

# Trabajo Fin de Grado

Inflación y desempleo: una aproximación dinámica.

*Autor/es*

Javier Bazán Lázaro

*Director/es*

Gloria Jarne Jarne

Facultad de Economía y Empresa

Grado en Economía

2025

## **RESUMEN.**

Este trabajo supone una aproximación al análisis cualitativo de sistemas de ecuaciones diferenciales para su posterior aplicación práctica. Se introduce un modelo inicial que da explicación del comportamiento dinámico de la inflación y el desempleo a través de un sistema de ecuaciones diferenciales en tiempo continuo, bidimensional, autónomo y lineal. Posteriormente se añade una no linealidad que dota al modelo de capacidad para representar situaciones como la *hiperinflación* o la *deflación*. Se realiza un ejercicio de dinámica comparativa en ambos modelos, graficando el resultado a través de código Python. Este estudio supone una introducción a los modelos macroeconómicos dinámicos y a las herramientas matemáticas que permiten interpretar las ideas que bajo ellos subyacen.

## **ABSTRACT.**

This study presents an approach to the qualitative analysis of systems of differential equations for subsequent practical application. An initial model is introduced to explain the dynamic behavior of inflation and unemployment through a two-dimensional, autonomous, and linear continuous-time system of differential equations. Subsequently, a nonlinearity is added, endowing the model with the capability to represent situations such as hyperinflation or deflation. Both models are subjected to comparative dynamics and plotted using Python code. This study serves as an introduction to dynamic macroeconomic models and the mathematical tools that allow interpretation of the underlying ideas they embody.

# ÍNDICE

<b>1. INTRODUCCIÓN.</b>	<b>4</b>
<b>2. ANÁLISIS CUALITATIVO DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES.</b>	<b>5</b>
2.1. Introducción.	5
2.2. El estado estacionario.	5
2.2.1. Caso lineal.	6
2.2.2. Caso no lineal.	6
2.3. Estabilidad del equilibrio.	7
2.3.1. Estabilidad dinámica en el caso lineal.	7
2.3.2. Estabilidad dinámica en el caso no lineal.	8
2.3.3. Estabilidad estructural.	9
2.4. Tipos de equilibrios estacionarios.	9
2.4.1. Valores propios reales repetidos.	9
2.4.2. Valores propios reales y distintos.	9
2.4.3. Valores propios complejos conjugados del tipo $a \pm bi$ .	11
2.5. Diagrama de fases.	12
2.5.2. Direcciones y trayectorias	13
<b>3. INFLACIÓN Y DESEMPLEO: UN MODELO LINEAL.</b>	<b>14</b>
3.1. Introducción.	14
3.2. Las ecuaciones del modelo.	15
3.3. Análisis cualitativo del modelo.	17
3.4. Dinámica comparativa.	21
<b>4. INFLACIÓN Y DESEMPLEO: UN MODELO NO LINEAL.</b>	<b>27</b>
4.1. Introducción.	27
4.2. Análisis cualitativo del modelo.	28
4.3. Dinámica comparativa.	33
<b>5. CONCLUSIONES.</b>	<b>36</b>
<b>6. BIBLIOGRAFÍA.</b>	<b>38</b>
<b>7. ANEXO 1. SIMULACIÓN DE MODELOS DINÁMICOS EN CÓDIGO PYTHON.</b>	<b>39</b>

## 1. INTRODUCCIÓN.

Este Trabajo Fin de Grado es un trabajo académico que no busca realizar un análisis en profundidad de las *ecuaciones diferenciales*, sino que pretende ser una aproximación a su aplicación en modelos macroeconómicos a través del análisis cualitativo de *sistemas de ecuaciones diferenciales*. El porqué reside en el hecho de que este tipo de análisis nos permite extraer conclusiones muy relevantes de modelos que, por su complejidad, obtener soluciones explícitas resulta o bien muy laborioso o bien imposible. Adicionalmente, se lleva a cabo una introducción a la programación en código Python empleado para graficar los resultados más relevantes obtenidos a partir de los modelos analizados.

Al mismo tiempo el trabajo supone una demostración de que las asignaturas impartidas en el Grado en Economía no son compartimentos estancos, sino que se interrelacionan. En este caso, las matemáticas nos permiten simular una realidad macroeconómica, a la par que los principios macroeconómicos que subyacen en el modelo, nos aproximan a comprender con una mayor facilidad la parte más puramente matemática.

El modelo analizado en este trabajo trata la problemática de la inflación y el desempleo. Este tema ha sido elegido por interés personal en la relación entre estas dos variables al ser, en mi opinión, dos de los fenómenos económicos que más preocupan a la población, debido a la influencia que tienen en el día a día de un individuo. Posteriormente, al modelo inicial le ha sido introducida una no linealidad con ánimo de visualizar las principales diferencias entre los modelos lineales y no lineales, además de buscar la posibilidad de la aparición de escenarios como la *deflación* o la *hiperinflación*, fenómenos que no tienen cabida en el modelo inicial pero que son observables en la realidad de determinadas economías.

Este Trabajo Fin de Grado se estructura de la siguiente forma. En el segundo apartado se lleva a cabo una introducción heurística a los sistemas de ecuaciones diferenciales tanto lineales como no lineales. En el tercer apartado se estudia un modelo lineal de inflación y desempleo, que supone una aplicación práctica de lo explicado en el anterior apartado. En el cuarto apartado, se introduce una no linealidad en el modelo inicial y se abordan las diferentes realidades que esta provoca, permitiendo ver las diferencias respecto al modelo lineal. Finalmente, en el quinto apartado se recogen las conclusiones extraídas de la elaboración de este trabajo de ámbito académico.

## **2. ANÁLISIS CUALITATIVO DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES.**

### **2.1. Introducción.**

El estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias surgió hacia finales del siglo XVII, en paralelo al desarrollo inicial del cálculo diferencial e integral. A pesar de que surgieron en el entorno de la Física se han aplicado a múltiples ciencias, entre ellas la Economía, donde han supuesto una de las más interesantes herramientas para la modelización de realidades económicas con carácter dinámico. Si hablamos de análisis dinámico, este tipo de ecuaciones toman el tiempo como una variable continua. Si se considera el tiempo como una variable discreta, surgen las *ecuaciones en diferencias finitas* que no se abordan en este trabajo, aunque es importante señalar que los resultados obtenidos al modelizar los mismos supuestos con un tipo u otro de ecuaciones pueden ser diferentes.

Antes de adentrarnos en modelos en los que estas ecuaciones son determinantes y nos permiten sacar conclusiones sobre diversos sucesos, trataremos de realizar una aproximación al análisis cualitativo de *sistemas de ecuaciones diferenciales en tiempo continuo, bidimensionales y autónomos*, que es el tipo de modelos dinámicos que se emplean en el trabajo. El análisis cuantitativo consiste en determinar la solución explícita de un sistema de ecuaciones diferenciales, en contraposición, el cualitativo implica el estudio de las propiedades de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales, sin ser necesario conocer la expresión explícita de esta. Dada la dificultad que suele entrañar hacer un análisis cuantitativo, que puede resultar en ocasiones inviable, es común recurrir al análisis cualitativo por las interesantes conclusiones que brinda, a pesar de no abordar la incógnita de los valores explícitos que equilibran un determinado modelo.

Nuestra aproximación al análisis cualitativo se va a centrar en tres puntos, el estado estacionario, la estabilidad del equilibrio y el diagrama de fases.

### **2.2. El estado estacionario.**

En economía si hablamos de términos dinámicos, el equilibrio se refiere a una situación en la que las fuerzas económicas se compensan mutuamente, resultando en un estado en el que las variables dejan de cambiar con el tiempo o cambian siguiendo una determinada trayectoria.

El hecho de que el sistema sea *autónomo* se traduce en que el equilibrio sea estacionario, es decir, que no varíe conforme el tiempo pasa, por lo que la solución de equilibrio será un conjunto de valores que hacen que el sistema se mantenga en un determinado punto, si no se producen perturbaciones externas.

### 2.2.1. Caso lineal.

Sea el sistema bidimensional autónomo:

$$T: \begin{cases} \dot{y} = a_{11}y + a_{12}z + b_1 \\ \dot{z} = a_{21}y + a_{22}z + b_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

que por su carácter lineal puede ser expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dot{X} = AX + B \quad (2.2)$$

con  $X = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ ;  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

la condición de equilibrio será,

$$AX + B = 0 \rightarrow X^* = -A^{-1}B \quad (2.3)$$

lo que en la expresión matricial se traduce en,

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución es,  $X^* = \begin{pmatrix} y^* \\ z^* \end{pmatrix} = -A^{-1}B$ , es decir, el estado estacionario verifica:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^* \\ z^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

### 2.2.2. Caso no lineal.

Sea un sistema bidimensional autónomo del tipo (2.1) pero no lineal, se puede expresar como:

$$\dot{X} = T(X)$$

donde  $X = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ ;  $F(X) = \begin{pmatrix} f(y, z) \\ g(y, z) \end{pmatrix}$

La condición de equilibrios será,

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow T(X^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

lo que se traduce en,

$$\begin{pmatrix} f(y^*, z^*) \\ g(y^*, z^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución corresponde a los puntos de equilibrio  $X^* = \begin{pmatrix} y^* \\ z^* \end{pmatrix}$ , a diferencia del caso lineal, podrán existir uno, cero o varios puntos de equilibrio.

### 2.3. Estabilidad del equilibrio.

La estabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales se refiere al comportamiento del sistema cerca del punto de equilibrio. La estabilidad de un equilibrio es tan importante como la existencia de este, cuando una economía alcanza un equilibrio inestable cualquier pequeña perturbación puede suponer que la economía se aleje de los valores de equilibrio sin posibilidad de retornar a ellos, generando una situación compleja o caótica.

La estabilidad de un sistema debe ser analizada para dos posibles perturbaciones, unas de carácter más coyuntural, que pueden ser asociadas a distintos shocks (estabilidad dinámica) y otras asociadas a cambios en la especificación del sistema de ecuaciones que brinda la solución (estabilidad estructural). Para una explicación matemática de las distintas estabildades acudir a Gandolfo (2010).

#### 2.3.1. Estabilidad dinámica en el caso lineal.

Consideraremos que un equilibrio es dinámicamente asintóticamente estable cuando ante una perturbación, transcurrido un periodo de tiempo, la economía retorna a los valores iniciales de equilibrio. En este caso también se dice que el equilibrio es un *atractor*. Si no retorna al equilibrio, sino que se aleja de él, se dice que el equilibrio es inestable (o *repulsor*).

La estabilidad dinámica del punto de equilibrio será determinada por los valores propios de la matriz  $A$  que son las soluciones de la *ecuación característica*:

$$|A - \lambda I_2| = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + Det(A) = 0 \quad (2.5)$$

Se verifica:

- Si  $Re(\lambda_i) < 0, i = 1,2 \rightarrow X^*$  es asintóticamente estable ( $X^*$  es un *atractor*).
- Si para algún  $i = 1,2$   $Re(\lambda_i) > 0, i \rightarrow X^*$  es inestable ( $X^*$  es un *repulsor*).

### 2.3.2. Estabilidad dinámica en el caso no lineal.

Sea el sistema bidimensional no lineal tal y como (2.1) en el que se supone que existe un punto de equilibrio  $X^* = (y^*, z^*)^t$ , es decir,  $T(X^*) = 0$ . Si la función vectorial  $T$  es diferenciable en  $X^*$ , en un entorno suficientemente pequeño de dicho punto se considera la siguiente aproximación lineal:

$$T(X) \approx T(X^*) + JT(X^*)(X - X^*) = JT(X^*)(X - X^*)$$

siendo  $JT(X^*)$  la matriz Jacobiana de  $T$ , evaluada en el punto de equilibrio. Esto es:

$$JT(X^*) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(y^*, z^*)} & \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{(y^*, z^*)} \\ \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(y^*, z^*)} & \left. \frac{\partial g}{\partial z} \right|_{(y^*, z^*)} \end{pmatrix}$$

Si el módulo de los valores propios de esta matriz (es decir las soluciones de la ecuación  $Det(JT(X^*) - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - Tr(JT(X^*))\lambda + Det(JT(X^*)) = 0$ ), son no nulos,  $\lambda_i \neq 0, i = 1, 2$ , se tiene que la estabilidad del punto de equilibrio en el sistema inicial es la misma que en sistema dinámico lineal:

$$\dot{X} = JT(X^*)X - JT(X^*)X^*$$

Por tanto, se verifica:

- Si  $Re(\lambda_i) < 0, i = 1, 2 \rightarrow X^*$  es asintóticamente estable, ( $X^*$  es un *atractor*).
- Si para algún  $i = 1, 2$   $Re(\lambda_i) > 0 \rightarrow X^*$  es inestable ( $X^*$  es un *repulsor*).

Existen condiciones expresadas en términos de la traza y del determinante de la matriz Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio, que aseguran que los valores propios sean negativos en caso de ser reales, o en caso de ser complejos tengan la parte real negativa. En concreto en un contexto bidimensional  $X^*$  es asintóticamente estable, si se verifican simultáneamente las siguientes desigualdades conocidas como *condiciones de Routh-Hurwitz*:

$$\left. \begin{array}{l} (i) Tr(JT(X^*)) < 0 \\ (ii) Det(JT(X^*)) > 0 \end{array} \right\}$$

### 2.3.3. Estabilidad estructural.

Consideramos que un sistema es estructuralmente estable cuando a pesar de modificar levemente las ecuaciones que lo describen mantiene su comportamiento cualitativo. Para una profundización en este tema recurrir a Gandolfo (2010).

### 2.4. Tipos de equilibrios estacionarios.

La forma en la que a lo largo del tiempo nuestro sistema alcanza el equilibrio partiendo de las *condiciones iniciales* que no coinciden con el equilibrio, vendrá determinada por los valores propios de la matriz Jacobiana. El tipo de equilibrio nos aportará información en relación al comportamiento del sistema y acerca de la estabilidad de este. Los distintos tipos de equilibrio de acuerdo a sus valores propios, simulados haciendo uso del software *Wolfram Mathematica*, son los que se explican a continuación.

#### 2.4.1. Valores propios reales repetidos.

Si se da que los valores propios son iguales ( $\lambda_1 = \lambda_2$ ) se da el caso de nodos degenerados que no abordaremos en esta breve introducción a los sistemas de ecuaciones diferenciales.

#### 2.4.2. Valores propios reales y distintos.

##### Nodo estable.

Si ambos valores propios son negativos ( $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ ), decimos que es estable porque todas las trayectorias convergen al equilibrio y nodo porque las trayectorias son monótonas. Esto es:

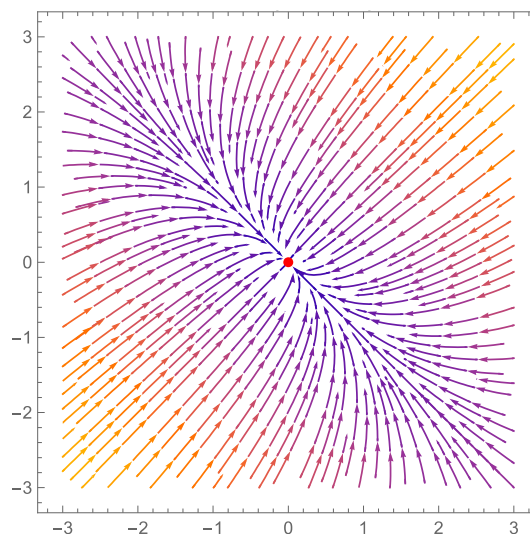
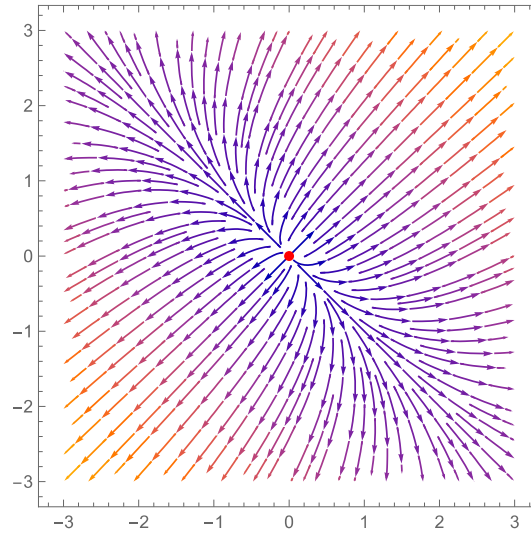


Figura 2.1.

### Nodo inestable.

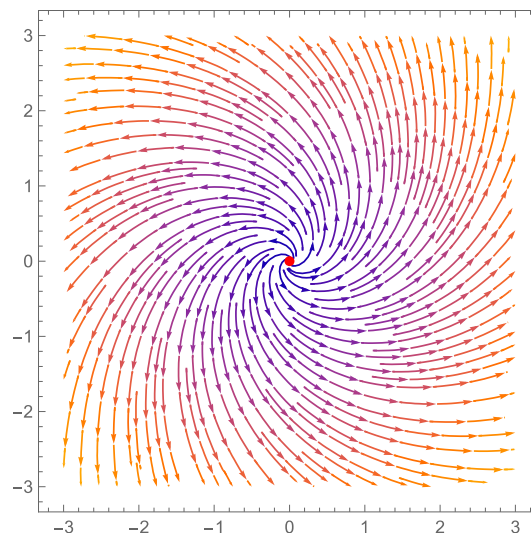
Si ambos valores propios son positivos ( $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ) nos encontraremos con el caso opuesto al alejarse todas las trayectorias del equilibrio. Esto es:



*Figura 2.2.*

### Punto de silla.

Si un valor propio toma valor positivo ( $\lambda_1 > 0$ ), mientras que el otro toma un valor negativo ( $\lambda_2 < 0$ ) existirá al menos una trayectoria convergente al equilibrio mientras que todas las demás serán divergentes. Esto es:

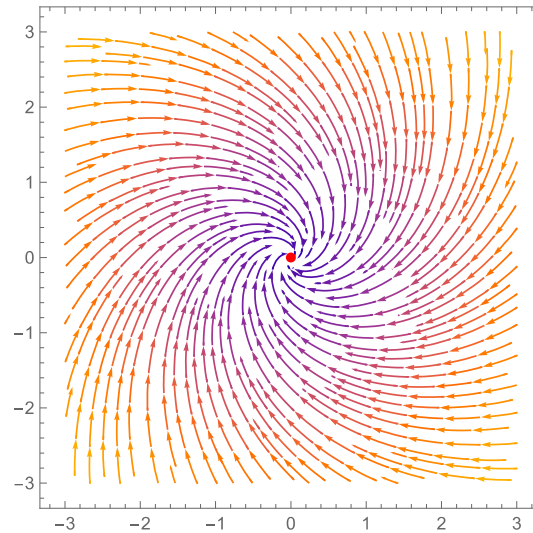


*Figura 2.3.*

### 2.4.3. Valores propios complejos conjugados del tipo $(a \pm bi)$ .

#### Espiral estable.

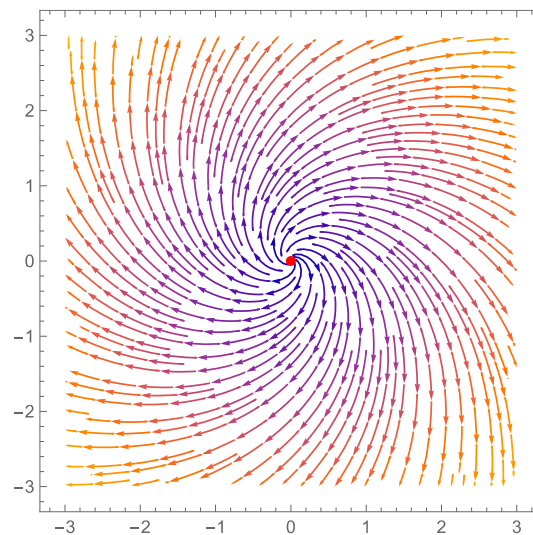
Si la parte real de los valores propios es negativa todas las trayectorias con forma de espiral tenderán hacia el equilibrio. Esto es:



*Figura 2.4.*

#### Espiral inestable.

Si la parte real de los valores propios es positiva nos encontraremos ante el caso puesto, ya que todas las trayectorias se alejan del equilibrio. Esto es:



*Figura 2.5.*

## Centro.

Si la parte real de los valores propios es cero, las trayectorias conforman orbitas cerradas entorno al equilibrio. Esto es:

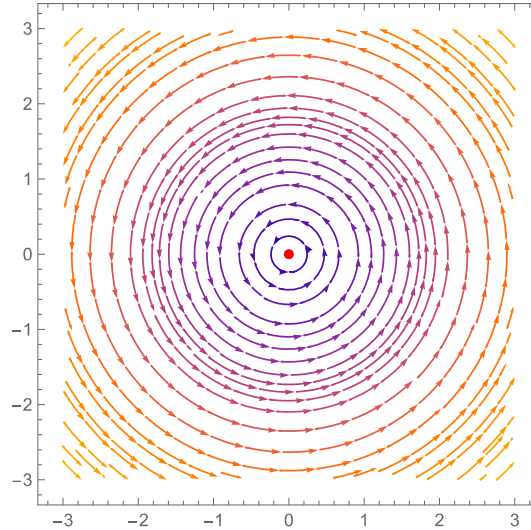


Figura 2.6.

## 2.5. Diagrama de fases.

El diagrama de fases es el instrumento por excelencia en el análisis cualitativo al permitir comprender el comportamiento del modelo de una forma gráfica. En el diagrama de fases obtenemos la información necesaria acerca de la existencia y la estabilidad del equilibrio en el modelo, además del comportamiento de este.

Podemos realizar diagramas de fases tanto para ecuaciones diferenciales como para sistemas de ecuaciones diferenciales, en este caso y dado el modelo principal con el que trabajaremos vamos a centrarnos en los sistemas.

El diagrama de fases nos permite visualizar cómo evolucionan las distintas variables a lo largo del tiempo en un espacio llamado *espacio de fases*. Dicho espacio cuenta con tantas dimensiones como variables dependientes tenga el sistema en cuestión.

### 2.5.1. Curvas de demarcación.

Las curvas de demarcación dividen el espacio en regiones en las que las trayectorias toman distintos comportamientos, además de que su punto (o puntos) de corte, en caso de existir, implican la existencia de un estado estacionario.

El método de obtención de estas líneas para un sistema 2x2 es el siguiente, dado:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, z)$$
$$\frac{dz}{dt} = g(y, z)$$

sus líneas delimitación serán aquellas que el movimiento sea nulo, es decir,

$$0 = f(y, z)$$
$$0 = g(y, z)$$

En caso de que dichas líneas se corten estaríamos hablando de un estado estacionario.

### 2.5.2. Direcciones y trayectorias

Una vez dividido el *espacio de fases* en varias regiones, debemos analizar el comportamiento de las variables en cada una de ellas, más concretamente, si crecen o decrecen. Para ello debemos calcular el signo de la variación en el tiempo de  $y$  que viene determinada por la función  $f(y, z)$  y análogamente para  $z$  que viene determinada por la función  $g(y, z)$ . Con esta información ya podremos intuir el comportamiento de las trayectorias solución del sistema dinámico. Para una profundización en los elementos propios del análisis cualitativo acudir a Chiang (2006).

### 3. INFLACIÓN Y DESEMPLEO: UN MODELO LINEAL.

#### 3.1. Introducción.

La inflación y el desempleo suponen dos de las problemáticas económicas que más preocupan a la sociedad, es por ello que la interacción entre ambas ha sido objeto de estudio y análisis a lo largo de la historia a través de diferentes modelos. Una de las correlaciones más primitiva de ambas se dio gracias al aporte de A.W. Philips (1958), cuya hipótesis defendía la existencia de una relación negativa entre desempleo y crecimiento salarial, es decir, a menor desempleo, mayor crecimiento de los salarios. Esta idea fue posteriormente refinada y adaptada a la inflación por Samuelson y Solow (1960) quienes establecieron el mismo tipo de relación para desempleo e inflación. Sin embargo, el análisis empírico demostró que esto no era una realidad, al darse un fenómeno sin precedentes, la *estanflación*. En 1973, con el estallido de la *crisis del petróleo* numerosas economías de occidente sufrieron la *estanflación*, es decir, una ralentización del crecimiento económico, una espiral inflacionista y un aumento del desempleo simultáneamente. En este escenario coge fuerza el *monetarismo*, que puede ser definida como una corriente de pensamiento originaria de la *Escuela de Chicago*, cuya principal premisa es que la oferta monetaria juega un papel determinante en la inflación de una economía, esto queda reflejado en la frase más celebre su principal exponente, Milton Friedman: “La inflación es siempre y en todo lugar un fenómeno monetario”. Friedman afirmó que la curva de Phillips era un fenómeno que solo se cumplía en el corto plazo, ya que en largo plazo los agentes serían capaces de actualizar sus expectativas negociando correctamente sus salarios y devolviendo la tasa de desempleo a lo que definió como *tasa natural*, pero con una mayor inflación. La *tasa natural de desempleo* de la que hablaba Friedman se trata de una tasa que está asociada a las características estructurales de la economía y en definitiva no a fenómenos monetarios.

El modelo con el que vamos a trabajar para ver cómo funcionan las ecuaciones diferenciales y ver su aplicación económica, en este caso para explicar los ciclos económicos a través de la inflación y desempleo, es definible como un modelo macroeconómico dinámico de síntesis neoclásica-keynesiana y monetarismo. Es un modelo del que podemos extraer importantes conclusiones. Dicho modelo puede es analizado en Chiang (2006) donde se realizan diversos ejercicios sobre él.

### 3.2. Las ecuaciones del modelo.

El modelo se fundamenta en tres ecuaciones que desarrollamos en este apartado explicando los supuestos que las sustentan.

La primera ecuación explica los determinantes de la inflación:

$$p = \alpha - T - \beta U + g\pi; \quad (\alpha, \beta > 0, 0 < g < 1, T > 0) \quad (3.1)$$

Donde:

- $p = \frac{\dot{P}}{P}$  es la variable que representa la inflación.
- $U$  es la variable que representa la tasa de desempleo.
- $\pi$  es la variable que representa la inflación esperada.

Esta ecuación resulta fruto del desarrollo de la curva de Phillips original, que a continuación detallamos. La expresión de la curva de Phillips original es:

$$\omega = f(U); \quad (f'(U) < 0)$$

que expresa la relación inversa entre la tasa de crecimiento del salario monetario ( $\omega = \dot{W}/W$ ) y la tasa de desempleo ( $U$ ). Por simplicidad, se supone una linealización de la función  $f(U)$ :

$$\omega = \alpha - \beta U; \quad (\alpha, \beta > 0)$$

Posteriormente, la relación expresada en la curva de Phillips se generalizó del crecimiento de los salarios ( $\omega$ ) a la inflación ( $p$ ) de la economía de la siguiente manera:

$$p = \omega - T$$

donde  $T$  es la productividad de los trabajadores, que se supone constante y que actúa como freno de la inflación. La idea que se recoge en esta última expresión es que, si un aumento de la tasa de crecimiento del salario monetario está justificado por un aumento de la productividad de los trabajadores no causará un aumento de la inflación. De esta manera, la expresión de la curva de Phillips queda:

$$p = \alpha - T - \beta U; \quad (\alpha > T)$$

Sin embargo, todavía no hemos llegado a la expresión (3.1). Dicha expresión es la relación anterior pero *augmentada con expectativas*. Esta modificación introduce la idea de que la previsión de los individuos acerca de los niveles de inflación afecta de forma directa y positiva ( $0 < g < 1$ ) a los niveles de inflación futuros.

La segunda ecuación que se considera en el modelo explica la evolución temporal de las expectativas de inflación, es decir, expresa en base a qué conforman los individuos sus expectativas:

$$\frac{d\pi}{dt} = j(p - \pi); \quad (0 < j < 1) \quad (3.2)$$

El ajuste representado en esta ecuación entre la inflación real y la inflación esperada se conoce como *expectativas adaptativas*. Cuando se da una inflación  $p$  mayor que la inflación esperada  $\pi$ , esta última se revisa al alza ( $d\pi/dt > 0$ ) y de forma inversa si la inflación esperada es superior a la real.

Finalmente, el modelo se completa con una tercera ecuación que explica la evolución temporal de la tasa de desempleo:

$$\frac{dU}{dt} = -k(m - p); \quad (0 < k < 1) \quad (3.3)$$

donde  $m = \frac{\dot{M}}{M}$  representa la tasa de crecimiento del dinero nominal,  $M$ , y se supone constante,  $m > 0$ . Así,  $m - p$  es la tasa de crecimiento del dinero real en la economía. Podemos observar que dado el parámetro  $k$ , a mayores niveles de inflación se darán mayores niveles de desempleo y a mayores niveles de crecimiento del dinero nominal se darán menores niveles de desempleo.

Introduciendo (3.1) en (3.2) y (3.3) se obtiene el siguiente modelo dinámico en tiempo continuo bidimensional, lineal y autónomo:

$$\begin{aligned} \frac{d\pi}{dt} &= j[\alpha - T - \beta U - (1 - g)\pi] \\ \frac{dU}{dt} &= -k(m - \alpha + T + \beta U - g\pi) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Debido a la linealidad del modelo, podemos expresarlo en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{d\pi}{dt} \\ \frac{dU}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j(1 - g) & -j\beta \\ kg & -k\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ U \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j(\alpha - T) \\ -k(m - \alpha + T) \end{pmatrix}$$

Que responde a la expresión  $\dot{X} = AX + B$  vista en apartado (2.2) donde:

$$X = \begin{pmatrix} \pi \\ U \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} -j(1 - g) & -j\beta \\ kg & -k\beta \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} j(\alpha - T) \\ -k(m - \alpha + T) \end{pmatrix}$$

### 3.3. Análisis cualitativo del modelo.

En este trabajo además de una introducción a las ecuaciones diferenciales y a su uso, vamos a ver cómo la programación en Python puede resultar una herramienta muy útil en la simulación de modelos, al permitirnos graficarlos. Además, ayuda a visualizar los efectos de cambios en los distintos parámetros en la dinámica generada por el modelo.

Siguiendo los pasos explicados para realizar el análisis cualitativo de este tipo de modelos visto anteriormente, calcularemos los puntos de equilibrio o estados estacionarios, analizaremos su estabilidad dinámica y deduciremos el comportamiento de sus trayectorias.

#### Estado estacionario

Imponiendo la condición de equilibrio (2.3), se obtiene un sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{pmatrix} \frac{d\pi}{dt} \\ \frac{dU}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -j(1-g) & -j\beta \\ kg & -k\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ U \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j(\alpha - T) \\ -k(m - \alpha + T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cuya solución es,  $X^* = \begin{pmatrix} y^* \\ g^* \end{pmatrix} = -A^{-1}B$ , es decir:

$$\begin{pmatrix} \pi^* \\ U^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j(1-g) & -j\beta \\ kg & -k\beta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} j(\alpha - T) \\ -k(m - \alpha + T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ \frac{\alpha - T - (1-g)m}{\beta} \end{pmatrix}$$

Así, el valor de equilibrio para cada una de las variables en el modelo (3.4) es:

$$\pi^* = m \tag{3.5}$$

$$U^* = \frac{\alpha - T - (1-g)m}{\beta} \tag{3.6}$$

$$p^* = m$$

Observar la relación que existe entre los valores de equilibrio de la inflación y la tasa de desempleo es según (3.6):

$$U^* = \frac{\alpha - T - (1-g)\pi^*}{\beta}$$

Por tanto, tienen una relación negativa, en el siguiente sentido:

$$\pi^* \text{ crece} \Leftrightarrow U^* \text{ decrece}$$

Es decir, en la situación de equilibrio a mayores valores de la inflación esperada, menores valores de la tasa de desempleo. Esta relación queda patente en las simulaciones posteriores.

### **Estabilidad dinámica del equilibrio**

Como ya hemos señalado previamente, la estabilidad dinámica del punto de equilibrio se puede determinar a partir de los valores propios de la matriz  $A$  que son las soluciones de su *ecuación característica* dada en (2.5).

Más aún, para obtener el carácter del estado estacionario respecto a su estabilidad dinámica, vale con considerar las *condiciones de Routh-Hurwitz*, que recordamos dicen que para que un equilibrio sea asintóticamente estable ha de ocurrir que el determinante de la matriz  $A$  sea mayor que cero y su traza menor que cero. En nuestro caso:

$$Det(A) = jk\beta > 0$$

$$Tr(A) = -j(1 - g) - k\beta < 0$$

Podemos observar que se cumplen ambas condiciones, luego nos encontramos ante un equilibrio asintóticamente estable independientemente de los valores que tomen los parámetros. Esto significa que si en algún momento se produjese una perturbación externa que desviase a la economía del equilibrio, a lo largo del tiempo volvería a dicha situación.

La forma en que las trayectorias temporales de la inflación y el desempleo volverán a sus valores de equilibrio (en otras palabras, si el estado estacionario es un foco o un nodo estable), se puede también conocer a partir de la traza y el determinante de la matriz  $A$  que define el sistema dinámico (3.4).

El discriminante de la ecuación característica de  $A$  es  $(Tr(A))^2 - 4Det(A)$ , por tanto, se deduce:

- Si  $4Det(A) > (Tr(A))^2$ , el estado estacionario  $(\pi^*, U^*)$  es un foco estable, por tanto, si se sale del equilibrio, la trayectoria vuelve a él de forma oscilante.
- Si  $4Det(A) < (Tr(A))^2$ , el estado estacionario  $(\pi^*, U^*)$  es un nodo estable, por tanto, si se sale del equilibrio, la trayectoria vuelve a él de forma monótona.

### Diagrama de fases.

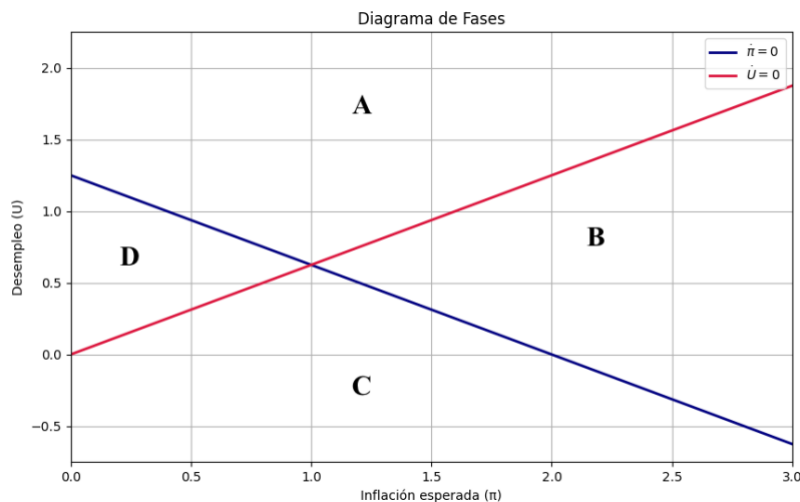
De cara a realizar un análisis cualitativo gráfico vamos a utilizar el diagrama de fases, que es una herramienta útil para entender la realidad económica que el modelo trata de explicar, sobre todo cuando no es posible determinar explícitamente la solución del modelo<sup>1</sup>. Como hemos explicado de forma genérica anteriormente, vamos a obtener las curvas de demarcación y las direcciones de movimiento de cada variable para así poder estudiar el comportamiento de las trayectorias solución.

En cuanto a la elaboración del diagrama de fases debemos obtener en primer lugar las curvas de demarcación, esto es:

$$\frac{d\pi}{dt} = 0 \rightarrow U = \frac{\alpha - T - (1 - g)\pi}{\beta}$$

$$\frac{dU}{dt} = 0 \rightarrow U = \frac{\alpha - T - m + g\pi}{\beta}$$

Que corresponden a dos rectas representadas en la *Figura 3.1* y cuyo punto de corte corresponde al estado estacionario. Gráficamente:



*Figura 3.1.*

Para determinar las direcciones de movimiento que toman las variables en las cuatro regiones en las que las curvas de demarcación dividen el plano de fases, debemos estudiar el signo de las expresiones  $\frac{d\pi}{dt}$  y  $\frac{dU}{dt}$  dadas en (3.4), de forma inmediata se tiene:

<sup>1</sup> El modelo (3.4) es lineal y por tanto es posible obtener las trayectorias solución de forma explícita, sin embargo, esto no ocurre en la mayoría de los modelos, por lo que nos interesa insistir en el uso de herramientas que permitan deducir el comportamiento de las trayectorias solución sin necesidad de determinarlas.

- A: la inflación esperada y el desempleo decrecen.
- B: la inflación esperada decrece mientras que el desempleo aumenta.
- C: la inflación esperada y el desempleo aumentan.
- D: la inflación esperada aumenta mientras que el desempleo decrece.

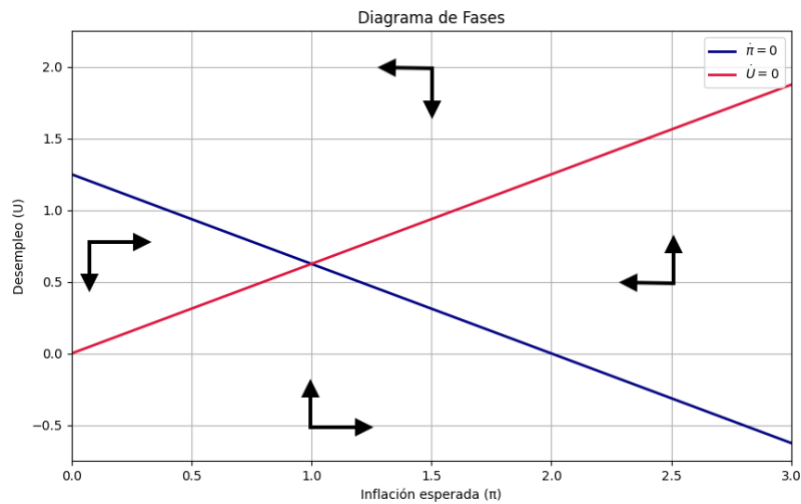


Figura 3.2.

Con esta información se obtiene la Figura 3.2. A partir de cual podemos trazar como serán las trayectorias solución del sistema (3.4).

Considerando como escenario paramétrico básico:

$$j = 0,5 \quad g = 0,5 \quad k = 0,5 \quad \beta = 0,8 \quad \alpha = 2 \quad T = 1 \quad m = 1$$

Y utilizando la programación en código Python que se puede encontrar en el Anexo 1, obtenemos:

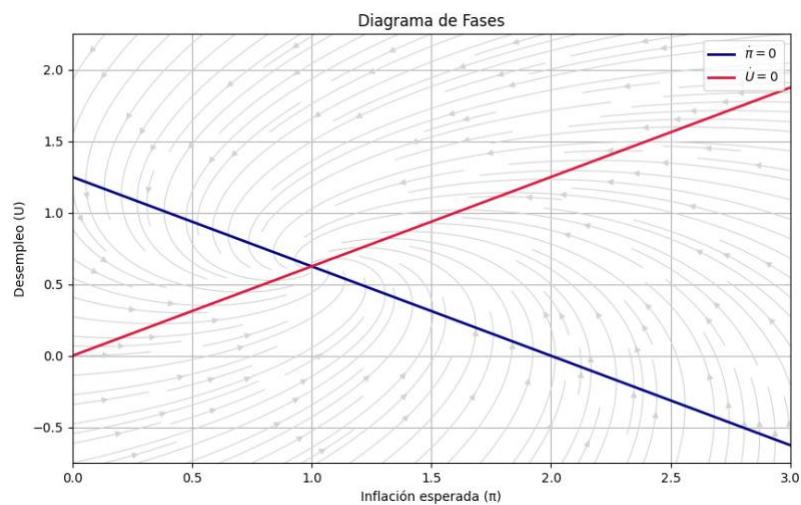


Figura 3.3.

Observamos que dados los parámetros que suponemos para el escenario base, el tipo de equilibrio que obtenemos es un foco estable, de ahí que las trayectorias que muestran el *campo vectorial* tomen la forma que observamos en el diagrama de fases de la *Figura 3.3*.

### 3.4. Dinámica comparativa.

La dinámica comparativa es un concepto equivalente a la estática comparativa que como su propio nombre indica es la propia de los modelos dinámicos. Sin embargo, en el ámbito dinámico según Samuelson (1947), las variaciones que nos permiten realizar dinámica comparativa son:

1. Cambios en las condiciones iniciales.
2. Cambios en los parámetros.
3. Cambios en las fuerzas exógenas.

El último tipo de cambio solo es propio de los modelos no autónomos, por lo que no será relevante en nuestro trabajo. Ahora procederemos a analizar las variaciones de los distintos parámetros iniciales del modelo.

Manteniendo los valores de los parámetros del escenario definido previamente, consideramos diferentes condiciones iniciales para observar que todas las trayectorias generadas convergen al estado estacionario.

Estas son:

$$(\pi_1, U_1) = (2,5, 0) \rightarrow \text{Morado}$$

$$(\pi_2, U_2) = (1,5, 2) \rightarrow \text{Azul marino}$$

$$(\pi_3, U_3) = (1, 0,25) \rightarrow \text{Azul turquesa}$$

$$(\pi_4, U_4) = (2, 0,2) \rightarrow \text{Verde}$$

$$(\pi_5, U_5) = (0,1, 0,8) \rightarrow \text{Amarillo}$$

Para los valores de los parámetros del escenario base se obtiene los siguientes valores de equilibrio:

$$U^* = 0,62$$

$$\pi^* = 1$$

$$p^* = 1$$

Las simulaciones obtenidas a partir del código Python se pueden ver en la *Figura*

3.4.

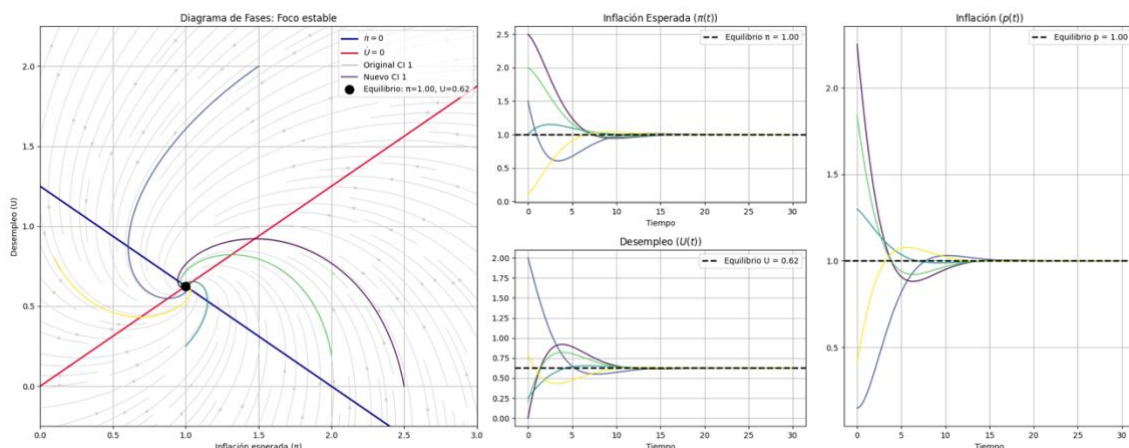


Figura 3.4.

### Variaciones en los valores de equilibrio.

En primer lugar, analizaremos aquellas variaciones que afectan exclusivamente a los valores de equilibrio, es decir, su trascendencia se limita a aparecer en las expresiones de la inflación de equilibrio y/o la tasa de desempleo de equilibrio. Estas son:

### Variaciones en $m$ .

Como la expresión de la inflación (esperada) de equilibrio muestra en (3.5), el único parámetro que influye es la tasa de crecimiento del dinero nominal en circulación en la economía, mostrando un efecto positivo. Sin embargo, a su vez tiene un efecto negativo sobre la tasa de desempleo (3.6). Gráficamente aumentando el valor de  $m$  hasta  $m' = 1,5$ :

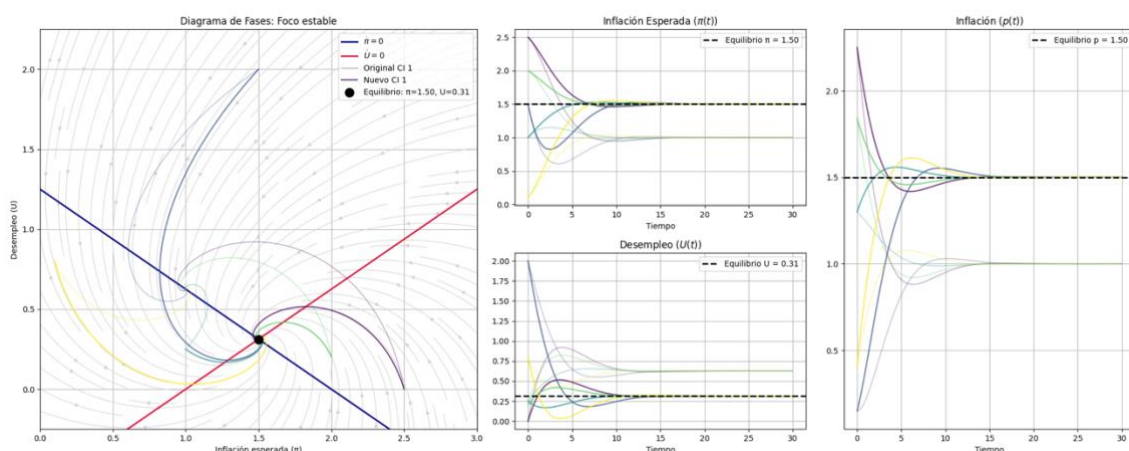


Figura 3.5.

Podemos observar que se da un *trade off* entre desempleo e inflación, lo cual constituye la idea fundamental del modelo junto a que la inflación es solo un fenómeno monetario.

### Variaciones en $T$ .

Centrándonos en la productividad de los trabajadores y atendiendo a las expresiones de equilibrio, observamos que únicamente afecta negativamente a la tasa de paro de equilibrio. Gráficamente aumentando el valor de  $T$  hasta  $T' = 1,3$ :

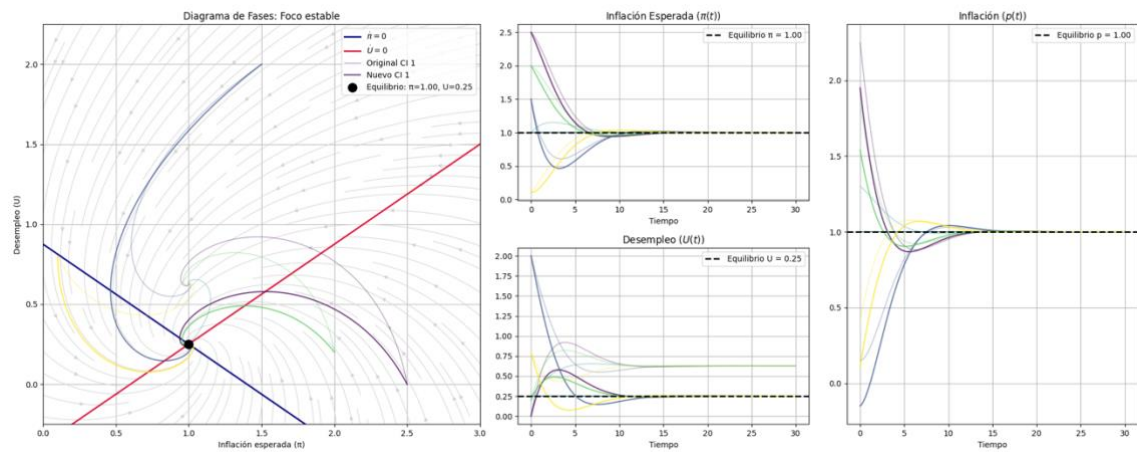


Figura 3.6.

### Variaciones en $\alpha$

El parámetro  $\alpha$  es un parámetro de carácter estructural que refleja presiones inflacionarias independientes de la productividad y el desempleo, por lo que tiende a estar relacionado con factores institucionales. Este afecta positivamente a la tasa de desempleo de equilibrio. Gráficamente aumentado el valor de  $\alpha$  hasta  $\alpha' = 2,5$ :

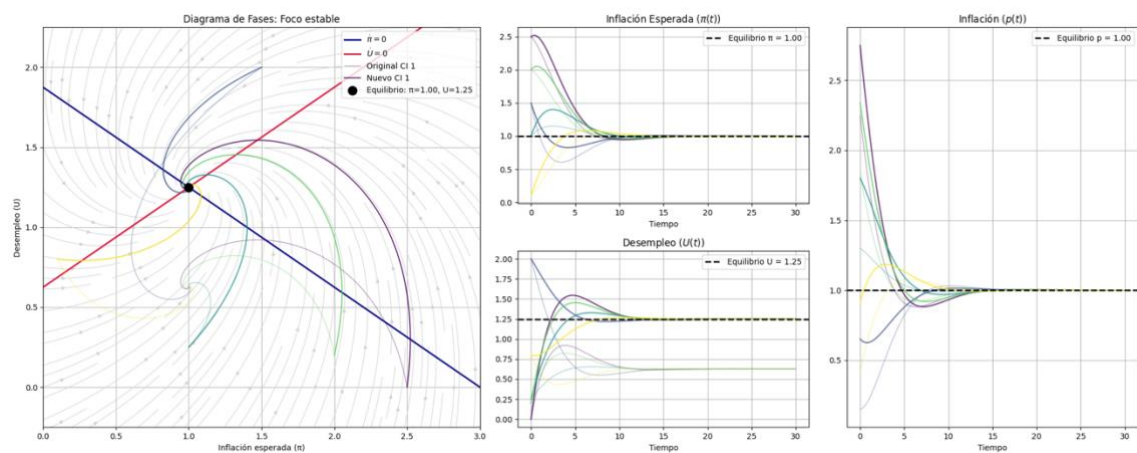


Figura 3.7.

### Variaciones en el tipo de equilibrio y/o tiempo de convergencia al equilibrio.

Existen variaciones que afectan al tipo de equilibrio y/o al tiempo en el que las trayectorias alcanzan dicho equilibrio. Centrándonos primero en los parámetros que afectan al tiempo de convergencia, estos son los que conforman la parte real de los valores propios, ya que el escenario base da lugar a un foco estable y por tanto los valores propios asociados al sistema son complejos con parte real negativa. Esto es:

$$\lambda = \frac{Tr(A)}{2} \pm \frac{\sqrt{4Det(A) - (Tr(A))^2}}{2} i$$

Donde la parte real sabemos que es:

$$\frac{Tr(A)}{2} = -\frac{j(1-g) + k\beta}{2} < 0$$

Las variaciones que generaran una convergencia más rápida serán aquella que provoquen que el valor absoluto de la traza sea mayor, es decir, incrementos de  $j$ ,  $k$  y  $\beta$  o reducciones de  $g$ .

Por otra parte, hemos mencionado la posibilidad de que ante cambios en los parámetros se produjese un tipo de equilibrio u otro, más concretamente si:

$$\text{Si } 4Det(A) > (Tr(A))^2 \rightarrow \text{Foco estable.}$$

$$\text{Si } 4Det(A) < (Tr(A))^2 \rightarrow \text{Nodo estable}$$

El tipo de equilibrio asociado al escenario base es un foco estable, por ello vamos a señalar qué tipo de variaciones convertirían al equilibrio en un nodo estable. Como podemos observar serán aquellos que hagan que la  $(Tr(A))^2$  sea mayor a  $4Det(A)$ . En nuestro escenario base, esto son: reducciones en  $j$ , aumentos en  $k$ , aumentos en  $\beta$ , lo suficientemente grandes como para que satisfagan:

$$(Tr(A))^2 - 4Det(A) = (-j(1-g) - k\beta)^2 - 4jk\beta > 0$$

### Variaciones en $g$ .

Siendo  $g$  un parámetro que condiciona cuanto afectará las expectativas de inflación a la evolución de la inflación, no tan solo afecta positivamente a la tasa de desempleo de equilibrio, sino que también condiciona el tiempo de convergencia al equilibrio. Gráficamente reduciendo el valor de  $g$  hasta  $g' = 0,15$ :

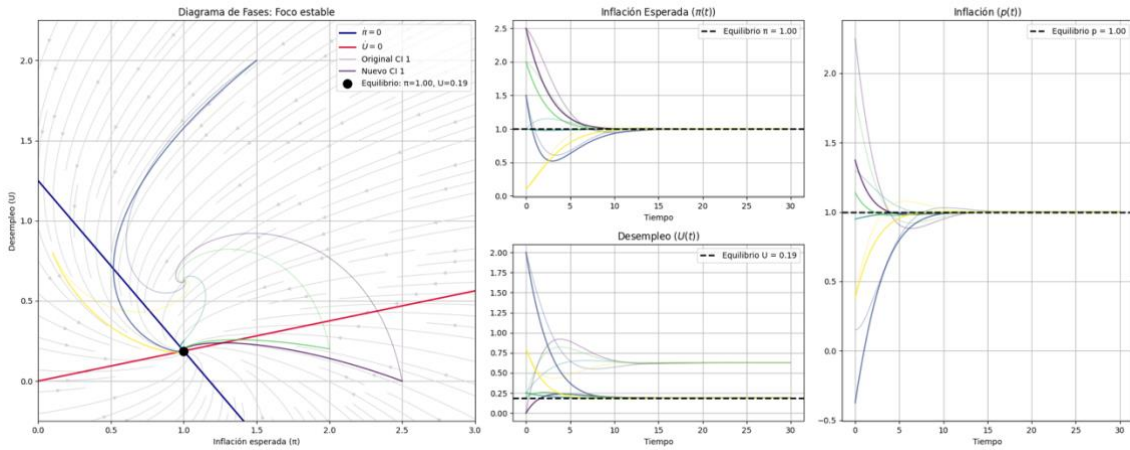


Figura 3.8.

Observamos que una reducción en este parámetro supone una reducción en el desempleo de equilibrio y reduce el tiempo de convergencia al desempleo de equilibrio.

### Variaciones en $\beta$ .

Ante variaciones en  $\beta$  podemos observar hasta tres cambios en el modelo, afectará negativamente a la tasa de desempleo de equilibrio, al tiempo de convergencia al equilibrio y al tipo de equilibrio. Gráficamente aumentado el valor de  $\beta$  hasta  $\beta' = 2,95$ :

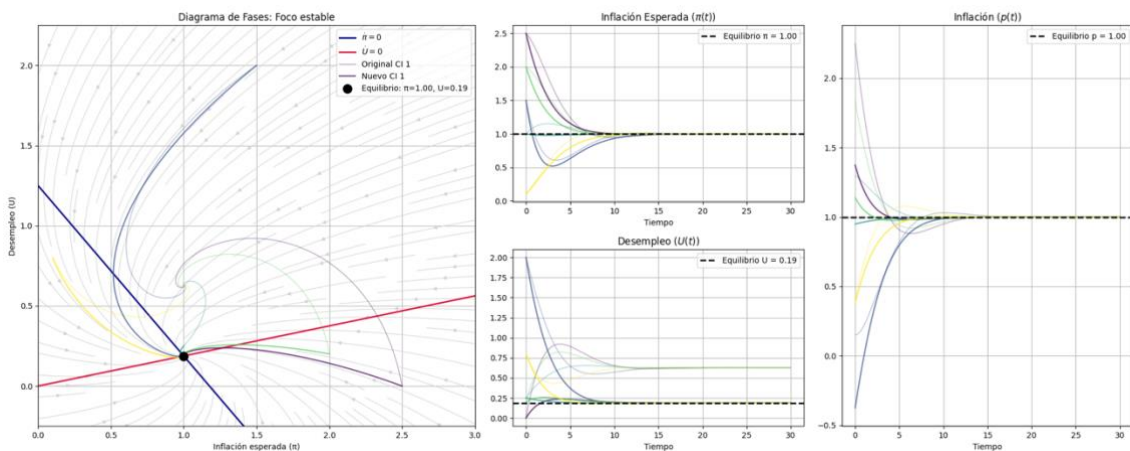


Figura 3.9.

Observamos como un aumento lo suficientemente grande no tan solo generará una reducción del desempleo y una convergencia más rápida, sino que afecta al tipo de equilibrio que pasa de ser un foco estable a un nodo estable.

### Variaciones en $k$ .

El parámetro  $k$  no tiene implicaciones en los niveles de equilibrio, sin embargo, si influye en el tiempo de convergencia y el tipo de equilibrio. Gráficamente aumentado el valor de  $k$  hasta  $k' = 1,9$ :

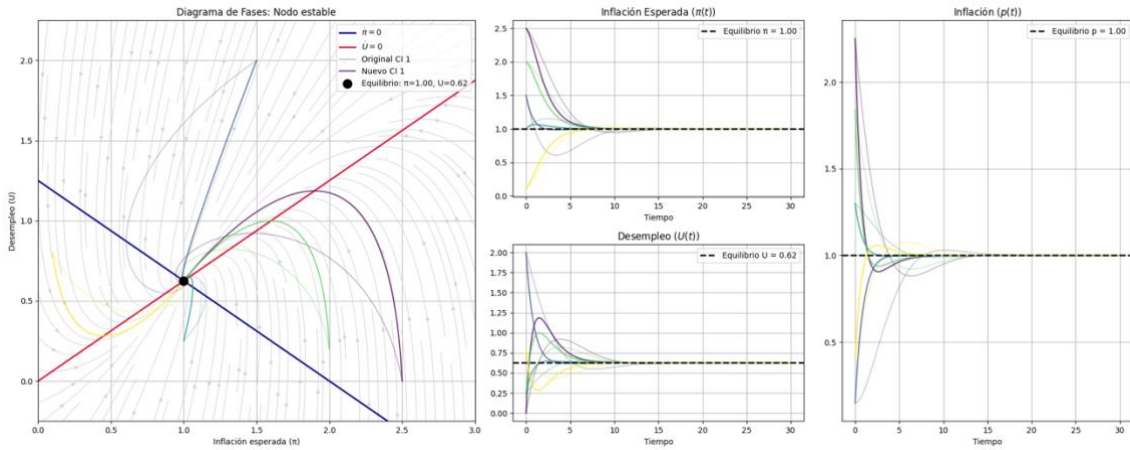


Figura 3.10.

Observamos que ante un aumento la economía converge a los valores de equilibrio con menos oscilaciones, lo que a su vez implica una reducción en el tiempo, si dicho aumento es lo suficientemente grande el tipo de equilibrio pasa a ser un nodo estable.

### Variaciones en $j$ .

El parámetro  $j$  de nuevo no altera los valores de equilibrio, sin embargo, sí que afecta al tiempo de convergencia y al tipo de equilibrio. Gráficamente reduciendo el valor de  $j$  hasta  $j' = 0,1$ :

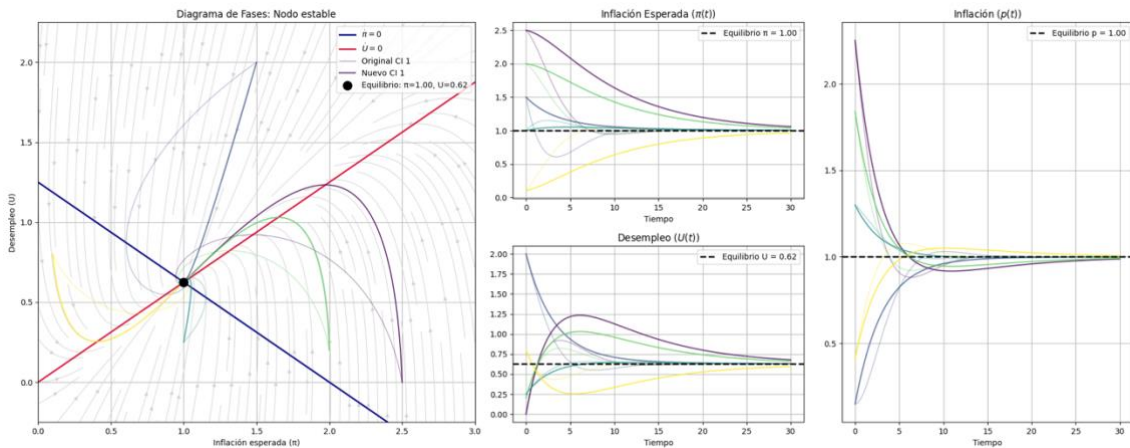


Figura 3.11.

Observamos como ante reducciones de  $j$  el tiempo de convergencia aumenta, si dicha reducción es lo suficientemente grande, a pesar de que el tiempo será superior la convergencia será menos oscilante.

## 4. INFLACIÓN Y DESEMPLEO: UN MODELO NO LINEAL.

### 4.1. Introducción.

Una vez comprendidas las ideas que subyacen en este modelo y la realidad económica que busca representar, vamos a introducir una no linealidad con la intención de, en primer lugar, dotar de una mayor complejidad el modelo inicial y ver las diferencias que implican la existencia de una no linealidad. En segundo lugar, reflejar una realidad que nos permitirá recalcar la importancia de las expectativas de los individuos en fenómenos económicos como la inflación y el desempleo.

La no linealidad en este caso provocará que la estabilidad no sea algo tan fácil de garantizar como en el caso anterior debido a la mayor variedad de resultados que la introducción de un término no lineal brinda a un modelo económico dinámico.

### 4.2. Las ecuaciones del modelo.

Este modelo no lineal mantiene igual dos de las tres ecuaciones fundamentales del modelo anterior, la ecuación que explica los determinantes de la inflación dada en (3.1) se mantiene respecto al anterior modelo, así como los supuestos que hay detrás de ella.

Sin embargo, en la segunda ecuación, la de la evolución temporal de las expectativas de inflación aparece un nuevo término,

$$\frac{d\pi}{dt} = j(p - \pi) - \gamma\pi^2; \quad (0 < j < 1) \quad (4.1)$$

Donde  $\gamma$  es un parámetro que busca representar el grado de confianza que tienen los individuos que conforman la economía en sus autoridades monetarias. Este modelo busca dar continuidad al anterior y este nuevo término ( $\gamma\pi^2$ ) al dar un peso superior a las expectativas de inflación, supone que los individuos han interiorizado la principal conclusión que nos brinda la versión lineal, que no es otra sino que la inflación viene exclusivamente determinada por la actuación del banco central en materia monetaria. Por lo que ahora las actuaciones pasadas de la autoridad monetaria generaran una valoración acerca de ella en los individuos que tendrá implicaciones en los valores de equilibrio futuro.

Finalmente, en cuanto a la evolución temporal de la tasa de desempleo, de nuevo se mantiene respecto al anterior modelo dada en (3.3).

Introduciendo (3.1) en (4.1) y (3.3) se obtiene el siguiente modelo dinámico bidimensional, en tiempo continuo, no lineal y autónomo:

$$\begin{aligned}\frac{d\pi}{dt} &= j[\alpha - T - \beta U - (1 - g)\pi] - \gamma\pi^2 \\ \frac{dU}{dt} &= -k(m - \alpha + T + \beta U - g\pi)\end{aligned}$$

Sin embargo, dada la no linealidad del modelo ahora no cabe la posibilidad de representar este sistema de ecuaciones en forma matricial.

## 4.2. Análisis cualitativo del modelo.

### Estados estacionarios

Imponiendo las condiciones de estacionariedad en el modelo dinámico (2.4) obtenemos un sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned}0 &= j[\alpha - T - \beta U - (1 - g)\pi] - \gamma\pi^2 \\ 0 &= -k(m - \alpha + T + \beta U - g\pi)\end{aligned}\tag{4.2}$$

Despejando  $U$  en la segunda ecuación:

$$U = \frac{g\pi - m + \alpha - T}{\beta}\tag{4.3}$$

y sustituyendo en la primera ecuación, se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado para la inflación:

$$\gamma\pi^2 + j\pi - jm = 0$$

cuyas soluciones son<sup>2</sup>:

$$\pi^* = \frac{-j \pm \sqrt{j^2 + 4\gamma jm}}{2\gamma}\tag{4.4}$$

Introduciendo (4.4) en (4.3) se obtiene las soluciones para la tasa de desempleo<sup>3</sup>,

---

<sup>2</sup> Observar que para que las soluciones sean reales ha de ocurrir que  $j^2 + 4\gamma jm > 0$ , desigualdad que está garantizado si  $\gamma > 0$ . Sin embargo, si  $\gamma < 0$ , se ha de imponer una cota inferior a su valor  $-\frac{j}{4m} \leq \gamma < 0$ .

<sup>3</sup> Se ha de verificar que  $0 \leq U^* = \frac{g\pi^* - m + \alpha - T}{\beta} \leq 1$ . Por tanto, los parámetros del modelo han de cumplir  $\frac{m - (\alpha - T)}{g} \leq \pi^* \leq \frac{\beta}{g} + \frac{m - (\alpha - T)}{g}$ .

$$U^* = \frac{g\pi^* - m + \alpha - T}{\beta} \quad (4.5)$$

Analizando esta relación entre los valores de equilibrio de ambas variables, recogida en (4.5), se observa la primera diferencia con el modelo lineal. En este caso, la relación directa entre el equilibrio de la inflación esperada y el equilibrio de la tasa de desempleo es positiva:

$$\pi^* \text{ crece} \Leftrightarrow U^* \text{ crece}$$

Sin embargo, si el aumento de  $\pi^*$  es generado por incrementos de  $m$  se mantiene el *trade off* del modelo lineal, ya que el efecto directo de  $m$  en  $U^*$  es mayor al efecto directo de  $\pi^*$ , esto queda patente en las posteriores simulaciones.

Por lo que observamos que habrá dos estados estacionarios los cuales debemos analizar:

$$E_1^* = (\pi_1^*, U_1^*) = \left( \frac{-j - \sqrt{j^2 + 4\gamma jm}}{2\gamma}, \frac{g\pi_1^* - m + \alpha - T}{\beta} \right)$$

$$E_2^* = (\pi_2^*, U_2^*) = \left( \frac{-j + \sqrt{j^2 + 4\gamma jm}}{2\gamma}, \frac{g\pi_2^* - m + \alpha - T}{\beta} \right)$$

En el caso de que exista confianza en las autoridades monetarias,  $\gamma > 0$ , nos encontramos con la siguiente situación:

- El estado estacionario  $E_1^* = (\pi_1^*, U_1^*)$ , representa una situación de deflación.
- El estado estacionario  $E_2^* = (\pi_2^*, U_2^*)$ , representa una situación de inflación.

En el caso contrario, si existe cierta desconfianza en las autoridades monetarias,  $-\frac{j}{4m} \leq \gamma < 0$ , nos encontramos con que:

- El estado estacionario  $E_1^* = (\pi_1^*, U_1^*)$ , representa una situación de inflación.
- El estado estacionario  $E_2^* = (\pi_2^*, U_2^*)$ , representa una situación de inflación.

### **Estabilidad dinámica de los equilibrios**

Como hemos mencionado anteriormente, ahora la estabilidad pasa a ser un tema complejo de abordar, ya que como comprobaremos esta va a ser muy sensible a los valores de los parámetros. De cara a estudiar la estabilidad de los dos equilibrios obtenidos consideramos la matriz Jacobiana del sistema que define el modelo dinámico (4.2) evaluada en cada uno de ellos. Esto es:

$$J^* = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial \dot{\pi}}{\partial \pi} \right|_{(\pi^*, U^*)} & \left. \frac{\partial \dot{\pi}}{\partial U} \right|_{(\pi^*, U^*)} \\ \left. \frac{\partial \dot{U}}{\partial \pi} \right|_{(\pi^*, U^*)} & \left. \frac{\partial \dot{U}}{\partial U} \right|_{(\pi^*, U^*)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j(1-g) - 2\gamma\pi^* & -j\beta \\ kg & -k\beta \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

donde  $\dot{\pi}$  y  $\dot{U}$  son  $\frac{d\pi}{dt}$  y  $\frac{dU}{dt}$  respectivamente.

La matriz (4.6) evaluada en el estado estacionario  $E_1^* = (\pi_1^*, U_1^*)$  queda:

$$J_1^* = \begin{pmatrix} jg + \sqrt{j^2 + 4\gamma jm} & -j\beta \\ kg & -k\beta \end{pmatrix}$$

cuya traza y determinante son:

$$Tr(J_1^*) = jg + \sqrt{j^2 + 4\gamma jm} - k\beta$$

$$Det(J_1^*) = -k\beta\sqrt{j^2 + 4\gamma jm}$$

Salta a la vista que independientemente del valor de los parámetros,  $Det(J_1^*) < 0$  por lo que las *condiciones de Routh-Hurwitz* no se cumplirán y, por tanto, el equilibrio  $E_1^* = (\pi_1^*, U_1^*)$  será inestable.

Además, se verifica  $(Tr(J_1^*))^2 - 4Det(J_1^*) > 0$ , por lo que los valores propios de  $J_1^*$  serán reales. Y al ser  $Det(J_1^*) < 0$ , se concluye que un valor propio será positivo y otro negativo. En conclusión, nos encontraremos con una inestabilidad tipo punto de silla.

El signo del parámetro  $\gamma$  es relevante para lo que significa el equilibrio  $E_1^* = (\pi_1^*, U_1^*)$ . Esto es:

$$\pi_1^* = \frac{-j - \sqrt{j^2 + 4\gamma jm}}{2\gamma} \begin{cases} \gamma > 0 \rightarrow \pi_1^* < 0 \rightarrow \text{Deflación} \\ -\frac{j}{4m} \leq \gamma < 0 \rightarrow \pi_1^* > 0 \rightarrow \text{Inflación} \end{cases}$$

El resultado propio de la economía en la que existe confianza en las autoridades monetarias indica una situación que hasta ahora no habíamos contemplado la inflación adquiere tasas negativas de crecimiento, es decir, se da una *deflación*. Este resultado resulta económicamente discutible, ya que,  $m > 0$  a priori no debería provocar  $\pi_1^* < 0$ , es por ello que lo descartaremos como algo factible.

En cuanto al resultado propio de la economía en la que no existe confianza en las autoridades monetarias, se dará inflación, pero dada la inestabilidad esta tomará valores desorbitados por lo que la consideramos *hiperinflación*.

La matriz (4.6) evaluada en el estado estacionario  $E_2^* = (\pi_2^*, U_2^*)$  queda:

$$J_2^* = \begin{pmatrix} jg - \sqrt{j^2 + 4\gamma jm} & -j\beta \\ kg & -k\beta \end{pmatrix}$$

con:

$$Tr(J_2^*) = jg - \sqrt{j^2 + 4\gamma jm} - k\beta$$

$$Det(J_2^*) = k\beta\sqrt{j^2 + 4\gamma jm}$$

Salta a la vista que independientemente de los parámetros  $Det(J_2^*) > 0$  por lo que la segunda *condición de Routh-Hurwitz* se cumplirá, sin embargo, el signo de la traza de nuevo dependerá de si  $\gamma$  toma valores positivos o negativos.

$$Tr(J_2^*) = jg - \sqrt{j^2 + 4\gamma jm} - k\beta \begin{cases} \gamma > 0 \rightarrow Tr(J_2^*) < 0 \rightarrow \text{Estable} \\ -\frac{j}{4m} \leq \gamma < 0 \rightarrow \text{Signo } Tr(J_2^*) \text{ es indefinido} \end{cases}$$

Por tanto, en el caso  $\gamma > 0$  el equilibrio  $E_2^* = (\pi_2^*, U_2^*)$  será asintóticamente estable. Sin embargo, en el caso de  $\gamma < 0$ :

- Si  $jg < \sqrt{j^2 + 4\gamma jm} + k\beta$  entonces  $E_2^* = (\pi_2^*, U_2^*)$  será estable.
- Si  $jg > \sqrt{j^2 + 4\gamma jm} + k\beta$  entonces  $E_2^* = (\pi_2^*, U_2^*)$  será inestable.

Finalmente, analizando  $\pi_2^*$  obtenemos que:

$$\pi_2^* = \frac{-j + \sqrt{j^2 + 4\gamma jm}}{2\gamma} \begin{cases} \gamma > 0 \rightarrow \pi_2^* < 0 \rightarrow \text{Inflación} \\ -\frac{j}{4m} \leq \gamma < 0 \rightarrow \pi_2^* > 0 \rightarrow \text{Inflación} \end{cases}$$

El resultado propio de la economía en la que existe confianza en las autoridades monetarias nos brindará una inflación de equilibrio muy contralada, es decir, ante  $\gamma > 0$  se dará una inflación y un desempleo menor que cuando  $\gamma = 0$ , como veremos en las simulaciones.

En cuanto al resultado propio de la economía en la que no existe confianza en las autoridades monetarias, se dará inflación, pero de nuevo dada la inestabilidad estaremos hablando de *hiperinflación*.

La conclusión de este modelo no lineal es que una desconfianza en las autoridades monetarias conduce a niveles de *hiperinflación*, sabiendo que la confianza puede depender de las actuaciones pasadas, ahora los bancos centrales tienen que asumir la

responsabilidad de mantener unas políticas monetarias ortodoxas, lo cual además de evitar la *hiperinflación* les conducirá a niveles de equilibrio más deseables que cuando no estaba incorporado este término en las expectativas de los individuos.

**Diagrama de fases.**

Siguiendo los mismos pasos que en el modelo lineal, para obtener el diagrama de fases del sistema dinámico (4.2) debemos obtener en primer lugar las curvas de demarcación, esto es:

$$\frac{d\pi}{dt} = 0 \rightarrow \frac{\alpha - T - (1 - g)\pi - \frac{\gamma}{j}\pi^2}{\beta}$$

$$\frac{dU}{dt} = 0 \rightarrow U = \frac{\alpha - T - m + g\pi}{\beta}$$

Se observa que la curva de demarcación  $\frac{d\pi}{dt} = 0$ , no es una recta debido a la introducción de un término no lineal en el modelo dinámico.

Considerando como escenario paramétrico base para el modelo dinámico no lineal, el mismo que en el modelo lineal añadiendo el parámetro  $\gamma = 0,1$ , obtenemos el plano de fases dividido en distintas regiones, efectuando el mismo análisis que hemos hecho en el modelo lineal obtenemos el movimiento de las variables:

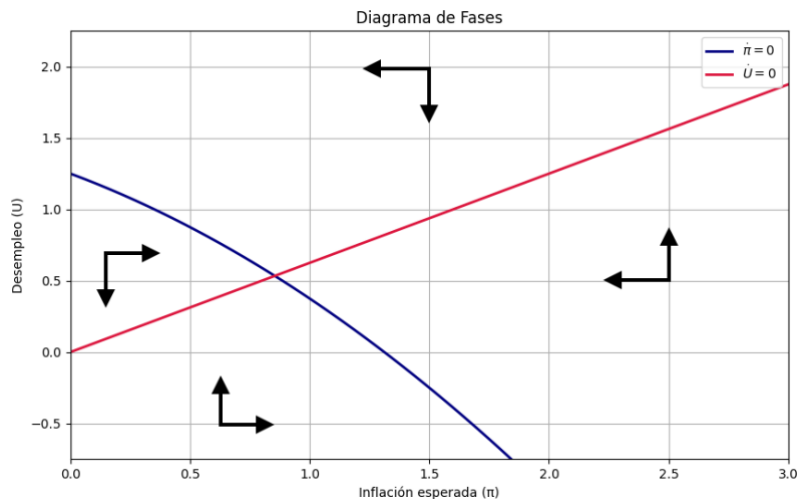


Figura 4.1.

Introduciendo el campo vectorial que define el modelo (4.2) mediante la programación en Python, podemos observar cómo serán las trayectorias solución del modelo.

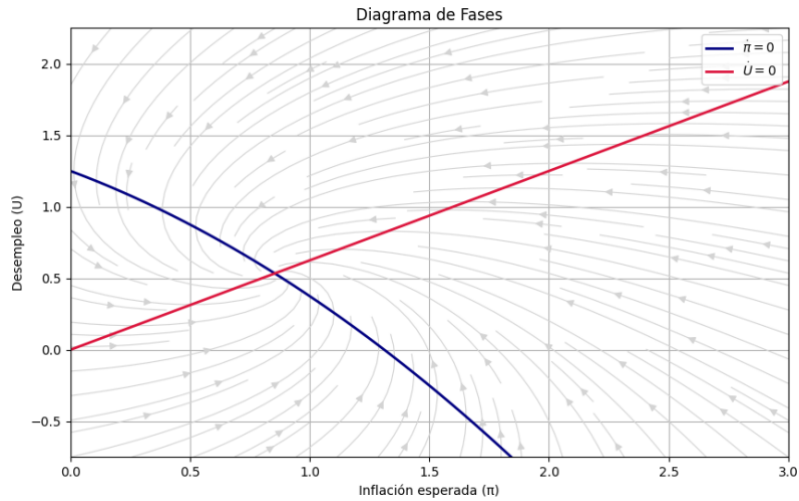


Figura 4.2.

Observamos que dados los parámetros que suponemos para el escenario base, el tipo de equilibrio que obtenemos es un foco estable.

### 4.3. Dinámica comparativa.

Tomando el valor de los parámetros del escenario base, así como las condiciones iniciales consideradas del modelo lineal, para poder hacer una comparación entre ambos modelos, obtenemos los siguientes valores de equilibrio:

$$U_2^* = 0,53$$

$$\pi_2^* = 0,85$$

$$p_2^* = 0,85$$

La simulación realizada en Python da lugar a las siguientes gráficas:

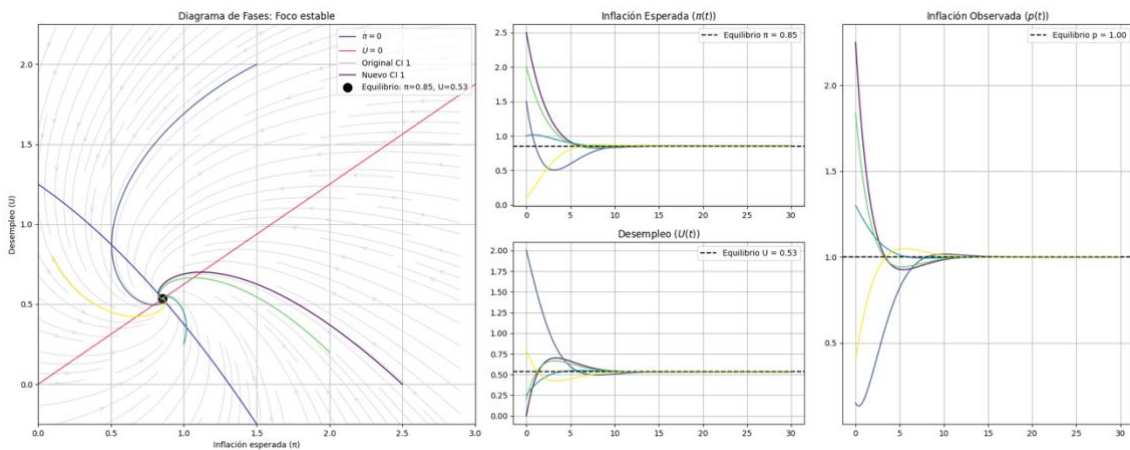


Figura 4.3.

Observamos como la introducción del término no lineal con parámetro  $\gamma$  positivo implica valores inferiores de inflación y desempleo. Es decir, la existencia de confianza

en las autoridades monetarias implica que se den valores más deseables gracias al “optimismo” que este parámetro introduce en las expectativas de la gente.

Como podemos imaginar, los efectos que genera la variación de muchos de los parámetros son iguales que en el modelo lineal, por lo que nos vamos a centrar en aquellos parámetros cuya variación resulte una novedad, y adicionalmente abordaremos las variaciones en la tasa de crecimiento del dinero nominal.

### Variaciones en $\gamma$

Ante un aumento de la confianza en las autoridades monetarias, cabe esperar un efecto inverso en los valores de equilibrio. Gráficamente un aumento del valor de  $\gamma$  hasta  $\gamma' = 0,2$ :

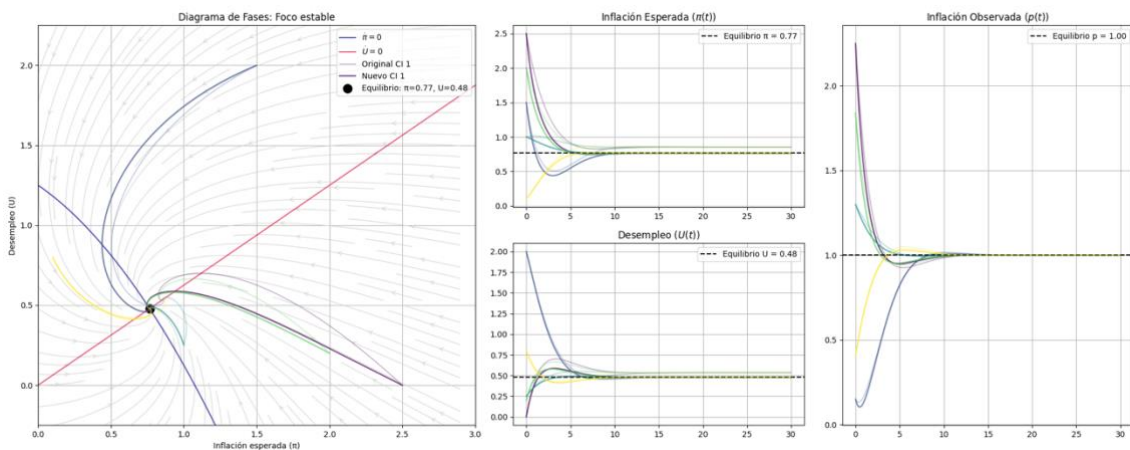


Figura 4.4.

Observamos como efectivamente, tanto la inflación como la tasa de desempleo de equilibrio se ven reducidos, por lo que generar una sensación de confianza en los individuos a través de una política monetaria ortodoxa pasa a ser crucial. En contrapartida y como ya hemos explicado de forma analítica anteriormente, reducciones en  $\gamma$  que puedan provocar que tome valores negativos ocasionando hiperinflación e inestabilidad.

### Variaciones en $j$

Si bien el parámetro  $j$  anteriormente no afectaba a los valores de equilibrio, la introducción de la no linealidad hace que pase a ser determinante. Este parámetro explica la velocidad con la que los agentes económicos actualizan sus expectativas inflacionarias. Luego si  $j$  aumenta, los agentes ajustan más rápido sus expectativas de inflación ante aumentos de la inflación real retroalimentando la inflación lo que a su vez genera en este caso, un aumento del desempleo. Gráficamente un aumento del valor de  $j$  hasta  $j' = 0,75$ :

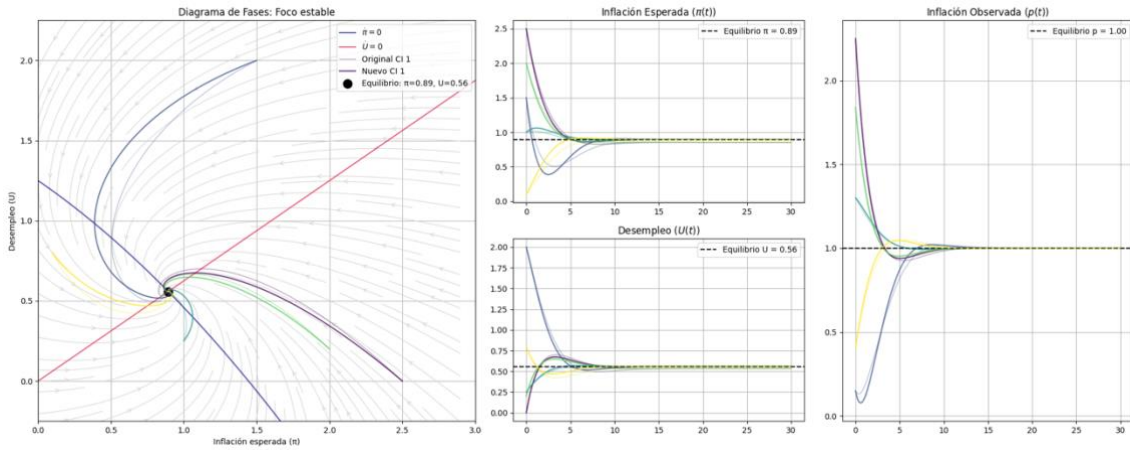


Figura 4.5.

Observamos que en cuenta, las trayectorias convergen antes a los valores de equilibrio.

### Variaciones en $m$

En cuanto a la tasa de crecimiento del dinero nominal, a diferencia de las anteriores variaciones, lo que buscamos es garantizar que se mantiene el *trade off* entre inflación y desempleo. Gráficamente, un aumento de  $m = 1$  hasta  $m' = 1,2$ :

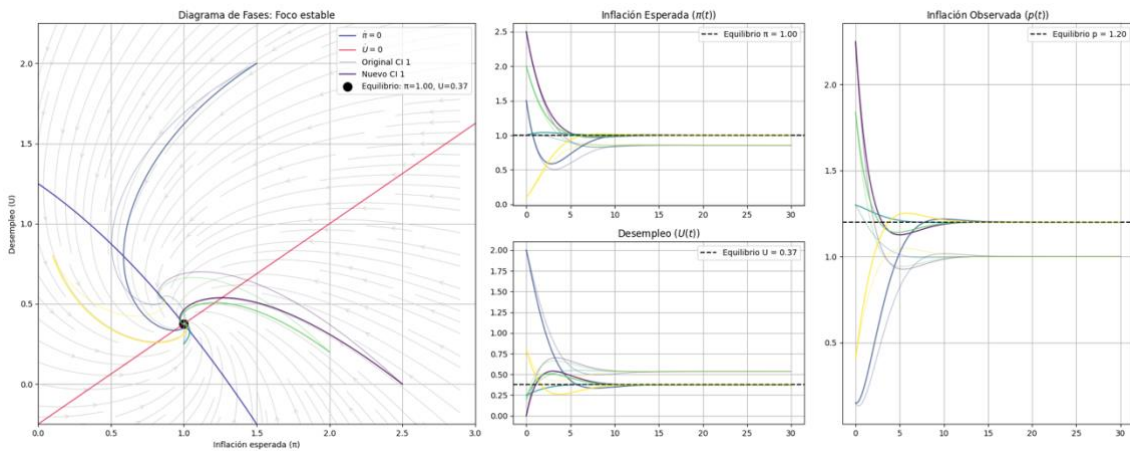


Figura 4.6.

Observamos como a pesar de (4.5), se mantiene el *trade off*, por lo que ante aumento en  $m$  se da un aumento de la inflación de equilibrio y una reducción de la tasa de desempleo de equilibrio.

## 5. CONCLUSIONES.

En cuanto a las conclusiones económicas de los modelos, cada uno nos brinda reflexiones que abordar, en el caso del modelo lineal observamos como la inflación es únicamente un fenómeno monetario, que tan solo depende de la tasa de crecimiento del dinero nominal, la cual es determinada por la actuación de las autoridades monetarias, además observamos que se produce un *trade off* entre inflación y desempleo, es decir, aumentos de inflación suponen reducciones de la tasa de desempleo, por lo que las autoridades monetarias resultan tremendamente influyentes en la realidad de los individuos de la economía. En cuanto al modelo no lineal, observamos como las expectativas de los individuos adquieren un papel protagonista en la economía, ya que ahora una misma situación paramétrica puede conllevar *hiperinflación* o una inflación mucho más contenida, en función de la confianza de estos en la autoridad monetaria, por lo que esta pasa a estar sometida a la opinión de los individuos. Además, a pesar de que la relación directa entre los valores de equilibrio de inflación y desempleo es positiva, se mantiene el *trade off* cuando la variación proviene de la tasa de crecimiento del dinero nominal, por lo que el pilar fundamental del modelo lineal se mantiene.

Tal y como comentaba en la Introducción este trabajo ha supuesto para mí una mayor profundización en las ecuaciones diferenciales y su utilidad en el análisis económico, sin embargo, cabe mencionar que el trabajo cuenta con limitaciones y es susceptible a extensiones.

La principal limitación del trabajo es que las conclusiones acerca de las variaciones realizadas en los apartados de dinámica comparativa están condicionadas al escenario base planteado, para que las conclusiones acerca del comportamiento fueran absolutas deberíamos someter al modelo a un estudio más analítico o a un barrido de escenarios bases. La otra gran limitación es que en todo momento se supone que la tasa de crecimiento del dinero nominal es positiva cuando en realidad se podría dar una política monetaria restrictiva ( $m < 0$ ), si bien el modelo lineal simplemente pasa a brindar equilibrios con *deflación*, los equilibrios del modelo no lineal pierden coherencia, esto se debe a que la no linealidad está expresamente pensada para representar situaciones de inflación positiva.

En cuanto posibles extensiones, si bien yo he planteado una no linealidad en las expectativas, cabe la opción de introducir otros tipos de no linealidades al sistema inicial, siempre que estas contengan sentido económico.

Para concluir me gustaría destacar lo que para mí ha supuesto este Trabajo Fin de Grado. En primer lugar, he podido comprobar la potencia de las ecuaciones diferenciales a la hora de permitir recrear fenómenos económicos dinámicos. En segundo lugar, he aprendido programación básica en Python y he utilizado el software *Wolfram Mathematica*, la programación tiende a ser asociada a otro tipo de campos de estudio, sin embargo, a pesar de mi inexperiencia he conseguido simular gráficamente ambos modelos lo cual facilita la interpretación de ellos. Finalmente, este trabajo me ha permitido profundizar en uno de los modelos que más interés me suscitaba, al cual he sido capaz de aportar una no linealidad, que busca representar la importancia de los individuos en Economía como ciencia social que es. La no linealidad supone, desde mi punto de vista, una demostración más de como un comportamiento social puede ser expresado en términos matemáticos señalando así la capacidad que las matemáticas tienen para modelizar la realidad, por lo que, en mi opinión aquel que subestima las matemáticas como una herramienta para explicar fenómenos económicos escudándose en el carácter social de la economía, solo se está sobreestimando a sí mismo.

## **6. BIBLIOGRAFÍA.**

Chiang, C.(2006). Métodos fundamentales de economía matemática. Mc Graw Hill.

Fernández, C., Vázquez, F.J. y Vegas, J.M. (2003). Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos. Thomson.

Friedman, M. (1968). The Role of Monetary Policy. The American Economic Review, Vol. 53, No. 1.

Friedman, M. (1992). La economía monetarista. Gedisa.

Gandolfo, G. (2010). Economic Dynamics. Springer. Fourth edition.

Jarne, G., Pérez-Grasa, I. y Minguillón, E. (2001). Matemáticas para la economía. Programación matemática y Sistemas Dinámicos. Mc Graw Hill.

Phillips, A.W. (1958). The Relation Between Unemployment and the Rate of Change of Money Wages Rates in the United Kingdom, 1861-1957.

Roncaglia, A. (2001). La riqueza de las ideas. Prensas de la Universidad de Zaragoza.

Samuelson. P.A. (1947). Foundations of Economic Analysis. Harvard University Press.

Samuelson. P.A., Solow R.M. (1960). Analytical Aspects of Anti-Inflation Policy. The American Economic Review, Vol. 50, No. 2.

Snowdon, B. y R. Vane, H. (2005). Modern Macroeconomics. Its Origins, Development and Current State. Edward Elgar.

Zill, D.G., Cullen, M.R. (2009). Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera. Cengage Learning.

## 7. ANEXO 1. SIMULACIÓN DE MODELOS DINÁMICOS EN CÓDIGO PYTHON.

Otro de los objetivos del trabajo es llevar a cabo una aproximación al uso de código para programar, a través de código *Python* en el entorno de *Google Colaboratory* vamos a simular el modelo, para así poder realizar dinámica comparativa y ver gráficamente las conclusiones del modelo.

### Programación del modelo.

El primer paso sería importar una serie de librerías que nos permitirán tanto la resolución como la visualización gráfica de nuestro modelo. Estas son:

1. *Numpy*: librería para operaciones numéricas.
2. *Matplotlib.pyplot*: para generar gráficos.
3. *Odeint*: proveniente de *scipy.integrate* para la resolución de ecuaciones diferenciales.
4. *Interact* y *FloatSlider*: proveniente de *ipywidgets* nos permitirán crear controles interactivos.
5. *Gridspec*: para la organización de gráficos y subgráficos.

Para ello deberemos introducir en nuestro terminal lo siguiente:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
from ipywidgets import interact, FloatSlider
import matplotlib.gridspec as gridspec
```

Una vez instaladas las librerías ahora debemos definir los sistemas, en este caso vamos a definir dos sistemas uno que se mantendrá fijo de acuerdo a unos parámetros iniciales y un segundo que podremos variar para así observar de una forma nítida las implicaciones de los cambios a la hora de realizar dinámica comparativa, para ello deberemos introducir lo siguiente en nuestro terminal:

```
# PARÁMETROS INICIALES FIJOS
j_initial, g_initial, k_initial = 0.5, 0.5, 0.5
beta_initial, alpha_initial = 0.8, 2.0
T_initial, m_initial = 1.0, 1.0
```

```
# SISTEMA ACTUAL (parámetros sliders)
```

```
def sistema(y, t):  
    pi, U = y  
    p = alpha - T - beta*U + g*pi  
    dpi = j*(p - pi)  
    dU = -k*(m - p)  
    return [dpi, dU]
```

```
# SISTEMA ORIGINAL (parámetros fijos)
```

```
def sistema_original(y, t):  
    pi, U = y  
    p = alpha_initial - T_initial - beta_initial*U + g_initial*pi  
    dpi = j_initial*(p - pi)  
    dU = -k_initial*(m_initial - p)  
    return [dpi, dU]
```

Los sistemas se definen entorno a un *vector de estado* ( $y$ ) que debe contener las variables dinámicas del modelo, el cual luego especificamos que está conformado por  $\pi(pi)$  y  $U$ , y por  $t$  que es el tiempo (aunque no afecte explícitamente es necesario). Posteriormente escribimos las tres ecuaciones. La última indicación es esencial, ya que la función *sistema* define el sistema de ecuaciones diferenciales, y es la indicación *return* la que devuelve las derivadas de las variables estado en forma de lista, esto posibilita calcular la evolución temporal.

El siguiente paso es definir el equilibrio, para ello introducimos lo siguiente:

```
# EQUILIBRIO
```

```
pi_eq = m  
U_eq = (alpha - T - m*(1 - g))/beta  
p_eq = alpha - T - beta*U_eq + g*pi_eq
```

Simplemente se trata de las expresiones de equilibrio que hemos obtenido con anterioridad.

Generamos las líneas de delimitación a través de:

```
# LINEAS DELIMITACIÓN

pi_vals = np.linspace(0, 3, 100)

U_pi0 = (alpha - T + (g - 1)*pi_vals)/beta

U_U0 = (alpha - T - m + g*pi_vals)/beta
```

Con el comando *pi\_vals* le estamos pidiendo que otorgue a la función  $\pi$  cien valores entre cero y tres. Las otras dos líneas de código son la expresión de las líneas de delimitación.

Tras esto vamos a introducir el campo vectorial gracias a:

```
# CAMPO VECTORIAL

pi_grid, U_grid = np.meshgrid(np.linspace(0, 3, 25),
                               np.linspace(-0.75, 2.25, 20))

dpi, dU = sistema([pi_grid, U_grid], 0)
```

Ahora vamos a introducir la Jacobiana y a definir que es el determinante, la traza y demás expresiones necesarias:

```
# MATRIZ JACOBIANA

a = j*(g - 1)

b = -j*beta

c = k*g

d = -k*beta

Tr = a + d

Det = a*d - b*c

discriminante = Tr**2 - 4*Det
```

Para que posteriormente nuestro código sea capaz de reconocer la estabilidad y el tipo de equilibrio en función de los valores que introducimos lo siguiente:

```
# TIPO DE EQUILIBRIO

if discriminante > 0:

    tipo_eq = "Nodo estable" if Tr < 0 else "Nodo inestable"
```

```

elif discriminante < 0:
    tipo_eq = "Foco estable" if Tr < 0 else "Foco inestable"
else:
    tipo_eq = "Caso degenerado"

```

Ahora debemos introducir código que genere diferentes trayectorias, esto es:

```

# SIMULACIONES

t = np.linspace(0, 30, 1000)

condiciones_iniciales = [[2.5, 0], [1.5, 2.0], [1, 0.25], [2, 0.2], [0.1,
0.8]]

colores = plt.cm.viridis(np.linspace(0, 1, len(condiciones_iniciales)))# #

#TRAYECTORIAS

soluciones_nuevas = [odeint(sistema, ci, t) for ci in
condiciones_iniciales]

soluciones_originales = [odeint(sistema_original, ci, t) for ci in
condiciones_iniciales]

```

La primera especificación crea un vector de tiempo con 1000 puntos equidistantes entre 0 y 30. La segunda es donde ponemos las condiciones iniciales que deseamos estudiar. Finalmente, con las siguientes líneas conseguimos que para cada condición inicial resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales.

Los gráficos y su configuración los introducimos de la siguiente manera:

```

# CONFIGURACIÓN GRÁFICA

fig = plt.figure(figsize=(20, 8))

gs = gridspec.GridSpec(2, 3, width_ratios=[1.5, 1, 1])

# DIAGRAMA DE FASES

ax1 = fig.add_subplot(gs[:, 0])

# CAMPO VECTORIAL

ax1.streamplot(pi_grid, U_grid, dpi, dU,

color='lightgrey', density=1.5, linewidth=0.8, arrowsize=1)

```

Sin embargo, ahora debemos definir que va a representar cada uno de los gráficos, empezamos con el diagrama de fases:

```

# LINEAS DELIMITACIÓN

ax1.plot(pi_vals, U_pi0, 'navy', label=r'$\dot{\pi}=0$', lw=2)
ax1.plot(pi_vals, U_U0, 'crimson', label=r'$\dot{U}=0$', lw=2)#

# TRAYECTORIAS ORIGINALES

for i, (sol, color) in enumerate(zip(soluciones_originales, colores)):
    ax1.plot(sol[:,0], sol[:,1],
             color=color,
             alpha=0.4,
             lw=1,
             label=f'Original CI {i+1}' if i==0 else "")

# TRAYECTORIAS NUEVAS

for i, (sol, color) in enumerate(zip(soluciones_nuevas, colores)):
    ax1.plot(sol[:,0], sol[:,1],
             color=color,
             alpha=0.8,
             lw=1.5,
             label=f'Nuevo CI {i+1}' if i==0 else "")

# EQUILIBRIO

ax1.scatter(pi_eq, U_eq, s=120, color='black', zorder=5,
            label=f'Equilibrio:  $\pi={pi\_eq:.2f}$ ,  $U={U\_eq:.2f}$ ')
ax1.set(xlim=(0, 3), ylim=(-0.25, 2.25),
        xlabel='Inflación esperada ( $\pi$ )', ylabel='Desempleo (U)',
        title=f'Diagrama de Fases: {tipo_eq}')

ax1.legend(loc='upper right')

ax1.grid(True)

```

Con las dos primeras ordenes *ax1.plot* estamos representando gráficamente las líneas de delimitación. Con la tercera solicitamos que grafique las trayectorias desde las distintas condiciones hasta el equilibrio que queda graficado a través de la orden *ax1.scatter*. Las tres órdenes de *ax1.set* sirven para nombrar los ejes y al propio gráfico,

finalmente las ultimas especificaciones sirven para que nos avise de la existencia de estabilidad y del tipo de equilibrio, así como para especificar cuestiones estéticas.

En este momento, situamos los demás gráficos de series temporales de la siguiente manera,

```
# SERIES TEMPORALES

ax2 = fig.add_subplot(gs[0, 1]) #  $\pi(t)$ 
ax3 = fig.add_subplot(gs[1, 1]) #  $U(t)$ 
ax4 = fig.add_subplot(gs[:, 2]) #  $p(t)$ 
```

Ahora vamos a solicitar que se grafiquen cómo evolucionan las tres ecuaciones a lo largo del tiempo hasta alcanzar el valor de equilibrio. Esto es:

```
# TRAYECTORIAS ORIGINALES

for i, (sol, color) in enumerate(zip(soluciones_originales, colores)):
    pi, U = sol[:,0], sol[:,1]
    p_original = alpha_initial - T_initial - beta_initial*U + g_initial*pi
    ax2.plot(t, pi, color=color, alpha=0.4, lw=1)
    ax3.plot(t, U, color=color, alpha=0.4, lw=1)
    ax4.plot(t, p_original, color=color, alpha=0.4, lw=1)

# TRAYECTORIAS NUEVAS

for i, (sol, color) in enumerate(zip(soluciones_nuevas, colores)):
    pi, U = sol[:,0], sol[:,1]
    p_nuevo = alpha - T - beta*U + g*pi
    ax2.plot(t, pi, color=color, alpha=0.8, lw=1.5)
    ax3.plot(t, U, color=color, alpha=0.8, lw=1.5)
    ax4.plot(t, p_nuevo, color=color, alpha=0.8, lw=1.5)

# LÍNEAS DE EQUILIBRIO

for ax, val, var in zip([ax2, ax3, ax4], [pi_eq, U_eq, p_eq], [' $\pi$ ', 'U',
'p']):
    ax.axhline(val, color='black', ls='--', lw=2,
               label=f'Equilibrio {var} = {val:.2f}')
    ax.set_xlabel('Tiempo')
```

```

ax.grid(True)

ax.legend()

ax2.set_title('Inflación Esperada ( $\pi(t)$ )')
ax3.set_title('Desempleo ( $U(t)$ )')
ax4.set_title('Inflación ( $p(t)$ )')

```

Estamos solicitando que aparezca el valor de equilibrio señalado por una línea independiente y diferente a las distintas trayectorias. Posteriormente configuramos los distintos gráficos.

Finalmente hacemos que podamos cambio el valor de los distintos parámetros de forma interactiva:

```

# SLIDERS INTERACTIVOS

parametros = {
    'j':FloatSlider(value=0.5,min=0.01,max=1.0,step=0.01,description='j'),
    'g':FloatSlider(value=0.5,min=0.01,max=1.0,step=0.01,description='g'),
    'k':FloatSlider(value=0.5,min=0.01,max=2.0,step=0.01,description='k'),
    'β':FloatSlider(value=0.8,min=0.1,max=5.0,step=0.01,description='β'),
    'α':FloatSlider(value=2.0,min=1.0,max=3.0,step=0.01,description='α'),
    'T':FloatSlider(value=1.0,min=0.5,max=2.0,step=0.01,description='T'),
    'm':FloatSlider(value=1.0,min=0.5,max=2.0,step=0.01,description='m'),
}

interact(plot_trayectorias, **parametros)

```

Finalmente, definimos valores mínimos y máximos, así como el inicial y de cuanto en cuanto pueden subir o bajar.

Evidentemente, el caso no lineal se realiza de la misma forma, pero con las expresiones propias de ese modelo.

