

Alta precisión relativa para matrices de Bernstein-Vandermonde



Sergio Romero Gil
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Juan Manuel Peña Ferrández
14 de noviembre de 2024

Abstract

Bernstein polynomials form a family of polynomials widely used both in computer aided geometric design and in approximation theory, due to their versatility and properties. In approximation theory, Bernstein polynomials stand out for their capacity to approximate continuous functions, converging to the desired function as polynomials degree increases. In design, these polynomials form the basis used with Bézier curves, which are used to shape curves in a controlled and smooth way. In this paper, some of the principal properties of Bernstein polynomials are presented within this context. This combination of theoretical fundamentals and practical utility makes Bernstein polynomials fundamental tools within numerical analysis.

The collocation matrices associated with Bernstein polynomials are named Bernstein-Vandermonde matrices. Since they are ill-conditioned matrices, these matrices have traditionally been problematic due to rounding errors. Controlling rounding error is a fundamental problem in numerical analysis, where the study of the error normally depends on the conditioning of the problem. However, recent approaches focus on the development of algorithms with high relative accuracy, which allows the effects of ill-conditioning to be avoided.

Throughout this work, it will be observed that algorithms with high relative accuracy, have been obtained for certain classes of structured matrices. Among these structured classes from which the algorithms mentioned have been obtained, there are certain subclasses of totally positive matrices, parameterized by means of their bidiagonal factorization, which employs an alternative procedure to Gaussian elimination, known as Neville elimination. If the bidiagonal factorization is obtained with high relative accuracy, then many algebraic computations (eigenvalues, singular values, resolution of certain systems, inverses) can be computed with high relative accuracy. This has been achieved with Bernstein-Vandermonde matrices, as presented in this paper.

The first chapter establishes the conceptual foundations required for the development of the paper, starting with a review of error analysis in numerical linear algebra. Key concepts such as absolute and relative errors, as well as forward and backward errors are recalled as well as introducing high relative accuracy, a highly desirable property that has been achieved in few cases. Furthermore, totally positive and strictly totally positive matrices are presented, outlining some properties that will be useful in later results. Neville elimination is also introduced; its essence is to produce zeros below the main diagonal of the matrix by adding an appropriate multiple of each preceding row to the following one, making it a valuable theoretical tool for the development of this paper. Finally, bidiagonal factorization, essential for the development of algorithms that ensure high relative accuracy in some totally positive matrices, is exposed.

The second chapter focuses on Bernstein polynomials and their use in computer aided geometric design, pointing out how these polynomials ease shape control in the representation of curves, a key aspect in the geometric design. The Bernstein basis is then defined along with some of its properties together with an analysis of its optimality for shape preservation by introducing the concept of B-basis. Moreover, Bézier curves are analyzed and key properties are developed; such as the De Casteljau algorithm, which allows to evaluate them efficiently, and the process of curve subdivision, which allows us to manipulate different sections of a curve in an independent way.

Finally, the third chapter focuses on the Vandermonde and Bernstein-Vandermonde matrices, analyzing their structure and providing an explicit formula for their determinant. Then a bidiagonal factorization is presented for both types of matrices, enabling algebraic computations with high relative accuracy,

even in cases of ill-conditioned matrices. Additionally, a direct method is proposed for calculating inverses and solving specific systems of equations, once again ensuring results with high relative accuracy.

Índice general

Abstract	III
1. Fundamentos, notaciones y resultados básicos	1
1.1. Errores y cancelación	1
1.1.1. Error absoluto y error relativo	1
1.1.2. Errores forward y errores backward	2
1.1.3. Alta precisión relativa	3
1.2. Matrices totalmente positivas y estrictamente totalmente positivas	3
1.3. Eliminación de Neville	5
1.4. Factorización bidiagonal	6
2. Polinomios de Bernstein en CAGD	9
2.1. Diseño geométrico asistido por ordenador y matrices TP	9
2.2. Base de Bernstein y su optimalidad en CAGD	11
2.3. Curvas de Bézier	13
2.3.1. Definición y primeras propiedades	13
2.3.2. Derivadas de una curva de Bézier	13
2.3.3. Algoritmo de De Casteljau	14
2.3.4. Subdivisión	15
3. Matrices de Bernstein-Vandermonde y alta precisión relativa	19
3.1. Matrices de Vandermonde y de Bernstein-Vandermonde	19
3.2. Factorización bidiagonal y alta precisión relativa	20
3.3. Alternativa directa para inversas y resolución de sistemas	23

Capítulo 1

Fundamentos, notaciones y resultados básicos

Este primer capítulo tiene como objetivo establecer los conceptos, notaciones y resultados fundamentales para el desarrollo de la memoria.

La sección 1.1 se centra en el análisis de errores en el álgebra lineal numérica, describiendo las diferentes métricas de error y el efecto que la cancelación numérica y la acumulación de errores de redondeo pueden tener sobre la precisión de los resultados. Además, se observa que la alta precisión relativa será una propiedad muy deseable para asegurar una mayor fiabilidad en los cálculos.

En la sección 1.2 se introducen las matrices totalmente positivas y se presentan importantes propiedades que serán de gran utilidad para resultados posteriores.

En la sección 1.3 se presenta la eliminación de Neville, un método alternativo a la eliminación de Gauss que resulta particularmente valioso en el análisis de matrices totalmente positivas. Asimismo, se muestra su importancia teórica en la caracterización de matrices estrictamente totalmente positivas. Además, será la herramienta teórica utilizada en la siguiente y última sección.

La última sección se enfoca en la factorización bidiagonal, con el propósito de abordar las dificultades de cálculo asociadas a las matrices totalmente positivas, a menudo mal condicionadas. Esta factorización ofrece una representación más adecuada de estas matrices y será fundamental para desarrollar algoritmos con alta precisión relativa.

1.1. Errores y cancelación

El álgebra lineal numérica se centra en el desarrollo de algoritmos que permiten resolver problemas de álgebra lineal a través de cálculos computacionales. Una herramienta principal para abordarlos es la aproximación numérica, lo que introduce una diferencia entre el resultado obtenido y la solución exacta, conocida como error. El análisis del error se convierte en un aspecto clave para el desarrollo de algoritmos eficientes.

1.1.1. Error absoluto y error relativo

Supongamos que se quiere calcular un valor escalar x . Sea $\hat{x}$ una aproximación de x .

Definición. El *error absoluto* cometido al hallar $\hat{x}$ es

$$E_{abs}(\hat{x}) = |x - \hat{x}|.$$

Este error no tiene en cuenta la magnitud de la cantidad que se aproxima, lo que podría hacerlo poco informativo. En computación, dado que las soluciones a los problemas pueden variar significativamente en magnitud, suele ser más relevante considerar el error relativo.

Definición. El *error relativo* cometido al hallar $\hat{x}$, cuando $x \neq 0$ es

$$E_{rel}(\hat{x}) = \frac{|x - \hat{x}|}{|x|}.$$

Una definición equivalente del error relativo es $E_{rel}(\hat{x}) = |\rho|$, donde $\hat{x} = x(1 + \rho)$. El error relativo está vinculado al número de cifras significativas correctas obtenidas. Las cifras significativas de un número comprenden el primer dígito distinto de cero y todos los dígitos que lo siguen. En el caso vectorial, esta noción se extiende usando las normas habituales:

$$\|x\|_{\infty} := \max_i |x_i|, \quad \|x\|_1 := \sum_i |x_i|, \quad \|x\|_2 := (x^{\top} x)^{1/2}.$$

Definición. El *error relativo* cometido al hallar $\hat{x}$, cuando $x \neq 0$, es

$$E_{rel}(\hat{x}) = \frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|}.$$

No obstante, es posible que no se aprecie el error en las componentes de menor magnitud del vector, por lo que, en muchos casos, resulta adecuado analizar cada componente individualmente.

Definición. El *error relativo componente a componente* del vector $\hat{x}$, cuando $x_i \neq 0$, es

$$E_{rel}(\hat{x}) = \max_i \frac{|x_i - \hat{x}_i|}{|x_i|},$$

que es ampliamente utilizado en análisis de errores y perturbaciones.

1.1.2. Errores forward y errores backward

Sea f una función real de variable real. Supongamos que $\hat{y} = \hat{f}(x)$ es una aproximación numérica de f en un cierto punto x . Para evaluar la calidad del resultado obtenido será de interés el error absoluto o relativo cometido, al que se denominará *error forward* (o progresivo). Sin embargo, un análisis directo de dicho error puede resultar complejo. Así pues, es frecuente que el planteamiento consista en considerar los valores para los que se ha obtenido la solución exacta, es decir, ¿para qué Δx se cumple $\hat{f}(x) = f(x + \Delta x)$? Es claro que no existirá una respuesta única, pero nos interesa conocer el menor $|\Delta x|$. El valor de mín $|\Delta x|$ (dividido por $|x|$ en el caso relativo) será el que se conoce como *error backward* (o regresivo). Si $|\Delta x|$ es pequeño para todo x , diremos que el método utilizado es estable backward. Normalmente es mucho más fácil acotar el error backward que el forward.

Más allá del importante papel que puede jugar la estabilidad backward en el diseño de un buen algoritmo, el estudio del error backward resulta útil para la estimación del error forward, que era el objetivo principal. La conexión entre ambos tipos de error está regida por el condicionamiento del problema, que refleja cuán sensible es la solución ante perturbaciones en los datos. La relación queda representada por la siguiente regla empírica (véase página 38 de [15]):

$$\text{error forward} \leq \text{número de condición} \times \text{error backward},$$

lo que permitirá obtener una cota del error forward a través del error backward.

Una forma de interpretar esta regla es decir que la solución calculada de un problema mal condicionado puede tener un gran error forward incluso si la solución calculada tiene un error backward pequeño. Así pues, el condicionamiento se presenta como un problema intrínseco para proporcionar una cota adecuada del error, a diferencia del error backward, que depende del método empleado. En la práctica, y en el contexto del álgebra lineal numérica, si un problema está asociado a una matriz mal condicionada, sería deseable poder encontrar un camino alternativo que no dependa del condicionamiento de la matriz. Esto motiva el siguiente apartado.

1.1.3. Alta precisión relativa

En algunos problemas, es posible encontrar una parametrización de los datos y un algoritmo que conduzca a errores (forward) pequeños a pesar de un mal condicionamiento con su parametrización inicial; sin embargo, esto no siempre es factible. El objetivo deseado es garantizar una *alta precisión relativa* (HRA, de «High Relative Accuracy»). Se dice que los cálculos se realizan con HRA si, para alguna constante K ,

$$\text{error forward relativo} \leq Ku, \quad \text{donde } u \text{ es la unidad de redondeo.}$$

La importancia de garantizar una alta precisión relativa radica en que permite asegurar que los errores relativos sean del mismo orden que la unidad de redondeo, sin importar el condicionamiento del problema.

Si un algoritmo solo emplea sumas de números con el mismo signo, multiplicaciones y divisiones, y asumimos que cada dato inicial es conocido con HRA, esto será suficiente para garantizar la HRA [6]. Además, en aritmética de coma flotante, la alta precisión relativa también se conserva cuando se realizan restas con los datos originales, ya que estos serán exactos [7]. Por lo tanto, la condición suficiente para garantizar la HRA de un algoritmo es que solo se empleen sumas de números con el mismo signo, multiplicaciones, divisiones y restas (sumas de números de signos opuestos) de los datos originales. En otras palabras, se deben evitar las restas, excepto cuando se trate de los datos iniciales, para prevenir lo que se conoce como cancelación sustractiva, que se producirá al restar dos números casi iguales.

Restar cantidades del mismo tamaño puede magnificar errores previos y provocar que los resultados obtenidos sean poco fiables. Consideremos la función

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Para $x = 1,2 \times 10^{-5}$, el valor de $\cos x$ redondeado a diez cifras significativas es $c = 0,9999999999$, luego $1 - c = 0,0000000001$. Entonces,

$$\frac{1 - c}{x^2} = \frac{10^{-10}}{1,44 \times 10^{-10}} = 0,6944 \dots,$$

lo que es claramente erróneo dado el hecho de que $0 \leq f(x) < 1/2$ para todo $x \neq 0$. La resta $1 - c$ es exacta, pero esta resta produce un resultado del mismo tamaño que el error en c . En otras palabras, la resta magnifica la importancia del error anterior. En este ejemplo, reescribir $f(x)$ para evitar la cancelación es sencillo, pero el ejemplo resalta la importancia de la cancelación sustractiva y explica por qué se trata de evitar para desarrollar algoritmos con HRA.

También se puede observar que un contexto de positividad puede ser natural para conseguir alta precisión relativa. El siguiente apartado muestra una clase de matrices donde esto se ha podido conseguir.

1.2. Matrices totalmente positivas y estrictamente totalmente positivas

Se inicia esta sección con la introducción de las matrices totalmente positivas. Aunque su definición puede parecer muy restrictiva, es notable la frecuencia y relevancia de las aplicaciones en las que aparecen (véase [2], [8], [12], [23]).

Definición. Una matriz A es *totalmente positiva* (TP) si todos sus menores son no negativos. Si todos sus menores son estrictamente positivos, entonces la matriz será *estrictamente totalmente positiva* (STP).

Una primera propiedad para las matrices TP y STP es la preservación de dichas propiedades bajo el producto matricial (Teorema 3.1 de [2]).

Teorema 1.1. Sean A, B matrices $m \times n$ y $m \times p$ respectivamente. Si A y B son TP (resp. STP), entonces AB es TP (resp. STP).

A continuación, se introduce una notación que resultará de utilidad para describir las submatrices utilizadas en cálculos posteriores.

Dados $k, n \in \mathbb{N}$ ($1 \leq k \leq n$), se define $Q_{k,n}$ como el conjunto de sucesiones estrictamente crecientes de k enteros positivos menores o iguales a n . Sea A una matriz real de dimensión $n \times m$. Para $k \leq n$ y $l \leq m$, y dadas las sucesiones $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in Q_{k,n}$ y $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l) \in Q_{l,m}$, se denota por $A[\alpha|\beta]$ la submatriz de dimensión $k \times l$ de A , que contiene las filas numeradas por α y las columnas numeradas por β . Cuando $\alpha = \beta$, la submatriz $A[\alpha|\alpha]$ se denomina submatriz principal, y se abrevia como $A[\alpha]$.

Definición. Se dice que una submatriz de A es *inicial por filas* si está formada por filas iniciales consecutivas y columnas consecutivas. De manera análoga, una submatriz de A formada por columnas iniciales consecutivas y filas consecutivas será *inicial por columnas*. Los determinantes de estas submatrices se denominan *menor inicial por filas* y *menor inicial por columnas*, respectivamente.

Se presenta ahora una caracterización de las matrices estrictamente totalmente positivas en términos de sus menores (Teorema 4.1 de [10]), particularizada para el caso de matrices cuadradas.

Teorema 1.2. *Una matriz A será estrictamente totalmente positiva (STP) si y sólo si todos sus menores iniciales por filas y por columnas son positivos.*

Por otro lado, una matriz TP no singular tendrá todos sus menores principales positivos (Corolario 3.8 de [2]).

Teorema 1.3. *Si A es una matriz totalmente positiva no singular de orden n , entonces*

$$\det A[\alpha] > 0 \quad \text{para todo } k \text{ y } \alpha \in Q_{k,n}.$$

También se puede proporcionar una caracterización para las matrices no singulares TP (Teorema 3.1 de [13]). Observemos que, para probar la total positividad en el resultado siguiente, serán necesarios muchos más menores que para probar la estricta total positividad en el Teorema 1.2.

Teorema 1.4. *Sea A una matriz no singular de orden n . Entonces A es TP si y sólo si satisface simultáneamente, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ las siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned} \det A[\alpha | 1, 2, \dots, k] &\geq 0 & \forall \alpha \in Q_{k,n}, \\ \det A[1, 2, \dots, k | \beta] &\geq 0 & \forall \beta \in Q_{k,n}, \\ \det A[1, 2, \dots, k] &> 0. \end{aligned}$$

A continuación, se presenta otra interesante propiedad de las matrices TP no singulares relacionada con su inversa, que es consecuencia del Teorema 3.3 de [2]. Para ello, se define la siguiente matriz $n \times n$:

$$J_n := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & (-1)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Proposición 1.5. *Si una matriz A $n \times n$ es TP no singular, entonces $J_n A^{-1} J_n$ es TP.*

Se puede entonces observar que, si A es TP, A^{-1} presenta una estructura de signos ajedrezada.

Para concluir la sección, se introduce una notación que resulta de utilidad para el manejo de matrices bidiagonales elementales. Denotamos por $E_i(x)$, con $i = 2, \dots, n$, a la matriz bidiagonal elemental inferior cuya única entrada no nula fuera de la diagonal principal es x , en la posición $(i, i-1)$:

$$E_i(x) := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & x & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Observemos que, si $x \geq 0$, $E_i(x)$ es TP no singular.

Nótese que $E_i^\top(x)$ representa una matriz bidiagonal elemental superior. Además, este tipo de matrices cumplirán las siguientes propiedades:

$$E_i(x)E_j(y) = E_j(y)E_i(x) \quad \text{excepto si } |i - j| = 1 \text{ con } xy \neq 0 \quad (1.2)$$

y

$$E_i(x)^{-1} = E_i(-x). \quad (1.3)$$

La siguiente sección presenta un procedimiento de eliminación denominado eliminación de Neville, el cual resulta muy útil con las matrices TP y está relacionado con las matrices elementales bidiagonales.

1.3. Eliminación de Neville

La herramienta teórica fundamental para alcanzar los resultados expuestos en este trabajo es la *eliminación de Neville*. La esencia de este procedimiento es producir ceros bajo la diagonal principal de la matriz A sumando a cada fila un múltiplo apropiado de la anterior (en lugar de utilizar una fila fija con un pivote fijo como en la eliminación de Gauss).

Para una matriz no singular $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, la eliminación de Neville consiste en $n - 1$ etapas que dan como resultado la sucesión de matrices

$$A := A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n = U.$$

$A_t = (a_{i,j}^{(t)})_{1 \leq i,j \leq n}$ tendrá ceros bajo la diagonal principal en las $t - 1$ primeras columnas y, por tanto, U será una matriz triangular superior.

La matriz A_{t+1} se obtiene a partir de A_t usando la siguiente fórmula:

$$a_{i,j}^{(t+1)} := \begin{cases} a_{i,j}^{(t)} & \text{si } i \leq t, \\ a_{i,j}^{(t)} - \left(a_{i,t}^{(t)} / a_{t-1,t}^{(t)} \right) a_{t-1,j}^{(t)} & \text{si } i \geq t+1 \text{ y } j \geq t+1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En este proceso, el elemento

$$p_{i,j} := a_{i,j}^{(j)}, \quad 1 \leq j \leq n; j \leq i \leq n$$

recibe el nombre de *pivote* (i, j) de la eliminación de Neville de A . Los pivotes $p_{i,i}$ se denominan *pivotes diagonales*, y la matriz U contiene estos pivotes diagonales a lo largo de su diagonal principal.

La eliminación de Neville se puede realizar sin intercambios de filas si todos los pivotes son distintos de cero, como ocurrirá en nuestro caso. En caso contrario, las filas correspondientes pueden trasladarse hacia la parte inferior y continuar con la nueva matriz como se describe en [10]. Si todos los pivotes $p_{i,j}$ son distintos de cero, se puede proporcionar una expresión directa para su cálculo (Lema 2.6 de [10]):

$$p_{i,1} = a_{i,1} \quad 1 \leq i \leq n, \\ p_{i,j} = \frac{\det A[i-j+1, \dots, i | 1, \dots, j]}{\det A[i-j+1, \dots, i-1 | 1, \dots, j-1]} \quad 1 < j \leq i \leq n. \quad (1.4)$$

Se llama *multiplicador* de la eliminación de Neville de A al elemento

$$m_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{p_{i-1,j}}, \quad 1 \leq j \leq n; j < i \leq n. \quad (1.5)$$

La eliminación de Neville completa de una matriz A consiste en realizar la eliminación de Neville de A para obtener U y, a continuación, proceder con la eliminación de Neville de $U^\top$. Cuando no es necesario realizar intercambios de filas en la eliminación de Neville de A y $U^\top$, se afirma que la eliminación de Neville completa de A puede llevarse a cabo sin intercambios de filas ni columnas. En este caso, los multiplicadores de la eliminación de Neville completa de A serán los multiplicadores de la eliminación de Neville de A si $i \geq j$, y los de $U^\top$ si $j \geq i$. Como consecuencia de los argumentos de la página 116 de [12], se puede escribir la siguiente nota.

Nota 1.1. Los pivotes de la eliminación de Neville de $A^\top$ coinciden con los pivotes de la eliminación de Neville de $U^\top$.

Así pues, los multiplicadores de la eliminación de Neville completa de A serán los multiplicadores de la eliminación de Neville de A si $i \geq j$ y los multiplicadores de la eliminación de Neville de $A^\top$ si $j \geq i$.

Se puede encontrar un análisis detallado de los errores de la eliminación de Neville en [1]. Sin embargo, nuestro enfoque utiliza la eliminación de Neville como herramienta teórica, pero no se empleará ese algoritmo para obtener la factorización bidiagonal de las matrices de Vandermonde y Bernstein-Vandermonde.

Consecuencia del Teorema 4.1 de [10] y de la Nota 1.1, la eliminación de Neville ofrece una caracterización de las matrices estrictamente totalmente positivas (STP) de la siguiente manera:

Teorema 1.6. *Una matriz es estrictamente totalmente positiva si y sólo si su eliminación de Neville completa puede realizarse sin intercambios de filas ni columnas, los multiplicadores de la eliminación de Neville de A y $A^\top$ son positivos, y los pivotes diagonales de la eliminación de Neville de A son positivos.*

Aunque en la eliminación de Neville de una matriz TP se realizan restas que no son datos iniciales (y así se pierde la HRA), se verá en el siguiente apartado que la eliminación de Neville proporciona los parámetros que, en el caso de que se puedan calcular con alta precisión relativa, permitirán muchos cálculos algebraicos con alta precisión relativa.

1.4. Factorización bidiagonal

Las matrices totalmente positivas surgen en una amplia variedad de aplicaciones (véase [2], [8], [12], [23]) y, con frecuencia, están mal condicionadas, lo que implica que los algoritmos convencionales pueden ofrecer una precisión limitada o nula para ciertos cálculos algebraicos. Esto último ocurre en particular con las matrices de Bernstein-Vandermonde. El problema de realizar cálculos precisos con matrices totalmente positivas es, en gran medida, un *problema de representación*. Las entradas de la matriz son poco adecuadas como parámetros en cálculos numéricos cuando las matrices son mal condicionadas. En su lugar, para matrices TP no singulares, se emplearán otros parámetros que provendrán de representarlas como un producto de matrices bidiagonales, una representación que surge de manera natural en el proceso de eliminación de Neville.

La existencia y unicidad de la descomposición bidiagonal son fundamentales para el diseño de los algoritmos. Por lo tanto, se restringe el enfoque a las matrices no singulares TP, que en particular son cuadradas. El siguiente resultado (Teorema 4.2 de [12]) presenta la factorización bidiagonal y muestra cómo dicha factorización caracteriza las matrices TP no singulares y es única.

Teorema 1.7. *Una matriz $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ no singular es totalmente positiva si y sólo si admite una factorización de la forma*

$$A = F_n F_{n-1} \cdots F_1 D G_1 \cdots G_{n-1} G_n, \quad (1.6)$$

donde F_i, G_i ($1 \leq i \leq n$) son $(n+1) \times (n+1)$ matrices bidiagonales no negativas de la forma

$$F_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & m_{i+1,1} & 1 & & \\ & & & & m_{i+2,2} & 1 & \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & m_{n,n-i} & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

$$G_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & 1 & \tilde{m}_{i+1,1} & & \\ & & & & 1 & \tilde{m}_{i+2,2} & \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & 1 & \tilde{m}_{n,n-i} \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

y D es la matriz diagonal con elementos diagonales positivos cuya i -ésima ($1 \leq i \leq n+1$) entrada es el pivote diagonal $p_{i,i} = a_{i,i}^{(i)}$,

$$D = \text{diag}\{p_{1,1}, p_{2,2}, \dots, p_{n+1,n+1}\}. \quad (1.9)$$

Las entradas $m_{i,j}$ y $p_{i,i}$ corresponden a los multiplicadores y pivotes diagonales, respectivamente, que se obtienen de la eliminación de Neville de A . Por otro lado, las entradas $\tilde{m}_{i,j}$ representan los multiplicadores de la eliminación de Neville de $A^\top$, los cuales coinciden con los de la eliminación de Neville de $U^\top$.

Además, las entradas $m_{i,j}$ y $\tilde{m}_{i,j}$ satisfacen

$$\begin{aligned} m_{i,j} = 0 &\Rightarrow m_{h,j} = 0 \quad \forall h > i \\ \tilde{m}_{i,j} = 0 &\Rightarrow \tilde{m}_{h,j} = 0 \quad \forall h > i. \end{aligned}$$

Bajo estas condiciones, la factorización (1.6) es única.

Por comodidad, la factorización bidiagonal de una matriz A de tamaño $n \times n$ se puede representar mediante otra matriz $n \times n$, denotada como $\mathcal{BD}(A)$, de la siguiente manera:

$$(\mathcal{BD}(A))_{i,j} := \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i > j, \\ \tilde{m}_{j,i} & \text{si } i < j, \\ p_{i,i} & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (1.10)$$

Si conseguimos obtener la factorización bidiagonal de una matriz TP no singular A con HRA, será posible realizar muchos cálculos con HRA. De hecho, Plamen Koev [16] diseñó algoritmos eficientes para calcular, con alta precisión relativa, los valores propios, los valores singulares y la inversa de A , así como la solución a sistemas de ecuaciones lineales $Ax = b$ cuando b presenta signos alternados.

Capítulo 2

Polinomios de Bernstein en CAGD

Los polinomios de Bernstein juegan un papel esencial en el diseño geométrico asistido por ordenador (CAGD, de «Computer Aided Geometric Design»), debido a sus propiedades de estabilidad y preservación de forma en la representación de curvas. Su capacidad para mantener el control sobre la forma y la suavidad de una curva los convierte en una herramienta fundamental en la construcción de modelos geométricos. En este capítulo, se recuerda su papel en CAGD, destacando su relevancia y ventajas para generar representaciones geométricas (véase [9]).

En la sección 2.1 se muestran propiedades fundamentales para el control de curvas en diseño asistido por ordenador. Se introduce también el concepto de matriz de colocación y los sistemas de funciones totalmente positivos, que nos serán de interés por sus ventajas en la preservación de la forma.

En la sección 2.2 se presentan los polinomios de Bernstein y algunas propiedades de su base en el contexto de CAGD, destacando su optimalidad en la preservación de la forma. Además, se desarrolla el concepto de B-base, del que los polinomios de Bernstein son un caso particular.

Por último, en la sección 2.3, se exponen las curvas de Bézier y sus propiedades más relevantes en CAGD. A lo largo de los subapartados, se abordarán las derivadas de las curvas de Bézier, el algoritmo de De Casteljau y el proceso de subdivisión, herramientas fundamentales para profundizar en las características y aplicaciones de estas curvas en el diseño asistido por ordenador.

2.1. Diseño geométrico asistido por ordenador y matrices TP

Dado un sistema de funciones $(u_0, \dots, u_n)$ en un intervalo $I = [a, b]$ y una sucesión de puntos $(P_0, \dots, P_n) \in \mathbb{R}^s$, podemos definir una curva paramétrica de la siguiente forma (véase [9]):

$$\gamma(t) = P_0 u_0(t) + \dots + P_n u_n(t) = \sum_{i=0}^n P_i u_i(t), \quad t \in [a, b]. \quad (2.1)$$

A los puntos $P_0, \dots, P_n$ se les conoce como *puntos de control*, mientras que el polígono formado por estos puntos se denomina *polígono de control*.

Será de utilidad contar con la capacidad de modificar la forma de la curva mediante la manipulación del polígono de control. Este tipo de control geométrico, conocido como *preservación de la forma*, tiene como objetivo que la curva imite, lo más fielmente posible, la forma de su polígono de control. Para lograrlo, es fundamental encontrar una base de funciones que nos permita representar la curva de manera adecuada, dotándola de las mejores propiedades posibles. Una primera propiedad a considerar al diseñar en un ordenador es que la curva generada se mantenga completamente dentro de la pantalla. Concretamente, se dice que se cumple la *propiedad de la cápsula convexa* si la curva (2.1) permanece siempre en la cápsula convexa de su polígono de control. Con este fin, aparecen las condiciones de no negatividad de las funciones de la base, así como la normalización de la misma.

Definición. Se dice que un sistema de funciones $(u_0, \dots, u_n)$ definido en el intervalo $[a, b]$ está *normalizado* (o que forma una partición de la unidad) si verifica que

$$\sum_{i=0}^n u_i(t) = 1 \quad \forall t \in [a, b].$$

Definición. Un sistema normalizado de funciones no negativas se denomina, en el contexto de CAGD, como sistema *blending*.

Se tiene además que, un sistema $(u_0, \dots, u_n)$ es *blending* si y solo si se cumple la propiedad de la cápsula convexa.

Es también de interés poder trabajar con tramos de curva de manera individual para enlazarlos después. Para ello, la base debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} u_0(a) = 1; & u_i(a) = 0 & i = 1, \dots, n \\ u_n(b) = 1; & u_i(b) = 0 & i = 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

De este modo, se garantiza que

$$\begin{cases} \gamma(a) = P_0 \\ \gamma(b) = P_n, \end{cases} \quad (2.2)$$

lo que define la *propiedad de interpolación en los extremos*.

A continuación, se introduce la matriz de colocación asociada al sistema de funciones, ya que diversas propiedades geométricas están relacionadas con ciertas características de estas matrices.

Definición. Sea $U = (u_0, \dots, u_n)$ un sistema de funciones definidas en el intervalo $I = [a, b]$, y sea $(t_0, \dots, t_m)$ una sucesión de puntos tales que $a \leq t_0 < \dots < t_m \leq b$. La *matriz de colocación* de U en los puntos $t_0, \dots, t_m$ es la matriz

$$M \begin{pmatrix} u_0, \dots, u_n \\ t_0, \dots, t_m \end{pmatrix} := (u_j(t_i))_{0 \leq i \leq m; 0 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} u_0(t_0) & u_1(t_0) & \dots & u_n(t_0) \\ u_0(t_1) & u_1(t_1) & \dots & u_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_0(t_m) & u_1(t_m) & \dots & u_n(t_m) \end{pmatrix}.$$

Con esta noción, y a partir de la definición de sistema *blending*, se establece la siguiente caracterización:

Proposición 2.1. Un sistema $U = (u_0, \dots, u_n)$ es *blending* si y sólo si todas sus matrices de colocación son estocásticas por filas.

Si se requieren más propiedades de cara al diseño, las matrices de colocación deberían cumplir propiedades más fuertes. Concretamente, veremos el papel que juegan las matrices TP.

Definición. Un sistema de funciones U es *totalmente positivo* (TP) si todas sus matrices de colocación son totalmente positivas. Si todas sus matrices de colocación son estrictamente totalmente positivas, entonces el sistema será *estrictamente totalmente positivo* (STP).

En el diseño interactivo, el objetivo es que la forma de una curva polinómica definida paramétricamente imite la estructura de su polígono de control con el fin de predecir o manipular la forma de la curva eligiendo o cambiando adecuadamente el polígono de control. Esto conduce al concepto de sistemas totalmente positivos, debido a la propiedad de disminución de la variación de las matrices totalmente positivas (véase sección 5 de [2]), que a su vez implica la siguiente propiedad geométrica.

Definición. Un sistema de funciones $U = (u_0, \dots, u_n)$ posee la *propiedad de disminución de la variación* si, para toda curva γ de la forma (2.1), cualquier línea recta la interseca como máximo el mismo número de veces que corta su polígono de control.

Si un sistema U es normalizado y totalmente positivo (NTP), entonces la curva γ hereda muchas propiedades de forma del polígono de control. Las bases NTP destacan por sus buenas propiedades de preservación de la forma y sus ventajas en diseño. Se puede encontrar un estudio más detallado en [22].

2.2. Base de Bernstein y su optimalidad en CAGD

Los polinomios de Bernstein son una familia de polinomios que juegan un papel fundamental en diversas áreas de la matemática aplicada, especialmente en la aproximación de funciones y en la representación de curvas en geometría computacional. Su principal utilidad radica en sus propiedades de estabilidad numérica y preservación de forma, lo que los hace ideales para representar curvas en CAGD. Para un grado n , los polinomios de Bernstein se definen en el intervalo $[0, 1]$ como:

$$B_i^{(n)}(x) := \binom{n}{i} (1-x)^{n-i} x^i, \quad i = 0, \dots, n. \quad (2.3)$$

Consideremos la forma de los polinomios de Bernstein. El polinomio de Bernstein de menor índice, $B_0^{(n)}$, es estrictamente decreciente, mientras que el de mayor índice, $B_n^{(n)}$, es estrictamente creciente. Los demás, $B_i^{(n)}$ ($0 < i < n$), se anulan en los extremos del intervalo y son positivos en el interior, lo que implica que deben alcanzar un máximo en algún punto intermedio. Al calcular su derivada, se obtiene

$$\left(B_i^{(n)}(x)\right)' = \binom{n}{i} (1-x)^{n-i-1} x^{i-1} (i(1-x) - x(n-i)), \quad (2.4)$$

que tiene un único cero simple en $x = \frac{i}{n}$. Esto indica que cada polinomio $B_i^{(n)}$ crece hasta su máximo en $\frac{i}{n}$ y luego decrece. Para los polinomios de Bernstein de grado 4, la representación será la siguiente:

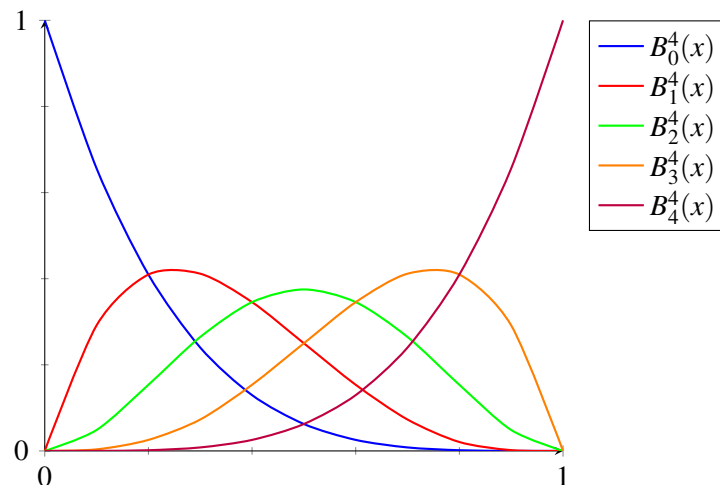


Figura 2.1: Polinomios de Bernstein de grado 4

Veamos otras propiedades de la base de Bernstein.

Proposición 2.2. La base de polinomios de Bernstein $\mathcal{B}_n = \{B_0^{(n)}, \dots, B_n^{(n)}\}$ en el intervalo $[0, 1]$ es un sistema blending.

Demostración. Es claro que se trata de un sistema de funciones no negativas, ya que

$$B_i^{(n)}(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in [0, 1].$$

Para comprobar que el sistema está normalizado, se considera la suma de los polinomios de Bernstein de grado n , que se expresa como

$$\sum_{i=0}^n B_i^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-x)^{n-i} x^i,$$

que es justo el desarrollo binomial de $(x + (1-x))^n$. Por lo tanto, se obtiene

$$\sum_{i=0}^n B_i^{(n)}(x) = (x + (1-x))^n = 1^n = 1,$$

y se tiene el resultado. □

A continuación, se muestra que la base de Bernstein también cumple propiedades de total positividad.

Teorema 2.3. *La base de polinomios de Bernstein $\mathcal{B}_n = \{B_0^{(n)}, \dots, B_n^{(n)}\}$ es STP en el intervalo $(0, 1)$ y NTP en el intervalo $[0, 1]$.*

Demostración. Veremos en el Teorema 3.5 que $\mathcal{B}_n$ es STP en $(0, 1)$, ya que todas sus matrices de colocación en dicho intervalo lo son. Por la continuidad de la función determinante se tiene, como consecuencia de que $\mathcal{B}_n$ es STP en $(0, 1)$, que $\mathcal{B}_n$ es TP en $[0, 1]$. Finalmente, $\mathcal{B}_n$ está normalizada (y así NTP) por la Proposición 2.2. $\square$

Goodman y Said [14] plantearon la hipótesis de que la base de Bernstein, para polinomios de grado menor o igual que n en un intervalo compacto, presenta propiedades óptimas en la preservación de la forma. Esta conjetura fue confirmada posteriormente en [3]. Las bases con óptimas propiedades de preservación de forma también se pudieron extender a otros espacios a través del concepto de B-base, que presentaremos a partir de ahora.

Sea $U = (u_0, \dots, u_n)$ un sistema TP de funciones linealmente independientes definidas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, y sea $\mathcal{U}$ el espacio que generan. Dado que, según el Teorema 1.1, el producto de matrices TP es también una matriz TP, se sigue que cualquier base $V = (v_0, \dots, v_n)$ de la forma

$$(v_0, \dots, v_n) = (u_0, \dots, u_n)A, \quad \text{donde } A \text{ es una matriz TP no singular,}$$

es también un sistema TP. Surge entonces la pregunta natural de si es posible obtener todas las bases TP de un espacio dado a partir de una base TP. En [4], se demostró que esto es posible construyendo una base TP que genera todas las demás mediante matrices TP no singulares.

Definición. Sea $U = (u_0, \dots, u_n)$ una base TP de un espacio $\mathcal{U}$. Entonces, U es una *B-base* si para cualquier otra base $V = (v_0, \dots, v_n)$ TP de $\mathcal{U}$, la matriz K del cambio de base

$$(v_0, \dots, v_n) = (u_0, \dots, u_n)K$$

es TP.

La base de Bernstein constituye una B-base para el espacio de polinomios de grado menor o igual que n en un intervalo compacto. Veremos que la generación de curvas a partir de un polígono de control utilizando B-bases permite obtener representaciones con propiedades óptimas de preservación de la forma.

Sea γ una curva generada por el polígono de control $P_0 \cdots P_n$ con respecto a una base NTP y sea $B_0 \cdots B_n$ el polígono de control con respecto a una B-base normalizada. Entonces, se cumplen las siguientes propiedades (véase [5]):

- i) Si $P_0 \cdots P_n$ es convexo, entonces también lo son $B_0 \cdots B_n$ y la curva γ . Y, además, $B_0 \cdots B_n$ se encuentra entre $P_0 \cdots P_n$ y γ .
- ii) Longitud $\gamma \leq \text{longitud } B_0 \cdots B_n \leq \text{longitud } P_0 \cdots P_n$.
- iii) Si $P_0 \cdots P_n$ gira un ángulo menor que π , entonces $I(\gamma) \leq I(B_0 \cdots B_n) \leq I(P_0 \cdots P_n)$, donde $I(\beta)$ denota el número de inflexiones de la curva β e $I(B_0 \cdots B_n)$, $I(P_0 \cdots P_n)$ denotan el número de inflexiones de los correspondientes polígonos.
- iv) $\theta(\gamma) \leq \theta(B_0 \cdots B_n) \leq \theta(P_0 \cdots P_n)$, donde $\theta(\beta)$ denota la variación angular de una curva β .

Por citar otros ejemplos de B-bases podemos mencionar que los monomios forman una B-base en el intervalo $(0, \infty)$ y que los B-spline forman una B-base normalizada de su correspondiente espacio.

2.3. Curvas de Bézier

En este apartado vamos a considerar curvas (2.1) cuando la base de funciones es la base de polinomios de Bernstein y vamos a presentar algunas de sus importantes propiedades en CAGD.

En el subapartado 2.3.1 se define curva de Bézier junto con algunas de sus propiedades fundamentales, consecuencia de la estructura de los polinomios de Bernstein.

A continuación, en el subapartado 2.3.2, se muestran algunas cualidades sobre la derivada de una curva de Bézier, así como una expresión general para la derivada k -ésima.

En el subapartado 2.3.3 se introduce el algoritmo de De Casteljau, clave para evaluar curvas de Bézier de manera eficiente y estable. Asimismo, se exponen las relaciones de recurrencia que fundamentan su funcionamiento y también la utilidad de las curvas paramétricas resultantes.

Finalmente, el subapartado 2.3.4 muestra cómo las curvas de Bézier pueden expresarse en cualquier intervalo $[a, b]$ aplicando el cambio de variable correspondiente. Se observa que es posible dividir la curva en segmentos independientes, lo que proporciona mayor flexibilidad para su manipulación. Se establece también la conexión entre el algoritmo de De Casteljau y la subdivisión, subrayando cómo este algoritmo facilita la creación de polígonos de control para las representaciones en los subintervalos.

2.3.1. Definición y primeras propiedades

Una curva de Bézier es una curva paramétrica

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^{(n)}(t), \quad t \in [0, 1], \quad (2.5)$$

es decir, una curva representada por medio de la base de polinomios de Bernstein.

De acuerdo con la Proposición 2.2, la base de Bernstein es un sistema blending, lo que garantiza que las curvas (2.5) cumplen la propiedad de la cápsula convexa. Asimismo, las curvas de Bézier verifican la propiedad de interpolación en los extremos (2.2), ya que se cumple que

$$B_0^{(n)}(0) = 1, \quad B_i^{(n)}(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

y

$$B_n^{(n)}(1) = 1, \quad B_i^{(n)}(1) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Además, los polinomios de Bernstein también cumplen una propiedad de simetría que viene dada por:

$$B_i^{(n)}(t) = B_{n-i}^{(n)}(1-t),$$

de donde se deduce que la curva de Bézier asociada al polígono $P_n P_{n-1} \dots P_0$ coincide con la curva generada por el polígono original $P_0 P_1 \dots P_n$, pero trazada en sentido inverso.

Por otro lado, por el Teorema 2.3, la base de Bernstein es NTP en $[0, 1]$ y así tiene buenas propiedades de preservación de forma. Más aún, por lo visto en la sección 2.2, tiene óptimas propiedades de preservación de forma en su espacio.

En lo que sigue, se muestran otras importantes propiedades de las curvas de Bézier.

2.3.2. Derivadas de una curva de Bézier

En este subapartado veremos propiedades de las derivadas de las curvas de Bézier.

A partir de la fórmula (2.4), se deduce la relación

$$\left(B_i^{(n)}(t)\right)' = n \left(B_{i-1}^{(n-1)}(t) - B_i^{(n-1)}(t)\right), \quad i = 1, \dots, n-1$$

y también que

$$\left(B_0^{(n)}(t)\right)' = -n B_0^{(n-1)}(t) \quad \text{y} \quad \left(B_n^{(n)}(t)\right)' = n B_{n-1}^{(n-1)}(t).$$

Estas relaciones permiten expresar la derivada de una curva de Bézier mediante la fórmula

$$\gamma'(t) = n \sum_{i=1}^n P_i B_{i-1}^{(n-1)}(t) - n \sum_{i=0}^{n-1} P_i B_i^{(n-1)}(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1} - P_i) B_i^{(n-1)}(t),$$

y usando la notación $\Delta P_i := P_{i+1} - P_i$, obtenemos la fórmula compacta

$$\gamma'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta P_i B_i^{(n-1)}(t). \quad (2.6)$$

Vemos en primer lugar que la derivada de una curva de Bézier es una curva de Bézier de un grado menos con los $n\Delta P_i$ como puntos de control. Además, por (2.6), la derivada en los extremos (propiedad de interpolación tangente en los extremos) está dada por

$$\gamma'(0) = n(P_1 - P_0) \quad \text{y} \quad \gamma'(1) = n(P_{n-1} - P_n),$$

lo que indica que la curva es tangente al polígono de control en los extremos.

Si seguimos derivando en (2.6), la expresión general para la k -ésima derivada es

$$\gamma^{(k)}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} \Delta^k P_i B_i^{(n-k)}(t), \quad \text{donde } \Delta^k P_i := \Delta^{k-1} P_{i+1} - \Delta^{k-1} P_i.$$

En consecuencia, la derivada k -ésima de una curva de Bézier de grado n es una curva de Bézier de grado $n-k$.

2.3.3. Algoritmo de De Casteljau

Un aspecto esencial del interés en las curvas de Bézier es el llamado algoritmo de De Casteljau, que permite evaluarlas de forma eficiente y estable.

Este algoritmo se basa en las relaciones de recurrencia

$$B_i^{(n)}(t) = (1-t)B_i^{(n-1)}(t) + tB_{i-1}^{(n-1)}(t), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (2.7)$$

y

$$B_0^{(n)}(t) = (1-t)B_0^{(n-1)}(t), \quad B_n^{(n)}(t) = tB_{n-1}^{(n-1)}(t). \quad (2.8)$$

Supongamos que se desea evaluar una combinación lineal de polinomios de Bernstein, dada por

$$p(t) := \sum_{i=0}^n c_i B_i^{(n)}(t).$$

Empleando las recurrencias anteriores (2.7) y (2.8), se tiene que

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (1-t)c_i B_i^{(n-1)}(t) + \sum_{i=1}^n t c_i B_{i-1}^{(n-1)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} ((1-t)c_i + t c_{i+1}) B_i^{(n-1)}(t),$$

y, si definimos $c_i^1(t) := (1-t)c_i + t c_{i+1}$, deducimos que

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i^1(t) B_i^{(n-1)}(t).$$

Si reiteramos el proceso tenemos

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n-k} c_i^k(t) B_i^{(n-k)}(t), \quad \text{donde } c_i^k(t) := (1-t)c_i^{k-1} + t c_{i+1}^{k-1},$$

y tomando $k = n - 1$, tenemos

$$p(t) = c_0^{n-1}(t)B_0^{(1)}(t) + c_1^{n-1}(t)B_1^{(1)}(t) = (1-t)c_0^{n-1}(t) + tc_1^{n-1}(t) = c_0^n(t).$$

A la hora de evaluar una curva de Bézier (2.5), podemos aplicar este mismo procedimiento componente a componente dando lugar al siguiente algoritmo:

Algoritmo 1: Algoritmo de De Casteljau

Para $i = 0, 1, \dots, n$

$$P_i^0(t) := P_i$$

Para $k = 1, 2, \dots, n$

Para $i = 0, 1, \dots, n - k$

$$P_i^k(t) := (1-t)P_i^{k-1}(t) + tP_{i+1}^{k-1}(t)$$

Una ventaja clave del algoritmo de De Casteljau es su sencillez y, el hecho de que involucra tan sólo combinaciones convexas de números, conlleva gran estabilidad (en sentido backward) de los cálculos. El coste computacional del algoritmo de De Casteljau para evaluar una curva de Bézier de grado n es de orden $O(n^2)$. A partir de ahora, veremos otras ventajas adicionales del algoritmo de De Casteljau.

Los valores intermedios $P_i^k(t)$ del algoritmo de De Casteljau pueden considerarse curvas paramétricas, lo que da lugar al siguiente resultado.

Proposición 2.4. Sean $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}^s$ y sea $\gamma(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^{(n)}(t)$ una curva de Bézier. Definimos

$$P_i^0(t) := P_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad (2.9)$$

y para $k = 1, \dots, n$,

$$P_i^k(t) := (1-t)P_i^{k-1}(t) + tP_{i+1}^{k-1}(t), \quad i = 0, \dots, n - k. \quad (2.10)$$

Entonces,

$$P_i^k(t) = \sum_{j=0}^k P_{i+j} B_j^{(k)}(t),$$

es decir, $P_i^k(t)$ es la curva de Bézier de grado k cuyo polígono de control es $P_i \dots P_{i+k}$, $i = 0, \dots, n - k$, $k = 0, \dots, n$. En particular, $\gamma(t) = P_0^n(t)$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre k . Para $k = 0$, la propiedad se cumple de manera trivial. Supongamos ahora que la propiedad es cierta para $k - 1$. Entonces, para k se tiene que

$$\begin{aligned} P_i^k(t) &= (1-t)P_i^{k-1}(t) + tP_{i+1}^{k-1}(t) = (1-t) \sum_{j=0}^{k-1} P_{i+j} B_j^{(k-1)}(t) + t \sum_{j=0}^{k-1} P_{i+j+1} B_j^{(k-1)}(t) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} P_{i+j} (1-t) B_j^{(k-1)}(t) + \sum_{j=1}^k P_{i+j} t B_{j-1}^{(k-1)}(t) = \sum_{j=0}^k P_{i+j} B_j^{(k)}(t), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene de las relaciones de recurrencia (2.7) y (2.8) de los polinomios de Bernstein. $\square$

2.3.4. Subdivisión

Aunque la curva (2.5) se haya definido en el intervalo $[0, 1]$, es posible expresarla en cualquier intervalo $[a, b]$ utilizando los polinomios de Bernstein correspondientes al intervalo deseado.

$$B_{i,[a,b]}^{(n)}(x) = \binom{n}{i} \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^{n-i} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^i, \quad x \in [a, b]. \quad (2.11)$$

Mencionemos que la base de polinomios de Bernstein en $[a, b]$ dada por (2.11) también es la B-base normalizada del correspondiente espacio de polinomios en $[a, b]$ y, por tanto, la base con óptimas propiedades de preservación de forma por lo visto en el apartado 2.2.

Notemos que el cambio de variable necesario para transformar el intervalo $[a, b]$ en el intervalo estándar $[0, 1]$ está dado por

$$t = \lambda(x; a, b) := \frac{x-a}{b-a}.$$

Esto permite relacionar los polinomios de Bernstein en un intervalo cualquiera con los polinomios de Bernstein en el intervalo $[0, 1]$,

$$B_{i,[a,b]}^{(n)}(x) = B_i^{(n)}\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = B_i^{(n)}(\lambda(x; a, b)).$$

Así, una curva de Bézier en el intervalo $[a, b]$ será una curva de la forma

$$\gamma(x) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^{(n)}(\lambda(x; a, b)).$$

En ciertas situaciones, puede ser beneficioso obtener las representaciones de una curva de Bézier en los subintervalos $[0, \tau]$ y $[\tau, 1]$. Este procedimiento se conoce como subdivisión y, una vez completado, permite manipular cada segmento de la curva de forma independiente, sin afectar al otro.

El siguiente resultado muestra que la subdivisión está íntimamente ligada al algoritmo de De Casteljau.

Proposición 2.5. *Consideremos la curva $\gamma(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^{(n)}(t)$ y las curvas polinómicas (2.9) y (2.10) generadas mediante el algoritmo de De Casteljau. Entonces $P_0^0(t)P_0^1(t) \cdots P_0^n(t)$ y $P_0^n(t)P_1^{n-1}(t) \cdots P_n^0(t)$ son los polígonos de control de las representaciones de la curva γ en los subintervalos $[0, t]$ y $[t, 1]$, respectivamente, es decir,*

$$\gamma(s) = \sum_{i=0}^n P_0^i(t) B_{i,[0,t]}^{(n)}(s),$$

$$\gamma(s) = \sum_{i=0}^n P_i^{n-i}(t) B_{i,[t,1]}^{(n)}(s).$$

Demostración. Queremos probar que

$$\gamma(s) = \sum_{i=0}^n P_0^i(t) B_i^{(n)}(s/t).$$

Para ello, notemos en primer lugar, por la Proposición 2.4, que

$$P_0^i(t) = \sum_{j=0}^i P_j B_j^{(i)}(t).$$

Entonces,

$$\sum_{i=0}^n P_0^i(t) B_i^{(n)}(s/t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i P_j B_j^{(i)}(t) B_i^{(n)}(s/t) = \sum_{j=0}^n P_j \left(\sum_{i=j}^n B_j^{(i)}(t) B_i^{(n)}(s/t) \right).$$

Llamando $r = s/t$, demostrar esta propiedad de subdivisión se reduce a probar la siguiente expresión, conocida como fórmula de reparametrización:

$$\sum_{i=j}^n B_j^{(i)}(t) B_i^{(n)}(r) = B_j^{(n)}(rt).$$

Para $j = n$ es fácil comprobar, usando la definición de polinomios de Bernstein, que

$$B_n^{(n)}(t)B_n^{(n)}(r) = t^n r^n = (rt)^n = B_n^{(n)}(rt)$$

Para el resto de casos, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=j}^n B_j^{(i)}(t)B_i^{(n)}(r) &= \sum_{k=0}^{n-j} B_j^{(j+k)}(t)B_{j+k}^{(n)}(r) = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{j+k}{j} \binom{n}{j+k} (1-t)^k t^j (1-r)^{n-j-k} r^{j+k} \\ &= (rt)^j \sum_{k=0}^{n-j} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} (1-r)^{n-j-k} (1-t)^k r^k \\ &= \binom{n}{j} (rt)^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (1-r)^{n-j-k} (r-rt)^k. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el desarrollo binomial

$$(1-rt)^{n-j} = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (1-r)^{n-j-k} (r-rt)^k,$$

se tiene que

$$\sum_{i=j}^n B_j^{(i)}(t)B_i^{(n)}(r) = \binom{n}{j} (rt)^j (1-rt)^{n-j} = B_j^{(n)}(rt).$$

Para la segunda fórmula, el proceso es completamente análogo. □

Observemos que el resultado anterior implica que el algoritmo de De Casteljau también proporciona los polígonos de control $P_0^0(t)P_0^1(t) \cdots P_0^n(t)$ y $P_0^n(t)P_1^{n-1}(t) \cdots P_n^0(t)$ respecto a las bases con óptimas propiedades de preservación de la forma (las B-bases normlizadas) en $[0, t]$ y $[t, 1]$.

Capítulo 3

Matrices de Bernstein-Vandermonde y alta precisión relativa

A lo largo del capítulo anterior se ha mostrado que las bases de Bernstein desempeñan un papel esencial en CAGD debido a sus óptimas propiedades de preservación de la forma. Sin embargo, en el ámbito numérico, las matrices asociadas a estas bases suelen presentar problemas de mal condicionamiento, lo que puede afectar a la estabilidad de las soluciones algebraicas. Las matrices de Bernstein-Vandermonde surgen como una extensión de las matrices de Vandermonde, adaptadas a la estructura de los polinomios de Bernstein. En este capítulo se enfocará el análisis tanto de las matrices de Vandermonde como de las de Bernstein-Vandermonde, con especial énfasis en su factorización bidiagonal, lo cual permitirá realizar cálculos algebraicos estables y eficientes en este tipo de matrices.

En la primera sección, se introducen las matrices de Vandermonde y de Bernstein-Vandermonde proporcionando fórmulas para su determinante.

En la sección 3.2 se presenta la factorización bidiagonal de las matrices de Vandermonde y Bernstein-Vandermonde, acompañada de expresiones que nos permiten calcular las entradas de estos factores con HRA. Esto permite concluir que es posible realizar cálculos algebraicos con HRA en matrices de este tipo, a pesar de su mal condicionamiento.

Finalmente, en la sección 3.3 se estudia una factorización bidiagonal distinta para la inversa de una matriz de Bernstein-Vandermonde. Esta factorización ofrece una alternativa a lo expuesto en la sección anterior para el cálculo de la inversa y la resolución de ciertos sistemas con alta precisión relativa.

3.1. Matrices de Vandermonde y de Bernstein-Vandermonde

Recordemos que, dada una base $\{u_0, \dots, u_n\}$ de funciones definidas en $I = [a, b]$ y los puntos $(a \leq) x_0 < \dots < x_n (\leq b)$, llamamos matriz de colocación de $\{u_0, \dots, u_n\}$ en $x_0, \dots, x_n$ a la matriz

$$M \begin{pmatrix} u_0, \dots, u_n \\ x_0, \dots, x_n \end{pmatrix} := (u_j(x_i))_{0 \leq i, j \leq n}.$$

Si se toma la base de potencias $\{x^i\}_{i=0, \dots, n}$ del espacio de polinomios de grado menor o igual que n ,

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

es la $(n+1) \times (n+1)$ matriz de Vandermonde correspondiente a los nodos $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n+1}$, una matriz muy conocida en álgebra lineal. Se recuerda la fórmula de su determinante.

Proposición 3.1. *El determinante de la matriz de Vandermonde V viene dado por*

$$\det V = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i).$$

Si en lugar de tomar la base de potencias, se utiliza la base de Bernstein del espacio de polinomios de grado menor o igual que n en $[0, 1]$,

$$\mathcal{B}_n = \{B_i^{(n)}(x) = \binom{n}{i} (1-x)^{n-i} x^i, \quad i = 0, \dots, n\},$$

y se considera la correspondiente matriz de colocación, se obtiene la siguiente generalización de las matrices de Vandermonde para la base de Bernstein,

$$A = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} (1-x_1)^n & \binom{n}{1} x_1 (1-x_1)^{n-1} & \cdots & \binom{n}{n} x_1^n \\ \binom{n}{0} (1-x_2)^n & \binom{n}{1} x_2 (1-x_2)^{n-1} & \cdots & \binom{n}{n} x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{0} (1-x_{n+1})^n & \binom{n}{1} x_{n+1} (1-x_{n+1})^{n-1} & \cdots & \binom{n}{n} x_{n+1}^n \end{pmatrix},$$

a las que llamaremos *matrices de Bernstein-Vandermonde*.

De aquí en adelante, se supondrá que $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} < 1$. Bajo esta condición, la matriz de Bernstein-Vandermonde será estrictamente totalmente positiva, como se probará en el Teorema 3.5.

La siguiente proposición (que corresponde a la proposición 3.1 de [19]) proporciona una fórmula para los determinantes de las matrices de Bernstein-Vandermonde.

Proposición 3.2. *Sea $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ la matriz de Bernstein-Vandermonde para la base de Bernstein $\mathcal{B}_n$ y los nodos $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$. Entonces se tiene que*

$$\det A = \binom{n}{0} \binom{n}{1} \cdots \binom{n}{n} \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i).$$

Demostración. Se puede observar que la matriz de cambio de base de la base de Bernstein $\mathcal{B}_n$ a la base de potencias $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ es una matriz triangular inferior cuyos elementos diagonales son $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$. De aquí se obtiene que

$$\det A = \binom{n}{0} \binom{n}{1} \cdots \binom{n}{n} \det V,$$

luego el resultado queda probado por la proposición 3.1. □

3.2. Factorización bidiagonal y alta precisión relativa

En este apartado, se presentan las factorizaciones bidiagonales de las matrices de Vandermonde (consideradas en [17]) y Bernstein-Vandermonde (consideradas en [18], [19] y [20]), junto con fórmulas explícitas para las entradas de sus factores bidiagonales, sin recurrir a la eliminación de Neville. Esto último resultará fundamental para realizar cálculos algebraicos con HRA.

A continuación, se prueba la estricta total positividad de las matrices de Vandermonde y se muestra la factorización bidiagonal de dichas matrices. Además, se proporcionan expresiones libres de restas (salvo de datos iniciales), tanto para los multiplicadores como para los pivotes que componen los factores de la factorización bidiagonal.

Teorema 3.3. Sea V una $(n+1) \times (n+1)$ matriz de Vandermonde cuyos nodos satisfacen que $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$. Entonces V es STP y, por tanto, admite una factorización de la forma (1.6), donde F_i , G_i y D corresponden a las matrices (1.7), (1.8) y (1.9), respectivamente. Las entradas de los factores bidiagonales corresponden a los multiplicadores $m_{i,j}$ y pivotes diagonales $p_{i,i}$ de la eliminación de Neville de V y a los multiplicadores $\tilde{m}_{i,j}$ en la eliminación de Neville de V^T , que se pueden expresar como:

$$m_{i,j} = \frac{\prod_{k=1}^{j-1} (x_i - x_{i-k})}{\prod_{k=2}^j (x_{i-1} - x_{i-k})} \quad j = 1, \dots, n; \quad i = j+1, \dots, n+1,$$

$$\tilde{m}_{i,j} = x_j \quad j = 1, \dots, n; \quad i = j+1, \dots, n+1,$$

$$p_{i,i} = \prod_{k=1}^{i-1} (x_i - x_k), \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Demostración. A partir de la estructura de los menores de la matriz V y teniendo en cuenta la Proposición 3.1, se formula la siguiente expresión para los menores de V formados por las primeras j columnas y las j filas consecutivas comenzando desde la fila i :

$$\det V[i, \dots, i+j-1 | 1, \dots, j] = \prod_{i \leq k < l \leq i+j-1} (x_l - x_k).$$

Asimismo, para a los menores de V^T con j columnas consecutivas iniciales y j filas consecutivas comenzando desde la fila i , se tiene:

$$\det V^T[i, \dots, i+j-1 | 1, \dots, j] = (x_1 x_2 \dots x_j)^{i-1} \prod_{i \leq k < l \leq j} (x_l - x_k).$$

Al expresar los menores de esta forma es fácil ver que, si $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$, todos ellos serán positivos (ya que cada factor de la expresión lo será). Estos menores no son más que los menores iniciales por filas y por columnas de la matriz V , y por tanto, de acuerdo con el Teorema 1.2, se puede afirmar que V es estrictamente totalmente positiva.

Dado que V es una matriz estrictamente totalmente positiva, por el Teorema 1.6 es posible realizar eliminación de Neville sin intercambios de filas ni columnas, dando lugar la factorización (1.6). Las entradas de los factores bidiagonales de (1.6) corresponden a los multiplicadores de la eliminación de Neville aplicada a V y V^T , y las de la matriz diagonal D son los pivotes diagonales de la eliminación de Neville de V .

Así pues, empleando la fórmula (1.4) para determinar los pivotes, se obtiene

$$p_{i,j} = \frac{\prod_{i-j+1 \leq k \leq l \leq i} (x_l - x_k)}{\prod_{i-j+1 \leq k \leq l \leq i-1} (x_l - x_k)} = \prod_{i-j+1 \leq k \leq i-1} (x_i - x_k)$$

y, aplicando la fórmula (1.5) para el cálculo de los multiplicadores, se tiene que

$$m_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{p_{i-1,j}} = \frac{\prod_{i-j+1 \leq k \leq i-1} (x_i - x_k)}{\prod_{i-j \leq k \leq i-2} (x_{i-1} - x_k)} = \frac{\prod_{k=1}^{j-1} (x_i - x_{i-k})}{\prod_{k=2}^j (x_{i-1} - x_{i-k})}.$$

Análogamente, al calcular los pivotes resultantes de la eliminación de Neville aplicada a V^T , se tiene que

$$\tilde{p}_{i,j} = \frac{(x_1 \dots x_j)^{i-j} \prod_{1 \leq k < l \leq j} (x_l - x_k)}{(x_1 \dots x_j)^{i-j} \prod_{1 \leq k < l \leq j-1} (x_l - x_k)} = x_j^{i-j} \prod_{1 \leq k < l \leq j-1} (x_j - x_k)$$

y por lo tanto,

$$\tilde{m}_{i,j} = \frac{\tilde{p}_{i,j}}{\tilde{p}_{i-1,j}} = x_j$$

Finalmente, los pivotes diagonales vienen dados por:

$$p_{i,i} = \frac{\prod_{1 \leq k < l \leq i} (x_l - x_k)}{\prod_{1 \leq k < l \leq i-1} (x_l - x_k)} = \prod_{k=1}^{i-1} (x_i - x_k).$$

□

Como consecuencia del Teorema 3.5, se deduce el siguiente corolario.

Corolario 3.4. Sea $V = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ una matriz de Vandermonde con nodos tales que $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$. Entonces se pueden calcular con HRA todos los valores propios y valores singulares de V , así como la inversa y la resolución de sistemas $Vx = b$ cuando b presenta signos alternados.

Demostración. A partir de las expresiones del Teorema 3.3, se observa que los multiplicadores $m_{i,j}$ y $\tilde{m}_{i,j}$, así como los pivotes $p_{i,i}$, pueden calcularse con HRA, dado que únicamente involucran restas de datos iniciales. Por tanto, se tiene $\mathcal{BD}(V)$ con HRA, y es posible aplicar los algoritmos de [16] para realizar los cálculos anunciados con HRA. □

El siguiente resultado establece la positividad total estricta de las matrices de Bernstein-Vandermonde y el resto del enunciado corresponde al Teorema 3.2 de [20], dando la factorización bidiagonal de dichas matrices.

Teorema 3.5. Sea $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ una matriz de Bernstein-Vandermonde para la base de Bernstein $\mathcal{B}_n$ cuyos nodos cumplen que $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < 1$. Entonces A es STP y así admite una factorización de la forma (1.6) donde F_i , G_i y D son de la forma (1.7), (1.8) y (1.9), respectivamente.

Además, las entradas de estas matrices, que corresponden a los multiplicadores $m_{i,j}$ de la eliminación de Neville de A , los multiplicadores $\tilde{m}_{i,j}$ de la eliminación de Neville de A^T y los pivotes diagonales $p_{i,i}$ vendrán dadas por:

$$m_{i,j} = \frac{(1-x_i)^{n-j+1} (1-x_{i-j}) \prod_{k=1}^{j-1} (x_i - x_{i-k})}{(1-x_{i-1})^{n-j+2} \prod_{k=2}^j (x_{i-1} - x_{i-k})} \quad j = 1, \dots, n; \quad i = j+1, \dots, n+1,$$

$$\tilde{m}_{i,j} = \frac{(n-i+2) \cdot x_j}{(i-1)(1-x_j)}, \quad j = 1, \dots, n; \quad i = j+1, \dots, n+1,$$

$$p_{i,i} = \frac{\binom{n}{i-1} (1-x_i)^{n-i+1} \prod_{k < i} (x_i - x_k)}{\prod_{k=1}^{i-1} (1-x_k)}, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Demostración. Utilizando la proposición 3.2 junto con las propiedades de los determinantes, se pueden expresar los menores de A con j columnas consecutivas iniciales y j filas consecutivas comenzando desde la fila i de la siguiente manera:

$$\det A[i, \dots, i+j-1 | 1, \dots, j] = \binom{n}{0} \binom{n}{1} \dots \binom{n}{j-1} (1-x_i)^{n-j+1} (1-x_{i+1})^{n-j+1} \dots (1-x_{i+j-1})^{n-j+1} \prod_{i \leq k < l \leq i+j-1} (x_l - x_k).$$

En cuanto a los menores de $A^\top$ con j columnas consecutivas iniciales y j filas consecutivas comenzando desde la fila i , se tiene:

$$\det A^\top[i, \dots, i+j-1 | 1, \dots, j] = \binom{n}{i-1} \binom{n}{i} \dots \binom{n}{i+j-2} (1-x_1)^{n-i-j+2} (1-x_2)^{n-i-j+2} \dots (1-x_j)^{n-i-j+2} \prod_{1 \leq k < l \leq j} (x_l - x_k).$$

Es claro que estos menores iniciales por filas y por columnas serán todos positivos si $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < 1$. Por tanto, según el Teorema 1.2, se concluye que A es estrictamente totalmente positiva. Esto implica, de acuerdo con el Teorema 1.6, que es posible llevar a cabo la eliminación de Neville sin intercambios de filas ni columnas, resultando la factorización (1.6). Las entradas de los factores bidiagonales de (1.6) corresponden a los multiplicadores de la eliminación de Neville aplicada a A y $A^\top$, y las de la matriz diagonal D de (1.6) son los pivotes diagonales. Luego, utilizando la relación

$$m_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{p_{i-1,j}},$$

y aplicando la fórmula (1.4) para el cálculo de los pivotes como en el Teorema 3.3, se prueba el resultado. $\square$

El siguiente ejemplo ilustra la factorización bidiagonal de una matriz de Bernstein-Vandermonde.

Ejemplo 1. Se considera la matriz de Bernstein-Vandermonde A para la base de Bernstein $\mathcal{B}_2$ y los nodos $\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{16} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}.$$

La factorización bidiagonal será:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

o escrito de otra manera (de acuerdo con 1.10),

$$\mathcal{BD}(A) = \begin{pmatrix} \frac{9}{16} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

A partir del Teorema 3.5, se puede deducir también el siguiente corolario.

Corolario 3.6. Sea $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ una matriz de Bernstein-Vandermonde para la base de Bernstein $\mathcal{B}_n$ cuyos nodos cumplen que $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < 1$. En estas condiciones, tanto los valores propios, valores singulares, la inversa de A como la resolución del sistema $Ax = b$, para un vector b de signos alternados, podrán calcularse con HRA.

Demostración. Por el Teorema 3.5, se observa que los multiplicadores $m_{i,j}$, $\tilde{m}_{i,j}$ y los pivotes $p_{i,i}$ se pueden calcular con HRA, ya que solo usan restas de datos iniciales. Por tanto, $\mathcal{BD}(A)$ se tiene con HRA y se pueden usar algoritmos de [16] para realizar los cálculos anunciados con HRA. $\square$

En el siguiente apartado, se muestra que es posible obtener algoritmos directos para el cálculo de A^{-1} y para la resolución de los sistemas mencionados en el Corolario 3.6 sin necesidad de recurrir a [16].

3.3. Alternativa directa para inversas y resolución de sistemas

La eliminación de Neville aplicada a A (y a $A^\top$) proporciona tanto la descomposición bidiagonal de A como la de A^{-1} . No obstante, las matrices bidiagonales que aparecen en la factorización bidiagonal de A^{-1} no son las mismas que las que aparecen en la de A , ni tampoco sus inversas. Obtener la factorización bidiagonal de A a partir de la factorización bidiagonal de A^{-1} (o al contrario) no es sencillo [12]. El siguiente resultado (que corresponde al Teorema 3.3 de [19]) establece una factorización de la inversa de una matriz de Bernstein-Vandermonde que podrá ser utilizada para los problemas de hallar inversa y resolver sistemas sin necesidad de usar los algoritmos de [16].

Teorema 3.7. Sea $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ una matriz de Bernstein-Vandermonde para la base de Bernstein $\mathcal{B}_n$ cuyos nodos satisfacen que $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < 1$. Entonces A^{-1} admite una factorización de la forma

$$A^{-1} = H_1 H_2 \dots H_n D^{-1} K_n K_{n-1} \dots K_1. \quad (3.1)$$

Las matrices H_i ($1 \leq i \leq n$) son bidiagonales triangulares superiores de la forma

$$H_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & 1 & -\tilde{m}_{i+1,i} & \\ & & & & 1 & -\tilde{m}_{i+2,i} \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & 1 & -\tilde{m}_{n+1,i} \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

con $\tilde{m}_{i,j}$ los multiplicadores de la eliminación de Neville de $A^\top$, las matrices K_i ($1 \leq i \leq n$) son bidiagonales triangulares inferiores de la forma

$$K_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & -m_{i+1,i} & 1 & \\ & & & & -m_{i+2,i} & 1 \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & -m_{n+1,i} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

con $m_{i,j}$ los multiplicadores de la eliminación de Neville de A , y D es la matriz diagonal cuya i -ésima entrada será el pivote diagonal $p_{i,i}$ de la eliminación de Neville de A ,

$$D = \text{diag}\{p_{1,1}, p_{2,2}, \dots, p_{n+1,n+1}\}.$$

Demostración. De acuerdo con el Teorema 3.5, se cumple la factorización (1.6). A partir de desarrollar dicha factorización en términos de matrices elementales y, usando las propiedades (1.2) y (1.3), es posible obtener la factorización (3.1) (véase [10], [11]). Las expresiones para los multiplicadores $m_{i,j}$, $\tilde{m}_{i,j}$ y pivotes diagonales $p_{i,i}$ son las calculadas previamente en el Teorema 3.5. $\square$

Además, utilizando los mismos argumentos de [11] y [12], se puede afirmar que esta factorización es única.

Corolario 3.8. Sea $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ una matriz de Bernstein-Vandermonde para la base de Bernstein $\mathcal{B}_n$ cuyos nodos satisfacen que $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < 1$. Entonces se puede calcular A^{-1} con HRA mediante (3.1).

Demostración. El Teorema 3.5 muestra que los multiplicadores $m_{i,j}$, $\tilde{m}_{i,j}$ y los pivotes $p_{i,i}$ pueden calcularse con HRA, ya que solo requieren restas de datos iniciales. De este modo, por el Teorema 3.7, es posible obtener las matrices H_i , K_i y D^{-1} con HRA, y se observa que se puede calcular A^{-1} sin usar restas y, por tanto, con HRA. $\square$

Si A^{-1} fuera conocida y b tuviera signos alternados, sería posible calcular con HRA la solución del sistema $Ax = b$ ya que $x = A^{-1}b$ y, como por la Proposición 1.5, A^{-1} tiene patrón de signos ajedrezado, este producto se puede llevar a cabo sin restas.

Si no se conoce A^{-1} , entonces por el Teorema 3.7, se puede plantear un método para resolver con HRA el sistema $Ax = b$, donde A es una matriz de Bernstein-Vandermonde de tamaño $(n+1) \times (n+1)$ y b es un vector con patrón de signos alternos. Se puede aplicar el Teorema 3.7 para obtener

$$x = A^{-1}b = H_1 H_2 \cdots H_n D^{-1} K_n K_{n-1} \cdots K_1 b \quad (3.4)$$

y multiplicar la expresión de derecha a izquierda. Es relevante señalar que, al calcular el producto $H_1 H_2 \cdots H_n D^{-1} K_n K_{n-1} \cdots K_1 b$, como el vector b sigue un patrón de signo alternado (es decir, $\text{sign}(b_i) = (\pm 1)^i$), todas las etapas se realizan sin cancelaciones sustractivas. Esto se debe a que, según el Teorema 3.5, todos los multiplicadores $m_{i,j}$ y $\tilde{m}_{i,j}$ son no negativos, y por lo tanto, el patrón de signos alternados del vector b se mantiene en los vectores intermedios generados. Como resultado, el producto puede calcularse con alta precisión relativa y, por consiguiente, la resolución del sistema se ha llevado a cabo con HRA.

Dado que H_i y K_i ($i = 1, \dots, n+1$) son matrices bidiagonales y D^{-1} es una matriz diagonal, es fácil ver que la complejidad computacional de calcular el producto completo de derecha a izquierda es $O(n^2)$. Basta observar el algoritmo de la página 623 de [19] para concluir que la construcción de las matrices H_i , K_i y D^{-1} también puede realizarse con una complejidad computacional de $O(n^2)$, y por lo tanto, la complejidad computacional de resolver todo el sistema lineal es también $O(n^2)$.

Se puede desarrollar un algoritmo análogo con complejidad computacional $O(n^2)$ para calcular la factorización bidiagonal de la inversa de $A^\top$, es decir, $A^{-\top}$. Como consecuencia, se obtiene un algoritmo con complejidad $O(n^2)$ para resolver con HRA el sistema lineal $A^\top x = b$, donde A es una matriz Bernstein-Vandermonde de tamaño $(n+1) \times (n+1)$, utilizando

$$x = A^{-\top} b = K_1^\top K_2^\top \cdots K_n^\top D^{-1} H_n^\top H_{n-1}^\top \cdots H_1^\top b.$$

Bibliografía

- [1] P. ALONSO, M. GASCA AND J.M. PEÑA, Backward error analysis of Neville elimination, *Appl. Numer. Math.*, 23:193–204, 1997.
- [2] T. ANDO, Totally positive matrices, *Linear Algebra Appl.*, 90: 165–219, 1987.
- [3] J.M. CARNICER AND J.M. PEÑA, Shape preserving representations and optimality of the Bernstein basis, *Advances in Computational Mathematics*, 1: 173–196, 1993.
- [4] J.M. CARNICER AND J.M. PEÑA, Totally positive bases for shape preserving curve design and optimality of B-splines, *Computer-Aided Geom. Design*, 11: 633–654, 1994.
- [5] J.M. CARNICER AND J.M. PEÑA, Total positivity and optimal bases, en: M. Gasca and C.A. Michelli (editores), *Total positivity and its applications*, Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1996, pp. 133–155.
- [6] J. DEMMEL, I. DIMITRIU, O. HOLTZ AND P. KOEV, Accurate and efficient expression evaluation and linear algebra, *Acta Numer.*, 217: 87–145, 2008.
- [7] J. DEMMEL, M. GU, D. EISENSTAT, I. SLAPNIČAR, K. VESELIĆ AND Z. DRMAČ, Computing the singular value decomposition with high relative accuracy, *Linear Algebra Appl.*, 299: 21–80, 1999.
- [8] S.M. FALLAT AND C.R. JOHNSON, *Totally nonnegative matrices*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011.
- [9] G. FARIN, *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, Boston, 1988.
- [10] M. GASCA AND J.M. PEÑA, Total positivity and Neville elimination, *Linear Algebra Appl.*, 165: 25–44, 1992.
- [11] M. GASCA AND J.M. PEÑA, A matricial description of Neville elimination with applications to total positivity, *Linear Algebra Appl.*, 202: 33–45, 1994.
- [12] M. GASCA AND J.M. PEÑA, On factorizations of totally positive matrices, en: M. Gasca and C.A. Michelli (editores), *Total positivity and its applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996, pp. 109–130.
- [13] M. GASCA AND J.M. PEÑA, Total positivity, *QR* factorization, and Neville elimination, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 14: 1132–1140, 1993.
- [14] T.N.T. GOODMAN AND H.B. SAID, Shape preserving properties of the generalized Ball basis, *Computer-Aided Geom. Design*, 8: 115–121, 1991.
- [15] N. HIGHAM, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*, second edition, SIAM, Philadelphia, 2002.

- [16] P. KOEV, Accurate computations with totally nonnegative matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 29: 731-751, 2007.
- [17] P. KOEV, Accurate eigenvalues and SVDs of totally nonnegative matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 27: 1-23, 2005.
- [18] A. MARCO AND J.J. MARTÍNEZ, Accurate computations with totally positive Bernstein-Vandermonde matrices, *Electron. J. Linear Algebra*, 26: 357–380, 2013.
- [19] A. MARCO AND J.J. MARTÍNEZ, A fast and accurate algorithm for solving Bernstein–Vandermonde linear systems, *Linear Algebra Appl.*, 422: 616–628, 2007.
- [20] A. MARCO AND J.J. MARTÍNEZ, Polynomial least squares fitting in the Bernstein basis, *Linear Algebra Appl.*, 433: 1254–1264, 2010.
- [21] J.J. MARTÍNEZ AND J.M. PEÑA, Factorizations of Cauchy–Vandermonde matrices, *Linear Algebra Appl.*, 284: 229-237, 1998.
- [22] J.M. PEÑA, *Shape preserving representations in computer-aided geometric design*, Nova Science Publishers, Commack, N.Y., 1999.
- [23] A. PINKUS, *Totally Positive Matrices*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2010.