

Problemas de Sturm-Liouville singulares



Alba Andrés Fuster
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Febrero de 2025

Abstract

Mathematical analysis is one of the most important branches of mathematics, and within it, differential equations play a crucial role. In particular, a differential equation is understood as any equation in which appear one or more unknown functions (of one or more independent variables) and their derivatives. These equations can be classified into two types:

1. Ordinary differential equations (ODEs), where the unknown function depends on a single independent variable and whose subject was studied in the second year of the degree of Mathematics.
2. Partial differential equations (PDEs), where the unknown function depends on multiple independent variables and whose subject was studied in the third year of the degree.

Both types of equations are fundamental for understanding Sturm-Liouville problems. On the one hand, ODEs provide the basis to solve second-order differential equations, whose structure coincides with the Sturm-Liouville equations, by giving the tools to deal with problems with initial and boundary conditions. On the other hand, Sturm-Liouville problems have a great connection with PDEs, considering that these problems often arise when solving PDEs with techniques known as separation of variables.

The goal of this final degree project is to carry out a study of the Sturm-Liouville theory, specifically focus on the behavior of the solutions of the Sturm-Liouville equations, also named eigenfunctions, and their corresponding eigenvalues.

In Chapter 1, I will explore the origins of its history. A brief bibliography of the creators will be given, Jacques Charles François Sturm and Joseph Liouville, who worked independently on this topic before collaborating to develop the theory I am going to study.

In Chapter 2, I will deal with the general form of the Sturm-Liouville problems, starting with a second-order linear homogeneous equation and analyzing its self-adjoint form:

$$(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = 0.$$

I will also focus on the first type of Sturm-Liouville problems, the regular ones, which are defined on finite intervals and under the following regular boundary conditions:

$$\begin{aligned} a_1u(a) + a_2u'(a) &= 0, \\ b_1u(b) + b_2u'(b) &= 0, \end{aligned}$$

where $a_1, a_2, b_1, y b_2$ are given real constants. Additionally, key definitions for the development of the theory will be presented, such as the differential operator $L : C^2([a, b]) \rightarrow C([a, b])$, wich transforms the function u in: $L(u(x)) = (p(x)u'(x))' + q(x)u(x)$, and two fundamental formulas:

- Lagrange's identity:

$$u(x)L(v(x)) - v(x)L(u(x)) = [p(x) (u(x)v'(x) - u'(x)v(x))]'$$

- Green's formula:

$$\int_a^b (u(x)L(v(x)) - v(x)L(u(x))) dx = [p(x) (u(x)v'(x) - u'(x)v(x))]_a^b.$$

Both are indispensable throughout the chapter. Moreover, I will prove two main theorems:

1. Eigenvalues λ_n are real in self-adjoint problems.
2. Eigenfunctions $u_n(x)$ and $u_m(x)$ associated with different eigenvalues λ_n and λ_m are orthogonal with respect to the weight function $r(x)$.

And yet, I will state a fundamental result, the completeness theorem for the eigenfunctions associated with a Sturm-Liouville self-adjoint problem in the space $L^2(a, b)$, which says that any function $f(x) \in L^2(a, b)$ can be expressed as an infinite linear combination of eigenfunctions $u_n(x)$ of the following form:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x).$$

To conclude the chapter, I will introduce Green's function $g(x, t)$, which will be studied in more detail in the following chapter for singular Sturm-Liouville problems.

In Chapter 3, I will deal with non-regular Sturm-Liouville problems, which are classified into two categories: periodic and singular, focusing on the singular problems. Periodic problems are characterized by boundary conditions in which the solutions and their derivatives coincide in the endpoints of the interval:

$$u(a) = u(b) \quad \text{y} \quad u'(a) = u'(b),$$

and are imposed when the solution is expected to have a cyclical behavior. The theory of these problems is closely related to that of the regular Sturm-Liouville problems, considered an extension, for which I will simply indicate a few brief definitions and properties.

For the singular Sturm-Liouville problems, presented when the interval is infinite or the coefficients of the equation show irregularities, I will start discussing some examples of singular equations, such as:

1. Bessel's equation of order ν :

$$x^2 u''(x) + xu'(x) + (n^2 x^2 - \nu^2)u(x) = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

2. Legendre's equation:

$$(1 - x^2)u''(x) - 2xu'(x) + n(n+1)u(x) = 0, \quad -1 < x < 1.$$

3. Hermite's equation:

$$u''(x) - 2xu'(x) + 2nu(x) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Next, I will prove a lemma that shows what boundary conditions convert a singular Sturm-Liouville equation into a self-adjoint problem, and thanks to which, we will ensure real solutions and simplify the analysis by using orthogonal eigenfunctions. In turn, I'll set this pair of properties again mentioned, which are fulfilled both for periodic problems and singular ones. I will also mention Green's function, which enables the conversion of the differential equation into an integral representation, simplifying the treatment of singularities. Also, I will prove Green's function theorem for singular Sturm-Liouville problems. At the end of the chapter, and after having seen the above essential concepts, I will state and prove the completeness theorem in the context of singular problems, establishing that the eigenfunctions $u_n(x)$ form a complete basis. That is, for any function $f \in C[a, b]$, the unique solution $u(x)$ to the singular Sturm-Liouville problem can be represented as a linear combination of these eigenfunctions $u_n(x)$:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, u_n \rangle_r u_n(x),$$

where the series is absolutely and uniformly convergent in $[a, b]$.

In Chapter 4, I will apply the concepts developed in previous chapters to model a real phenomena. I am going to present a classical example of a Sturm-Liouville problem due to the presence of a singularity in the coefficient of the differential equation at one of the endpoints of the interval. In particular, the example will be focused on a hanging chain, where a chain of length L with constant density hangs vertically with one end fixed at the top, and the other end free. I set the axes, the coordinates and the acting forces, and I will describe the equation of motion:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

a partial differential equation which describes the transverse oscillations of the chain. Finally, I will solve the equation of motion using the method of separation of variables, assuming a solution in the form of a product of a function depending on position and another depending on time: $u(x, t) = X(x)T(t)$. To finish, I will make the corresponding calculations and I will get the overall solution to our hanging chain problem:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} J_0 \left(\alpha_j \sqrt{\frac{x}{L}} \right) \cdot \left(A_j \cos \left(\frac{\alpha_j}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} t \right) + B_j \sin \left(\frac{\alpha_j}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} t \right) \right).$$

Índice general

Abstract	III
1. Introducción histórica	1
1.1. Historia de Sturm y Liouville	1
1.2. Relevancia e importancia en las matemáticas.	2
2. Descripción y generalidad del problema de Sturm-Liouville	3
2.1. Generalidad de la ecuación	3
2.2. Problemas de Sturm-Liouville regulares	4
2.2.1. Definición y conceptos básicos:	4
2.2.2. Propiedades fundamentales	5
3. Problemas de Sturm-Liouville no-regulares	11
3.1. Problemas de Sturm-Liouville periódicos	11
3.2. Problemas de Sturm-Liouville singulares	12
3.2.1. Ejemplos de ecuaciones singulares de Sturm-Liouville	12
3.2.2. Propiedades fundamentales	13
3.2.3. Teorema de completitud	19
4. Aplicación: cadena colgante	23
4.1. Planteamiento del problema	23
4.2. Ecuación de movimiento	24
4.3. Resolución de la ecuación de movimiento	27
Bibliografía	29
Anexo	31

Capítulo 1

Introducción histórica

La teoría de Sturm-Liouville, desarrollada y presentada por Jacques Charles François Sturm y Joseph Liouville en una serie de artículos entre 1829 y 1840, abarca la expansión de funciones en series, la ampliación del uso de las funciones de Green en ecuaciones diferenciales, y lo que hoy se conoce como problema de Sturm-Liouville.

Como resultado, se introdujo un nuevo enfoque en el campo del Análisis Matemático, centrado en el estudio de la ecuación diferencial general lineal de segundo orden:

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + (q(x) + \lambda r(x)) u(x) = 0,$$

donde:

- la variable x pertenece al intervalo $[a, b]$,
- las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son conocidas y cumplen condiciones específicas en los límites del intervalo $[a, b]$,
- las soluciones, llamadas funciones propias, solo existen para ciertos valores específicos de la constante λ , llamados autovalores.

En general, y como veremos en el siguiente capítulo, toda ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden:

$$P(x)u''(x) + Q(x)u'(x) + R(x)u(x) = 0,$$

puede ser llevada a esta forma de Sturm-Liouville, al dividirla por $P(x)$ y multiplicarla por un factor integrante apropiado, en este caso: $e^{\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx}$.

1.1. Historia de Sturm y Liouville

Jacques Charles François Sturm (Ginebra, 29 de septiembre de 1803 - París, 18 de diciembre de 1855.)

Fue un prestigioso y reconocido matemático francés de ascendencia alemana, conocido por haber descubierto en 1829 el teorema que lleva su nombre, el cual permite hallar el número de raíces de una función polinómica en un intervalo dado, y gracias al cual fue considerado uno de los mejores geómetras del siglo XIX.

Joseph Liouville (Saint-Omer, Francia, 24 de marzo de 1809 - París, 8 de septiembre de 1882.)

Matemático francés que analizó cómo podían resolverse las integrales de funciones algebraicas. Identificó los casos en los que estas integrales podían expresarse en términos de funciones elementales como logaritmos, exponenciales o funciones trigonométricas, y estableció cuándo no era posible mediante estos métodos tradicionales. Como resultado, probó la existencia de los números trascendentes (números que no son soluciones de ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros), y cuyo trabajo en los problemas de valor en la frontera en ecuaciones diferenciales se recuerda hoy como la teoría de Sturm-Liouville.

Ambos estudiaron este tema por separado, pero más tarde colaboraron para desarrollar la teoría que vamos a estudiar. El desarrollo de la teoría se realizó en cuatro fases:

- Primera fase (1829-1830): Independencia en las investigaciones.

Cada uno desarrolló y presentó sus ideas de manera independiente.

Sturm se centró en el estudio de las propiedades de las ecuaciones diferenciales lineales, concretamente publicó su destacada memoria, *Mémoire sur la résolution des équations numériques*, donde se encuentra el famoso *Teorema de Sturm*.

Liouville por su parte, comenzó a explorar y desarrollar la teoría de funciones y sus aplicaciones.

- Segunda fase (1831-1836): Publicaciones simultáneas.

Sturm publicó dos de sus memorias, que abordaban aspectos clave de las ecuaciones diferenciales, así como las propiedades fundamentales de las soluciones y su relación con los valores propios. Coincidió a su vez con la publicación de la famosa memoria de Liouville sobre el mismo tema, *Diario de las matemáticas puras y aplicadas*, lo que marcó el comienzo de un diálogo científico entre ambos.

- Tercera fase (1837): Ampliación de la teoría.

Liouville comenzó a ampliar su teoría a ecuaciones de orden superior, extendiendo los resultados obtenidos por Sturm para ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Incluyó no solo resultados sobre soluciones, sino también sobre los problemas de contorno asociados, utilizando métodos como operadores autoajuntos lineales y funciones de Green.

- Cuarta fase (1838-1840): Consolidación de la teoría.

En esta etapa se completó la mayor parte del trabajo fundamental, se consolidaron los conceptos de funciones propias y valores propios, y se establecieron las bases de la teoría de Sturm-Liouville.

1.2. Relevancia e importancia en las matemáticas.

Al inicio del desarrollo de la teoría del calor, Joseph Fourier estudió la ecuación de la conducción del calor, formulando la famosa solución en términos de series de Fourier. Sturm y Liouville tomaron estas ideas y las generalizaron, extendiéndolas al estudio de ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno. Los objetivos alcanzados incluyeron el análisis de las propiedades de los valores propios, la investigación del comportamiento cualitativo de las funciones propias correspondientes, y el desarrollo de expansiones en series de funciones propias para representar funciones arbitrarias.

En definitiva, la teoría que vamos a estudiar fue clave en los orígenes del Análisis Funcional y marcó el comienzo del estudio sobre el comportamiento de los valores propios y sus aplicaciones, lo que actualmente se denomina teoría espectral de operadores.

Capítulo 2

Descripción y generalidad del problema de Sturm-Liouville

En este capítulo abordaremos la forma general de los problemas de Sturm-Liouville, que se basan en ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, fundamentales para el estudio de autovalores y funciones propias.

En concreto, nos centraremos en los problemas de Sturm-Liouville regulares.

2.1. Generalidad de la ecuación

Para entender completamente el origen de la ecuación de Sturm-Liouville, es necesario partir de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden y analizar su forma autoadjunta.

Consideramos la ecuación:

$$a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b],$$

donde las funciones $a(x)$, $b(x)$ y $c(x)$ son continuas y pueden ser de valores reales o complejos, y con $a(x) \neq 0$ lo que garantiza que la ecuación sea una ecuación diferencial de segundo orden.

Reescribimos esta ecuación para simplificar los primeros términos, dividiendo para ello entre $a(x)$ y reorganizando:

$$u''(x) + \frac{b(x)}{a(x)}u'(x) + \frac{c(x)}{a(x)}u(x) = 0.$$

A continuación, multiplicamos la ecuación por una función auxiliar $p(x) = \exp(\int_a^x \frac{b(s)}{a(s)} ds)$, es decir,

$$p(x)u''(x) + p(x)\frac{b(x)}{a(x)}u'(x) + p(x)\frac{c(x)}{a(x)}u(x) = 0,$$

y reconociendo que $p'(x) = p(x)\frac{b(x)}{a(x)}$, y reescribiendo la combinación de términos $p(x)u''(x) + p(x)\frac{b(x)}{a(x)}u'(x)$ en una sola derivada $(p(x)u'(x))'$ (gracias a la regla de la derivada del producto), se transforma en:

$$(p(x)u'(x))' + p(x)\frac{c(x)}{a(x)}u(x) = 0.$$

Finalmente, definimos una nueva función $q(x)$ como:

$$q(x) = p(x)\frac{c(x)}{a(x)},$$

simplificando así el coeficiente de $u(x)$ para conseguir la ecuación de una manera más compacta, y expresarla así en su forma autoadjunta:

$$(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = 0.$$

Definición. Una *ecuación homogénea de Sturm-Liouville* consiste en la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, expresada en forma autoadjunta, que incorpora un parámetro (autovalor) λ , y una función de peso $r(x)$:

$$(p(x)u'(x))' + [q(x) + \lambda r(x)]u(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b], \quad (2.1)$$

donde:

- $p \in C^1([a, b])$, $q, r \in C([a, b])$, con $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$,
- $u(x)$ es la función propia, la solución de la ecuación que estamos buscando,
- λ es el valor propio que se busca determinar.

Definición. En el caso de que la ecuación de Sturm-Liouville fuera no homogénea, y suponiendo las mismas hipótesis que en la definición anterior, la ecuación tendría la forma:

$$(p(x)u'(x))' + [q(x) + \lambda r(x)]u(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b], \quad (2.2)$$

siendo $f(x)$ una función continua en $[a, b]$.

Para que una ecuación de Sturm-Liouville se convierta en un problema de Sturm-Liouville, es necesario imponer condiciones de contorno (también conocidas como condiciones de frontera) en los extremos del intervalo $[a, b]$, por tanto;

Definición. Un *problema de Sturm-Liouville* consiste en encontrar las funciones propias $u_n(x)$ y los valores propios λ_n que resuelven la ecuación diferencial (2.1) (o (2.2)) y satisfacen las condiciones de contorno impuestas en $x = a$ y $x = b$.

Las condiciones de contorno juegan un papel fundamental, ya que las soluciones de la ecuación diferencial dependen en gran medida de cómo se comportan en los límites del intervalo (en $x = a$ y en $x = b$). En función de las propiedades del problema y del comportamiento de las soluciones en los extremos en el intervalo, podemos clasificar los problemas de Sturm-Liouville en tres tipos: regulares, singulares y periódicos.

Una vez resuelto el problema de Sturm-Liouville, obtenemos un conjunto de soluciones, que incluye las funciones propias $u_n(x)$ y los valores propios λ_n .

Definición. Un *sistema de Sturm-Liouville* se refiere al conjunto completo de soluciones que resultan del problema de Sturm-Liouville.

2.2. Problemas de Sturm-Liouville regulares

Esta sección se enfoca en los problemas de Sturm-Liouville regulares, es decir, aquellos definidos en intervalos finitos $[a, b]$, y con condiciones de contorno regulares expresadas como combinaciones lineales de los valores de la función y su derivada en los extremos del intervalo.

Asimismo, se menciona y describe una serie de propiedades clave y teoremas, relacionados con los valores propios y funciones propias que describen el comportamiento de las soluciones de estos problemas.

2.2.1. Definición y conceptos básicos:

Definición. A la ecuación de Sturm-Liouville (2.1) en $[a, b]$ junto con dos condiciones de contorno de la forma:

$$\begin{aligned} a_1 u(a) + a_2 u'(a) &= 0, \\ b_1 u(b) + b_2 u'(b) &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde a_1, a_2, b_1 , y b_2 son constantes reales dadas, se le llama *problema de Sturm-Liouville regular*.

Estas condiciones aseguran que los coeficientes $p(x)$, $q(x)$, y la función de peso $r(x)$ sean continuos y no presenten singularidades en los extremos. Además, garantizan que las funciones propias $u_n(x)$ obtenidas sean ortogonales entre sí con respecto a la función de peso $r(x)$, y que las soluciones $u(x)$ sean continuas y tengan derivadas continuas en todo el intervalo, incluyendo los extremos.

Las condiciones de contorno (2.3) son las más comunes en problemas de Sturm-Liouville y se imponen en los extremos de un intervalo finito $[a, b]$ para garantizar la existencia de soluciones bien definidas y un espectro discreto de valores propios (un conjunto de valores propios distintos, separados y numerables).

Hay cuatro subtipos especiales de condiciones de contorno regulares:

1. Condiciones de tipo Dirichlet: si $a_2, b_2 = 0$, i.e., $u(a) = 0$, $u(b) = 0$.
2. Condiciones de tipo Neumann: si $a_1, b_1 = 0$, i.e., $u'(a) = 0$, $u'(b) = 0$.
3. Condiciones de tipo Robin: si $a_1, a_2, b_1, b_2 \neq 0$, i.e., $a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0$, $b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0$, donde a_1 , a_2 , b_1 , y b_2 son constantes reales dadas.
4. Condiciones de tipo mixtas: combinan diferentes tipos de condiciones de contorno, aplicando una en un extremo y otra en el otro.

Definición. El conjunto de soluciones $u_n(x)$ (funciones propias) y $\lambda_n(x)$ (valores propios) que resultan al resolver el problema se le llama *sistema de Sturm-Liouville regular*.

Definición. Dado un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y las funciones reales $p \in C^1([a, b])$, $q \in C([a, b])$, verificando que $p(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$, se llama *operador de Sturm-Liouville* al siguiente operador diferencial $L : C^2([a, b]) \rightarrow C([a, b])$, que transforma una función u en:

$$L(u(x)) = (p(x)u'(x))' + q(x)u(x).$$

Si usamos esta definición del operador, una ecuación homogénea de Sturm-Liouville se escribiría como:

$$L(u(x)) + \lambda r(x)u(x) = 0. \quad (2.4)$$

2.2.2. Propiedades fundamentales

Identidad de Lagrange

Sean $u(x)$ y $v(x)$ funciones con segundas derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$ (i.e. $u(x), v(x) \in C^2([a, b])$). Entonces:

$$u(x)L(v(x)) - v(x)L(u(x)) = [p(x)(u(x)v'(x) - u'(x)v(x))]'.$$

En efecto, tenemos que:

$$L(u(x)) = (p(x)u'(x))' + q(x)u(x),$$

$$L(v(x)) = (p(x)v'(x))' + q(x)v(x),$$

multiplicando $u(x)$ por $L(v(x))$ e $v(x)$ por $L(u(x))$:

$$u(x)L(v(x)) = u(x)p'(x)v'(x) + u(x)p(x)v''(x) + u(x)q(x)v(x),$$

$$v(x)L(u(x)) = v(x)p'(x)u'(x) + v(x)p(x)u''(x) + v(x)q(x)u(x),$$

y restando ambas ecuaciones se obtiene la igualdad:

$$p'(u(x)v'(x) - v(x)u'(x)) + p(u(x)v''(x) - v(x)u''(x)) = [p(x)(u(x)v'(x) - u'(x)v(x))]'.$$

Al integrar la identidad de Lagrange, obtenemos la siguiente ecuación llamada fórmula de Green.

Fórmula de Green

Sean $u(x)$ y $v(x)$ funciones con segundas derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$ (i.e. $u(x), v(x) \in C^2([a, b])$). Entonces:

$$\int_a^b (u(x)L(v(x)) - v(x)L(u(x))) dx = [p(x)(u(x)v'(x) - u'(x)v(x))]_a^b. \quad (2.5)$$

Nota. Si además las funciones $u(x)$ y $v(x)$ cumplen las mismas condiciones de contorno (pueden ser del tipo Dirichlet, Neumann o mixtas) en los extremos ($x = a$ y $x = b$), los términos de borde se anulan:

$$[p(x)(u(x)v'(x) - u'(x)v(x))]_a^b = p(b)(u(b)v'(b) - u'(b)v(b)) - p(a)(u(a)v'(a) - u'(a)v(a)) = 0.$$

Esto es debido a que, como u y v verifican las mismas condiciones de contorno, debe darse:

$$\begin{aligned} a_1 u(a) + a_2 u'(a) &= 0, \\ a_1 v(a) + a_2 v'(a) &= 0, \end{aligned}$$

y como $a_1, a_2 \neq 0 \Rightarrow$ no puede darse la solución trivial $\Rightarrow$ sistema indeterminado: $\begin{vmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{vmatrix} = 0$.

Por tanto, y volviendo a la fórmula de Green;

$$\int_a^b (u(x)L(v(x)) - v(x)L(u(x))) dx = 0 \Rightarrow \int_a^b u(x)L(v(x)) dx = \int_a^b v(x)L(u(x)) dx \Rightarrow \langle u, L(v) \rangle = \langle v, L(u) \rangle.$$

La igualdad refleja que el operador L de Sturm-Liouville es autoadjunto bajo las condiciones de contorno adecuadas, lo que asegura la simetría del operador.

Definición. Un operador L es *autoadjunto* si garantiza que L es un operador simétrico (i.e. $\langle u, L(v) \rangle = \langle v, L(u) \rangle$), que sus valores propios asociados son reales y que las funciones propias correspondientes son ortogonales entre sí.

Definición. Dado un intervalo $[a, b]$ y una función de peso $r(x)$ (positiva y continua en el intervalo), el *producto interno* entre dos funciones $u(x)$ y $v(x)$ (definidas y continuas en el intervalo), denotado por $\langle u, v \rangle$, se define como:

$$\langle u, v \rangle_r = \int_a^b u(x)v(x)r(x) dx.$$

Si $\langle u, v \rangle_r = 0$, entonces las funciones $u(x)$ y $v(x)$ son ortogonales con respecto a la función de peso.

El producto interno se utiliza para demostrar en problemas de Sturm-Liouville la ortogonalidad entre sí de las funciones propias $u_n(x)$ en el intervalo $[a, b]$ con respecto a una función de peso $r(x)$.

Teorema 2.1. *Ortogonalidad de funciones propias asociadas a diferentes valores propios:*

Sea L el operador diferencial autoadjunto de Sturm-Liouville, definido en el intervalo $[a, b]$.

Entonces, las funciones propias $u_n(x)$ y $u_m(x)$ asociadas a valores propios distintos λ_n y λ_m son ortogonales respecto a la función de peso $r(x)$, es decir:

$$\int_a^b u_n(x)u_m(x)r(x) dx = 0, \quad \text{si } \lambda_n \neq \lambda_m.$$

Demostración. Consideramos el problema de Sturm-Liouville regular (2.4):

$$\begin{cases} Lu(x) + \lambda r(x)u(x) = 0, & \text{para } a < x < b, \\ a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0, \\ b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0. \end{cases}$$

Sean λ_n y λ_m dos valores propios diferentes y sean $u_n(x)$ y $u_m(x)$ funciones propias correspondientes a estos valores propios, respectivamente, es decir,

$$Lu_n(x) + \lambda_n r(x)u_n(x) = 0,$$

$$Lu_m(x) + \lambda_m r(x)u_m(x) = 0.$$

Multiplicamos ahora la primera ecuación por $u_m(x)$ y la segunda ecuación por $u_n(x)$ obteniendo:

$$u_m(x)Lu_n(x) + \lambda_n u_m(x)r(x)u_n(x) = 0,$$

$$u_n(x)Lu_m(x) + \lambda_m u_n(x)r(x)u_m(x) = 0.$$

Restamos ahora las ecuaciones y simplificamos:

$$u_m(x)Lu_n(x) - u_n(x)Lu_m(x) + \lambda_n u_m(x)r(x)u_n(x) - \lambda_m u_n(x)r(x)u_m(x) = 0,$$

lo que se reduce a:

$$u_m(x)Lu_n(x) - u_n(x)Lu_m(x) + (\lambda_n - \lambda_m)u_n(x)u_m(x)r(x) = 0.$$

Como $u_n(x)$ y $u_m(x)$ satisfacen las mismas condiciones de contorno y L es un operador autoadjunto, se cumple la fórmula de Green $\int_a^b u_m(x)Lu_n(x)dx = \int_a^b u_n(x)Lu_m(x)dx$.

Por tanto, integrando a ambos lados de la ecuación, el primer término de la ecuación se anula, y se tiene que:

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b u_n(x)u_m(x)r(x)dx = 0,$$

y dado que $\lambda_n \neq \lambda_m$, dividimos la ecuación anterior por $(\lambda_n - \lambda_m)$, lo que lleva a:

$$\int_a^b u_n(x)u_m(x)r(x)dx = 0.$$

□

Teorema 2.2. *Todos los valores propios del problema regular de Sturm-Liouville son reales.*

Demostración. Empezamos planteando el problema, considerando de nuevo el problema de Sturm-Liouville regular:

$$\begin{cases} Lu(x) + \lambda r(x)u(x) = 0, & \text{para } a < x < b, \\ a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0, \\ b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0, \end{cases}$$

(a_1, a_2, b_1 , y b_2 constantes reales dadas)

donde L es el operador autoadjunto de Sturm-Liouville $L(u) = (p(x)u'(x))' + q(x)u(x)$ definido en el intervalo $[a, b]$, con $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ continuas en $[a, b]$ y $r(x) > 0$.

Comenzamos calculando el complejo conjugado de la ecuación diferencial mencionada, y usando el hecho de que $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ asumen valores reales, obtenemos:

$$\overline{Lu(x) + \lambda r(x)u(x)} = L\bar{u}(x) + \bar{\lambda} r(x)\bar{u}(x) = 0.$$

Es decir, $\bar{u}(x)$ verifica la ecuación diferencial.

Considerando ahora las condiciones de contorno, vemos que $u(x)$ y $\bar{u}(x)$ cumplen las mismas, ya que las constantes de estas condiciones también son reales, es decir:

$$a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0 \implies a_1 \overline{u(a)} + a_2 \overline{u'(a)} = 0,$$

$$b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0 \implies b_1 \overline{u(b)} + b_2 \overline{u'(b)} = 0.$$

Utilizamos ahora la fórmula de Green para el operador diferencial $L(u)$;

$$\int_a^b u(x)L\bar{u}(x)dx = \int_a^b \bar{u}(x)Lu(x)dx,$$

y aplicando el resultado del teorema anterior:

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b u(x) \bar{u}(x) r(x) dx = 0.$$

Por la propiedad del módulo al cuadrado de un número complejo, tenemos que: $u(x) \bar{u}(x) = |u(x)|^2$, y por tanto, volviendo a la demostración:

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b |u(x)|^2 r(x) dx = 0,$$

donde la integral es estrictamente positiva siempre que $u(x)$ no sea la función nula, lo que implica que: $\lambda = \bar{\lambda} \iff \lambda \in \mathbb{R}$. □

Otra propiedad característica de los problemas regulares de Sturm-Liouville se establece en el siguiente teorema:

Teorema 2.3. *Sea el problema regular de Sturm-Liouville (2.4), entonces se tiene que existe un número infinito de valores propios que satisfacen*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \dots, \quad \text{con} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, la correspondiente función propia $u_n(x)$ asociada a λ_n posee exactamente $n - 1$ ceros en el intervalo (a, b) . En particular, se tiene que la primera función propia no posee ceros en tal intervalo.

Definición. El espacio $L^2([a, b], r(x))$ es el espacio de funciones cuadrado-integrables (funciones cuya integral del valor absoluto al cuadrado es finita en un intervalo dado: $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$) en el intervalo $[a, b]$, con respecto a una función de peso $r(x)$, que se supone positiva y continua en ese intervalo.

Una función $f(x)$ pertenece a $L^2([a, b], r(x))$ si $f(x)$ es medible en $[a, b]$ y cumple la siguiente condición de integrabilidad:

$$\int_a^b r(x) |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Seguidamente, expongo un teorema clave, el cual garantiza que cualquier función definida en el intervalo $[a, b]$ y perteneciente al espacio L^2 , puede representarse como una combinación lineal infinita de funciones propias ortogonales de un problema de Sturm-Liouville. Este resultado es fundamental para la resolución de problemas en diversas áreas de las matemáticas.

Teorema 2.4. *Teorema de completitud*

El conjunto de funciones propias $\{u_n(x)\}$ asociadas a los valores propios $\{\lambda_n\}$ del problema de Sturm-Liouville forman un sistema ortogonal completo en el espacio $L^2([a, b], r(x))$. Es decir, cualquier función $f(x) \in L^2([a, b], r(x))$ puede ser expresada como una combinación lineal infinita (serie de Fourier generalizada) de las funciones propias $u_n(x)$, de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x),$$

donde los coeficientes c_n se calculan utilizando la ortogonalidad de las funciones propias:

$$c_n = \frac{\int_a^b r(x) u_n(x) f(x) dx}{\int_a^b r(x) u_n(x)^2 dx}.$$

Una vez comprendidas y aplicadas las propiedades por las que el operador lineal L de Sturm-Liouville es autoadjunto, y que el conjunto de funciones propias $u_n(x)$ forman un sistema ortogonal completo en el espacio L^2 (garantizado por el teorema de completitud), hemos establecido las bases necesarias para definir finalmente, y antes de concluir este capítulo, la función de Green para el problema regular de Sturm-Liouville. Esto lo haremos sin adentrarnos profundamente, ya que la estudiaremos específicamente en el siguiente capítulo para los problemas singulares de Sturm-Liouville.

Función de Green:

Como hemos visto, una ecuación diferencial ordinaria de Sturm-Liouville la podemos reescribir en términos de un operador diferencial $L(u)$ (2.4). Por tanto, un problema regular no homogéneo de Sturm-Liouville junto con las condiciones de contorno dadas en (2.3) puede ser reescrito como $L(u)(x) = f(x)$.

Por otro lado, la combinación de las propiedades mencionadas anteriormente (auto-adjunción, ortogonalidad y completitud) permiten que el operador L sea invertible (operador inverso):

$$u = (L^{-1}f)(x),$$

donde el operador inverso es un operador integral, de tal manera que podamos encontrar su solución mediante una integral con la función de Green de la forma:

$$u = (L^{-1}f)(x) = \int_a^b g(x,t)f(t) dt,$$

siendo la función $g(x,t)$ lo que se conoce como función de Green (que depende tanto del operador L como de las condiciones de contorno del problema).

Esta función nos permite expresar y encontrar la solución particular de una ecuación diferencial no homogénea, incorporando directamente el término no homogéneo mediante una integral.

Antes de enunciar el teorema, vamos a suponer que $\lambda = 0$ no es un valor propio del siguiente sistema regular no homogéneo de Sturm-Liouville, asegurando así la invertibilidad del operador L , lo cual nos permite definir la función de Green y garantiza la existencia y unicidad de la solución de la ecuación no homogénea.

Teorema 2.5. *Función de Green para un sistema de Sturm-Liouville regular.*

Consideramos el siguiente sistema regular no homogéneo de Sturm-Liouville:

$$L(u) = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] + q(x)u(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

con las condiciones de contorno homogéneas

$$\begin{aligned} a_1 u(a) + a_2 u'(a) &= 0, \\ b_1 u(b) + b_2 u'(b) &= 0, \end{aligned}$$

donde a_1, a_2, b_1 , y b_2 constantes reales dadas, $p \in C^1([a, b])$, $q \in C([a, b])$, con $p(x) > 0, \forall x \in [a, b]$.

Entonces, para cualquier $f \in C^2([a, b])$, el sistema de Sturm-Liouville tiene una única solución

$$u(x) = \int_a^b g(x,t)f(t) dt,$$

donde $g(x,t)$ es la función de Green dada por

$$g(x,t) = \begin{cases} \frac{u_1(t)u_2(x)}{p(t)W(t)}, & a \leq t < x, \\ \frac{u_1(x)u_2(t)}{p(t)W(t)}, & x \leq t \leq b, \end{cases}$$

donde u_1 e u_2 son soluciones linealmente independientes no nulas que satisfacen la ecuación homogénea $L(u)(x) = 0$, y W es el Wronskiano dado por:

$$W(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix} = u_1(t)u_2'(t) - u_2(t)u_1'(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

Capítulo 3

Problemas de Sturm-Liouville no-regulares

En este capítulo nos adentraremos en los problemas de Sturm-Liouville no-regulares, clasificados en dos categorías: periódicos y singulares, centrándonos concretamente en estos últimos.

3.1. Problemas de Sturm-Liouville periódicos

Definición. La ecuación de Sturm-Liouville (2.1) en la cual $p(a) = p(b)$ (el valor de la función $p(x)$ en los límites del intervalo es el mismo) junto con las condiciones de contorno periódicas:

$$u(a) = u(b) \quad \text{y} \quad u'(a) = u'(b),$$

(las soluciones $u(x)$ y sus derivadas $u'(x)$ coinciden también en los extremos del intervalo) se denomina *problema de Sturm-Liouville periódico*.

Consideramos el intervalo $[a, b]$ que representa un ciclo completo, en particular, en los problemas de Sturm-Liouville periódicos se utiliza el intervalo $[0, 2T]$, lo que implica que las condiciones de contorno se cumplan, reflejando una solución con un comportamiento repetitivo o cíclico.

Definición. El conjunto de soluciones de un problema de Sturm-Liouville donde las condiciones de contorno establecen que la función $u_n(x)$ y su derivada $u'_n(x)$ deben ser periódicas se denomina *sistema de Sturm-Liouville periódico*.

Propiedades de los problemas de Sturm-Liouville periódicos:

- Los valores propios λ_n son reales y forman una sucesión creciente infinita

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \dots, \quad \text{con} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty.$$

- El conjunto de funciones propias $\{u_n(x)\}$ asociadas a los valores propios $\{\lambda_n\}$ del problema periódico de Sturm-Liouville forman un sistema ortonormal completo en el espacio $L^2([a, b], r(x))$, lo que implica que cualquier función $f(x) \in L^2([a, b], r(x))$ puede representarse como una combinación lineal infinita de estas funciones propias $u_n(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x),$$

donde los coeficientes c_n se calculan utilizando la ortogonalidad de las funciones propias:

$$c_n = \int_a^b r(x) u_n(x) f(x) dx.$$

3.2. Problemas de Sturm-Liouville singulares

Definición. Un problema de Sturm-Liouville donde en uno o ambos extremos del intervalo $[a, b]$ ocurre alguna irregularidad, ya sea porque los coeficientes de la ecuación diferencial de Sturm Liouville (2.1) presentan algún punto problemático (singularidad), o porque el intervalo se vuelve infinito, se denomina *problema de Sturm-Liouville singular*.

Por tanto, hablaremos de problema de Sturm-Liouville singular si se cumple una de las siguientes condiciones:

1. Singularidades en los coeficientes de la ecuación de Sturm-Liouville (2.1): $p(x)$, $q(x)$ o $r(x)$ se anulan en uno o ambos extremos del intervalo finito, o cualquiera de las funciones $p(x)$, $q(x)$ o $r(x)$ tiende a infinito cuando $x \rightarrow a^+$ o $x \rightarrow b^-$.
2. Intervalo infinito: si la ecuación está dada en un intervalo infinito o semi-infinito, como $[a, \infty)$ o $(-\infty, b]$, es decir, si $a = -\infty$ o $b = \infty$.

Por ello, a diferencia de los problemas regulares, en los problemas singulares de Sturm-Liouville, no siempre es necesario especificar de manera directa las condiciones de contorno en los extremos del intervalo, sino que pueden estar implícitas. Esto es debido a que el comportamiento de las soluciones ya está influenciado por esa singularidad y determinado por la naturaleza del propio problema.

Definición. El conjunto de soluciones $u_n(x)$ (funciones propias) y $\lambda_n(x)$ (valores propios) que resuelven un problema de Sturm-Liouville singular, se denomina *sistema de Sturm-Liouville singular*.

3.2.1. Ejemplos de ecuaciones singulares de Sturm-Liouville

A continuación, voy a presentar varios ejemplos de ecuaciones conocidas que resultan ser ecuaciones singulares de Sturm-Liouville.

1. Ecuación de Bessel de orden ν :

$$x^2 u'' + xu' + (n^2 x^2 - \nu^2)u = 0, \quad 0 < x < \infty.$$

Dividimos toda la ecuación por x para simplificar,

$$xu'' + u' + \frac{n^2 x^2 - \nu^2}{x}u = 0,$$

y agrupamos ahora los términos de derivadas en un solo término,

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{du}{dx} \right) + \left(\frac{n^2 x^2 - \nu^2}{x} \right) u = 0,$$

(donde $xu'' + u' = \frac{d}{dx} \left(x \frac{du}{dx} \right)$ aplicando la regla de la derivada del producto).

Obteniendo así la ecuación de Bessel como una ecuación diferencial en la forma de Sturm-Liouville (2.1):

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{du}{dx} \right) - \frac{\nu^2}{x} u + n^2 x u = 0,$$

donde $\lambda = n^2$, y por tanto:

$$p(x) = x, \quad q(x) = -\frac{\nu^2}{x} \quad \text{y} \quad r(x) = x.$$

Así, la ecuación de Bessel es singular en $x = 0$ debido a que el coeficiente $p(x) = x$ se anula cuando $x = 0$.

Además, para $\nu \neq 0$, la función $q(x) = -\frac{\nu^2}{x}$ no está acotada ya que tiende a infinito cuando $x = 0$, agravando más el problema.

2. Ecuación de Legendre :

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u = 0, \quad -1 < x < 1.$$

Nuestro objetivo es transformarla en la forma general de la ecuación de Sturm-Liouville (2.1). Notemos que los primeros dos términos de la ecuación tienen la misma estructura que el operador derivada de un producto, así que lo reorganizamos de tal manera que;

$$(1-x^2)u'' - 2xu' = \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{du}{dx} \right).$$

La ecuación de Legendre se convierte así en:

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{du}{dx} \right) + n(n+1)u = 0,$$

donde $\lambda = n(n+1)$, y comparando con la forma de Sturm-Liouville e identificando los coeficientes:

$$p(x) = 1-x^2, \quad q(x) = 0, \quad r(x) = 1.$$

Por tanto, la ecuación es singular en $x = \pm 1$ ya que el coeficiente $p(x) = 1-x^2$ se anula en esos puntos.

3. Ecuación de Hermite :

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Multiplicamos la ecuación por e^{-x^2} y notamos que:

$$e^{-x^2}[u'' - 2xu'] = \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \frac{du}{dx} \right),$$

con lo que, sustituyendo en la ecuación original, nos queda:

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \frac{du}{dx} \right) + 2ne^{-x^2}u = 0,$$

donde $\lambda = 2n$.

Por último, comparamos la ecuación con la forma general de la ecuación de Sturm-Liouville (2.1) e identificamos los coeficientes:

$$p(x) = e^{-x^2}, \quad q(x) = 0, \quad r(x) = e^{-x^2}.$$

En este caso, el coeficiente $p(x) = e^{-x^2}$ no se anula en ningún punto ya que e^{-x^2} es siempre positivo para cualquier valor de x . Sin embargo, la ecuación de Hermite está definida en $\mathbb{R}$, es decir, $(-\infty, \infty)$ no está acotado.

3.2.2. Propiedades fundamentales

Como hemos visto en el capítulo anterior, el operador lineal asociado a un problema regular de Sturm-Liouville con condiciones de contorno resulta ser autoadjunto, y de esta característica derivan gran parte de las propiedades de estos problemas. Por ello, es importante determinar qué condiciones de contorno convierten una ecuación singular de Sturm-Liouville en un problema autoadjunto, lo que nos permita asegurar soluciones reales y simplificar su análisis mediante funciones propias ortogonales.

Regresamos a la fórmula de Green, dada en (2.5), y vemos que el único cambio posible para una ecuación singular de Sturm-Liouville, dado que p y q son continuas en $[a, b]$, es que la integral sea impropia en uno o ambos extremos (que incluya un límite de integración donde la función se comporte de

manera singular o infinita). Y como sabemos, el operador L será autoadjunto si el lado derecho (término de frontera) de la siguiente igualdad se anula:

$$\int_a^b (u(x)L(v(x)) - v(x)L(u(x))) dx = \left[p(x) \left(u(x) \frac{d}{dx} v(x) - \frac{d}{dx} u(x) v(x) \right) \right]_a^b,$$

lo que ocurrirá cuando $u(x)$, $v(x)$ y sus derivadas en los extremos (en a y en b) por separado, sean igual a 0:

$$\left[p(x) \left(u(x) \frac{d}{dx} v(x) - \frac{d}{dx} u(x) v(x) \right) \right]_a^b = \lim_{x \rightarrow b^+} p(x) (u(x)v'(x) - u'(x)v(x)) - \lim_{x \rightarrow a^+} p(x) (u(x)v'(x) - u'(x)v(x))$$

Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow b^+} p(x) (u(x)v'(x) - u'(x)v(x)) = p(b) (u(b)v'(b) - u'(b)v(b)) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} p(x) (u(x)v'(x) - u'(x)v(x)) = p(a) (u(a)v'(a) - u'(a)v(a)) = 0.$$

El siguiente teorema da tres condiciones de contorno específicas de problemas singulares de Sturm-Liouville (debido a los problemas que pueden surgir en los extremos del intervalo), tal que si se cumple una de las tres siguientes condiciones, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} p(x) (u(x)v'(x) - u'(x)v(x)) = 0, \quad (3.1)$$

y por tanto, el operador L es autoadjunto en la ecuación de Sturm-Liouville singular.

(Análogamente con $\lim_{x \rightarrow b^+} p(x) (u(x)v'(x) - u'(x)v(x)) = 0$.)

Teorema 3.1. 1. $\lim_{x \rightarrow a^+} p(x) = p(a)$ existe (es decir, $p(x)$ se comporta bien cerca de a y alcanza un valor finito en ese punto) y $u(x)$, $v(x)$ satisfacen la condición de contorno:

$$a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0 \quad \text{con} \quad a_1 \neq 0 \quad \text{ó} \quad a_2 \neq 0, \quad (\text{análoga con } v).$$

2. $\lim_{x \rightarrow a^+} p(x) = 0$ y $u(x)$, $v(x)$ satisfacen la condición de contorno:

$$u(x), u'(x), v(x), v'(x) \quad \text{permanecen acotados cuando} \quad x \rightarrow a^+.$$

3. Las funciones $u(x)$ y $v(x)$ satisfacen la condición de contorno:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)} u(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)} u'(x) = 0, \quad (\text{análoga con } v).$$

Demostración. Veamos cada uno de los casos propuestos en el teorema:

1. Sin pérdida de generalidad asumimos que $a_1 \neq 0$ (ya que si $a_1 = 0$ la condición de contorno se reduciría a una en términos de $u'(a)$).

Dado que $a_1 \neq 0$ despejamos $u(a)$ y $v(a)$ de tal manera que:

$$u(a) = -\frac{a_2}{a_1} u'(a), \quad v(a) = -\frac{a_2}{a_1} v'(a),$$

lo que indica que los valores de $u(a)$ y $v(a)$ están determinados por sus derivadas en el punto a y que $-\frac{a_2}{a_1}$ es un valor finito, por lo que tanto las funciones $u(a)$ y $v(a)$ como sus derivadas son acotadas.

A continuación, sustituimos esta relación en la ecuación (3.1):

$$\lim_{x \rightarrow a^+} p(x) (u(x)v'(x) - u'(x)v(x)) = p(a) \left(-\frac{a_2}{a_1} u'(x) \cdot v'(x) - u'(x) \cdot -\frac{a_2}{a_1} v'(x) \right) = p(a) \cdot 0 = 0.$$

Tenemos que $p(a)$ es una constante (ya que $p(x)$ es continua y alcanza un valor finito en a), por tanto, el término se anula y se cumple la autoadjunción del operador L .

2. Suponemos que $\lim_{x \rightarrow a^+} p(x) = 0$ y suponemos también que $u(x)$, $u'(x)$, $v(x)$ y $v'(x)$ se mantienen acotados cuando $x \rightarrow a^+$.

Queremos garantizar que se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} p(x) (u(x)v'(x) - u'(x)v(x)) = 0.$$

Según la hipótesis, $u(x)$, $u'(x)$, $v(x)$ y $v'(x)$ se mantienen acotados cuando $x \rightarrow a^+$, por tanto, $u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$ también será acotado (un número finito multiplicado o restado como en este caso por otro número finito sigue siendo un número finito).

Y como $\lim_{x \rightarrow a^+} p(x) = 0$, el producto total de $p(x) (u(x)v'(x) - u'(x)v(x))$ también tenderá a cero cuando $x \rightarrow a^+$ (cuando multiplicamos algo que tiende a 0 por un término acotado, el resultado tiende a 0 sin importar el valor del término acotado), cumpliéndose así la condición para que L sea un operador autoadjunto.

3. Suponemos que las funciones $u(x)$ y $v(x)$ satisfacen la condición de contorno:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)}u(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)}u'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)}v(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)}v'(x) = 0.$$

Expresamos $p(x)$ como su raíz cuadrada tal que $p(x) = (\sqrt{p(x)})^2$.

A continuación, sustituimos en la ecuación (3.1), aplicamos las condiciones de contorno dadas y tenemos que:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a^+} p(x)(u(x)v'(x) - u'(x)v(x)) = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)}u(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)}v'(x) \right) - \left(\lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)}u'(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{p(x)}v(x) \right) = \\ & \quad 0 - 0 = 0, \end{aligned}$$

completando la demostración y obteniendo por tanto que el operador L es autoadjunto.

□

A continuación, y una vez visto que el operador L es autoadjunto, se establecen un par de propiedades demostradas en el capítulo anterior, que se cumplen tanto para los problemas periódicos como para los singulares y que son fundamentos esenciales para demostrar el teorema de completitud, sin las cuáles no habría garantía de que las funciones propias forman una base completa:

1. Realidad y simplicidad de los valores propios (la multiplicidad algebraica y geométrica de cada λ_n es 1, por lo que para cada valor propio hay una función propia).

Además, hay un número finito de valores propios negativos, y existe una secuencia infinita de valores propios no acotada tal que se puede reordenar de manera creciente (asegurando que el sistema de funciones propias sea completo):

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \dots, \quad \text{con} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty.$$

2. Las funciones propias correspondientes son ortonormales (ortogonales y normalizadas) con respecto a la función de peso $r(x)$:

$$\langle u_n, u_m \rangle_r = \int_a^b u_n(x)u_m(x)r(x)dx = \delta_{mn},$$

donde: δ_{mn} es la delta de Kronecker, que vale 1 si $m = n$ (normalización) y 0 si $m \neq n$ (ortogonalización).

Por otro lado, para la demostración del teorema de completitud necesitaremos otro concepto clave, mencionado de nuevo en el capítulo anterior y que se conoce como función de Green, la cuál nos permite convertir la ecuación diferencial (no homogénea) en una representación integral y simplificar el tratamiento de las singularidades. De nuevo, y antes de enunciar el teorema, vamos a suponer por la misma razón que ocurría en los problemas de Sturm-Liouville regulares, que $\lambda = 0$ no es un valor propio del siguiente sistema singular no homogéneo de Sturm-Liouville.

Función de Green:

$g(x, t)$ es una función de Green para el problema singular no homogéneo de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), & \text{para } a < x < b, \\ |u(a)| < \infty, \quad b_1u(b) + b_2u'(b) = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

si:

- $g(x, t)$ definida y continua en $[a, b] \times [a, b]$, excepto en el punto (a, a) ,
- La solución de la ecuación diferencial se puede expresar como:

$$u(x) = \int_a^b g(x, t)f(t) dt, \quad a \leq x \leq b,$$

y es única para cualquier $f(x)$ continua en $[a, b]$.

(En lugar de resolver directamente $Lu(x) = f(x)$, usamos $g(x, t)$ para expresar $u(x)$ en términos de $f(t)$).

Teorema 3.2. *Función de Green para un sistema de Sturm-Liouville singular:*

El problema singular no homogéneo de Sturm-Liouville (3.2) tiene una función de Green $\iff$ existen funciones $u_1(x)$ en $C^1[a, b]$ y $u_2(x)$ en $C^1(a, b]$ tales que:

$$\begin{cases} Lu_1(x) = 0, & \forall x \in [a, b], \\ |u_1(a)| < \infty, \end{cases} \quad \begin{cases} Lu_2(x) = 0, & \forall x \in (a, b], \\ b_1u_2(b) + b_2u_2'(b) = 0, \end{cases}.$$

y

$$p(x)W_{u_1, u_2}(x) = 1 \quad \text{con} \quad W_{u_1, u_2}(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x) \quad \forall a < x \leq b,$$

en cuyo caso:

$$g(x, t) = \begin{cases} u_2(x)u_1(t) & \text{para } a \leq t \leq x \leq b \text{ y } (x, t) \neq (a, a), \\ u_1(x)u_2(t) & \text{para } a \leq x \leq t \leq b \text{ y } (x, t) \neq (a, a), \end{cases}$$

y (3.2) tiene la solución única:

$$u(x) = \int_a^b g(x, t)f(t) dt \quad \text{para } a \leq x \leq b.$$

Además $u_1(x)$ y $u_2(x)$ pueden ser elegidas como valores reales cuando $p(x)$, $q(x)$, b_1 y b_2 son de valores reales, en cuyo caso la función de Green es de valores reales y simétrica, es decir, $g(x, t)$ es un núcleo (elemento esencial) simétrico y el operador integral correspondiente es autoadjunto.

Demostración. Objetivo: demostrar que $g(x, t)$ es una función de Green para el problema singular de Sturm-Liouville (3.2), probando la existencia y unicidad de la solución $u(x)$.

1. EXISTENCIA:

Asumimos que existen las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ satisfaciendo las condiciones del enunciado.

Definimos $g(x, t)$ como

$$g(x, t) = \begin{cases} u_2(x)u_1(t) & \text{para } a \leq t \leq x \leq b \text{ y } (x, t) \neq (a, a), \\ u_1(x)u_2(t) & \text{para } a \leq x \leq t \leq b \text{ y } (x, t) \neq (a, a), \end{cases}$$

y verificamos su continuidad y simetría:

- Por construcción, $g(x, t)$ es continua en $[a, b] \times [a, b] \setminus \{(a, a)\}$ ya que $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son soluciones $C^1(a, b]$ del problema homogéneo, por tanto, son continuas en $[a, b]$.
- Y si $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son de valores reales $\Rightarrow g(x, t)$ es simétrica ($g(x, t) = g(t, x)$) por definición, y por tanto, el operador integral $u(x) = \int_a^b g(x, t)f(t) dt$ es autoadjunto $\forall a \leq x \leq b$.

Asegurando por tanto que podemos aplicar la función de Green al problema singular, es decir, podemos usar $g(x, t)$ para representar la solución $u(x)$.

2. UNICIDAD:

Ahora vamos a probar la unicidad y para ello primero tenemos que verificar que $u(x) = \int_a^b g(x, t)f(t) dt$ es solución de la ecuación diferencial (3.2).

Dado que

$$g(x, t) = \begin{cases} u_2(x)u_1(t) & \forall a \leq t \leq x \leq b \text{ y } (x, t) \neq (a, a), \\ u_1(x)u_2(t) & \forall a \leq x \leq t \leq b \text{ y } (x, t) \neq (a, a), \end{cases}$$

podemos dividir $u(x)$ en dos partes y expresarla como:

$$u(x) = u_2(x) \int_a^x u_1(t)f(t) dt + u_1(x) \int_x^b u_2(t)f(t) dt, \quad \forall a \leq x \leq b \quad (3.3)$$

y derivando respecto a x y simplificando:

$$u'(x) = u_2'(x) \int_a^x u_1(t)f(t) dt + u_2(x)u_1(x)f(x) + u_1'(x) \int_x^b u_2(t)f(t) dt - u_1(x)u_2(x)f(x), \quad \forall a \leq x \leq b$$

$\Rightarrow$

$$u'(x) = u_2'(x) \int_a^x u_1(t)f(t) dt + u_1'(x) \int_x^b u_2(t)f(t) dt, \quad \forall a \leq x \leq b.$$

Como consecuencia, $\forall a \leq x \leq b$, (multiplicamos $p(x)$ por $u'(x)$):

$$p(x)u'(x) = p(x)u_2'(x) \int_a^x u_1(t)f(t) dt + p(x)u_1'(x) \int_x^b u_2(t)f(t) dt,$$

y derivando de nuevo respecto a x :

$$\begin{aligned} (p(x)u'(x))' &= (p(x)u_2'(x))' \int_a^x u_1(t)f(t) dt + p(x)u_2'(x)u_1(x)f(x) \\ &\quad + (p(x)u_1'(x))' \int_x^b u_2(t)f(t) dt - p(x)u_1'(x)u_2(x)f(x). \end{aligned}$$

Además, sabemos que $u_1(x)$ y $u_2(x)$ satisfacen las ecuaciones homogéneas $Lu_1(x) = 0$ y $Lu_2(x) = 0$, es decir;

$$\begin{aligned} (p(x)u_1'(x))' + q(x)u_1(x) &= 0, \\ (p(x)u_2'(x))' + q(x)u_2(x) &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo estas relaciones en la ecuación anterior obtenemos que:

$$\begin{aligned} (p(x)u'(x))' &= p(x)u_2'(x)u_1(x)f(x) - q(x)u_2(x) \int_a^x u_1(t)f(t) dt \\ &\quad - q(x)u_1(x) \int_x^b u_2(t)f(t) dt - p(x)u_1'(x)u_2(x)f(x). \end{aligned}$$

Ahora multiplicamos (3.3) por $q(x)$ tal que:

$$q(x)u(x) = q(x)u_2(x) \int_a^x u_1(t)f(t) dt + q(x)u_1(x) \int_x^b u_2(t)f(t) dt,$$

y sumándola a la de arriba y teniendo en cuenta que $p(u_1'u_2 - u_2'u_1) = 1$ vemos que $u(x)$ satisface la ecuación diferencial (3.2):

$$(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x) \Rightarrow Lu(x) = f(x)$$

Comprobamos ahora que $u(x)$ satisface las condiciones de frontera:

- En $x = a$, donde tiene la condición $|u_1(a)| < \infty$, vemos que por (3.3):

$$u(a) = u_1(a) \int_a^b u_2(t)f(t) dt,$$

y como $u_1(a)$ y la integral son finitas, verificamos que $u(x)$ cumple la condición de frontera en $x = a$, y que: $|u(a)| < \infty$.

- En $x = b$, donde tiene la condición $b_1u_2(b) + b_2u_2'(b) = 0$, vemos que por (3.3):

$$u(b) = u_2(b) \int_a^b u_1(t)f(t) dt,$$

y por otro lado, como tenemos que:

$$u'(x) = u_2'(x) \int_a^x u_1(t)f(t) dt + u_1'(x) \int_x^b u_2(t)f(t) dt, \quad \forall a \leq x \leq b,$$

en $x = b \Rightarrow$

$$u'(b) = u_2'(b) \int_a^b u_1(t)f(t) dt.$$

Así pues:

$$b_1u(b) + b_2u'(b) = (b_1u_2(b) + b_2u_2'(b)) \int_a^b u_1(t)f(t) dt,$$

y dado que: $b_1u_2(b) + b_2u_2'(b) = 0 \Rightarrow b_1u(b) + b_2u'(b) = 0$, satisfaciendo también la condición de frontera en $x = b$.

Para demostrar que la solución $u(x)$ es única, es decir, que sólo tenemos la solución trivial, supongamos que existe una solución no trivial u_3 , por lo que u_1 , u_2 y u_3 son linealmente dependientes y una solución debe ser una combinación lineal de las otras dos.

Sea $u_3 = c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$ con $c_1, c_2 \neq 0$, y cómo u_3 satisface las condiciones de frontera, tenemos que u_1 y u_2 las cumplen también, y que en $x = b$ satisfacen por tanto el siguiente sistema:

$$\begin{cases} b_1u_1(b) + b_2u_1'(b) = 0, \\ b_1u_2(b) + b_2u_2'(b) = 0. \end{cases}$$

Sin embargo, el determinante de este sistema $W_{u_1, u_2}(b) = 0$, lo cuál contradice $p(x)W_{u_1, u_2}(x) = 1$.

Como consecuencia, no existe una solución no trivial u_3 y la única solución es:

$$u(x) = \int_a^b g(x, t)f(t) dt \quad \text{para } a \leq x \leq b.$$

□

A continuación, y antes de enunciar el teorema, voy a definir un concepto previo y clave que usaremos durante toda la demostración.

Definición. Un *kernel* $k(x, t)$ es una función definida en un producto cartesiano $[a, b] \times [a, b]$, que actúa como núcleo de un operador integral, el cuál transforma una función $f(t)$ definida en un intervalo $[a, b]$ en otra función $Kf(x)$ mediante la fórmula:

$$Kf(x) = \int_a^b k(x, t)f(t)dt.$$

Se construye para representar operadores compactos y autoadjuntos, y en problemas de Sturm-Liouville singulares, el kernel $k(x, t)$, se deriva de la función de Green mediante la transformación:

$$k(x, t) = \sqrt{r(x)}g(x, t)\sqrt{r(t)},$$

donde $r(x)$ es la función peso.

Seguidamente, voy a mencionar el teorema de Hilbert-Schmidt (lo encontramos en el corolario 61 de [1]), el cuál nos dice que: si el núcleo autoadjunto $k(x, t)$ tiene un número infinito de valores propios no nulos y satisface la condición adicional de que:

$$\int_a^b |k(x, t)|^2 dt \leq M, \quad \forall x \in [a, b], \quad M \text{ constante},$$

entonces para cada función $f \in C[a, b]$, el operador integral K es un operador de Hilbert-Schmidt y se puede representar como una expansión en serie de sus funciones propias formando una base ortonormal:

$$Kf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Kf, \psi_n \rangle_r \psi_n(x),$$

donde la serie converge absolutamente y uniformemente en $[a, b]$ hacia Kf . (La condición adicional se satisface si $k(x, t)$ es continua en $[a, b] \times [a, b]$.)

Nota. $\psi_n(x)$ son las funciones propias del operador integral K , relacionadas con $u_n(x)$ (las funciones propias del operador diferencial de Sturm-Liouville), mediante:

$$\psi_n(x) = \sqrt{r}u_n(x).$$

3.2.3. Teorema de completitud

El problema de valores propios autoadjunto de Sturm-Liouville:

$$(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = \lambda r(x)u(x), \quad \forall a < x < b, \quad (3.4)$$

con:

- $|u(a)| < \infty$, garantizando solución finita en el extremo $x = a$,
- $b_1u(b) + b_2u'(b) = 0$, condición de contorno en el extremo $x = b$ que puede ser del tipo Dirichlet (si $b_1 \neq 0$ y $b_2 = 0$), Neumann (si $b_1 = 0$ y $b_2 \neq 0$) o mixta (si $b_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$),

$p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ en $[a, b]$, y con $q(x) \geq 0$, tiene una secuencia infinita de valores propios reales $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ y una secuencia correspondiente de funciones propias de valores reales $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que:

Teorema 3.3. Si la función de peso $r(x)$ es positiva y continua en $[a, b]$, entonces para cada función $f \in C[a, b]$, la solución única $u(x)$ al problema de Sturm-Liouville singular de valores propios en la frontera (3.4) $Lu = f$ ($f = \lambda r(x)u(x)$), puede ser expresada como:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, u_n \rangle_r u_n(x),$$

donde la serie es absolutamente y uniformemente convergente en $[a, b]$, con $\langle u, u_n \rangle_r$ el coeficiente del producto interno de $u(x)$ con $u_n(x)$, respecto a la función de peso $r(x)$.

Demostración. ■ Partimos de que $k(x, t)$, el núcleo del operador integral K , está construido a partir de la función de Green $g(x, t)$:

$$k(x, t) = \sqrt{r(x)}g(x, t)\sqrt{r(t)},$$

y como consecuencia, hereda su propiedad de continuidad en $[a, b] \times [a, b]$, es decir, el núcleo está definido en un espacio de funciones continuas, y como consecuencia:

$\Rightarrow K$ está definido en un espacio de funciones continuas.

Como resultado, el núcleo es débilmente singular (indicado por el corolario 144 de [1]), y existe una constante $M < \infty$ tal que:

$$\int_a^b |k(x, t)|^2 dt \leq M, \quad \forall x \in [a, b].$$

Además, sabemos que los operadores integrales con núcleos continuos y acotados son siempre compactos, por lo que podemos asegurar que K es compacto.

Por la misma razón de que el kernel hereda las propiedades de la función de Green en problemas singulares de Sturm-Liouville, el kernel está diseñado para ser simétrico:

$$k(x, t) = k(t, x) \Rightarrow K \text{ es autoadjunto.}$$

Y, por una propiedad de la teoría espectral, sabemos que todo operador compacto y autoadjunto, tiene un espacio discreto formado por un número infinito de valores propios no nulos.

Esto asegura que K es un operador integral de Hilbert-Schmidt y que podemos aplicar lo que dice su teorema:

- Para cualquier función continua $f \in [a, b]$, la acción del operador puede escribirse como una expansión en serie con sus funciones propias formando una base ortonormal:

$$Kf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Kf, \psi_n \rangle_r \psi_n(x),$$

con convergencia de la serie absoluta y uniforme en el intervalo $[a, b]$.

- Como hemos dicho, el núcleo $k(x, t)$ lo podemos escribir en términos de la función de Green $g(x, t)$ y de la función de peso $r(x)$:

$$k(x, t) = \sqrt{r(x)}g(x, t)\sqrt{r(t)}$$

$$\Rightarrow Kf(x) = \int_a^b \sqrt{r(x)}g(x, t)\sqrt{r(t)}f(t)dt = \sqrt{r(x)} \int_a^b g(x, t)\sqrt{r(t)}f(t)dt = \sqrt{r(x)}G(\sqrt{r}f)(x),$$

con G operador integral asociado con $g(x, t)$ pero aplicado a $\sqrt{r}f(x)$.

- El producto interno resulta $\langle Kf, \psi_n \rangle_r = \langle \sqrt{r}G(\sqrt{r}f), \sqrt{r}u_n \rangle_r = \langle G(\sqrt{r}f), u_n \rangle_r$, y por otro lado, como $Kf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Kf, \psi_n \rangle_r \psi_n(x)$, sustituimos y se tiene que:

$$\Rightarrow Kf(x) = \sqrt{r(x)}G(\sqrt{r}f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \sqrt{r(x)}G(\sqrt{r}f), \sqrt{r}u_n \rangle_r \sqrt{r}u_n(x),$$

$$\Rightarrow Kf(x) = \sqrt{r(x)}G(\sqrt{r}f)(x) = \sqrt{r(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \langle G(\sqrt{r}f), u_n \rangle_r u_n(x)$$

$$\Rightarrow Kf(x) = G(\sqrt{r}f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle G(\sqrt{r}f), u_n \rangle_r u_n(x),$$

$$\Rightarrow G(\sqrt{r}f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle G(\sqrt{r}f), u_n \rangle_r u_n(x),$$

donde la serie converge absoluta y uniformemente en $[a, b]$, concluyendo así la demostración, estableciendo que las funciones propias $u_n(x)$ forman una base completa, es decir, que cualquier función f dentro del espacio de funciones considerado, puede representarse como una combinación lineal de estas funciones propias:

$$u(x) = Kf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Kf, u_n \rangle_r u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, u_n \rangle_r u_n(x).$$

□

Capítulo 4

Aplicación: cadena colgante

En este último capítulo, voy a presentar un ejemplo clásico de un problema de Sturm-Liouville singular, debido a la presencia de una singularidad en el coeficiente de la ecuación diferencial en uno de los extremos del intervalo.

4.1. Planteamiento del problema

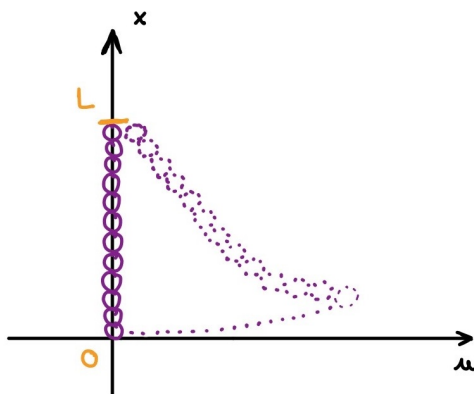


Figura 4.1: Esquema del problema de la cadena colgante

Se trata de una cadena de longitud L que cuelga verticalmente con un extremo fijo en la parte superior $x = L$ y con el otro extremo libre $x = 0$. Así pues, el intervalo que vamos a considerar en nuestro problema de la cadena colgante va a ser:

$$x \in [0, L]$$

donde:

- $x = 0$ corresponde al extremo libre (el punto más bajo) y donde la tensión es mínima (no hay peso colgando),
- $x = L$ corresponde al extremo fijo (el punto más alto), donde la cadena está sujeta y no puede moverse transversalmente (ya que está fijada a un soporte), y donde la tensión es mayor que en cualquier otro punto de la cadena (ya que soporta todo el peso de la cadena que cuelga debajo).

Asumimos que la cadena tiene una densidad de masa constante $\rho_0(x) = \rho_0$ (ya que si tomamos tramos de igual longitud en distintas partes de la cadena, estos tramos tienen la misma cantidad de masa), y experimenta pequeñas oscilaciones transversales bajo la influencia de la gravedad a la que está sometida y a la tensión que varía a lo largo de la longitud de la cadena.

Como bien sabemos, la cadena no se puede estirar ni comprimir, sin embargo, la tensión en la cadena colgante no se debe a que esta se esté estirando, sino que aparece debido a la gravedad, ya que cada punto de la cadena debe soportar y equilibrar el peso de los segmentos que cuelgan por debajo de él.

Ejes y coordenadas:

En (4.1), observamos lo siguiente:

- El eje x está colocado en posición vertical y con el origen en $x = L$, el extremo fijo de la cadena.
- El desplazamiento transversal (movimiento lateral hacia los lados) de la cadena en cualquier punto y momento está denotado como $u(x, t)$, en función de x (posición a lo largo de la cadena) y t (tiempo); y mide qué tanto se desvía la cadena de su posición de equilibrio en la dirección transversal (perpendicular a la dirección vertical).

Fuerzas actuantes:

- Gravedad: la cadena está sujeta a ella, con una aceleración constante g , y actúa en dirección vertical hacia abajo.
- Tensión: varía a lo largo de la cadena, en función de la porción de cadena que cuelga debajo de cada punto x .

Una vez considerado lo anterior, vamos a introducir la ecuación de movimiento, una ecuación en derivadas parciales que describe las pequeñas oscilaciones transversales de la cadena.

4.2. Ecuación de movimiento

La ecuación diferencial que describe el movimiento transversal de la cadena y que se deriva de las Leyes de Newton y de la conservación de la masa es:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (4.1)$$

donde:

- ρ_0 es la densidad de masa (es decir, su masa por unidad de longitud, y es la misma en todos los puntos de la cadena),
- $p(x)$ es la función de tensión acumulada en un punto x (fuerza para equilibrar el peso de todos los segmentos de cadena que cuelgan por debajo de ese punto), y que se define como:

$$p(x) = g\rho_0 \int_0^x dx,$$

donde el peso de un pequeño segmento viene dado por: $g\rho_0 dx$, y por tanto, para encontrar la tensión acumulada necesitamos sumar (integrar) los pesos de todos los segmentos de la cadena que cuelgan por debajo de x .

Se trata por tanto de un problema de Sturm-Liouville singular, al observar que el coeficiente $p(x)$ se anula en el extremo inferior de la cadena, es decir, cuando $x = 0$:

$$p(0) = g\rho_0 \int_0^0 dx = 0.$$

(Como se introdujo en el capítulo anterior, el problema es singular cuando las funciones ρ_0 o $p(x)$ tienen valores cero o infinitos en los extremos del intervalo $[0, L]$ considerado.)

A continuación voy a desarrollar los pasos hasta llegar a la ecuación diferencial mencionada en (4.1):

Como hemos comentado anteriormente, la cadena está sujeta a pequeñas oscilaciones transversales, es decir, se mueve ligeramente en la dirección perpendicular a su longitud. Para encontrar la ecuación de movimiento, vamos a dividir la cadena en pequeños segmentos de longitud dx , con el objetivo de escribir la ecuación de movimiento de uno de estos pequeños segmentos, y luego generalizarla para encontrar la ecuación de movimiento total.

La segunda Ley de Newton ($F = ma$), también conocida como la Ley fundamental de la dinámica, tiene como objetivo determinar la relación que se da entre la fuerza (F), la masa (m) y la aceleración (a) de un cuerpo que se encuentra en movimiento unidireccional, y que está bajo la acción de una fuerza neta externa.

En este caso, dicha ley nos explica que la fuerza transversal que actúa sobre un segmento de la cadena, es proporcional a la masa del segmento multiplicada por su aceleración transversal, por tanto, tenemos que el lado derecho de la ecuación de la Ley (ma) es:

$$\text{Fuerza transversal} = \rho_0 dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

donde:

- ρ_0 es la densidad de masa de la cadena, y dx la longitud del segmento,
 $\Rightarrow$ Masa del pequeño segmento de la cadena $= \rho_0 dx$,
- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ es la aceleración transversal (segunda derivada del desplazamiento transversal $u(x, t)$ respecto al tiempo).

Y por otro lado, el lado izquierdo de la Ley (F = fuerza neta transversal que experimenta un pequeño segmento de la cadena), corresponde a la tensión neta (diferencia entre las dos tensiones que actúan en los dos extremos de un pequeño segmento de la cadena) generada por el peso de la cadena en cada punto. La tensión va variando a lo largo de la longitud de la cadena, es mayor cerca del punto fijo (extremo donde está colgada), y es menor cerca del extremo libre (donde no soporta peso).

En un punto donde la cadena esté inclinada, necesitaremos obtener la componente transversal de la tensión (parte de la tensión que actúa perpendicularmente a la dirección horizontal), que es la que causa el movimiento transversal.

Nota. La curva que describe nuestra cadena colgante es suave, forma un ángulo (θ) muy pequeño con la horizontal, como se representa en (4.2), de tal manera, que podemos considerar que $\sin(\theta) \approx \tan(\theta) \approx \theta$.

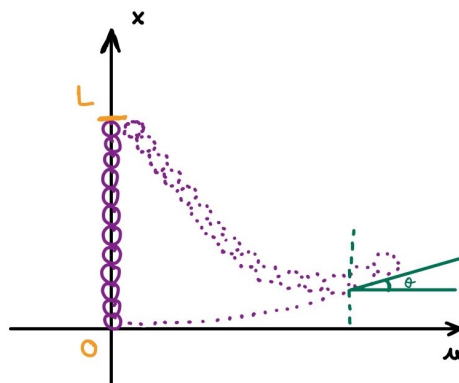


Figura 4.2: Esquema de la curva que describe nuestro problema de la cadena colgante

Además, sabemos que la pendiente de la curva en un punto es igual a la tangente del ángulo de inclinación que estamos midiendo (pendiente = $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ y $\tan(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \Rightarrow$ geoméricamente: $\tan(\theta) =$ pendiente).

Por tanto, como la pendiente de la curva en un punto es igual a la derivada de la función en ese punto:

$$\text{pendiente} = \frac{\partial u}{\partial x}(x) = \tan(\theta) \approx \sin(\theta) \Rightarrow \sin(\theta) = \frac{\partial u}{\partial x}(x).$$

$\Rightarrow$ Componente transversal de la tensión en un punto x :

$$p_{\text{transversal}} = p_y = p(x) \sin(\theta) = p(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x),$$

donde:

- $p(x)$ es la tensión de la cadena en un punto x ,
- $\frac{\partial u}{\partial x}(x)$ es la inclinación de la cadena en ese punto (derivada parcial del desplazamiento transversal $u(x, t)$), y mide qué tan inclinada está la cadena en ese punto x .

Por tanto:

$$\text{fuerza neta transversal} = p(x+dx) \frac{\partial u}{\partial x}(x+dx) - p(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x)$$

Además sabemos que el desarrollo de Taylor para una función $f(x)$ en cualquier punto $x = a$ viene dado por:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \dots$$

Por tanto, si aproximamos el valor de la función $f(x+dx)$ alrededor del punto x ($a = x$) tendremos:

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x) \cdot dx + \frac{1}{2!}f''(x) \cdot (dx)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x) \cdot (dx)^3 + \dots,$$

con lo que la aproximación por Taylor de primer orden quedaría: $f(x+dx) \approx f(x) + f'(x) \cdot dx$.

Aplicando esto al caso de la cadena colgante, queremos aproximar la tensión y la inclinación en $(x+dx)$:

- Aproximación de $p(x+dx) \approx p(x) + p'(x) \cdot dx$.
- Aproximación de $\frac{\partial u}{\partial x}(x+dx) \approx \frac{\partial u}{\partial x}(x) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)'(x) \cdot dx$.

Multiplicando las dos expansiones y descartando los términos de segundo orden como $(dx)^2$, obtenemos:

$$\begin{aligned} p(x+dx) \frac{\partial u}{\partial x}(x+dx) &\approx \left(p(x) + \frac{dp}{dx} \cdot dx\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot dx\right) \\ \Rightarrow p(x+dx) \frac{\partial u}{\partial x}(x+dx) &\approx p(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x) + p(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \frac{dp}{dx} dx \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x). \end{aligned}$$

y utilizando la regla de la derivada del producto:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x) + p(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

se tiene que:

$$p(x+dx) \frac{\partial u}{\partial x}(x+dx) \approx p(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot dx.$$

Así pues:

$$\begin{aligned} \text{fuerza neta transversal} &= p(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot dx - p(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x) \\ &\Rightarrow \text{fuerza neta transversal} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot dx. \end{aligned}$$

Concluyendo entonces y volviendo a la segunda Ley de Newton, conseguimos la ecuación de movimiento que describe el movimiento transversal $u(x, t)$ de la cadena:

$$\begin{aligned} \text{Fuerza transversal} &= \rho_0 dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot dx &= \rho_0 dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Al eliminar dx , pasamos a generalizar la ecuación a toda la cadena y no a un segmento específico, obteniendo la ecuación (4.1):

$$g \left(x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Por tanto, el problema de valor inicial en la frontera de la cadena es:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \left(x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \right), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ |u(0, t)| < \infty, & t \geq 0, \\ u(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x, 0) = v(x), & 0 \leq x \leq L, \end{cases} \quad (4.2)$$

donde:

- la condición en la frontera $|u(0, t)| < \infty$, nos asegura que el desplazamiento de la cadena en $x = 0$ (el extremo inferior) sea acotado, y que aunque presente una singularidad en ese punto, la solución no diverja y se mantenga bien definida,
- la condición en la frontera $u(L, t) = 0$, establece que en $x = L$ (extremo superior) no hay movimiento transversal, está fijo $\forall t$,
- la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, define cómo está desplazada la cadena transversalmente en el instante inicial $t = 0$,
- la condición inicial $u_t(x, 0) = v(x)$, describe la velocidad inicial de cada punto de la cadena en el instante inicial $t = 0$.

4.3. Resolución de la ecuación de movimiento

Para la resolución de la ecuación de movimiento, aplico el método estudiado y conocido como separación de variables, asumiendo una solución de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, y tras las operaciones realizadas en el anexo, obtengo la solución general de nuestro problema de la cadena colgante:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} J_0 \left(\alpha_j \sqrt{\frac{x}{L}} \right) \cdot \left(A_j \cos \left(\frac{\alpha_j}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} t \right) + B_j \sin \left(\frac{\alpha_j}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} t \right) \right),$$

con:

$$\Rightarrow A_k = \frac{1}{L J_1^2(\alpha_k)} \int_0^L f(x) J_0 \left(\alpha_k \sqrt{\frac{x}{L}} \right) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow B_k = \frac{2}{\alpha_k J_1^2(\alpha_k) \sqrt{gL}} \int_0^L v(x) J_0 \left(\alpha_k \sqrt{\frac{x}{L}} \right) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Bibliografía

- [1] RONALD B. GUENTHER, JOHN W. LEE, *Sturm-Liouville problems: theory and numerical implementation*, Monographs and research notes in mathematics, Department of mathematics Oregon State University Corvallis, 1942.
- [2] M.A. AL-GWAIZ, *Sturm-Liouville theory and its applications*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2000.
- [3] NAKHLÉ H. ASMAR, *Partial differential equations with fourier series and boundary value problems*, Second edition, 2004, Upper Saddle River, New Jersey 07458.
- [4] R. KENT NAGLE, E. SAFF, A. DAVID SNIDER, *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*, Pearson Educación, México, 2005.
- [5] DR. RAIMUND BÜRGER, *Ecuaciones Diferenciales II*, Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Chile, 2023.
- [6] J. A. MURILLO, *Transformadas Integrales y Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Tema 8: Sistemas singulares de Sturm-Liouville y funciones de Bessel, Universidad Politécnica de Cartagena, 2010/2011.

Anexo

Resolución de la ecuación de movimiento del problema de la cadena colgante, ubicado en el Capítulo 4, aplicando para ello el método de separación de variables:

Asumimos una solución de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$ (producto de una función que depende solo de la posición y otra función que depende solo del tiempo).

Introducimos esto en la ecuación diferencial (4.2), y obtenemos:

$$T''(t)X(x) = gT(t)[xX''(x) + X'(x)].$$

Aplicamos separación de variables:

$$\frac{1}{g} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{xX''(x) + X'(x)}{X(x)},$$

e igualando cada lado de la ecuación a una constante $-\lambda$ (llamada constante de separación y negativa por conveniencia, es decir, $\lambda < 0$), obtenemos dos ecuaciones, tal que una depende únicamente de x (posición) y la otra de t (tiempo):

1. Ecuación temporal:

$$\frac{1}{g} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \implies T''(t) + \lambda g T(t) = 0.$$

2. Ecuación espacial:

$$\frac{xX''(x) + X'(x)}{X(x)} = -\lambda \implies xX''(x) + X'(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Resolución de las ecuaciones separadas:

1. $T''(t) + \lambda g T(t) = 0$ es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo grado. La solución depende del signo de λ , y en este caso, asumimos que $\lambda > 0$ (ya que buscamos soluciones oscilatorias que describen cómo varían los movimientos transversales de la cadena con el tiempo). Por tanto, la solución general vendría dada por: $\Rightarrow$

$$T(t) = A \cos(\sqrt{g\lambda}t) + B \sin(\sqrt{g\lambda}t),$$

con A y B constantes de integración (determinadas por las condiciones iniciales).

2. En cuanto a la ecuación espacial $xX''(x) + X'(x) + \lambda X(x) = 0$, la consideramos desde el punto de vista de la teoría de Sturm-Liouville, y comparándola con su forma general (2.1) y reescribiéndola, observamos que: $xX''(x) + X'(x) + \lambda X(x) = (xX')' + \lambda X \Rightarrow$

$$(xX')' + \lambda X = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(x \frac{dX}{dx} \right) + \lambda X = 0,$$

donde:

- $p(x) = x$ es la función asociada al coeficiente de la derivada,
- $q(x) = 0$, no hay un término que dependa solo de $X(x)$,
- la función de peso $r(x) = 1$,
- $u(x)$ corresponde a $X(x)$, la función espacial que queremos encontrar.

A continuación, realizamos el siguiente cambio de variable para poder relacionar la ecuación diferencial con la función de Bessel: $s = 2\sqrt{x} \Rightarrow x = \frac{s^2}{4}$, $\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{s^2}{4} = \frac{s}{2}$, y usando la regla de la cadena tenemos que:

$$\begin{aligned} \blacksquare X' &= \frac{dX}{dx} = \frac{dX}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} = \frac{dX}{ds} \cdot \frac{2}{s}, \\ \blacksquare X'' &= \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dX}{ds} \cdot \frac{2}{s} \right) = \frac{2}{s} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{dX}{ds} \cdot \frac{2}{s} \right) = \frac{4}{s^2} \cdot \frac{d^2X}{ds^2} - \frac{4}{s^3} \cdot \frac{dX}{ds}. \end{aligned}$$

A partir de la ecuación $(xX')' + \lambda X = X' + x \cdot \frac{d^2X}{dx^2} + \lambda X = 0$, como $x = \frac{s^2}{4}$, entonces:

$$X' + \frac{s^2}{4} \cdot \frac{d^2X}{ds^2} + \lambda X = 0.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores de X' y X'' en la ecuación espacial y simplificando tenemos que:

$$\frac{dX}{ds} \cdot \frac{2}{s} + \frac{s^2}{4} \cdot \left(\frac{4}{s^2} \cdot \frac{d^2X}{ds^2} - \frac{4}{s^3} \cdot \frac{dX}{ds} \right) + \lambda X = \frac{dX}{ds} \cdot \frac{2}{s} + \frac{d^2X}{ds^2} - \frac{1}{s} \cdot \frac{dX}{ds} + \lambda X = \frac{1}{s} \cdot \frac{dX}{ds} + \frac{d^2X}{ds^2} + \lambda X = 0.$$

Por último, multiplicando todo por s^2 se tiene que:

$$s^2 \cdot \frac{d^2X}{ds^2} + s \cdot \frac{dX}{ds} + s^2 \cdot \lambda X = 0,$$

la cuál es precisamente la ecuación diferencial de Bessel de orden 0.

En efecto, la forma estándar de la ecuación diferencial de Bessel de orden ν viene dada por:

$$x^2 u'' + xu' + (n^2 x^2 - \nu^2)u = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

y en nuestro caso, la ecuación del problema de la cadena colgante cumple esta ecuación con:

- $x = s$
- $n^2 = \lambda$,
- $\nu^2 = 0$,

es decir,

$$s^2 X'' + sX' + (\lambda s^2)X = 0, \quad 0 \leq s \leq 2\sqrt{L}.$$

Nota. La solución general de la ecuación de Bessel de orden ν es la combinación de dos funciones:

$$X(s) = C_1 J_\nu(\sqrt{\lambda} s) + C_2 Y_\nu(\sqrt{\lambda} s), \quad \text{con } C_1, C_2 \text{ constantes,}$$

donde:

- $J_\nu(s)$ es la función de Bessel de primera especie de orden ν ,

$$J_\nu(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

- $Y_\nu(s)$ es la función de Bessel de segunda especie de orden ν , y cumpliendo que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} Y_\nu(s) = -\infty.$$

En nuestro caso, $\nu = 0$, así que la solución general es:

$$X(s) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda} s) + C_2 Y_0(\sqrt{\lambda} s).$$

Por otro lado, un teorema de la función de Bessel nos dice que las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel de orden ν en $[0, s_{max}]$ con las condiciones de frontera:

$$X(0) \text{ finito} \quad ; \quad X(s_{max}) = 0, \quad (s_{max} = 2\sqrt{L})$$

están dadas por las funciones de Bessel $J_\nu(s)$ y $Y_\nu(s)$ con $\nu \geq 0$ ($\nu = 0$ en nuestro caso).

- Así pues, para mantener la solución $X(0)$ finita, y por tanto que se cumpla la primera condición de frontera, debemos descartar $Y_0(s)$ ya que diverge en el origen $\lim_{s \rightarrow 0} Y_\nu(s) = -\infty$. Por tanto, imponemos que $C_2 = 0$.

En cambio, $J_0(0) = 1$, y sin pérdida de generalidad, asumimos que $C_1 = 1$, es decir, la solución será: $X(s) = J_0(\sqrt{\lambda} s)$.

- En cuanto a la segunda condición de frontera, tenemos que $s_{max} = 2\sqrt{L}$, así que tiene que cumplirse que: $X(2\sqrt{L}) = 0$.

Dado que: $X(s) = J_0(\sqrt{\lambda} s) \Rightarrow X(2\sqrt{L}) = J_0(\sqrt{\lambda} 2\sqrt{L})$, obtenemos que:

$$J_0(\sqrt{\lambda} 2\sqrt{L}) = 0 \iff \sqrt{\lambda} 2\sqrt{L} = \alpha_j, \quad \forall j = 1, 2, 3, \dots$$

siendo α_j los ceros de la función de Bessel de primera especie.

(La función $J_0(s)$ se anula en $s = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ dicha existencia de ceros es una propiedad inherente de las funciones de Bessel debido a su forma oscilatoria.)

Despejando λ :

$$\lambda = \lambda_j = \left(\frac{\alpha_j}{2\sqrt{L}} \right)^2, \quad (\text{cada } j \text{ genera un valor propio diferente})$$

por tanto:

$$X(s) = X_j(s) = J_0 \left(\frac{\alpha_j}{2\sqrt{L}} s \right).$$

Deshaciendo el cambio de variable $s = 2\sqrt{x}$ obtenemos las soluciones espaciales:

$$X_j(2\sqrt{x}) = J_0 \left(\frac{\alpha_j}{2\sqrt{L}} 2\sqrt{x} \right) = J_0 \left(\alpha_j \sqrt{\frac{x}{L}} \right), \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Además, estas funciones son ortogonales en el intervalo $0 \leq x \leq L$ con respecto a la función de peso s , es decir,

$$\int_0^L J_\nu(\lambda_j 2\sqrt{x}) J_\nu(\lambda_k 2\sqrt{x}) 2\sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 0 \Rightarrow \int_0^L J_0 \left(\alpha_j \sqrt{\frac{x}{L}} \right) J_0 \left(\alpha_k \sqrt{\frac{x}{L}} \right) dx = 0, \quad j \neq k,$$

y cuando $j = k$:

$$\int_0^L J_0^2 \left(\alpha_k \sqrt{\frac{x}{L}} \right) dx = L J_1^2(\alpha_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Nota. El teorema de ortogonalidad de las funciones de Bessel nos dice que:

$$\int_0^{s_{max}} J_\nu^2 \left(\frac{\alpha_k}{s_{max}} s \right) s ds = \frac{s_{max}^2}{2} J_{\nu+1}^2(\alpha_k); \quad \text{y si la función de peso } s=1: \Rightarrow \int_0^{s_{max}} J_\nu^2 \left(\frac{\alpha_k}{s_{max}} s \right) ds = s_{max} J_{\nu+1}^2(\alpha_k).$$

Por último, como $u(x, t) = X(x)T(t) \Rightarrow u_j(x, t) = X_j(2\sqrt{x})T_j(t)$, sustituimos:

$$u_j(x, t) = J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right) \cdot \left(A_j \cos\left(\sqrt{g\lambda_j}t\right) + B_j \sin\left(\sqrt{g\lambda_j}t\right)\right),$$

y como

$$\lambda_j = \left(\frac{\alpha_j}{2\sqrt{L}}\right)^2, \text{ entonces: } u_j(x, t) = J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right) \cdot \left(A_j \cos\left(\frac{\alpha_j}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + B_j \sin\left(\frac{\alpha_j}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)\right).$$

Así, conseguimos mediante la superposición de todos los modos $j = 1, 2, 3, \dots$ la solución general de nuestro problema de la cadena colgante:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right) \cdot \left(A_j \cos\left(\frac{\alpha_j}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + B_j \sin\left(\frac{\alpha_j}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)\right).$$

Para sacar los coeficientes A_j y B_j , usamos las condiciones iniciales:

- $u(x, 0) = f(x) \Rightarrow f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right)$, multiplicamos ambos lados por $J_0(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}})$ e integramos sobre x en el intervalo $[0, L]$ para usar la propiedad de ortogonalidad de las funciones J_0 :

$$\begin{aligned} f(x) \cdot J_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right) \cdot J_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right) \\ \Rightarrow \int_0^L f(x) J_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right) dx &= \sum_{j=1}^{\infty} A_j \int_0^L J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right) J_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right) dx, \\ &\Rightarrow \int_0^L f(x) J_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right) dx = A_k \int_0^L J_0^2\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right) dx, \\ \Rightarrow \int_0^L f(x) J_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right) dx &= A_k L J_1^2(\alpha_k) \quad (\text{no hay función de peso, } x=1) \\ \Rightarrow A_k &= \frac{1}{L J_1^2(\alpha_k)} \int_0^L f(x) J_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right) dx, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

- $u_t(x, 0) = v(x)$:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right) \cdot \frac{\alpha_j}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot \left(-A_j \sin\left(\frac{\alpha_j}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + B_j \cos\left(\frac{\alpha_j}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)\right) \\ \Rightarrow u_t(x, 0) = v(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right) \cdot \frac{\alpha_j}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot B_j, \end{aligned}$$

multiplicamos de nuevo ambos lados por $J_0(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}})$ e integramos sobre x en el intervalo $[0, L]$ para usar la propiedad de ortogonalidad de las funciones J_0 :

$$\begin{aligned} v(x) \cdot J_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right) \cdot \frac{\alpha_j}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot B_j \cdot J_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right) \\ \Rightarrow \int_0^L v(x) J_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right) dx &= \sum_{j=1}^{\infty} B_j \cdot \frac{\alpha_j}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \int_0^L J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right) J_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right) dx, \\ \Rightarrow \int_0^L v(x) J_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right) dx &= B_k \cdot \frac{\alpha_k}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \int_0^L J_0^2\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right) dx, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^L v(x) J_0 \left(\alpha_k \sqrt{\frac{x}{L}} \right) dx = B_k \frac{\alpha_k}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} L J_1^2(\alpha_k),$$

$$\Rightarrow B_k = \frac{2}{\alpha_k J_1^2(\alpha_k) \sqrt{gL}} \int_0^L v(x) J_0 \left(\alpha_k \sqrt{\frac{x}{L}} \right) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

determinando así completamente la solución en términos de las condiciones iniciales.