

Facultad de Educación

Universidad de Zaragoza

Grado en Magisterio en Educación Primaria

Trabajo Fin de Grado

UTILIZACIÓN DE *GEOGEBRA* EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS EN EL 1^{er} CURSO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Autor: ENRIQUE LUNA CALVO

Director: ALBERTO ARNAL BAILERA

Septiembre de 2014



Universidad
Zaragoza

ÍNDICE

Trabajo de Fin de Grado	Página
CAPITULO 0	2
CAPITULO 1	
1.1. Análisis del currículo de la Comunidad de Aragón	4
1.2. La enseñanza-aprendizaje de la Geometría. Habilidades, niveles de razonamiento y organización por fases de conocimiento.	5
1.3. Uso de software informático para la enseñanza de la Geometría	9
1.4. La visualización del individuo	10
1.5. GeoGebra vs. Papel y lápiz. Demostraciones geométricas	11
1.6. Prototipos y las representaciones estereotipadas	12
CAPITULO 2	
2.1. Contextualización, diseño de la experimentación y dificultades previas	14
2.2. Actividades utilizadas en la experimentación.	16
2.3. Temporalización de la experimentación y descripción de las sesiones.	22
2.3.1. Descripción de las sesiones.	23
2.3.2. Evaluación y algunas conclusiones sobre las actividades propuestas.	26
CAPITULO 3	
3.1. Secuencia Didáctica completa.	28
3.2. Tabla-resumen sobre las actividades de la Secuencia Didáctica.	41
3.3. Metodología y distribución temporal de la Secuencia Didáctica.	46

CAPITULO 4	
4.1. Conclusiones referentes al Capitulo 1.	47
4.2. Conclusiones referentes al Capitulo 2.	48
4.3. Conclusiones referentes al Capitulo 3	51
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	54
ANEXO1	
ANEXO2	
ANEXO3	
ANEXO4	
ANEXO5	
ANEXO6	
ANEXO7	

RESUMEN

En este Trabajo de Fin de Grado (TFG) exponemos la realización de una experimentación llevada a cabo con veinticinco alumnos de 1^{er} curso de Educación Primaria en el centro escolar *Doctor Azúa* situado en la ciudad de Zaragoza.

Durante la experimentación se exploran varias metodologías para abordar la Geometría plana. Se propone la utilización de un software de geometría dinámica (en concreto *GeoGebra*) frente a la metodología tradicional de papel y lápiz.

Tras la realización de esta experimentación y obtenidas diferentes conclusiones se diseña una secuencia didáctica ampliada con actividades nuevas y mejoras de las iniciales.

Palabras clave: Educación Primaria, Geometría plana, datos de Aula, *GeoGebra*, representaciones estereotipadas.

ABSTRACT

This Grade Final Project explains an experiment performed with twenty five first year primary school students in the *Doctor Azúa* School located in Zaragoza.

During experiment several methodologies are explored the issue of Plane Geometry. It is proposed to use Dynamic Geometry Software (specifically *GeoGebra*) versus the traditional paper and pencil methodology.

After performing this experiment and obtained different conclusions, we propose a didactic sequence extended with improvements and new activities.

Key words: Primary School, Plane Geometry, Classroom data, *GeoGebra*, Stereotypical representations.

CAPITULO 0

Este TFG (Trabajo Fin de Grado) está relacionado con la utilización de software de geometría dinámica, en concreto el programa *GeoGebra* o *GeoGebraPrim*, en el centro escolar y con alumnos de 6-7 años (1^{er} curso de Educación Primaria), para desarrollar contenidos relacionados con los polígonos o formas geométricas planas más elementales.

Es preciso mencionar que *GeoGebra* y *GeoGebraPrim* son idénticos, salvo que en el caso del segundo aparece con menor número de herramientas geométricas, y puede ser más apropiado para niños de tan corta edad, aunque en *GeoGebra* también existe la posibilidad de suprimir dichas herramientas, con lo cual podemos hablar de ambos programas como uno solo.

El trabajo en sí mismo, tiene varias partes:

Tras un análisis de la literatura sobre este tópico, realizamos una aplicación práctica que consta de varias fases:

La primera, trata de un estudio comparativo entre varias metodologías para abordar el tema de Geometría plana. Analizaremos varias actividades llevadas a cabo con alumnos del colegio público *Doctor Azúa*. Dichas metodologías son las siguientes:

- Una es la metodología tradicional del uso de libro de texto, papel y lápiz.
- Otra es la metodología que proponemos como novedad, el uso del programa *GeoGebra* tanto para la enseñanza por parte del docente, como para el aprendizaje por el alumno.

La segunda, a partir del análisis anterior propondremos una secuencia didáctica con actividades que llevaríamos a cabo en un periodo de tiempo mayor al disponible en dicho centro escolar con alumnos del mismo nivel, para conseguir abordar los contenidos expuestos de forma más adecuada.

A partir de lo anterior elaboraremos unas conclusiones, siendo conscientes de que la puesta en práctica de la secuencia ampliada nos llevará a conclusiones más elaboradas y precisas.

A continuación exponemos los objetivos particularizados para este TFG:

Objetivo 1. Realizar una aproximación a la situación de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en Educación Primaria con la ayuda de GeoGebra mediante una revisión de la bibliografía de investigación educativa referida a dicho tópico.

Este objetivo consiste en revisar y analizar diferentes artículos relacionados con la enseñanza-aprendizaje de la Geometría, principalmente en cuanto a ejemplos de estudios y las metodologías utilizadas para llevar a cabo la Geometría en el aula de Educación Primaria. Posteriormente, clasificar la información que nos interese por temas relacionados entre sí, y organizar dicha recopilación en un capítulo del TFG (en concreto el capítulo 1).

Objetivo 2. Explorar las actividades que la red oferta y que puedan ser apropiadas para su aprovechamiento en los distintos ciclos de Educación Primaria y/o diseñar actividades propias que complementen lo que la red ofrece.

Este objetivo hace referencia a la búsqueda de diferentes actividades ya creadas por distintos autores y expuestas por ellos en la red, para analizarlas y adecuarlas al nivel de los alumnos con los que se desarrolla la experimentación. Asimismo, diseñar actividades propias también adecuadas al nivel y edad de dichos alumnos.

Objetivo 3. Diseño, experimentación y evaluación de unas sesiones con GeoGebra en el aula de Educación Primaria para contextualizar en la práctica lo conocido a través de la teoría.

El objetivo presente esta encaminado al diseño de una experimentación de acuerdo con las posibilidades y limitaciones presentes en el centro de prácticas, en cuanto al número de sesiones y alumnos disponibles, y materiales para utilizar alumnos y profesor. Incluiremos metodología y distintas actividades, además de incorporar una evaluación de la experimentación y de las habilidades adquiridas por los alumnos durante dichas sesiones.

(Los objetivos 2 y 3 aparecen desarrollados en el capítulo 2 del TFG).

Objetivo 4. Extensión de las sesiones con GeoGebra hasta constituir una secuencia didáctica completa.

Este objetivo consiste en construir una secuencia didáctica completa, que incorpore a las actividades ya propuestas en la experimentación realizada, nuevas actividades para desarrollar una experimentación más completa en un tiempo de realización más amplio, y poder obtener conclusiones más elaboradas y certeras.

(El objetivo 4 aparece desarrollado en el capítulo 3 del TFG).

Finalmente, en el capítulo 4 explicamos las conclusiones referidas a cada capítulo del TFG y de la experimentación realizada; y en los Anexos, aparecen varias imágenes de actividades realizadas por los alumnos durante las sesiones de la experimentación.

CAPITULO 1

En este capítulo realizamos una aproximación a la situación de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría en Educación Primaria. Para ello, analizamos la situación de la Geometría en cuanto al currículo de la comunidad aragonesa, y según diferentes autores y estudios llevados a cabo con distintos alumnos, reflejados en diferentes artículos.

1.1. Análisis del currículo de la Comunidad de Aragón

A continuación aparecen reflejados los objetivos, contenidos y criterios de evaluación del área de Matemáticas propios del currículo de la Comunidad de Aragón, que es necesario analizar para obtener conclusiones sobre las posibilidades con niños de este nivel concreto. Además incluimos los objetivos específicos a desarrollar al mismo tiempo que realizamos nuestro estudio, redactados por nosotros a partir del objetivo de área y en función de lo que pretendemos abordar en nuestra investigación.

Objetivo general de área:

7. Identificar formas geométricas del entorno natural y cultural, utilizando el conocimiento de sus elementos y propiedades para describir la realidad y desarrollar nuevas posibilidades de acción.

Objetivos específicos:

- Conocer los conceptos de punto, segmento, polígono y no polígono.
- Reconocer e identificar formas geométricas elementales: triángulo, cuadrado, rectángulo, círculo y rombo, en distintas situaciones.
- Diferenciar entre cuadrilátero y tipos de este.
- Observar y crear formas geométricas planas variadas y no estereotipadas.
- Crear dibujos creativos haciendo uso de formas geométricas, puntos y segmentos.
- Utilizar varios métodos para crear formas geométricas.

Bloques de contenidos generales de área:

La geometría en concreto cuenta con un bloque de contenido propio dentro del área de Matemáticas.

1^{er} CICLO

Bloque 3. Geometría

- Figuras planas: reconocimiento en objetos familiares de triángulo, cuadrado, rectángulo y círculo. Elementos básicos: dominio interior, dominio exterior, frontera, lado, vértice y circunferencia.
- Aproximación intuitiva al concepto de espacio, plano, recta y punto.
- Utilización de programas informáticos para construir figuras.
- Utilización de criterios elementales para comparar y clasificar figuras y cuerpos geométricos.
- Interés y curiosidad por la identificación de las formas y sus elementos característicos.

Criterio de evaluación de ciclo:

6. Reconocer en el entorno inmediato formas y cuerpos geométricos (triángulos, cuadrados, rectángulos, círculos, cubos, prismas, cilindros, esferas).

Con ello, podemos decir que el currículo aragonés recoge la Geometría en un solo bloque de contenidos dentro del área de Matemáticas.

Principalmente, en cuanto a Geometría plana, se le da una gran importancia a la identificación y reconocimiento por el alumno en diferentes entornos. Además, también se observa que se hace referencia a la utilización de programas informáticos para construir figuras. De ahí que nuestro trabajo se va a fundamentar básicamente en la identificación y reconocimiento de figuras geométricas planas haciendo un gran uso del programa informático *GeoGebra*, elegido por sus herramientas disponibles, posibilidades que ofrece y además disponibilidad gratuita.

1.2. La enseñanza-aprendizaje de la Geometría. Habilidades, niveles de razonamiento y organización por fases de conocimiento.

Según Alsina (2008), en muchos países no se ha encontrado la metodología adecuada para llevar a cabo la Geometría. Desde infantil, es un tema al que se le da una gran importancia, y la va perdiendo conforme avanza el nivel de los cursos.

A su vez, Galindo (1996) expone que en general, los alumnos tienen poco dominio de los conceptos geométricos, tienden a memorizar problemas planteados, y esto provoca dificultades a la hora de resolverlos en contextos distintos. Por otro lado, los profesores desplazan a un segundo plano la Geometría, debido a la falta de tiempo y a su inclusión en otros temas. Además de falta de material didáctico, deficiente preparación docente, y falta de currículo coherente para abordar la Geometría, si se

quiere utilizar un software específico, es necesario mencionar un inconveniente, como es la falta de un número de ordenadores adecuado para todos los alumnos.

El fin último de la Geometría es facilitar el conocimiento del espacio, la creatividad y potenciar los procesos de matematización. Por ello, de acuerdo con Alsina (2008) los maestros tienen que mejorar y modificar sus técnicas de enseñanza, para lo cual puede ser necesaria la utilización de las nuevas tecnologías, es decir, deben modernizar la enseñanza de la Geometría, potenciando en los alumnos la resolución de problemas y adquisición de unas habilidades que puedan aplicarse en otros contextos reales de la vida cotidiana.

La Geometría posee una característica interdisciplinar, ya que pone en práctica gran variedad de recursos matemáticos, y al mismo tiempo facilita el desarrollo de diferentes habilidades para conseguir los objetivos del área de Matemáticas.

Dichas habilidades aparecen en el trabajo de Galindo (1996) sobre la Tabla de habilidades básicas en Geometría elaborada por Hoffer (1990), y son las siguientes:

1. *Habilidad visual*. Hace referencia a la capacidad del estudiante para captar información mediante observación de objetos reales o representaciones de estos.
2. *Habilidad verbal*. Capacidad para emplear un uso adecuado del lenguaje geométrico.
3. *Habilidad para dibujar*. Capacidad para interpretar las ideas mediante dibujos y/o esquemas.
4. *Habilidad lógica*. Capacidad para crear argumentos según las reglas de la lógica formal, y además reconocer si un argumento es válido o no.
5. *Habilidad de modelación*. Capacidad de describir y explicar fenómenos cotidianos a través de modelos.

En el caso de esta última habilidad, Gutiérrez (2006) y Alsina (2008) citan los pasos para abordar las situaciones problema y con ello crear modelos matemáticos según las etapas de modelización de H. O. Pollack (1997). Estos pasos resumidos son: utilizar situaciones del mundo real o cotidiano para conseguir unos resultados; después identificar estos resultados con términos matemáticos para crear los modelos matemáticos; y una vez obtenidos unos modelos, volver al comienzo para verificar si los resultados conseguidos son válidos o no, y si por consiguiente no lo son, repetir el proceso.

Galindo (1996) también planteó un programa de Geometría con alumnos de sexto curso, y propuso actividades basadas en la manipulación de material concreto, y avanzaban hasta el ordenamiento de propiedades captadas por dichos alumnos (es decir, pretendía llevar al alumno del nivel 1 al nivel 3, según van Hiele (1986)).

Estas habilidades se desarrollan a través de los niveles de razonamiento creados por *van Hiele* en los años 80 según nos cuenta Gutiérrez (2006) en su investigación. Dichos niveles están basados en el desarrollo de la capacidad de los estudiantes para razonar matemáticamente.

Estos niveles aparecen en el trabajo de Gutiérrez (2006), y son los cinco siguientes:

- *Nivel 1*: los estudiantes tienen una percepción global de las figuras geométricas con atención casi exclusiva a las propiedades visuales o físicas frente a las propiedades matemáticas. Además, tienen una percepción individual de cada figura, sin generalizar a otras figuras.

Por ejemplo: Un niño de 2º de Primaria dice que el dibujo de la *figura 1a* sí es un cuadrado, pero que el de la *figura 1b* no lo es “porque creía que estaba mal colocado”. Otro compañero suyo da la misma respuesta.

Como se ve, para los estudiantes en el Nivel 1, la posición de las figuras es una propiedad fundamental para clasificarlas.

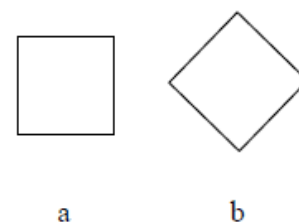


Figura 1

- *Nivel 2*: los estudiantes son capaces de reconocer las propiedades matemáticas o elementos de las figuras geométricas. Aparece la capacidad de generalización en unos pocos ejemplos. Y, la demostración de la veracidad de una conjetura se realiza verificándose en casos concretos.

Por ejemplo: Al pedirle a un estudiante de ESO que demuestre que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° , contestó que esto “se debe a que el valor de dichos ángulos es 60° , porque $60 + 60 + 60 = 180$ ”. Se conforma con verificar un solo caso como puede ser un triángulo equilátero.

- *Nivel 3*: son capaces de reconocer las propiedades de las figuras geométricas. Pueden realizar clasificaciones tanto exclusivas como inclusivas. Son capaces de realizar demostraciones, mediante argumentos deductivos abstractos basados en

la observación de ejemplos concretos. Aunque no pueden crear demostraciones formales de manera autónoma.

- *Nivel 4*: son capaces de usar el razonamiento matemático formal, y por tanto, de realizar y comprender demostraciones formales de manera autónoma. Aceptan diferentes demostraciones del mismo concepto o teorema matemático.
- *Nivel 5*: son capaces de trabajar con diferentes sistemas axiomáticos (Por ejemplo, con dos geometrías: la euclídea y no euclídea). No existen investigaciones en las que se haya podido observar este nivel. Por ello, muchos investigadores rechazan su existencia.

El primer nivel es el típico de la Educación Primaria, y en los últimos cursos de esta etapa se inicia el segundo nivel, por ello nos centramos principalmente en estos dos niveles. En el caso del nivel 2, se completaría durante la ESO, y al final de esta etapa se iniciaría el nivel 3. Por último, el nivel 3 se completaría en Bachillerato, y además en esta etapa se iniciaría el nivel 4. Finalmente y como ya hemos dicho, en el caso del nivel 5 la mayoría de los investigadores rechazan su existencia.

Siguiendo a Gutiérrez (2006), es vital que alumno y profesor se sitúen en el mismo nivel en cuanto al lenguaje matemático utilizado para facilitar su comprensión, siendo clave la discusión constructiva entre ambos, y entre alumnos. Esto influye en gran parte a la hora de crear actividades por el profesor que debe ceñirse a las posibilidades del alumno, como por ejemplo ocurre en nuestro trabajo con alumnos de 1^{er} curso de Primaria.

En el trabajo de Gutiérrez (2006), según van Hiele (1986) la actividad de los estudiantes se debe organizar y ordenar según las cinco fases siguientes: *información* (conocimientos previos); *orientación dirigida* (contenidos básicos del nuevo tema, y objetivos concretos); *explicitación* (Expresión verbal de nuevos términos matemáticos y resolución de problemas) que es una fase superpuesta al resto de fases; *orientación libre* (profundizar y ampliar conocimientos); e *integración* (repaso global y conexión con nuevos temas). Dicha organización de la actividad de los estudiantes está basada en los niveles.

Según Alsina (2008), las fases que deberían organizar y ordenar dicha actividad de los estudiantes son: introducción, conocer objetivos, investigación e hipótesis, discusión y contraste, y por último, resolución de problemas de consolidación y ampliación.

Finalmente, en su trabajo Gutiérrez (2006) cita a Vinner (1991), el cual expone que existen dos componentes en el aprendizaje de los conceptos matemáticos en Geometría, que pueden ser relacionados con los niveles y fases de *van Hiele*:

- La *definición del concepto*, que consiste en la definición memorizada por un estudiante para dicho concepto, la cual puede coincidir o no con la definición correcta aceptada por el profesor o por la comunidad matemática. Se deben incluir aquí también las propiedades o fórmulas de cálculo aprendidas de memoria. Por tanto, este componente se considera el aprendizaje por memorización.
- La *imagen del concepto*, que consiste en el conjunto de experiencias, actividades, figuras, etc. que el estudiante ha percibido durante las clases de matemáticas y fuera de ellas. La imagen del concepto que se crea en la mente de los estudiantes está compuesta mayoritariamente por las diversas figuras, dibujos o representaciones que recuerdan como ejemplos de dicho concepto, junto al conjunto de las propiedades que el estudiante asocia al concepto. Este otro componente se considera el aprendizaje por experiencia.

La enseñanza de nuevos conceptos geométricos por medio de ejemplos y contraejemplos permite poner en práctica el modelo elaborado por *Vinner*. La contraposición entre ejemplos y contraejemplos hará que surjan las diferentes propiedades características del concepto.

En nuestra investigación haremos mayor hincapié en la imagen del concepto que en la definición, ya que se trata del 1^{er} ciclo de Primaria.

1.3. Uso de software informático para la enseñanza de la Geometría

Gutiérrez (2006) explica que en los años 80 se comienza a utilizar la informática para la enseñanza de la geometría, con programas como *Logo*, que posteriormente perdió importancia con la utilización de la geometría dinámica (SGD). Dichos SGD permiten construir y transformar figuras geométricas planas, relacionarlas, ocultar líneas o figuras de construcción auxiliares resaltando lo que nos interesa, mantener las propiedades de dichas figuras, y además permiten muchos ejemplos en pocos segundos. Estos programas informáticos son un perfecto complemento de los métodos tradicionales de enseñanza de la geometría.

Gutiérrez (2006) y Bagazgoitia (2003) nos exponen ejemplos de esta geometría dinámica como es el programa *Cabri*, con todas las características mencionadas anteriormente. Utilizado en la enseñanza, aprendizaje y también en la investigación para

evaluar y desarrollar el nivel de alumnos. Aunque cabe destacar que no es un software libre, es decir, no es gratuito.

GeoGebra es otro de estos programas de geometría dinámica y al contrario que *Cabri*, este sí que es software libre. Además es en el que nos vamos a centrar debido al interés por estudiar su uso en la Educación Primaria, y con respecto al método tradicional de papel y lápiz para abordar la Geometría.

Por tanto, *GeoGebra* permite crear actividades autocorregibles y adaptables al ritmo de aprendizaje, y además es una herramienta informática dinámica y simbólica, perfecta para conocer los diferentes niveles que existen en cada aula; como por ejemplo en el trabajo de Jones (1999), que realizó un estudio con parejas de alumnos de sexto de Primaria, evaluando en base al Nivel 1 de *van Hiele*, para posteriormente crear actividades para desarrollar el Nivel 2.

También, es el caso del siguiente proyecto, el proyecto *GeoGebraPrim* que se inició en 2007, en varias escuelas de primaria en Luxemburgo, y por TAO (pruebas asistidas por ordenador), con 200 niños de Luxemburgo, en edad de 9 años. Este proyecto de investigación consistió en dividir a los alumnos, varios realizarían unas tareas mediante metodología tradicional de papel y lápiz, y otros utilizando el programa anterior; siendo escasos los resultados con ambos métodos.

GeoGebraPrim se crea como una variante de *GeoGebra*; contiene menor número de herramientas, ocultando las que no son necesarias para el nivel de estos niños.

Siguiendo a Kreis y Dording (2009) y a Alsina (2008), dicho programa facilita el aprendizaje activo y autónomo del alumno, además del aprendizaje por descubrimiento, con la posibilidad de combinar trabajo individual y grupal. Los niños asumen un papel activo en su proceso de aprendizaje mientras exploran y descubren, en el caso de que el profesor utilice métodos por descubrimiento y por ejemplo fomente la idea de investigar la función de cada herramienta del programa, por los propios alumnos.

GeoGebra ayuda a visualizar los problemas, siendo en ocasiones la principal dificultad el desconocimiento de los conceptos matemáticos al trabajar con el programa.

1.4. La visualización del individuo

Siguiendo a Gutiérrez (2006), podemos entender la visualización como el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales,

modelos y conceptos geométricos. La información visual producida (imágenes) puede ser tanto física (figuras o diagramas) como mental (imágenes mentales).

La capacidad de visualización no es una capacidad innata, y según Gutiérrez (2006) se puede aprender a usar, por ejemplo mediante actividades de situaciones cotidianas que precisen de imágenes realizadas por los propios alumnos; como actividades en las que el alumno debe identificar figuras en una foto imaginaria o real. Por tanto, cabe destacar que el profesor determina en gran parte la actividad de los alumnos, según su organización de clase y actividades planteadas. También, debe tener en cuenta los conocimientos previos de los alumnos para diseñar actividades constructivas y lúdicas según nos dice en su trabajo Galindo (1996).

Además, existen varios procesos de visualización: Interpretación de la información figurativa (interpretar imagen para extraer información); y procesamiento visual (convertir información no visual en imágenes).

Por último, las habilidades de representación se pueden enseñar con métodos manipulables, y software específico. En función de estas habilidades, los alumnos pueden tener distintos grados de visualización: analítico, visualizador, y mixto.

1.5. GeoGebra vs. Papel y lápiz. Demostraciones geométricas

Existen estudios en los que analizan y comparan la resolución de problemas geométricos mediante dos métodos: método tradicional de papel y lápiz, y método informático con *GeoGebra*, como el estudio realizado por Iranzo y Fortuny (2008) con gran influencia en nuestro propio trabajo. Las características del programa influyen en las estrategias de resolución de los alumnos.

Aunque eso sí, la mayoría de estos estudios están realizados con alumnos de secundaria, en función de la Unidad Didáctica, conocimientos previos y formas de trabajar. En el caso del estudio realizado por Iranzo y Fortuny (2008), dividen el estudio en tres sesiones:

1. Introducción al uso de *GeoGebra*.
2. Inicio de la experimentación, con la resolución de problemas con papel y lápiz.
3. Resolución de los problemas con *GeoGebra*, y cuestionario sobre su uso.

Una vez conocido el funcionamiento de dicho programa, proponen unas actividades que los alumnos realizan primero con un método y después con el otro. En función de su realización se obtienen diferentes tipos de alumnos: autónomos (de nivel alto),

instrumentales (nivel medio-alto), procedimentales (nivel medio-alto, ligeramente más bajo que el anterior), y naïf (Nivel bajo, con muchas dificultades de distintos tipos).

Según Gutiérrez (2006), existen numerosas propuestas de enseñanza de demostraciones sobre geometría, cuyo objetivo es iniciar a los alumnos en el uso de argumentos deductivos lógicos y justificaciones abstractas, es decir, iniciar en el Nivel 3 de van Hiele. Aunque esto es más apropiado para nivel de secundaria.

La función de dichas demostraciones debe ser: explicación, descubrimiento, verificación, reto intelectual (más lúdico que científico), sistematización, o comunicación. Y en este orden preferentemente. En su trabajo Gutiérrez (2006) establece dos tipos de demostraciones, cada una característica de un nivel distinto según *van Hiele*:

- Empíricas (experimento mediante ejemplo genérico) que son las que verifican conjeturas mediante la comprobación de ejemplos. (Característico de Nivel 2).
- Deductivas (experimento mental, cálculo simbólico) que son las que verifican conjeturas mediante argumentos basados en propiedades admitidas como ciertas previamente. (Característico de Nivel 3).

1.6. Prototipos y las representaciones estereotipadas

Para terminar, podemos añadir un tema característico de Geometría que se da en innumerables ocasiones en los centros escolares, como son los prototipos y representaciones estereotipadas de figuras geométricas, un tema que también hemos tenido en cuenta en nuestro estudio principalmente a la hora de crear las actividades con *GeoGebra*; en todas ellas se busca evitar estereotipos mostrando a los alumnos distintas figuras geométricas en diferentes posiciones, tanto mediante el uso del anterior programa informático como en papel.

Según Scaglia y Moriena (2005) toda figura geométrica tiene unas propiedades espaciales (conceptuales), y una imagen visual. Los alumnos tienden a centrarse más en la imagen, por lo que el docente debe limitar esa visualización únicamente de la imagen mediante la construcción de conceptos. Los alumnos deberán relacionar ambas.

Los prototipos deben servir de modelo de imagen para los alumnos. En la formación de la imagen que tiene una persona, son básicos la experiencia y los ejemplos vistos en distintos contextos.

Debemos distinguir prototipo (imagen mental formada a través de distintas representaciones gráficas), y estereotipo (dibujo o representación gráfica reiteradamente utilizada en nuestra cultura).

La posición de la figura es irrelevante desde el punto de vista geométrico, aunque el alumno puede asimilarlo en su esquema mental como relevante, como explican en su trabajo Scaglia y Moriena (2005). Por ello, no es recomendable que el alumno tenga presente muchas veces la figura estereotipada, y sí utilizar figuras geométricas en distintas posiciones.

Según Gutiérrez (2006), dar relevancia a la posición de una figura geométrica es un error en muchas ocasiones observable en alumnos del Nivel 1 del modelo de razonamiento de van Hiele (1986). Como ocurre en el ejemplo de la *Figura 1*; el alumno cree que la Figura 1a es un cuadrado y la 1b un rombo, siendo también un cuadrado pero en una posición girada.

En definitiva, como señalan Scaglia y Moriena (2005) en su trabajo, los prototipos a los que conducen las representaciones gráficas estereotipadas son básicos para el aprendizaje de conceptos geométricos por los alumnos, pero al mismo tiempo su uso exclusivo crea ciertas dificultades al identificar figuras geométricas. Por tanto, debemos dar la posibilidad de crear nuevos prototipos, y no utilizar exclusivamente representaciones gráficas estereotipadas; siendo para ello una buena herramienta el software geométrico dinámico (SGD).

CAPITULO 2

En este capitulo del TFG vamos a exponer la organización y desarrollo de la experimentación, actividades propuestas a los alumnos e imágenes de ellas, decisiones y finalmente resultados obtenidos a partir de las actividades propuestas a los alumnos en dicho centro escolar, evaluando el aprendizaje de los propios alumnos y la propia investigación. A partir de esto, en el siguiente capitulo del TFG propondremos una secuencia didáctica para abordar el programa de manera global en el 1^{er} ciclo.

2.1. Contextualización, diseño de la experimentación y dificultades previas

Como ya hemos dicho, la experimentación la hemos llevado a cabo con alumnos de 1^{er} curso de Educación Primaria del centro escolar *Doctor Azúa*, en concreto con 25 alumnos.

Debido a que nuestra situación es de profesores de prácticas, hemos tenido que ponernos de acuerdo con el profesor-tutor y otros profesionales docentes para disponer de los recursos necesarios para desarrollar dicha experimentación. Por todo ello, tuvimos que hacer frente a distintas dificultades y tener en cuenta los siguientes asuntos a modo de preparación previa:

1. Principalmente, el número de alumnos que dispondríamos para desarrollarla.
2. El número de sesiones disponibles y duración de estas sesiones.
3. El momento en el que llevarla a cabo, en función de la Unidad Didáctica y/o programación de la tutora del grupo de alumnos.
4. Por otro lado, disponibilidad del aula de informática, y el número de ordenadores.
5. La situación en la que se encontraban dichos ordenadores (“congelados” con una contraseña del centro escolar).
6. La necesidad de instalar la aplicación *Java*, previamente al programa *GeoGebra*.
7. Finalmente, la colaboración de la profesora-tutora y principalmente el encargado del aula de informática, para ayudarnos a “descongelar” los ordenadores y poder instalar la aplicación *Java* y el programa *GeoGebra*.

Tras abordar dichos asuntos previos de organización del contexto de la investigación, concluimos que:

- Contamos con veinticinco alumnos para realizar la investigación. Pese a que se pretendía realizar con un grupo pequeño de alumnos, la tutora no nos lo permitió y se decidió hacerlo con todos los miembros de la clase.

- Organizamos la investigación y preparación de las actividades en función de lo que la profesora había explicado ya sobre Geometría en una sesión anterior. Dicha sesión fue utilizada por la tutora a modo de introducción de conceptos geométricos, como: los polígonos, los no polígonos, círculos, triángulos y cuadriláteros, y tipos de cuadriláteros, en concreto cuadrado, rectángulo y rombo. Dichos conceptos los abordó mediante una metodología muy tradicional, haciendo uso únicamente del libro de texto, utilizando meras explicaciones con simplemente los escasos ejemplos e proponía el libro y muy estereotipados. Las actividades que los alumnos debían realizar eran meras identificaciones de figuras estereotipadas, pocos ejemplos (uno o dos de cada figura geométrica), y simplemente de identificación mediante colores por su nombre y según el número de lados, sin ni siquiera tener que realizar identificaciones en otros contextos o imágenes con sentido real o cotidiano.
- Posteriormente a dicha sesión realizada por la tutora y tras sus explicaciones sobre las figuras geométricas planas y los polígonos, llevamos a cabo las sesiones propiamente de experimentación. Esta sesión previa fue utilizada para aprovechar mejor el escaso tiempo disponible, y de esta forma los conceptos básicos ya serían conocidos por los alumnos, aunque no estuvieran asimilados completamente.
- La tutora, únicamente nos dejó disponer de dos sesiones, cada una de una hora escasa, por lo que decidimos dividir las partes de la investigación:
 1. Una sesión de una hora, para mostrarles a los alumnos como funciona *GeoGebra*, y para realizar varias actividades propias de dicha experimentación.
 2. La otra sesión (también de una hora aproximada), para resolver otras actividades mediante el método tradicional de papel y lápiz.
- También es necesario mencionar, que en cada una de las sesiones se hizo un pequeño repaso sobre figuras geométricas, punto, segmento y el concepto de polígono o no polígono. En la primera sesión utilizando *GeoGebra*, y en la segunda usando la pizarra tradicional para dicho repaso.
- Por otro lado, nos tuvimos que asegurar de que la sala de informática estaba disponible hablando con el encargado del aula de informática y otros docentes. Y también el número de ordenadores, que en concreto eran trece, por lo que, para llevar acabo la experimentación colocamos a los alumnos por parejas.

- El encargado nos ofreció su ayuda para “descongelar” los ordenadores. Posteriormente, instalamos la aplicación *Java* y el programa *GeoGebra*. Todo este proceso previo al desarrollo de la experimentación con los alumnos, nos ocupó un tiempo de unas dos horas y media.
- Con la mitad del grupo, previamente a las dos sesiones programadas para la experimentación, utilizamos media hora aproximada (mientras el resto de alumnos estaba en la clase de *Religión*), para mostrarles algunos botones o herramientas dentro del programa mencionado. Posteriormente, durante la primera sesión de la investigación dividimos a los alumnos que habían tenido la aproximación a *GeoGebra* previamente, y los colocamos cada uno con un alumno que había asistido a *Religión*, formando así las trece parejas correspondientes.

2.2. Actividades utilizadas en la experimentación

Tras la explicación de cómo hemos organizado a los alumnos y las sesiones, la forma de ajustarnos a los recursos disponibles, y la adecuación a los requerimientos de la tutora y del propio contexto, pasaremos a mostrar y comentar la elección de las actividades, para la experimentación, teniendo en cuenta el escaso tiempo disponible.

Primero, para evitarles problemas a los alumnos decidimos ocultar la ventana algebraica, así como los ejes de coordenadas, dejando el fondo de la ventana gráfica con la correspondiente hoja cuadriculada; además quitamos algunos botones o herramientas de la parte superior de *GeoGebra*, personalizando la barra de herramientas. La pantalla que verían los alumnos y el propio profesor quedaría de la siguiente forma:

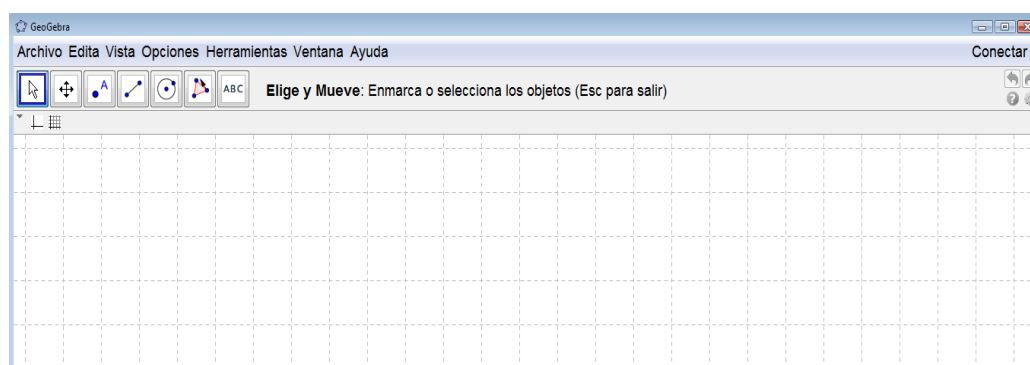


Figura 2

De tal forma que únicamente aparecerán las siguientes herramientas: puntos, segmentos, circunferencia, botón para desplazar vista gráfica, escribir texto, botón de elegir-mover, y finalmente, polígono rígido. Únicamente dejamos la herramienta para crear **polígonos rígidos** para trabajar el desplazamiento, cambio de posición y giro de

figuras geométricas sin cambiar sus propiedades, como podría ocurrir con la herramienta “*Polígono normal*”, la cual no tenemos en cuenta en esta investigación.

La sesión comenzó con una explicación de las anteriores herramientas y con ejemplos de cada una.

Cada vez que se explicaba una herramienta mediante el proyector, que veían todos alumnos, les dejábamos un tiempo para que ellos mismos probaran a utilizarla durante un minuto.

Comenzamos dibujando puntos y mostrándoles la herramienta para deshacer y rehacer. Luego, segmentos, intentándoles explicar su significado como concepto geométrico (Tramo de recta delimitado por dos puntos en sus extremos). Después, circunferencias y la idea de que círculo no es un polígono. Finalmente, polígonos gráficamente y como concepto geométrico de línea poligonal cerrada junto con su interior según el *Libro de Educación Primaria* (1^{er} curso, Ed. Santillana-Proyecto los caminos del saber).

Destacamos variados ejemplos de los polígonos según el número de lados; e incidiendo en los triángulos y cuadriláteros, y dentro de estos últimos los cuadrados, rectángulos y rombos, que aparecen en las imágenes *Figura 3* y *Figura 6*. Además, incidiendo en la herramienta de mover y girar los polígonos para ver distintos ejemplos y en diferentes posiciones, evitando simples representaciones gráficas estereotipadas.

Las siguientes dos actividades (*Act1* y *Act2*) fueron preparadas para comenzar la investigación, pero al final no se llevaron a cabo porque la tutora no consideró conveniente introducir la clasificación de triángulos según el número de lados que tiene, pero con más tiempo disponible, pensamos que habría sido adecuado, pese a que en el currículo aragonés tampoco se especifica dicho contenido en primer ciclo de Primaria (Tampoco se especifica este contenido en 1^{er} curso de Primaria, en el caso de la reforma del currículo aragonés, Orden de 16 de Junio de 2014).

En el caso de la *Act1*, se utilizaría por el profesor simplemente para explicar los tipos de triángulos según el número de lados, y mediante una clasificación exclusiva, en la que no se mencionaría por ejemplo que un triángulo equilátero es al mismo tiempo isósceles, ya que tiene dos lados iguales.

Por otro lado, con la *Act2* se pretende que los alumnos utilicen segmentos para unir el texto con los gráficos.

Durante dicha explicación (con el uso de *Act1*), utilizaríamos la herramienta de girar y mover para que los alumnos no se queden únicamente con un ejemplo de cada tipo de triángulo.

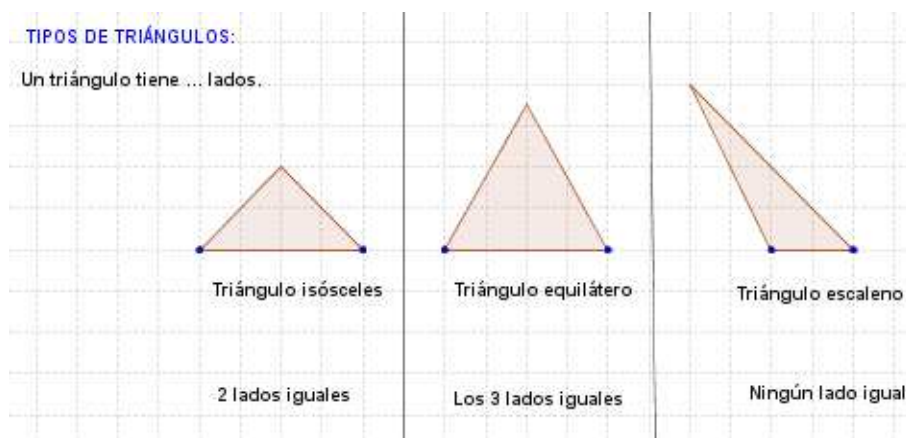


Figura 3: Act1

En la actividad *Act2* es un objetivo esencial la eliminación o reducción de estereotipos modificando la posición de los triángulos. Además, los alumnos utilizan segmentos para unir el texto con los gráficos.

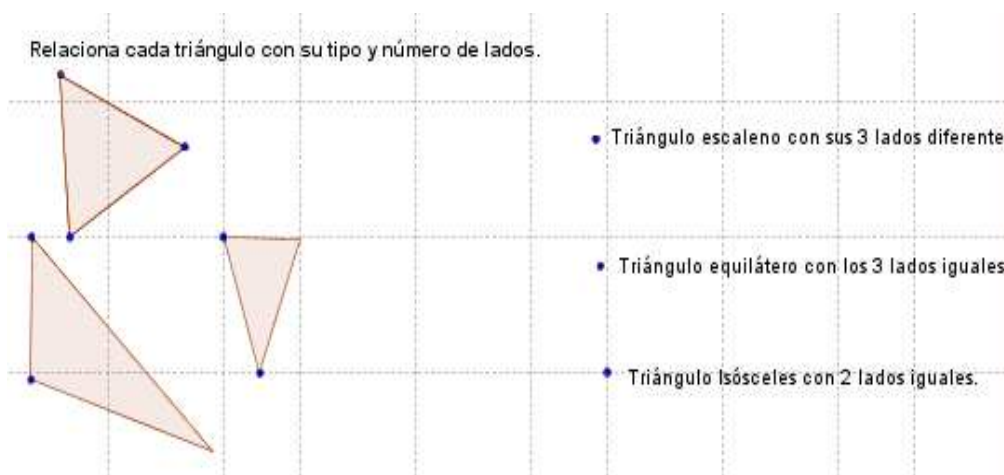


Figura 4: Act2

Por tanto, y en lugar de las dos anteriores actividades, les proponemos crear un polígono de tres lados, y que lo cambien de posición moviendo y girando dicha figura. Se utilizará tanto como enseñanza como aprendizaje. Aparece en la Figura 5. (*Act1-2bis*).

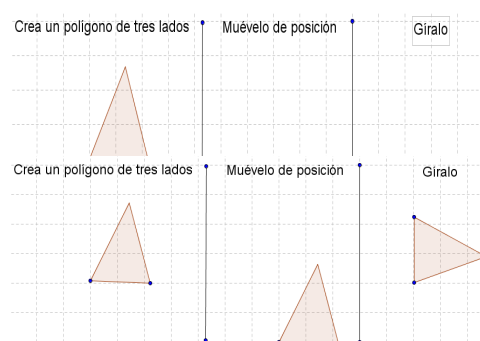


Figura 5: Act1-2bis

En el caso de la anterior y las dos siguientes actividades sí que las utilizamos en nuestra investigación, así como el resto que mostraremos a continuación.

La *Act3* la usaremos para explicar tres tipos de cuadriláteros (enseñanza): cuadrado, rectángulo y rombo. Mediante la herramienta de girar, utilizaremos más ejemplos y en distintas posiciones para evitar estereotipos.

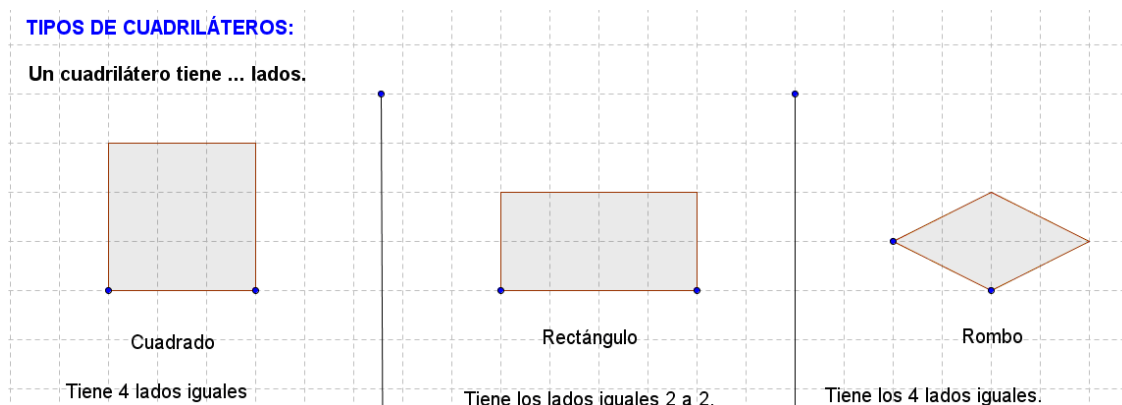


Figura 6: Act3

La *Act4*, la usaremos para que la realicen los propios alumnos uniendo mediante segmentos los textos con los gráficos (aprendizaje). También, colocamos las figuras geométricas planas en distintas posiciones. Los alumnos deben reconocer dichas figuras y unir las con el nombre correspondiente, y haciendo uso de un segmento.

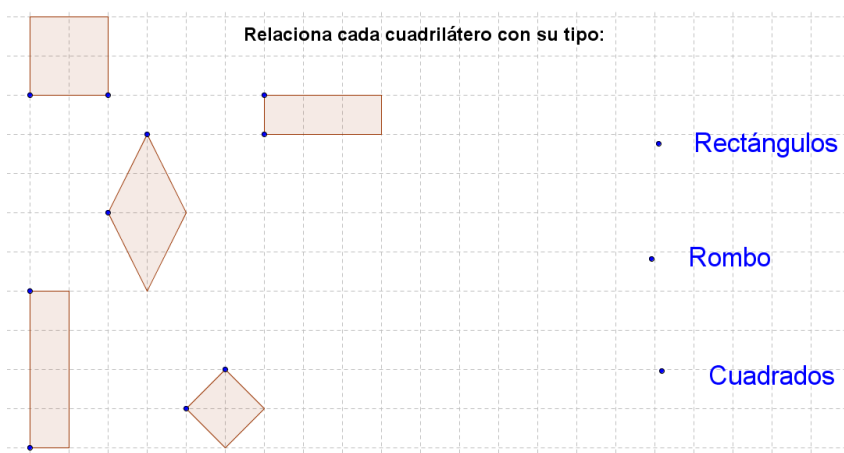


Figura 7: Act4

Las actividades siguientes (*Act5* y *Act6*), tienen como principal objetivo reconocer las figuras geométricas planas que hay en la ventana gráfica, y relacionarlas mentalmente con el modelo que aparece en el margen superior-derecho. Además en el caso de la *Act5*, mover y girar cada figura para hacerlas encajar unas con otras formando el modelo anteriormente mencionado. Y en el caso de la *Act6*, únicamente mover y encajar las figuras, ya que éstas aparecen ya giradas adecuadamente.

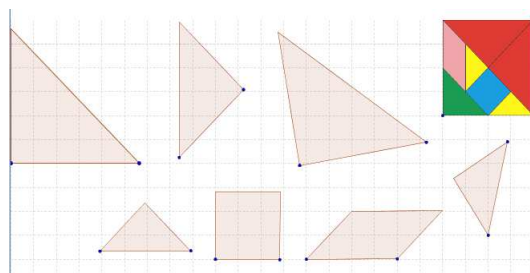


Figura 8: Act5

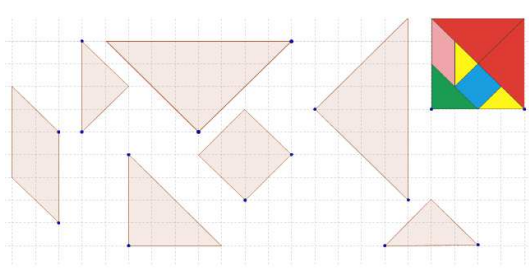


Figura 9: Act6

Antes de ponerse con la tarea, se aconseja a los alumnos comenzar por las piezas de mayor tamaño, y también mirar los colores de cada figura.

Decidimos proponer a la mitad de parejas la *Act5*, y a la otra mitad la *Act6*, para comprobar también qué les causaba mayores dificultades, si mover las figuras para encajarlas según el modelo y reconocer dichas figuras, o girarlas antes de moverlas y llevar a cabo el mismo proceso. Algunos ejemplos de estas actividades realizadas por los propios alumnos aparecen en el **Anexo1**.

Como hemos observado durante la experimentación, el uso de programas de software geométrico dinámico potencia en los alumnos la autonomía y en muchos casos estos sienten interés por probar herramientas, buscar y representar gráficamente dibujos creativos utilizando polígonos, puntos, segmentos y circunferencias; por lo tanto, aprovechamos su afán por aprender y experimentar y les propusimos la siguiente actividad (*Act7*) que aparece en la *Figura 10*.

Consiste en un dibujo creado a partir de figuras geométricas planas básicas como son: cuadrados, triángulos y rectángulos.

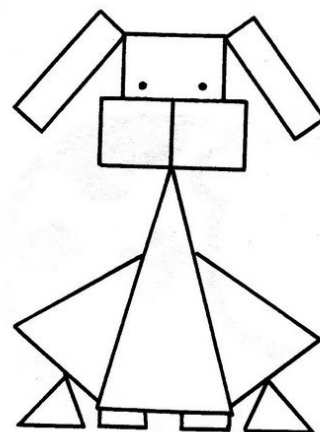


Figura 10: Act7

Les colocamos dicho dibujo proyectado a gran tamaño en la pared. Y lo que los alumnos debían hacer era utilizar herramientas de *GeoGebra* para hacer sus propias representaciones lo más idénticas posibles al modelo y por parejas. Volvimos a incidir en el uso de la herramienta “*Polígono rígido*” para que la crearan dichos alumnos. Tras crear el modelo similar al dado, se pide a los alumnos que nombren oralmente las figuras geométricas que aparecen en la *Figura 10*. En el **Anexo2** aparecen ejemplos realizados por los alumnos.

Tras la creación de este dibujo, varias parejas de alumnos que terminaron antes de tiempo, se les propuso realizar un dibujo libre utilizando las figuras geométricas y las herramientas de dicho programa informático. Lo que llamaremos *Act8*. En el **Anexo3** aparecen ejemplos de representaciones gráficas libres de los alumnos, utilizando estas formas geométricas básicas.

El dibujo anterior (semejante a una representación geométrica de un “perro”), también fue utilizado como actividad realizada mediante papel y lápiz. Pero en lugar de crearlo, los alumnos debían colorear los polígonos de dicho dibujo, de tal forma que los triángulos aparecieran de un color, los cuadrados de otro, y los rectángulos de otro. En este caso la llamaremos *Act9*. En el **Anexo4** aparecen algunos ejemplos realizados por nuestros alumnos.

El objetivo de estas actividades es primero crear un dibujo mediante formas geométricas y *GeoGebra*; y posteriormente mediante papel y lápiz, identificar en el dibujo las formas geométricas básicas que venimos mencionando.

Las últimas actividades utilizadas para nuestra investigación son las siguientes, que llamaremos *Act10*:

1. *Dibuja, utilizando la regla y el lápiz, un triángulo de cada tipo: equilátero, isósceles y escaleno.*
2. *Dibuja un cuadrado, un rectángulo y un rombo.*

Ambas tareas se proponen a los alumnos, para resolverse mediante la metodología tradicional de papel, lápiz y regla o mano alzada (en función de si disponen de regla o no). Simplemente se les pide que dibujen formas geométricas básicas, como son las que hemos mencionado anteriormente: triángulos, cuadrados, rectángulos y además rombos. Por último, en el caso de la primera actividad, la tutora nos propuso eliminar los tipos de triángulos, por lo que al final se les pidió únicamente dibujar varios triángulos distintos y/o en distintas posiciones. En el **Anexo5** aparecen ejemplos realizados por nuestros alumnos.

Por último, la actividad del “Tamgram” (*Act5* o *Act6*) la proponemos para realizar pero en este caso en papel. Es decir, se les entrega a los alumnos un folio con el tamgram completado con formas geométricas distinguidas por distintos colores, y estos deben recortar todas figuras, y una vez están recortadas todas, deben montar dicho tamgram. Cuando lo tienen montado deben pegar todas piezas en una cartulina de forma

2ª sesión	Tradicional	Alumno	Ficha individual con actividades, lápiz, goma y/o regla.	Recordatorio y resumen en la pizarra de las figuras geométricas vistas con GeoGebra.	<i>Act9,</i> <i>Act10 y</i> <i>Act11</i>
		Profesor	Una pizarra y un proyector	Realización, por los alumnos, de la Ficha de actividades y mediante el material propuesto.	

2.3.1. Descripción de las sesiones

Descripción de la sesión 1: Sesión con *GeoGebra*.

Primera parte de la Sesión, contacto con los conceptos geométricos y herramientas del programa informático específico:

- Comenzamos recordando la definición de polígono y diferenciando los polígonos (ejemplificando los básicos) de las figuras que no son polígonos como el círculo.
 - Polígono, lo definimos como una línea poligonal cerrada junto con su interior, y lo comparamos con el círculo ya que este es una línea curva cerrada.
- Después, explicamos cómo funcionan determinadas herramientas del programa *GeoGebra*. Herramientas como los puntos, segmentos, circunferencias y el botón para deshacer.
 - Un punto describe una posición en el espacio, pero no es un objeto físico.
 - Un segmento, es un tramo de recta delimitado por dos puntos.
 - Y, una recta, es una sucesión continua e infinita de puntos alineados, sin principio ni fin.
- Posteriormente a la explicación, proponemos a los alumnos que las prueben brevemente.
- Recordatorio y explicación de las figuras geométricas planas básicas:
 - Para explicar los triángulos, se utiliza la *Act1-2bis*.

Triángulo, es un polígono de tres lados, y al igual que todos los polígonos sus lados son segmentos, y el punto donde se cruzan dos segmentos (dos lados) se llama vértice.

Clasificación de los triángulos en función de la longitud de los lados y su semejanza o no (Clasificación exclusiva, y sin tener en cuenta los ángulos):

- o Triángulo equilátero: polígono de tres lados de igual longitud.

- Triángulo isósceles: polígono de dos lados de igual longitud y un tercero distinto.
- Triángulo escaleno: polígono de tres lados de distinta longitud cada uno.
- Para explicar los cuadriláteros, y además diferenciar entre los tipos de cuadriláteros: cuadrado, rectángulo y rombo, se utilizan las actividades: *Act3* y *Act4*. La primera para explicar mediante el proyector y participación de los alumnos; y la segunda más bien para realizar por los alumnos, y al mismo tiempo que reconocen los tipos de cuadriláteros, también utilizan segmentos para unir el texto con los gráficos.

Cuadrilátero, es un polígono de cuatro lados, y al igual que todos los polígonos sus lados son segmentos, y el punto donde se cruzan dos segmentos (dos lados) se llama vértice.

Clasificación de los cuadriláteros en primer curso de Primaria (No se tienen en cuenta los ángulos ni las diagonales):

- Cuadrado: todos sus lados son iguales.
- Rectángulo: sus lados son iguales dos a dos.
- Rombo: todos sus lados son iguales. En este curso de Primaria, se explica como un “cuadrado chafado”, ya que no podemos hablar de ángulos a este nivel de los alumnos.
- Cuadrilátero irregular: se define como tal a todo cuadrilátero que tiene todos sus lados de distinta longitud.

Segunda parte de la Sesión, realización de actividades con *GeoGebra* por los alumnos:

5. Realización, por parte de los alumnos, de las actividades propuestas mediante *GeoGebra*:
 - *Act5* o *Act6*, la mitad de las parejas una y la otra mitad la otra actividad.
 - *Act7*, en ella deben utilizar figuras geométricas para crear un dibujo a partir de un modelo dado.
 - *Act8*, construcción de un dibujo mediante formas geométricas y de forma libre para fomentar la creatividad. (En el caso de las parejas que terminan antes que el resto y antes de que termine la sesión).

Descripción de la sesión 2: Sesión con lápiz y papel.

1. Comenzamos con un recordatorio de las figuras geométricas ya expuestas las sesiones anteriores, mediante la pizarra y ejemplificación de los triángulos y cuadriláteros. (En cuanto a los conceptos geométricos consiste en un simple recordatorio de la sesión 1, pero como hemos dicho, utilizando la pizarra).
2. Posteriormente, proponemos a los alumnos una ficha con varias actividades para la experimentación y comparación con el método *GeoGebra* de la sesión anterior. Dichas actividades son las siguientes:
 - La *Act10*, consiste en representar figuras geométricas mediante lápiz y a mano alzada o con regla. (Ya que algunos alumnos presentan ciertas dificultades usando la regla).
 - Y, la *Act9*, consiste en identificar las figuras geométricas básicas y clasificarlas según sean triángulos o los tres tipos de cuadriláteros ya visualizados anteriormente, y colorearlos según sea.
3. Finalmente, la *Act11*. Colocamos un modelo de tamgram completado y proyectado en la pizarra. Entregamos una ficha con el tamgram, los alumnos deberán recortar cada una de las figuras geométricas; después montar el tamgram (moviendo y girando las piezas recortadas), y finalmente pegarlas correctamente en una cartulina.

Por otro lado, hemos llevado a cabo una metodología consensuada con la tutora del centro escolar que consiste en primero institucionalizar los conceptos geométricos fundamentales, es decir, llevar a cabo el proceso de enseñanza de los mismos; y posteriormente, atender al trabajo de los propios alumnos, es decir, el proceso de aprendizaje.

A modo de comentario y de futura posible puesta en práctica, planteamos la hipótesis de invertir el proceso, proponiendo a los alumnos la idea de trabajar solos resolviendo las actividades, y después llevar a cabo la institucionalización de los conceptos geométricos.

2.3.2. Evaluación y algunas conclusiones sobre las actividades propuestas

En la siguiente tabla, desglosamos el criterio de evaluación elegido del currículo de la comunidad aragonesa, y relacionamos estos criterios con las actividades propuestas en la experimentación.

Criterio de evaluación del currículo	Criterios de evaluación desglosados	Actividades de la experimentación
6. Reconocer en el entorno inmediato formas y cuerpos geométricos (triángulos, cuadrados, rectángulos, círculos, cubos, prismas, cilindros, esferas).	6.1. Identificar formas geométricas básicas: círculos, triángulos y cuadriláteros, en varios entornos.	<i>Act1-2bis, Act4, Act5 o Act6, Act9, Act11</i>
	6.2. Diferenciar los tipos de cuadriláteros: cuadrado, rectángulo y rombo.	<i>Act4, Act9</i>
	6.3. Crear representaciones gráficas mediante formas geométricas planas.	<i>Act12, Act7, Act8, Act10</i>
	6.4. Manejar <i>GeoGebra</i> y sus herramientas básicas.	<i>Act1-2bis, Act4, Act5 o Act6, Act7, Act8</i>

Se pretende observar y evaluar qué actividades son más adecuadas en este curso o nivel, y por tanto comparar al mismo tiempo qué método es el más adecuado si *GeoGebra* o el método tradicional. Analizando sus ventajas e inconvenientes.

Una vez realizadas las actividades por los alumnos, evaluamos el éxito de dichas actividades o por contrario las principales dificultades que han podido tener los alumnos. Para cada dificultad proponemos posibles soluciones o mejoras como las siguientes:

- ❖ En el caso de las *Act5* y *Act6*, proponíamos en una la necesidad de mover las figuras geométricas para encajarlas formando el tamgram final de un modelo observable por los alumnos; en este caso todas las parejas de alumnos consiguieron construir dicho tamgram (como se aprecia en el **Anexo1**).

En la otra, además de mover dichas figuras debían girarlas; y en este caso ninguna pareja consiguió realizarlo correctamente, apareciendo en la mayoría de los casos las figuras superpuestas.

Por ello, en la secuencia didáctica propondremos una modificación, con figuras que necesitan únicamente moverse, y otras que precisan además de la herramienta de girar. Además, asignaremos a las figuras los colores idénticos de las figuras del modelo (ya que estas actividades no tenían establecidos colores, y podía dificultar a los alumnos la identificación de dichas figuras y su posición con respecto las demás y el modelo).

- ❖ En el caso de la *Act1-2bis*, se estima que puede ser de escasa dificultad, por lo tanto, pensamos que puede ser interesante llevar a cabo las actividades: *Act1* y *Act2*.
- ❖ Para la *Act10*, varios alumnos no tenían posibilidad de realizarla con regla por lo que la llevaron a cabo a “Mano alzada” (otro método de dibujo). Por lo que, ya de cara a la secuencia didáctica completa, se nos ocurrió desglosar esta actividad en dos partes: en la primera los alumnos deberían utilizar la regla (con previa explicación y demostración de su correcta utilización); en la segunda, deberían utilizar la técnica de dibujo de *Mano alzada*.

Además, esta actividad se llevó a cabo en un folio, pero podría evitar dificultades el proponer una hoja cuadriculada similar a la ventana gráfica cuadriculada que habíamos utilizado previamente con *GeoGebra* en la sesión anterior.

- ❖ Finalmente, en el caso de la *Act11*, los alumnos en general no tuvieron dificultades, por lo que podríamos aumentar el nivel de la actividad, dándoles las figuras del tamgram sin colores, e incluso ya recortadas, ya que varios alumnos lo que hacían es ir recortando cada figura y pegándola al mismo tiempo, sin recortar primero todas y montar el tamgram completo antes de pegarlas, que era lo que realmente se pedía en la actividad.

CAPITULO 3

3.1. Secuencia Didáctica completa

En este Capítulo del TFG proponemos definitivamente las actividades propias de la secuencia didáctica completa que ya hemos mencionado anteriormente. Además, añadimos un comentario de cada una.

Destacamos que las actividades anteriormente llevadas a cabo en la experimentación también formarán parte de dicha secuencia didáctica. En la esta secuencia se incluye tanto actividades nuevas como modificaciones o mejoras de las llevadas a cabo en la experimentación. En su caso, explicamos las mejoras en función de la previa experimentación con los alumnos del centro escolar *Doctor Azúa*.

Las actividades por orden que forman dicha secuencia didáctica son las siguientes:

- ❖ **Actividad 1a:** corresponde a la *Act1* mencionada en el capítulo anterior, en el que utilizamos la herramienta “Polígono rígido” para crear tres triángulos (polígonos de tres lados) que puedan ser girados y moverse de posición. Cada triángulo de distinto tipo según sean sus lados iguales o no, en cuanto a distancia.

Estos tres triángulos serán creados por el profesor para llevar a cabo la explicación e introducción de los polígonos de tres lados, y los tres tipos en cuanto a distancia de sus lados.

Para que los alumnos aprecien mejor si los lados son iguales o no, utilizaremos la herramienta de *GeoGebra* “distancia o longitud”, con ella pulsando en cada uno de los lados aparece un número en centímetros (unidad de medida de distancia del SI); observando los números, comparándolos entre sí y relacionándolos con cada uno de los lados.

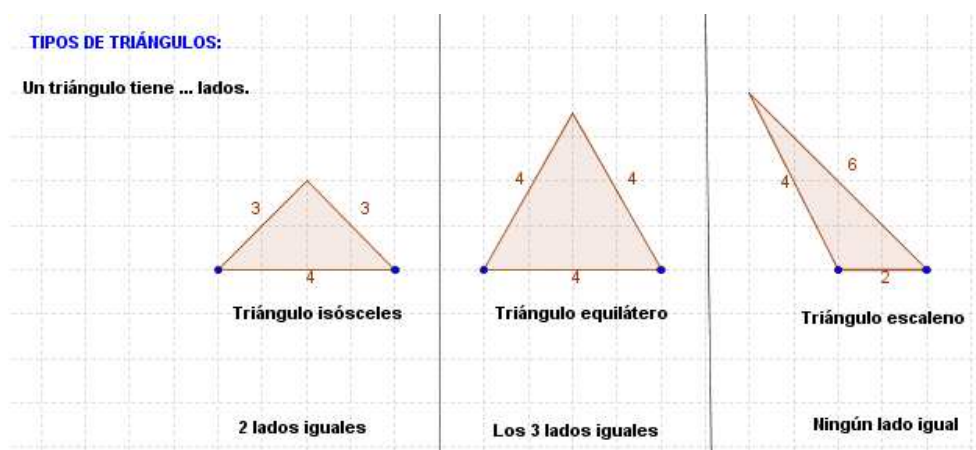


Figura 11: Actividad 1a

- ❖ **Actividad 1b:** es una pequeña mejora de la *Act2*. Igual que en la anterior actividad, se han añadido las distancias de cada lado de los polígonos que aparecen en la ventana gráfica de *GeoGebra*. Para evitar estereotipos, los triángulos aparecen en diferentes posiciones. Y también, se ha fijado el texto, para evitar ser modificado.

Esta actividad será realizada por el alumno, y deberá unir y relacionar las afirmaciones con los gráficos que corresponda. Para ello utilizarán la herramienta “Segmento”, de tal forma que se introduce otro concepto geométrico como es el de segmento (tramo de recta delimitado por dos puntos).

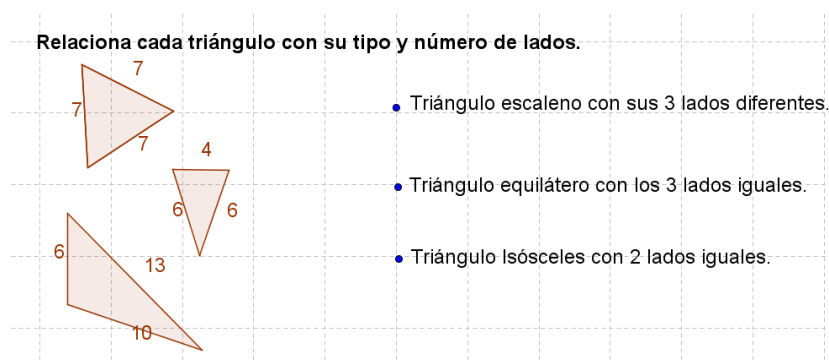


Figura 12: Actividad 1b

- ❖ **Actividad 1c:** está basada en la *Act1-2bis*. Los alumnos deberán crear un polígono de tres lados que mantenga las propiedades al ser movido y/o girado, mediante la herramienta “Polígono rígido”. Como hemos dicho, después el alumno deberá cambiarlo de posición y además añadimos que con la herramienta “Distancia”, deberá medir cada uno de sus lados, manifestando que tipo de triángulo han creado y por qué. Dicha explicación puede ir detallada en la propia ventana gráfica, utilizando la herramienta “Texto”.

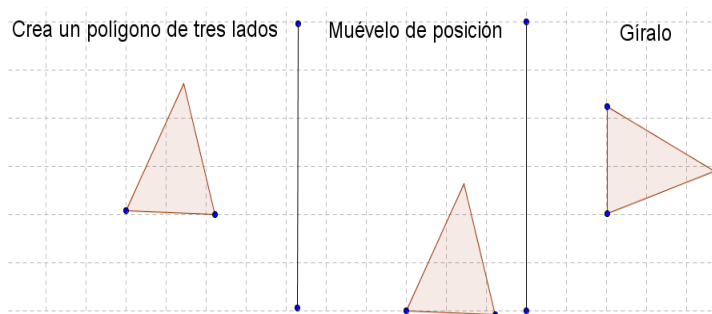


Figura 13: Actividad 1c

- ❖ **Actividad 1d:** consiste en la creación por los alumnos de varios triángulos de distintos tipos (estableciendo el tipo), utilizando papel y lápiz, y de dos maneras: la primera, a mano alzada; y la segunda, utilizando la regla (De esta forma también se abordan dos técnicas de dibujo distintas, apreciando las ventajas e inconvenientes de

cada una). El fondo del papel aparecerá cuadriculado para ayudar a los alumnos teniendo alguna referencia para trazar segmentos.

Posteriormente, deberán medir con la regla cada uno de los lados de cada triángulo.

Finalmente, se les puede proponer que sumen los centímetros de todos lados, introduciendo a modo de ampliación el concepto de perímetro.

- ❖ **Actividad 2a:** de la misma forma que con los triángulos, es el caso de los cuadriláteros; utilizaremos la *Act3* de la experimentación a modo de explicación de la principal característica de estos (que todos tienen cuatro lados), y tres tipos de cuadriláteros, como son: cuadrado, rectángulo y rombo. También, podríamos añadir la idea de cuadrilátero irregular mostrando varios ejemplos.

En el caso del texto, permanecerá fijado, al contrario que las figuras geométricas, que serán cambiadas de posición moviendo o girándolas; de esta forma también evitaremos estereotipos, objetivo perseguido entre otros durante toda la secuencia didáctica.

En el caso del rombo, en lugar de incidir en la idea de dos ángulos agudos y otros dos obtusos y la existencia de las diagonales, lo explicaríamos para alumnos de este nivel como un cuadrado “chafado”, ya que pensamos que es demasiado pronto para abordar estos temas.

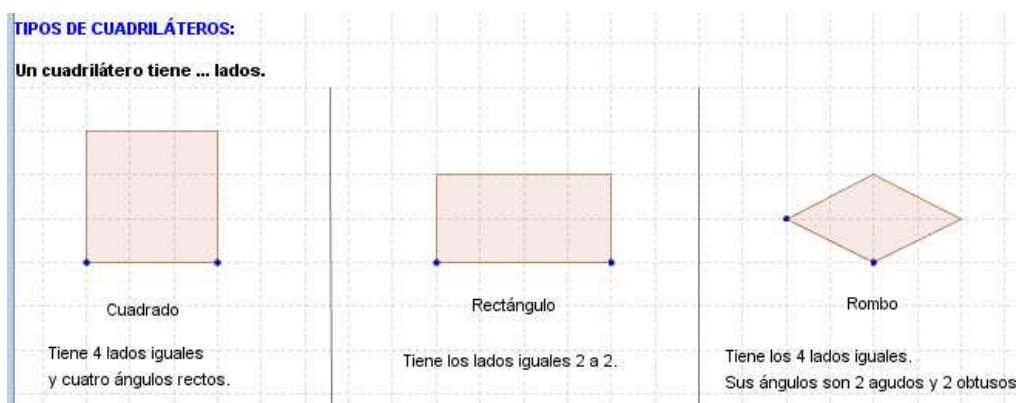


Figura 14: Actividad 2a

- ❖ **Actividad 2b:** Esta actividad está basada en la *Act4*. Se ha añadido una mejora, únicamente, hemos mantenido fijado el texto que aparece en la ventana gráfica, pero no en el caso de las figuras geométricas. También, podríamos añadir más figuras y en distintas posiciones cada una.

Las figuras están creadas mediante la herramienta “Polígono rígido”, dándole a los alumnos la posibilidad de mover y/o girar las figuras de tal forma que posibilite

su identificación adecuada. Por ejemplo, el caso del cuadrado girado, será interesante ver el número de alumnos que piensan que es un cuadrado (correcto), y los que piensan que es un rombo (error).

Para resolver dicha tarea, los alumnos, primero deberán mover o girar algunas figuras para identificarlas con el tipo adecuado de cuadrilátero; y después, utilizando la herramienta “Segmento” deberá unir y relacionar cada figura con la el tipo adecuado. De esta forma vuelven a utilizar la herramienta “segmento”, al igual que en la *Actividad 1b*.

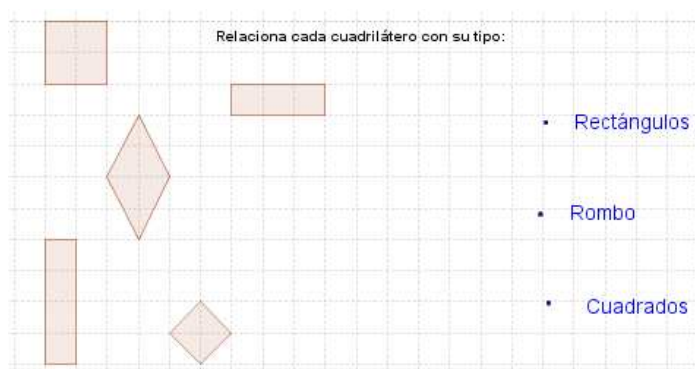


Figura 15: Actividad 2b

- ❖ **Actividad 2c:** Los alumnos deberán crear varios polígonos de cuatro lados (cuadriláteros) que mantengan las propiedades al ser movidos y/o girados, mediante la herramienta “Polígono rígido”. Después, el alumno deberá cambiarlos de posición y además añadimos que con la herramienta “Distancia”, deberá medir cada uno de sus lados, pudiendo realizar después relaciones de semejanza o diferencia (Se utilizarán únicamente cifras sin decimales).

En la ventana gráfica, utilizando la herramienta “Texto”, se añadirán unas preguntas orientativas como: ¿Cuántos lados iguales tiene el cuadrado (que miden lo mismo)? ¿Y el rectángulo? ¿Y el cuadrilátero irregular?

Dichas preguntas aparecerán fijadas en la pantalla, con hueco para que el alumno conteste utilizando la misma herramienta (“Texto”).

Una vez respondidas las preguntas, se les propondrá crear cuadrados, rectángulos y cuadriláteros irregulares de distintas dimensiones.

El objetivo que se persigue es que vayan adquiriendo algunas propiedades de estos cuadriláteros en concreto, como: el cuadrado tiene cuatro lados iguales, el rectángulo iguales dos a dos, y un cuadrilátero irregular tiene todos sus lados desiguales.

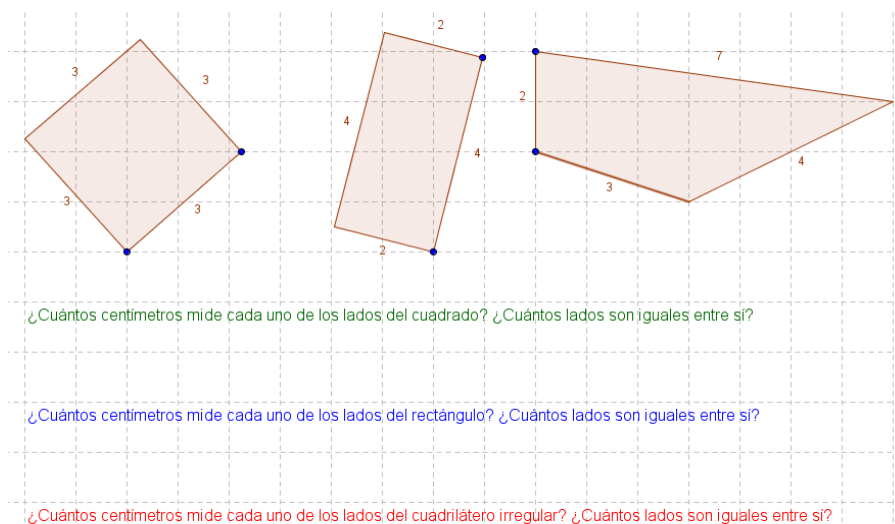


Figura 16: Actividad 2c

- ❖ **Actividad 2d:** consiste en la creación por los alumnos de varios cuadriláteros de distintos tipos (estableciendo el tipo), utilizando papel y lápiz, y de dos maneras: la primera, a mano alzada; y la segunda, utilizando la regla. De nuevo igual que en la *Actividad 1d*, el fondo del papel aparecerá cuadriculado para ayudar a los alumnos teniendo alguna referencia para trazar segmentos.

Posteriormente, deberán medir con la regla cada uno de los lados de cada figura.

Finalmente, se les puede proponer a los alumnos que sumen los centímetros de todos lados, a modo de ampliación del concepto de perímetro.

- ❖ **Actividad 3:** consiste en una actividad meramente de identificación y nombramiento. Cabe destacar que la posición de las figuras geométricas de este puzzle tiene sentido matemático, ya que en sí mismo tiene una forma abstracta, pero lo que se busca es evitar los estereotipos y la identificación por los alumnos.

Los polígonos se han creado a partir de la herramienta “Polígono rígido” y en el caso de los cuadrados y triángulos equiláteros mediante la herramienta “Polígono regular” con 3 y 4 vértices respectivamente. Finalmente, se les ha asignado la propiedad de “objetos fijos”, ya que se pretende que los alumnos identifiquen qué polígonos son sin posibilidad de moverlos.

Hay que destacar que al comienzo de la actividad el profesor les dará la indicación de empezar contando los lados, y comenzar primero identificando los de menor número de lados, para finalmente terminar diciendo el tipo y subtipo de polígono que es cada uno.

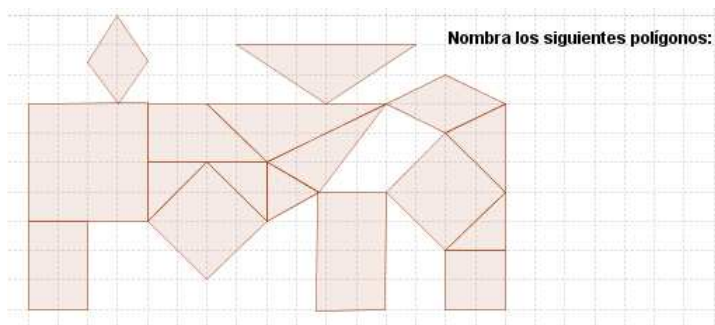


Figura 17: Actividad 3

Para escribir en el interior de cada polígono el tipo del que se trata y seguidamente el subtipo, los alumnos deberán utilizar la herramienta de *GeoGebra* “Texto”. A continuación aparece la solución correcta de la actividad 3.

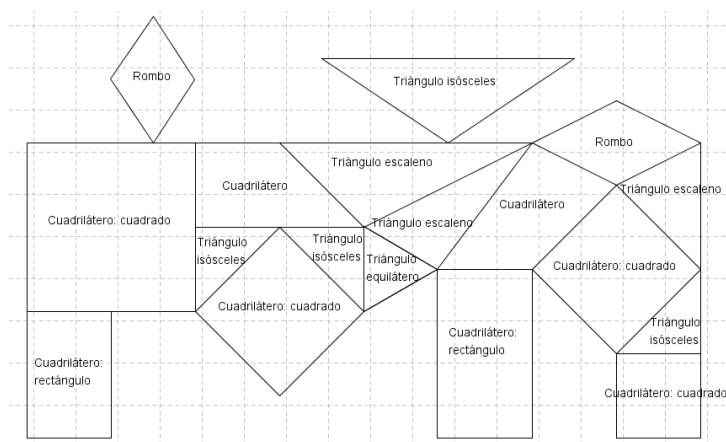


Figura 18: Solución A3

- ❖ **Actividad 4a:** con esta actividad se busca que los alumnos comprueben que existen otros tipos de polígonos a parte de los ya vistos en las tareas anteriores, y que tienen distintas apariencias, como: la igualdad de todos sus lados, la desigualdad de los mismos, la variación del número de lados, etc.

En la ventana gráfica aparece un ejemplo a modo de lo que los alumnos deben hacer en esta actividad. Además, el texto que aparece fijo consiste en los enunciados de dicha actividad.

Aparecen ocho polígonos de distintos tipos, entre ellos un triángulo y dos cuadriláteros ya conocidos por ellos gracias a las actividades previas. El resto son polígonos regulares e irregulares, con distinto número de lados. Estos polígonos pueden ser cambiados de posición sin modificar sus propiedades, ya que han sido creados mediante la herramienta “Polígono rígido”, y una vez creados se han ocultado los puntos que aparecen en los vértices.

Se pretende que los alumnos señales estos vértices mediante la herramienta “Punto”. Además, utilizando la herramienta “Texto”, deberán escribir en el interior de cada polígono el número de lados que tiene. Finalmente, con la herramienta “Distancia”, deberán medir los lados de cada figura, estableciendo después relaciones de semejanza o no, por ejemplo, si tienen los lados iguales o si los tienen diferentes.

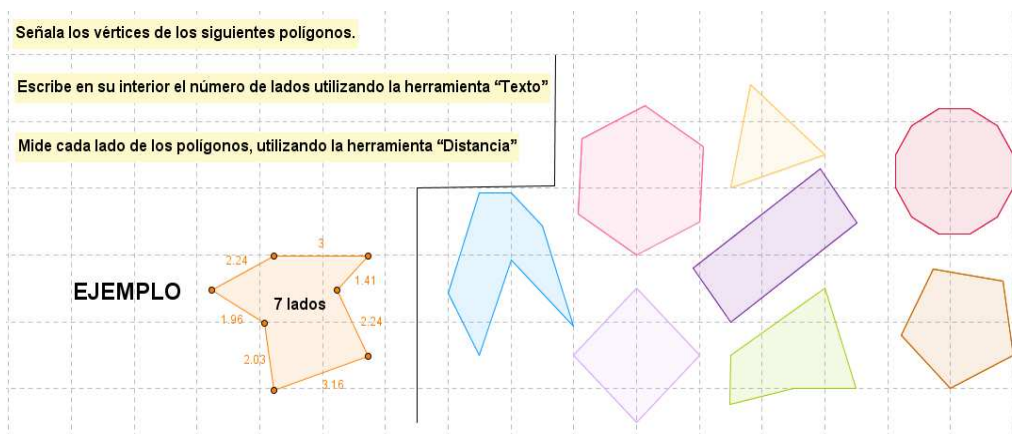


Figura 19: Actividad 4a

- ❖ **Actividad 4b:** la misma actividad que la 4a se puede llevar a cabo con papel y lápiz. Igualmente los alumnos marcarán los vértices delimitando los lados. Después, contarán el número de lados y lo escribirán en el interior de cada polígono. Y finalmente, utilizando la regla medirán los centímetros que tiene cada lado.
- ❖ **Actividad 5:** consiste en una actividad lúdica de uno contra uno o dos contra dos en función del tablero. Dicho tablero ha sido creado a partir mediante puntos (exteriores y de intersección entre segmentos) y segmentos. Consiste en cuadrados superpuestos formando a su vez un cuadrado mayor y completo o casi completo en función del jugador al que se le quiera dar cierta ventaja para que el juego tenga fin.

Cada jugador deberá crear su ficha mediante la herramienta “Punto” y con su color correspondiente distinto al otro jugador. Colocará su ficha según aparece en las imágenes que aparecen a continuación, y en función del tablero que se utilice. La ficha únicamente podrá moverse por los vértices de los cuadraditos, y en cada turno solamente de un vértice a otro.

El objetivo del juego consiste en caer en la misma posición (en el mismo vértice) que el jugador contrario y después que este; para ello, los alumnos deberán desarrollar su capacidad de deducción, para arrinconar en el tablero al jugador contrario, y que este no le arrincone a él. En cada movimiento, el jugador debe

señalar el vértice (punto) donde se encuentra, y nombrar de qué figura geométrica forma parte, señalando con un color dicha figura, y con otro color los movimientos que puede hacer en el siguiente turno.

El tablero ha sido creado por el propio profesor manteniendo fijos los puntos de los vértices y segmentos que forman los cuadraditos, para que al colocar la ficha en cada vértice no se mueva el tablero.

En la creación del tablero se ha buscado alguna variación para hacer que la partida tenga fin o se potencie la deducción por parte los alumnos, como por ejemplo en la imagen 5.2 se utilizan dos fichas por jugador, pero en cada turno solo se puede mover una, y hasta uno de los vértices más cercanos. La mejor idea sería intentar arrinconar en una esquina del tablero al jugador contrario con las dos fichas a la vez, moviendo primero una y en el turno siguiente la otra.

En la imagen 5.1 se ha eliminado una esquina de tal forma que se le da ventaja a la ficha roja, ya que nunca puede ser arrinconada en esa esquina al contrario que la azul que comienza ya arrinconada. El jugador de la ficha roja debería arrinconar al de la ficha azul en cualquiera de las otras tres esquinas dejando al contrario sin posibilidad de maniobra.

Finalmente, en la imagen 5.3 se han eliminado ambas esquinas igualando las posibilidades de los jugadores, siendo las únicas posibilidades arrinconar al jugador contrario en las esquinas laterales para conseguir ganar.

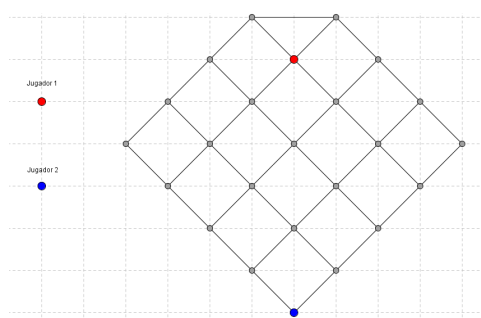


Imagen 5.1

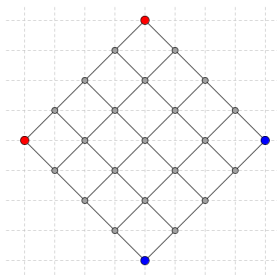


Imagen 5.2

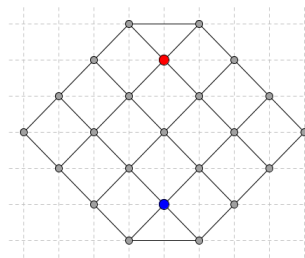


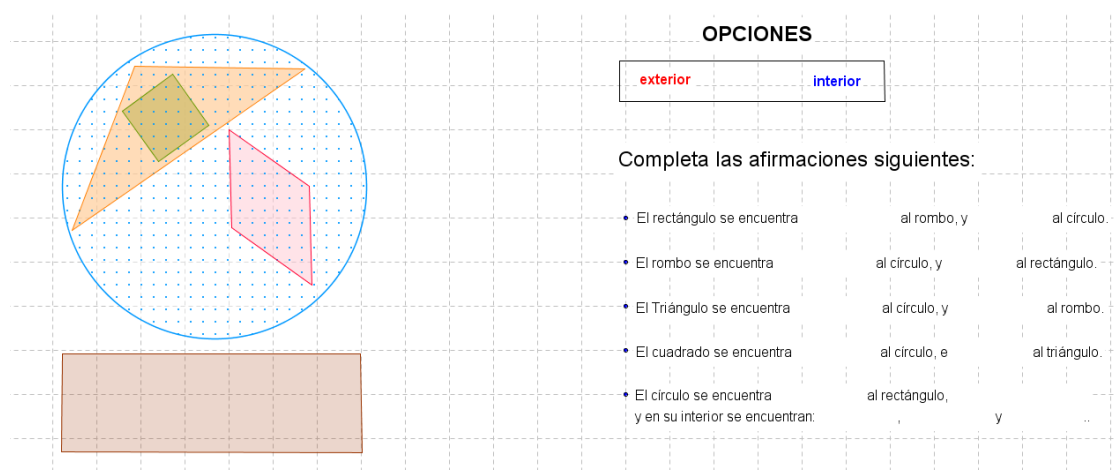
Imagen 5.3

El objetivo principal de esta actividad es la deducción por parte de los alumnos, que deberán ir desarrollando para cada movimiento de su ficha y de la del contrario, para atacar al contrario, y al mismo tiempo defenderse y no caer en una casilla que el jugador contrario pueda caer en el siguiente turno. Deberá crear hipótesis mentales al mismo tiempo que realiza una actividad principalmente lúdica.

Nota: Sería buena idea que todos alumnos probaran los tres tableros, y que cambiaran de posición inicial con el oponente.

❖ **Actividad 6a:** consiste en identificar las figuras geométricas y determinar su posición con respecto a otras.

Las figuras aparecen fijadas en la ventana gráfica para evitar su modificación. El alumno se limitará a completar los huecos que aparecen en el texto. Únicamente deberán decir si unas figuras son interiores o exteriores respecto a otras.



OPCIONES

exterior interior

Completa las afirmaciones siguientes:

- El rectángulo se encuentra al rombo, y al círculo.
- El rombo se encuentra al círculo, y al rectángulo.
- El Triángulo se encuentra al círculo, y al rombo.
- El cuadrado se encuentra al círculo, e al triángulo.
- El círculo se encuentra al rectángulo, y en su interior se encuentran: y ..

Figura 21: Actividad 6a

❖ **Actividad 6b:** esta actividad consiste en eliminar la fijación de las figuras en la ventana gráfica por el propio profesor, cambiar de posición las figuras geométricas (moviendo y girando las figuras), e ir preguntando a los alumnos su posición actual.

❖ **Actividad 7a:** esta actividad consiste en una imagen creada a partir de figuras geométricas. Durante la experimentación se utilizó dicha imagen como modelo proyectado en la propia pared (*Act7*), donde todos alumnos podían observarla y al mismo tiempo debían hacer sus propias representaciones utilizando *GeoGebra*. Muchos alumnos tuvieron algunas dificultades, no sabían por donde comenzar, y muchas formas geométricas las creaban bastante irregulares.

Por tanto a modo de mejora, planteamos dicho modelo de imagen en la ventana gráfica de cada alumno, y les dejamos que construya cada uno su propia copia.

Cuando terminan le preguntamos a cada uno como la ha creado, por donde a comenzado y su método de construcción.

Una vez terminan, les proponemos otro método de construcción. Utilizando la herramienta “Polígono rígido”, y la imagen fijada de fondo, se pueden crear los polígonos encima de la imagen, creando así una copia lo más real posible. Posteriormente, se deberá mover cada figura a un lado, e ir construyendo la imagen completa.

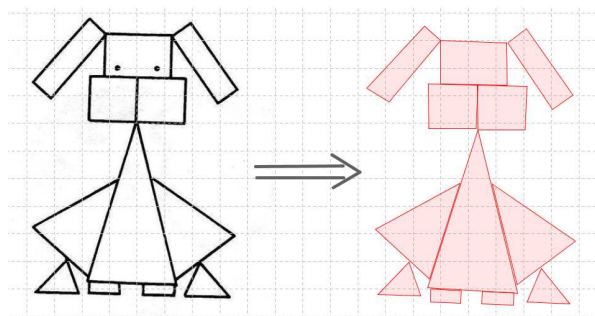


Figura 22: Actividad 7a

- ❖ **Actividad 7b:** consiste en crear de nuevo el modelo anterior, pero mediante papel y lápiz. Utilizaremos un folio con el modelo y les daremos un folio en blanco. Los alumnos deberán colocar el folio en blanco sobre el modelo y fijado con un clip. Colocándose cada uno por turnos en la ventana, deberán calcar el modelo en su folio en blanco.

Posteriormente, uniremos esta nueva actividad con la *Act9* de la experimentación realizada, de tal forma que una vez hayan creado su propio modelo semejante, tendrán que colorear cada figura de un color correspondiente, siendo triángulos de un color, cuadrados de otro, y rectángulos de otro.

- ❖ **Actividad 8a:** consiste en crear, el propio alumno, su propio modelo de imagen (*Act8* de la experimentación), y a modo de mejora de dicha actividad, posteriormente explicar cómo lo ha construido y qué figuras geométricas y herramientas del programa *GeoGebra* ha utilizado para ello.
- ❖ **Actividad 8b:** al igual que la anterior, podemos proponer la misma actividad, pero en este caso utilizar el método tradicional de papel y lápiz, además de la regla para crear los propios modelos.
- ❖ **Actividad 9a** consiste en identificar figuras geométricas planas en imágenes o fotos de distintos contextos determinados, inventados o incluso reales y cotidianos.

Colocaremos la foto o imagen de fondo fijada en la ventana gráfica de *GeoGebra*, y los alumnos deberán identificar los objetos y demás cosas que aparecen en la imagen, como figuras geométricas, señalando el tipo y utilizando la herramienta “Polígono rígido”. A cada tipo de polígono se le establecerá un color determinado (triángulos un color, cuadrados otro, etc.). Se trata de una actividad similar a la *Actividad 7*.

Las imágenes o fotos podrán ser reales (como una simple foto del interior de su casa una calle, o una ciudad observada desde avión o satélite), o creadas como las siguientes:

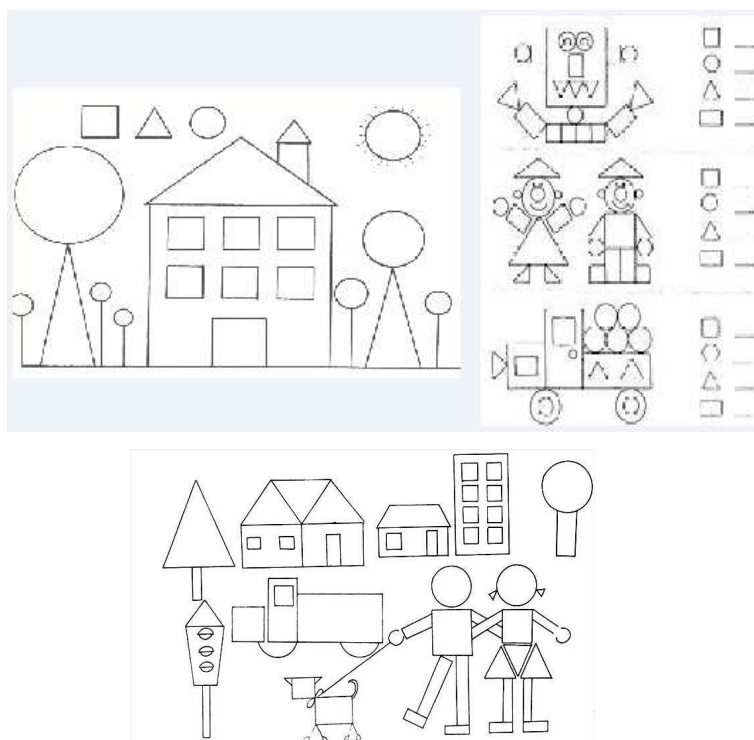


Figura 23: Actividad 9a

- ❖ **Actividad 9b:** se entregará a los alumnos una cartulina y folios. Los alumnos deberán crear, con regla o mano alzada, figuras geométricas distintas en esos folios. Posteriormente, las recortarán con tijeras, y las pegarán en dicha cartulina, pero de tal forma que tengan cierto sentido, es decir, que formen un dibujo del estilo de las imágenes anteriores. Antes de pegar dichas figuras, el profesor comprobará que todas estén correctamente.
- ❖ **Actividad 10:** consiste en una mejora tras la realización de las actividades *Act5* y *Act6* durante la experimentación con los alumnos y haciendo uso del programa *GeoGebra*. En una de ellas las figuras aparecían completamente cambiadas de posición y el alumno debía moverlas y girarlas, para posteriormente encajarlas y

completar el “Tamgram”. En la otra, las figuras del Tamgram aparecían desordenadas igualmente, pero únicamente era necesario moverlas para encajarlas, sin tener que girarlas, lo que facilitaba mucho la tarea, tal que incluso el nivel disminuía demasiado.

Para establecer un nivel intermedio entre una y otra actividad, se propone además de las dos anteriores (*Act5* y *Act6*) lo que llamaríamos *Actividad 10c*, que consistiría en proponer las figuras del tamgram todas ellas cambiadas de posición, pero la mitad de ellas giradas (con necesidad de que el alumno las gire y mueva para poder encajarlas en el tamgram), y la otra mitad sin girar (para que el alumno simplemente las mueva y encaje en el tamgram sin girarlas).

Como hemos dicho, esta actividad la llamaremos *Actividad 10c*, y en el caso de las anteriores (*Act5* y *Act6*) las llamaremos *Actividad 10a* y *Actividad 10b*.

Además, en el caso de estas dos actividades llevadas a cabo durante la experimentación, en ninguna de ellas aparecían las figuras del mismo color que en el modelo que se mostraba en un margen de la ventana gráfica.

Por ello, añadimos tres nuevas actividades surgidas como modificación de cada una de las tres explicadas anteriormente. Es decir, proponemos las mismas tres actividades (*Actividad 10a*, *Actividad 10b* y *Actividad 10c*), pero en este caso con la variante de las figuras en este caso con colores (con los mismos colores que cada una de las figuras del modelo de Tamgram).

De esta forma, las últimas actividades (surgidas de la modificación cada una de la anterior) serían: *Actividad 10d*, *Actividad 10e* y *Actividad 10f*.

Las imágenes de cada apartado de esta actividad aparecen en el **Anexo7**.

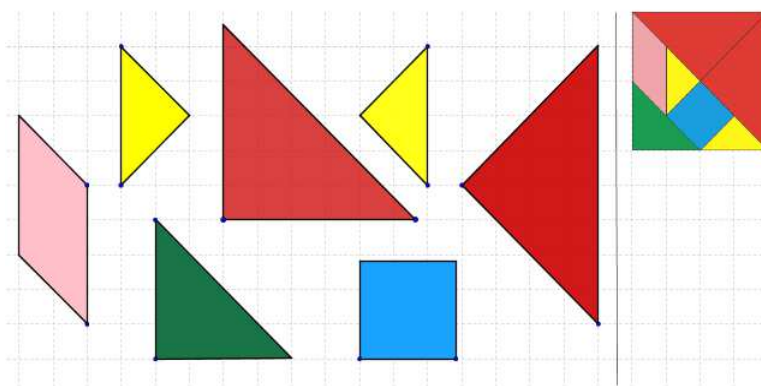


Figura 24: Actividad 10f

(La última actividad propuesta de las seis modificadas)
(Con color, la mitad de figuras giradas y la otra mitad no)

- ❖ **Actividad 11a:** esta actividad está basada en la actividad *Act11*, llevada a cabo durante la experimentación con los alumnos. Consiste en realizar de nuevo el tamgram, pero en este caso en papel.

Se entrega a los alumnos un tamgram completado, y ellos lo que deben hacer es distinguir las formas geométricas con ayuda de los distintos colores de cada figura correspondiente a la del modelo (el modelo del tamgram se proyecta en la pared para que lo puedan ver todos los alumnos); después, deben recortar todas figuras, y una vez están recortadas todas, deben montar dicho tamgram.

Cuando los alumnos lo tienen montado en su mesa, deben pegar todas piezas en una cartulina de forma adecuada.

También, una pequeña modificación sería darle a los alumnos las piezas ya recortadas, para que no vayan recortando y pegando al mismo tiempo cada una de las piezas.

- ❖ **Actividad 11b:** esta última actividad de la secuencia didáctica consiste en el mismo procedimiento que la anterior, pero en este caso eliminar el color de cada figura, de esta forma evitamos que los alumnos únicamente asocien el color de la figura a la del modelo, y deban identificar cada figura por su tipo y posición adecuada en un contexto, como es en este caso un tamgram.

3.2. Tabla-resumen sobre las actividades de la Secuencia Didáctica

A continuación exponemos una tabla sobre los objetivos y contenidos matemáticos, metodología abordada en cada una de las actividades de la secuencia ampliada y apartados de estas, así como las herramientas utilizadas en cada apartado.

ACT.	Objetivos y contenidos Matemáticos	Metodología	Apartado	Herramientas
Actividad 1	O1. Crear e identificar polígonos de tres lados (Triángulos). O2. Comparar y relacionar los tipos de triángulos según la medida de sus lados. C1. Longitud como magnitud y “cm” como unidad de medida. C2. Segmento (Tramo de recta delimitado por dos puntos).	<i>GeoGebra</i>	1a	- Identificar “Polígono rígido”. - “Distancia” (Magnitud). - Enseñanza.
			1b	- Crear “Segmento” (Relacionar). - Texto fijado. - Enseñanza-Aprendizaje.
			1c	- Crear “polígono rígido”. - “Texto”. - “Distancia”. - Mover-girar. - Aprendizaje.
		<i>Papel - Lápiz</i>	1d	- Mano alzada vs. Regla. - Papel cuadriculado. - Medir distancias en “cm”.
Actividad 2	O1. Crear e identificar polígonos de cuatro lados (Cuadriláteros). O2. Comparar los tipos de cuadriláteros.	<i>GeoGebra</i>	2a	- Identificar “Polígono rígido”. - Nombrar características - Mover-girar.

			2b	<ul style="list-style-type: none"> - Crear “Segmento” (Relacionar). - Texto fijado. - Enseñanza-Aprendizaje.
		<i>Papel - Lápiz</i>	2c	<ul style="list-style-type: none"> - Crear “polígono rígido”. - “Texto”. - “Distancia”. - Mover-girar. - Aprendizaje.
			2d	<ul style="list-style-type: none"> - Mano alzada vs. Regla. - Papel cuadriculado. - Medir distancias en “cm”.
Actividad 3	<p>O1. Identificar y nombrar polígonos.</p> <p>O2. Evitar estereotipos.</p> <p>C1. Posición de las figuras geométricas con sentido matemático.</p>	<i>GeoGebra</i>	-	<ul style="list-style-type: none"> - Visualización. - “Texto”.
Actividad 4	<p>O1. Reconocer polígonos conocidos (De tres y cuatro lados).</p> <p>O2. Identificar polígonos con más números de lados que cuatro.</p> <p>O3. Comparar polígonos regulares e irregulares.</p> <p>O4. Identificar sus lados, desigualdad de los mismos, y variación.</p>	<i>GeoGebra</i>	4a	<ul style="list-style-type: none"> - Polígono rígido. - Texto. - Distancia. - Punto (Señalar los vértices).
		<i>Papel - Lápiz</i>	4b	<ul style="list-style-type: none"> - Regla. - Lápiz. - Papel cuadriculado.

Actividad 5	<p>O1. Reconocer los vértices de varios polígonos superpuestos que forman el tablero de juego.</p> <p>O2. Identificar los segmentos que determinan el movimiento de la ficha del jugador.</p> <p>O3. Deducción a partir del movimiento del contrario.</p>	GeoGebra	-	<ul style="list-style-type: none"> - Tablero. - Puntos fijos. - Puntos no fijos (fichas) - Segmentos. - Mover puntos.
Actividad 6	<p>O1. Identificar figuras geométricas y determinar su posición con respecto a otras.</p> <p>O2. Determinar si una figura es interior o exterior a otra.</p> <p>C1. Polígono: Línea poligonal cerrada junto con su interior</p>	GeoGebra	6a	<ul style="list-style-type: none"> - Figuras y Texto fijados en la ventana gráfica. - Texto (Para completar huecos).
			6b	<ul style="list-style-type: none"> - Texto fijado. - Figuras no fijadas (Cambiar de posición y volver a preguntar al alumno la posición de la figura.)
Actividad 7	<p>O1. Crear una imagen formada por figuras geométricas, a partir de un modelo establecido. (Se puede crear figuras sobre modelo).</p> <p>O2. Identificar las figuras geométricas y colorearlas según sea.</p>	GeoGebra	7a	<ul style="list-style-type: none"> - Imagen con figuras geométricas. - Modelo creado previamente con herramienta “Polígono rígido”. - Mover y encajar.
		Papel - Lápiz	7b	<ul style="list-style-type: none"> - Imagen con figuras geométricas. - Modelo creado con regla y lápiz. - Calcar y trazar en un folio en blanco - Colores según tipos de figuras.
Actividad 8	O1. Crear imágenes mediante figuras geométricas.	GeoGebra y Papel - Lápiz	8a	<ul style="list-style-type: none"> - Libre uso de herramientas por el alumno.
			8b	<ul style="list-style-type: none"> - Regla. - Lápiz. - Papel

Actividad 9	O1. Identificar figuras geométricas planas en fotos, imágenes u otros contextos inventados, reales o cotidianos.	GeoGebra	9a	<ul style="list-style-type: none"> - Imágenes, fotos,... - “Polígono rígido”.
	O2. Crear imágenes con sentido matemático y real.	Papel-lápiz	9b	<ul style="list-style-type: none"> - Cartulina. - Folios. - Regla o mano alzada. - Tijeras. - Pegamento. - Lápiz y Colores.
Actividad 10	O1. Identificar figuras geométricas planas. O2. Cambiarlas de posición (Mover y/o girar).	GeoGebra	-	<ul style="list-style-type: none"> - Polígono rígido. - Mover-girar. - Cambiar de color.
Actividad 11	O1. Identificar figuras geométricas planas. O2. Cambiarlas de posición (Mover-girar).	Papel-lápiz	11a	<ul style="list-style-type: none"> - Folio con el modelo de “tamgram” (En color cada figura del tamgram). - Cartulina. - Tijeras. - Pegamento.
			11b	<ul style="list-style-type: none"> - Folio con el modelo de “tamgram” (Sin color cada figura del tamgram). - Cartulina. - Tijeras. - Pegamento.

En el caso de la Actividad 1, aparecen apartados relacionados con las clases de triángulos según sus lados tanto para identificar como para crear, y se añade el concepto de longitud o distancia, ya que los alumnos deben medir los lados de los polígonos, utilizando herramienta “Distancia” o la regla según se pida.

Un mismo procedimiento se lleva a cabo en la Actividad 2, pero en este caso con cuadriláteros y su clasificación. Destacando la definición de rombo como “cuadrado chafado por un vértice” (*Figura 25*), ya que los alumnos todavía no conocen el término ángulo. (Si “chafamos” un cuadrado por uno de sus lados no creamos un rombo, sino que podríamos crear un rectángulo (*Figura 26*)).

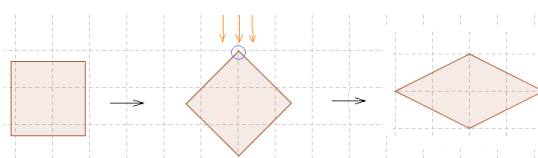


Figura 25

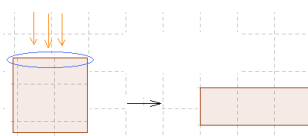


Figura 26

La actividad 3 es una tarea de identificación de figuras geométricas por el alumno. Aparecen triángulos y cuadriláteros de distintas clases.

Para potenciar la visualización de los alumnos, se propone la Actividad 4. Debemos difundir entre el alumnado la idea de que existen más polígonos además de los ya vistos. Con las actividades de la experimentación, los alumnos podían no tener completamente claro que existen otras clases de polígonos, con distinto número de lados e irregularidad de sus lados.

La Actividad 5 es una tarea de deducción además de muy lúdica, y que utiliza de forma constructiva la continua competitividad que existe entre alumnos de esta edad. Al mismo tiempo los alumnos deben utilizar la Geometría para identificar las formas del tablero, los vértices y los segmentos que forman los lados de los polígonos, todo ello para determinar su posición, la del adversario y los movimientos posibles que permite su posición en dicho tablero.

La actividad 6, además de potenciar en los alumnos la identificación de las figuras, es totalmente distinta a lo visto hasta ahora, ya que se pretende que los alumnos no sólo se fijen en los lados de cada polígono, sino que identifiquen su interior también como parte de dicho polígono. Se trata de una actividad surgida de la definición que se da de polígono a los alumnos (Línea poligonal cerrada junto con su interior).

Las Actividades 7, 8 y 9, están de nuevo basadas en la identificación y creación de figuras geométricas, pero en este caso en un contexto determinado.

En el caso de la Actividad 10, se trata de distintos apartados relacionados todos con el Tamgram. Consiste en proponer a los alumnos la misma actividad pero organizada de distinto modo, en función del color o no de las figuras según el modelo establecido, y en función también de la posición girada o no de dichas figuras. Además, combinar distintas posibilidades, para comprobar cual puede asimilarse mejor al nivel de estos alumnos. Es una actividad de especial interés sobre las otras para llevarla a cabo en práctica.

Finalmente, la Actividad 11 está relacionada con la anterior, pero para llevarla a cabo en papel.

3.3. Metodología y distribución temporal de la Secuencia Didáctica

Tras la puesta en práctica de la experimentación proponemos un cambio en la metodología de algunas actividades, manteniéndola en otras. Esto es, proponer al alumno que primero trabaje, y posteriormente institucionalizar los conceptos matemáticos. De esta forma los alumnos podrían obtener conclusiones propias y después verificar si son ciertas, en lugar de verificar la veracidad o no de la explicación del profesor.

Destacamos las actividades 1, 2, 3 y 4 como apropiadas para llevar a cabo dicha metodología de dejar un tiempo a los alumnos que observen cada actividad e intenten resolverla, para posteriormente exponer los conceptos el propio profesor. El resto de actividades son principalmente para asentar los conceptos ya expuestos en las primeras y que los alumnos adquieran cierta autonomía, por lo que mantenemos la misma metodología de la experimentación.

En cuanto a la distribución temporal, cabe mencionar que seguiríamos el orden determinado por el número de la actividad, intercambiando actividades (según los apartados de estas) en las que se precise de GeoGebra o por el contrario de papel y lápiz.

Proponemos cinco sesiones de una hora cada una (Pudiendo variar unos minutos la extensión de las mismas):

1. Durante la primera sesión llevaríamos a cabo únicamente la Actividad 1, con todos sus apartados. Hace referencia a los triángulos y sus tipos según sus lados.
2. Actividad 2, con todos sus apartados. Referente a los cuadriláteros y sus tipos más conocidos: cuadrado, rectángulo, rombo, y cuadrilátero irregular.
3. Actividades 3, 4 y 5. Hace referencia a puntos, segmentos, triángulos y cuadriláteros, además de polígonos de más lados.
4. Actividades 6, 7, 8 y 9. Hace referencia a la posición de figuras geométricas respecto de otras, la creación de dibujos mediante estas (con o sin modelo predeterminado) y su identificación en otros dibujos ya creados.
5. Finalmente, Actividades 10 y 11. Mediante la utilización del Tamgram, y haciendo referencia a la posición de las figuras, y el color (con necesidad de un modelo).

CAPÍTULO 4

En este último capítulo del TFG exponemos diferentes conclusiones organizadas en epígrafes correspondientes a cada uno de los capítulos 1, 2 y 3, desarrollados en este trabajo.

El Capítulo 1 corresponde a la aproximación literaria sobre Geometría plana y el trabajo de distintos autores con software geométrico dinámico (SGD) en la Educación y principalmente en la Educación Primaria.

El Capítulo 2, corresponde al desarrollo de la experimentación con alumnos del centro escolar *Doctor Azúa*, situado en Zaragoza.

Y finalmente, el Capítulo 3, corresponde a la secuencia didáctica ampliada, con actividades nuevas y mejoradas según la experimentación.

4.1. Conclusiones referentes al Capítulo 1

Teniendo en cuenta autores mencionados en el *Capítulo 1*, los profesores debemos modernizar la enseñanza de la Geometría, de tal forma que se favorezca a los alumnos a desarrollar unas habilidades que puedan aplicarse en otros contextos reales, y para ello puede ser necesaria la utilización de las nuevas tecnologías, como se refleja también en el currículo de Aragón, el cual incorpora entre sus contenidos la utilización de programas informáticos, y destaca como principal objetivo para conseguir por los alumnos de 1º de Primaria, la identificación y reconocimiento de figuras geométricas en diferentes contextos.

La Tabla de las habilidades básicas en Geometría elaborada por Hoffer (1990) nos ha servido de ayuda a la hora de identificar las habilidades que pueden tener los alumnos de este curso de Primaria. Debemos tener en cuenta que estos alumnos poseen una habilidad visual considerable, y para potenciarla y desarrollar otras habilidades como la verbal, tenemos que crear actividades adecuadas para nuestra experimentación.

Para modernizar la enseñanza-aprendizaje de la Geometría, como hemos dicho puede ser beneficioso el uso de programas informáticos. Por ello, nos hemos basado en parte en el proyecto *GeoGebraPrim* realizado en 2007 en Luxemburgo para elaborar nuestra propia experimentación, que también consiste en comparar varios métodos a los que se hace referencia a lo largo de todo el TFG, como son: metodología de papel y lápiz frente al uso del software para abordar la Geometría. En este proyecto no se obtuvieron muchas conclusiones, pero es de los pocos proyectos con alumnos de Primaria en los que se utilizan programas informáticos (en nuestro caso *GeoGebra*). Por

ello, nosotros pretendíamos realizar un proyecto similar y con su puesta en práctica obtener mejores conclusiones.

Somos conscientes de que la mayoría de proyectos relacionados con el uso de programas informáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje están realizados con alumnos de secundaria. Buena parte de la bibliografía corresponde con este nivel y nosotros hemos intentado adaptarlo a Educación Primaria.

De gran ayuda han sido los niveles de *van Hiele* para saber qué posibilidades pueden tener los alumnos del primer ciclo de Primaria, destacando la percepción global de las figuras geométricas y atendiendo casi únicamente a las propiedades visuales frente a las matemáticas. En nuestra experimentación, también hemos tenido en cuenta las cinco fases de *van Hiele* para organizar las sesiones de nuestra experimentación y posteriormente para la creación de la secuencia didáctica completa.

En nuestro trabajo hacemos hincapié en la imagen del concepto como componente del aprendizaje de los conceptos geométricos y en la visualización de los alumnos, ya que la información visual (mediante imágenes) se debe aprender también mediante distintas actividades con diversas figuras, dibujos, imágenes y ejemplos para que el alumno los asocie con el concepto geométrico y vaya asimilándolos mediante su experiencia y aplicándolos a contextos reales.

Para finalizar, las representaciones estereotipadas de las figuras geométricas se dan en muchos libros de texto, y la enseñanza tradicional no promueve suficientemente su superación. En nuestro trabajo tenemos especial interés por evitar estereotipos mediante actividades que contienen muchos y variados ejemplos de figuras geométricas en distintas posiciones (Uno de los *objetivos específicos* en nuestra experimentación es evitar estereotipos – *Ver página 4 del TFG*).

4.2. Conclusiones referentes al Capítulo 2

Este epígrafe contiene los puntos fuertes y débiles observados durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la experimentación llevada a cabo. Hacemos referencia a todo lo que ha podido favorecer este proceso, así como lo que ha podido causar más dificultades.

En cuanto al proceso de organización y preparación de la experimentación se mencionan varias dificultades. A la hora de preparar la sesión con *GeoGebra*, es necesaria la utilización de bastante tiempo para instalar dicho programa informático en todos los ordenadores, y además la instalación de la aplicación *Java*, imprescindible

para que *GeoGebra* funcione. Mientras en el caso de la sesión en el aula ordinaria mediante el método papel-lápiz, no requiere este proceso. Por ello, en cuanto a preparación tecnológica de las sesiones, podemos decir que utilizar SGD requiere más tiempo que llevar a cabo una metodología tradicional de papel-lápiz, lo que hace que por consiguiente no se use tan a menudo este método informático para la enseñanza-aprendizaje de la Geometría plana, además de otros motivos mencionados en el capítulo 1.

Otro punto a tener en cuenta es que ambos métodos de enseñanza precisan de unos conocimientos matemáticos o habilidades previas tanto del profesor como del alumno, antes de desarrollar las actividades con *GeoGebra* o con regla, lápiz y papel.

En el caso del profesor, debe conocer el funcionamiento de las herramientas que ofrece *GeoGebra*, con la posibilidad de crear su propia barra de herramientas en función del nivel del alumnado (mostrando u ocultándolas). Con los alumnos de 1^{er} curso, hemos utilizado básicamente el punto, segmento, circunferencia, texto, y sobre todo polígono rígido; la herramienta “polígono rígido” ofrece muchas posibilidades para crear polígonos de toda clase, cambiarlos de posición desplazándolos y girándolos sin que cambien sus propiedades, y de esta forma evitar estereotipos (que aparecen tanto en los libros de texto).

Por otro lado, en el caso del método papel-lápiz, el profesor debe explicar cómo se utiliza la regla, y su doble uso para crear líneas rectas y para medir segmentos. Al contrario que los SGD, el método papel-lápiz no ofrece tantas posibilidades a este nivel. Puede ser que el desconocimiento del uso de la regla frene el aprendizaje del alumno.

De cara al aprendizaje de los alumnos y en cuanto a las actividades planteadas en la experimentación con *GeoGebra*, para las actividades de creación de polígonos, dicho programa ha dado mejores resultados que el papel. Con dicho programa las figuras geométricas son creadas por los alumnos con sus lados más regulares que con regla o mano alzada; además, podemos comprobar con mayor exactitud si se ha comprendido o no las propiedades de la figura creada por el alumno si esta no aparece de forma irregular debido a motivos extramatemáticos como puede ser unas habilidades motrices finas poco desarrolladas en los primeros cursos de Primaria.

Durante la experimentación hemos intentado que los alumnos utilizaran todas las herramientas planteadas, y en el caso de *GeoGebra*, como observábamos que los alumnos tenían tanto interés y algunos mostraban cierto grado de autonomía probando su funcionamiento, decidimos proponerles alguna actividad (como la *Act8*) en la que

debían utilizar las herramientas de forma libre, y alguno de ellos hizo distintas figuras con el fin de crear algo real o cotidiano que había percibido según su experiencia, como es el caso de algunos que dibujaron caras, dándole forma a cada elemento de la cara, y animales o paisajes.

Por otro lado, los alumnos han tenido grandes dificultades para crear los lados de los polígonos con la regla, ya que era la primera vez que la usaban y además algunos no tenían la motricidad fina desarrollada lo suficiente como para utilizar la regla y otros instrumentos adecuadamente, por lo que creaban figuras con sus lados muy irregulares. Pensamos que también se debe a que el fondo del folio era blanco, y si hubiera sido cuadriculado habría orientado mejor a los alumnos por donde debían trazar las líneas; lo que hemos propuesto en la secuencia ampliada como mejora de las actividades realizadas con lápiz, papel y regla o mano alzada.

Tras realizar la experimentación observamos que ambos métodos (*Papel-lápiz* y *GeoGebra*) se deben combinar, y usar de forma complementaria al libro de texto propio del curso del alumnado. El libro de texto por sí solo no satisface el aprendizaje de los alumnos, ya que aparecen pocos ejemplos, muchos estereotipos, y además ni propone actividades que se resuelvan mediante sistemas informáticos, ni se mencionan técnicas como la mano alzada o manejo de la regla en los apartados de *Geometría* visualizados en él.

También, podemos decir que utilizar *GeoGebra* enriquece la visualización del alumnado, ya que es posible ofrecerles un gran abanico de ejemplos de cada tipo de figuras geométricas en un breve periodo de tiempo, dándoles la posibilidad de mover o girar sus propias figuras creadas, trabajando de un modo interactivo. Además, potencia su autonomía de aprendizaje, despertando una gran motivación e interés por saber para qué sirve cada herramienta del programa, y en ocasiones investigar por ellos mismos.

Finalmente, en cuanto a los criterios de evaluación propuestos, pueden ser los adecuados ya que se tienen en cuenta la creación de figuras geométricas, así como su identificación, diferenciación, y por último manejo de las herramientas básicas de *GeoGebra*, todo ello basándonos en el currículo aragonés y en lo que queremos conseguir más concretamente como es comparar varias metodologías ya mencionadas.

4.3. Conclusiones referentes al Capítulo 3

En este último epígrafe de conclusiones explicamos cómo la secuencia didáctica ampliada responde a las conclusiones de la experimentación llevada a cabo anteriormente.

Para obtener conclusiones más precisas sería interesante proponer esta secuencia en la práctica con alumnos, para ver cómo responden, qué habilidades emplean para cada actividad planteada, si los resultados que obtenemos son los esperados, y además para llevar a cabo una evaluación no sólo de los alumnos sino de la secuencia ampliada, para comprobar sus puntos fuertes, y lo que se debería mejorar o adaptar al nivel del alumnado.

En la experimentación, utilizamos una metodología en la que introducimos primero los conceptos geométricos y explicamos la función de cada herramienta en el caso de la sesión con *GeoGebra*, y después proponemos unas actividades para que el alumnado trabaje de modo orientado permitiéndoles cierta autonomía en determinados momentos (Por ejemplo en el caso de la *Actividad 8*, en la que los alumnos deben crear sus propios modelos, o *9b* en la que deben crear una imagen con cierto sentido real). Por otro lado, en la secuencia ampliada introducimos la posibilidad de cambiar la metodología llevada a cabo durante la experimentación, es decir, primero dejar al alumno trabajar las actividades, y posteriormente institucionalizar los conceptos geométricos.

La experimentación se divide en dos sesiones, una para utilizar *GeoGebra*, y la otra para usar papel y lápiz. Por contrario, en la secuencia ampliada, las actividades aparecen ordenadas y con apartados según la relación que guardan unas con otras. En la mayoría de los casos, en cada actividad aparecen apartados para utilizar *GeoGebra*, y otros para resolver mediante papel, lápiz y regla o mano alzada. A diferencia de la experimentación, se plantean actividades para utilizar regla y otras a mano alzada.

Tras haber realizado ya una tabla sobre los contenidos matemáticos y metodología abordada en cada una de las actividades y apartados de estas, propuestas en la secuencia ampliada (Ver *Capítulo 3*), nos limitamos ahora a hacer un breve recorrido por estas actividades destacando los motivos de su inclusión en dicha Secuencia.

Decidimos llevar una progresión de dificultad comenzando proponiendo los polígonos de menor número de lados para posteriormente ir añadiendo los de mayor número. Por ello comenzamos con los triángulos (*Actividad 1*), que son los polígonos de menor número de lados, para posteriormente seguir con los cuadriláteros más conocidos

(*Actividad 2*). Después, proponemos a los alumnos la identificación y nombramiento de tanto triángulos como cuadriláteros en un mismo contexto (*Actividad 3*). Y finalmente, mostramos a los alumnos otros polígonos con mayor número de lados que los visto anteriormente, incluyendo los ya vistos; además de incluir polígonos regulares e irregulares (*Actividad 4*).

En la Secuencia incluimos actividades de creación de imágenes en base a un modelo mostrado (*Actividad 7*), o sin modelo (*Actividad 8*) fomentando la autonomía del alumno. También, actividades de identificación de figuras geométricas en un contexto determinado, ya sea un dibujo o fotografía de cualquier elemento cotidiano con el que el alumno interactúe a diario. Los alumnos deben mostrar soltura a la hora de crear e identificar figuras geométricas en imágenes o situaciones reales, en un contexto determinado.

Por otro lado, hemos estudiado las posibilidades que puede dar un “Tamgram”, ya que variando la posición de las figuras geométricas (mediante traslaciones y/o giros) se puede facilitar o dificultar la composición (aumentar o disminuir el nivel de la actividad). También podemos variar la exigencia de la tarea, cambiando el color de las figuras de acuerdo o no con el modelo ofrecido. Todo ello ha sido observado a partir de la experimentación y se propone comprobarlo en la puesta en práctica de la secuencia ampliada. Aunque pensamos que colorear las figuras podría producir una asignación de los colores de estas con las del modelo, más que una propia identificación de las figuras por los alumnos, que es lo que se busca con la actividad. Es decir, el coloreado podría hacer que se perdiera su contenido matemático de identificación de figuras y fuera una actividad solamente plástica.

Después de realizar la actividad relacionada con el Tamgram por los alumnos durante la experimentación, diseñamos la *Actividad 10* de la Secuencia Didáctica atendiendo a dos variables: los movimientos geométricos necesarios de las figuras, y su color. Con ello hemos creado la siguiente tabla que relaciona ambas variables, y determina cada apartado de la *Actividad 10*.

<div> <div>Movimientos geométricos</div> <div>Color</div> </div>	Giros y Traslaciones		Traslaciones
	<i>Todas Figuras Giradas</i>	<i>Algunas figuras Giradas</i>	
<i>Sin ayuda de color</i>	10a	10c	10b
<i>Con ayuda de color</i>	10d	10f	10e

Todas actividades guardan relación entre sí, y a diferencia de la experimentación donde primero utilizábamos *GeoGebra* en una sesión y papel y lápiz en la segunda, en el caso de llevar la secuencia didáctica ampliada a la práctica, seguiríamos un orden basado en los conocimientos matemáticos y no en las herramientas, en el cual mezclaríamos ambos métodos para compararlos y además para comentar la motivación e interés de los propios alumnos, clave para el correcto desarrollo de la nueva experimentación con esta secuencia.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alsina, C. (2008). Geometría y realidad. *Sigma: revista de matemáticas= matematika aldizkaria*, (33), 165-179.
- Bagazgoitia, A. (2003). Geometría con Cabri. *Revista Sigma* 22.
- Kreis, Y., y Dording, C. (2009). GeoGebraPrim–GeoGebra for Primary School. In Proceedings of the The Ninth International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT 9).
- Jones, K. (1999). Student interpretations of a dynamic geometry environment. *Revista Cerme*.
- Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. Geometría para el siglo XXI, Síntesis, Madrid.
- Scaglia, S., y Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática*, 17(3), 105-120.
- Iranzo, N., y Fortuny, J. M. (2008). La influencia del SGD en las estrategias de resolución de problemas de geometría analítica. *Enseñanza de las ciencias* 27 (3), 433-446.
- Galindo, C. (1996). Desarrollo de Habilidades Básicas para la Comprensión de la Geometría. *Revista Ema*, 2(1), 49-58.
- Barrena, E., Falcón, R.M., Ramírez, R. y Ríos, R. (2011). Presentación y resolución dinámica de problemas mediante GeoGebra, Unión: *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 25, 161-174.
- Currículo de Educación primaria para los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón. (Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte) y (Orden de 16 de junio de 2014, de la consejera de Educación, Universidad Cultura y Deporte).
- Almodóvar, J. A. y Rodríguez, M. (2009). Matemáticas de 1^{er} curso de Educación Primaria. *Santillana-Proyecto los caminos del saber*.