Math. Univ. Pierre et Marie Curie*, 46.11, p. 25, 1981.
- [15] R. SCHNEIDER *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory* Cambridge University Press, p. 67, 2013.