



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Máster

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Propuesta didáctica para 2º de ESO.

Systems of linear equations with two unknowns.

A didactic proposal for 2nd of ESO.

Autora

Marina Ainaga Sancho

Director/es

Valeria Bizet

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2024-2025

Índice

Introducción.....	1
1. Antecedentes.....	2
1.1. Investigaciones previas.....	2
1.2. Currículo de Aragón	5
1.3. Conocimientos previos del alumnado.....	7
2. Objeto matemático.....	8
2.1. Definición del objeto matemático.....	8
2.2. Origen y desarrollo histórico del objeto matemático.....	9
3. Marco teórico.....	13
3.1. Teoría antropológica de lo didáctico	14
3.2. Tipos de tareas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático	15
4. Análisis de libros de texto	16
5. Propuesta didáctica.....	29
5.1. Cronograma de las sesiones.....	30
5.2. Diseño de las sesiones	32
Sesión 1. Ecuaciones lineales con dos incógnitas	33
Sesión 2. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas	37
Sesión 3. Método gráfico de resolución de sistemas	40
Sesión 4. Método de sustitución	42
Sesión 5. Método de igualación.....	45
Sesión 6. Método de reducción.....	48
Sesión 7. Resolución de problemas	52
Sesión 8. Resolución de problemas	54
6. Evaluación	57
6.1. Prueba de evaluación	59
7. Conclusiones.....	61
Referencias	63
Anexos.....	65
Anexo I. Explicación de los métodos algebraicos de resolución	65

Anexo II. Capturas del Applet de Desmos Sesión 3.....	67
Anexo III. Soluciones de los problemas de la prueba final	68
Anexo IV. Rúbrica para los criterios de evaluación	72
Anexo V. Rúbrica de observación directa para la evaluación del alumnado	74
Anexo VI. Rúbrica de la prueba final de la sesión 9	75

Introducción

Este documento presenta el Trabajo de Fin de Máster correspondiente al Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas, concretamente en la especialidad de Matemáticas. Este trabajo corresponde a la modalidad A, es decir, un trabajo sobre el estudio de un objeto matemático y el posterior diseño y desarrollo de una propuesta didáctica sobre él. El tema seleccionado para esta memoria son los *Sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas*, enfocado al curso de 2º de ESO.

Este objeto matemático se presenta como una respuesta a necesidades prácticas del ser humano, por lo que tienen una gran importancia a lo largo de la historia desde civilizaciones antiguas como la babilónica o griega. A lo largo de los siglos, este objeto matemático ha evolucionado hasta ocupar un papel fundamental en el álgebra elemental, permitiendo modelizar y resolver situaciones en las que intervienen varias incógnitas.

En los últimos años han surgido distintas propuestas para enseñar este contenido en secundaria, muchas de ellas incorporando herramientas digitales como GeoGebra o metodologías activas centradas en la resolución de problemas. Sin embargo, sigue habiendo dificultades recurrentes en el aprendizaje del alumnado, lo que muestra que, a pesar de los avances, aún quedan aspectos por mejorar en su enseñanza.

Según el currículo de Matemáticas en Aragón, en consonancia con la LOMLOE (Departamento de Educación, Cultura y Deporte, 2022), los sistemas de ecuaciones lineales se introducen por primera vez en este curso dentro del sentido algebraico y del pensamiento computacional. Su enseñanza combina los métodos gráficos y algebraicos, y pone el foco en la resolución de problemas, la interpretación de resultados, la conexión con situaciones reales y el uso de herramientas digitales. De esta manera, se desarrollan de manera transversal todas las competencias específicas.

Como futura docente, considero fundamental que el alumnado no solo sepa aplicar un método, sino que comprenda qué está haciendo y por qué, desarrollando así su pensamiento matemático y crítico. Al mismo tiempo, este proceso contribuye a su crecimiento personal. Por ello, la propuesta que se presenta busca crear una experiencia de aula más significativa, basada en el trabajo cooperativo, el aprendizaje por descubrimiento y el uso de recursos digitales.

El trabajo se organiza en diferentes apartados, comenzando con un análisis de antecedentes en torno al objeto matemático, incluyendo estudios previos, una revisión histórica y su presencia en el currículo y en los libros de texto. Seguidamente, se expone el marco teórico que fundamenta la propuesta, centrado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Finalmente, se describe la propuesta didáctica diseñada para 2º de ESO, así como su evaluación, para terminar con unas conclusiones sobre la propuesta y esta memoria.

1. Antecedentes

En este capítulo, vamos a investigar sobre el objeto de estudio, analizando diversos artículos sobre los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, prestando atención a las propuestas innovadoras para su enseñanza en educación secundaria, mediante metodologías que faciliten su comprensión y aplicación en el aula. Asimismo, analizaremos artículos sobre el tratamiento del objeto en los libros de texto, analizando cómo trabajan el concepto. Finalmente, se analiza la situación de los sistemas de ecuaciones lineales en el currículo de Aragón, así como los conocimientos previos necesarios que este mismo indica.

1.1. Investigaciones previas

A lo largo de los años, diversos autores han estudiado nuestro objeto matemático desde diversos enfoques, como el estudio de su tratamiento en los libros de texto o diversas propuestas metodológicas para la enseñanza. Para analizar las investigaciones previas sobre los sistemas de ecuaciones, nos centraremos en estudios realizados en los últimos quince años con el fin de conocer el estado actual de su proceso de enseñanza.

Carrillo (2017) diseñó, desarrolló e implementó una propuesta para la enseñanza de sistemas lineales en secundaria mediante la integración de las tecnologías en el aula. Esta propuesta surge del auge de las tecnologías en la educación en los últimos años, siendo una fuente de motivación para el alumnado, tal como sugiere la autora. Para la propuesta se emplearon materiales interactivos, como la aplicación GeoGebra y la plataforma de aula virtual, Moodle. El principal resultado de este trabajo es la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje a través de la incorporación de las TIC, lo que ha permitido obtener una evaluación positiva tanto en el cumplimiento de los objetivos establecidos en el currículo como en la adquisición de un aprendizaje significativo.

Falcón (2018) presentó una experiencia llevada a cabo con alumnos de 3º y 4º de ESO, donde propone, como mejora en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, realizar un estudio previo de los intereses del alumnado. Las fases de la experiencia se dividieron en el recordatorio de los métodos de resolución de sistemas, el uso de tecnologías para afianzarlos, que tal como comentaba Carrillo (2017) resultan beneficiosos; y posteriormente, la resolución de problemas, dejando a los alumnos crear sus propios problemas. Esto lo presentó ya que, a la hora de resolver problemas, los alumnos rechazan intentarlos bajo las premisas de incompreensión del texto, o el no haber adquirido los conocimientos matemáticos. La dinámica que propone el autor es que los alumnos creen sus propios problemas, centrados en sus intereses, con la premisa de que uno de ellos puede entrar en el examen. De esta manera, se potencia su motivación y facilitar su implicación en la creación y resolución de problemas, promoviendo un aprendizaje más significativo, también de esta manera se muestra la evidencia de que la contextualización de problemas facilita la comprensión de los conceptos y refuerza las habilidades de razonamiento lógico y comunicación.

Sabemos que la herramienta GeoGebra ha supuesto un cambio en la forma de impartir matemáticas en el aula. Hernández (2013) abordó diversos aspectos sobre el uso de GeoGebra en la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales, haciendo hincapié en su uso con el fin de que los alumnos visualicen y comprendan los conceptos matemáticos. También menciona que es una herramienta interactiva que resulta de utilidad para que los alumnos experimenten con los distintos tipos de soluciones que pueden tener los sistemas, y comprobando gráficamente las soluciones que obtienen, logrando así un aprendizaje más profundo. Asimismo, destaca la importancia de guiar a los alumnos en el uso de la herramienta, para que comprendan los procedimientos utilizados. El autor concluye con que el uso de GeoGebra en la enseñanza de sistemas de ecuaciones contribuye a un aprendizaje más significativo.

Por su parte, Pérez y Vargas (2019), centrados en la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales para Bachillerato, estudiaron, mediante el diseño de una secuencia didáctica, el uso de GeoGebra como herramienta didáctica, para hacer frente a las dificultades que encuentran los alumnos en el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales. Los autores destacan cómo el programa ayuda a facilitar la comprensión de los conceptos mediante la relación de las expresiones algebraicas con las gráficas, visualizando así las soluciones y permitiendo a los alumnos manejarse entre las distintas representaciones, de manera interactiva con el uso de hojas de trabajo y applets (incluidos en el artículo). Concluyen también con los beneficios que presenta el trabajo colaborativo de los estudiantes, promoviendo el aprendizaje activo. La conclusión de los autores es que la secuencia que presentan ayuda a la comprensión de los alumnos, ayudando también a entender el concepto de solución mediante un aprendizaje significativo basado en el aprendizaje dinámico y la resolución de problemas.

De la mano de las conclusiones de estos autores, Puskás et al. (2022) evaluaron el uso de GeoGebra como recurso didáctico en el contexto de los sistemas de ecuaciones lineales, destacando el potencial que presenta para ayudar a los alumnos a la comprensión de los conceptos, así como fomentar el aprendizaje activo y manipulativo. La metodología de la investigación consistió en una revisión bibliográfica sistémica de estudios publicados entre 2017 y 2022, y terminó concluyendo con que GeoGebra facilita la visualización de los conceptos que pueden resultar de más dificultad a los alumnos, lo que afecta positivamente en su motivación, mejorando así su rendimiento. Asimismo, los autores destacan que los estudios concluyen que este software permite que los alumnos desarrollen destrezas más allá de las puramente académicas, como habilidades cognitivas, críticas y sociales, útiles en el ámbito laboral y social. De esta manera, muestran cómo las metodologías activas pueden ser de ayuda para mejorar el aprendizaje matemático.

Con respecto a los libros de texto, Guerrero et al. (2014) examinaron cómo se abordan los problemas relacionados con nuestro objeto matemático en libros de texto del curso de 3º de ESO. Los autores destacaron que, a pesar del protagonismo que tiene la resolución de problemas en el currículo, en los libros de texto predominan los ejercicios rutinarios y sencillos, sin estar apenas contextualizados ni conectados con otras áreas del

conocimiento. Para llegar a esta conclusión, realizaron un análisis cualitativo de los problemas del libro de texto más vendido de España (editorial Anaya). Concluyen con la necesidad de mejorar los materiales didácticos para fomentar un aprendizaje más profundo en relación con las líneas que establece el currículo, impulsando el desarrollo del razonamiento matemático.

Bruno y Rivas (2014), analizaron el tratamiento de la solución en los sistemas de ecuaciones lineales en los libros de texto de educación secundaria, mostrando que estos materiales se centran en el algoritmo de resolución, sin abordar el significado de la solución. A través de un análisis exhaustivo, las autoras concluyeron que esto deriva en dificultades para los alumnos, que terminan dando prioridad al proceso algorítmico y no a la comprensión de la solución, sin entender qué están haciendo y, por tanto, sin verificar que las respuestas sean correctas ni si satisfacen las condiciones del problema. De esta manera, las autoras evidencian la necesidad de llevar a cabo metodologías que trasciendan la práctica algorítmica, promoviendo una comprensión más profunda del objeto matemático y llegando así a un aprendizaje más significativo.

Para completar el estudio sobre este objeto matemático, es importante atender los errores que, según los investigadores, se cometen habitualmente por parte de los alumnos. Los autores Muñoz-Rodríguez et al. (2022) investigaron sobre los errores que cometen los alumnos de 2º de ESO al resolver sistemas de ecuaciones lineales a través de un estudio realizado en un aula de 20 alumnos en Oviedo. A través del estudio encontraron tres categorías de errores principales: la primera, relacionada con el uso incorrecto del lenguaje matemático y el cambio entre distintos registros de representación (algebraico, gráfico, tabular, verbal); en segundo lugar, errores aritméticos y la tercera son errores propios que cometen los alumnos al aplicar fórmulas, teoremas o definiciones matemáticas, resultado de intentar mecanizar los procedimientos. Además, destacan un error específico en la resolución de sistemas de ecuaciones, que es la dificultad para comprender el concepto de solución de un sistema.

A su vez, Chicoma Mauro (2024) identificó las dificultades que presentan los alumnos en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales que evidenciaron la necesidad de implementar una estrategia de enseñanza. Estas dificultades comenzaban por el propio planteamiento e interpretación gráfica de los sistemas, lo cual se relaciona con el error mencionado previamente sobre el paso del lenguaje verbal al algebraico, así como la falta de motivación. De nuevo, menciona errores aritméticos, y de manipulación algebraica (despejar variables y sustituirlas). El autor concluye que los estudiantes no poseen una comprensión profunda de los conceptos fundamentales necesarios para dominar los distintos métodos de resolución de sistemas, lo que afecta en la elección de la estrategia a emplear. Asimismo, destaca que los alumnos tienen dificultades para conectar este objeto matemático con la realidad.

Asimismo, resulta interesante estudiar qué errores relacionados con este objeto matemático se siguen cometiendo en cursos superiores, ya que esto permite identificar

dificultades persistentes en el aprendizaje y así diseñar propuestas didácticas más eficaces que contribuyan a su comprensión en profundidad. La autora Díaz (2016) investigó y analizó errores que cometen los alumnos en las Pruebas de Acceso a la Universidad con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales. Entre los errores que encontró, destacan los planteamientos incorrectos, los cuales relaciona con la mala interpretación de los datos de los problemas por una mala lectura del enunciado y una mala traducción del lenguaje verbal al algebraico. Con respecto a la resolución del sistema, la mayoría de los errores que encontró son técnicos, principalmente de cálculo, y se evidencian en la falta de comprobación de la solución. La autora indicó que los fallos de cálculo más habituales se dan entre los alumnos que optan por el método de reducción. De esta manera expone errores similares a los que presentaban los autores Muñoz-Rodríguez et al. (2022).

En resumen, estas investigaciones ponen de manifiesto la necesidad de mejora en la enseñanza del objeto, aprovechando las nuevas tecnologías para facilitar y profundizar en la comprensión de los conceptos que provocan los principales fallos reiterados por el alumnado. Igualmente, con el fin de mejorar la motivación de los estudiantes, es preciso diseñar propuestas que contextualicen el objeto.

1.2. Currículo de Aragón

La elaboración de esta propuesta está regulada por la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, conocida como LOMLOE.

El currículo de Educación Secundaria en Aragón ha sido diseñado y propuesto por el Departamento de Educación, Cultura y Deporte (DECD) en el año 2022. En él se establece la progresión de la enseñanza de los conocimientos necesarios para enfrentarse a nuevos aprendizajes. El pensamiento algebraico se va desarrollando desde las primeras etapas del aprendizaje matemático, a través del reconocimiento de patrones, manipulación de números y resolución de problemas aritméticos. En la Educación Secundaria Obligatoria este pensamiento se formaliza mediante el lenguaje algebraico.

Según el Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria y más en concreto, la Orden ECD/1172/2022, de 2 de agosto, por la que se aprueba el currículo para el caso de la Comunidad Autónoma de Aragón, los sistemas de ecuaciones lineales se estudian por primera vez en el curso de 2º de ESO. A continuación, se expone el tratamiento de este objeto matemático en el currículo de Aragón a lo largo de los cursos.

Los sistemas de ecuaciones aparecen dentro del sentido algebraico y de pensamiento computacional, que durante este curso pretende consolidar los conocimientos del anterior, donde se introduce por primera vez el lenguaje algebraico. En este curso, se pretende que el alumno adquiera una correcta manipulación de las expresiones algebraicas cada vez más complejas y una comprensión de ellas para su uso en la resolución de ecuaciones desde un punto de vista de resolución de problemas, generalización de patrones y

situaciones funcionales. En el currículo también se especifica la importancia de establecer conexión con el resto de sentidos, especialmente el numérico y el espacial.

En este curso, el objeto matemático se presenta dentro del conocimiento, destreza y actitud D.4. Igualdad y desigualdad de la siguiente manera (DECD, 2022, p. 44):

- Relaciones lineales y cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana o matemáticamente relevantes: expresión mediante álgebra simbólica.
- Equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas basados en relaciones lineales y cuadráticas.
- Estrategias de búsqueda de soluciones en ecuaciones y sistemas lineales y ecuaciones cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana.
- Ecuaciones: resolución mediante el uso de la tecnología.

El objetivo es que el alumnado desarrolle la habilidad de manipulación de las ecuaciones lineales para la resolución de los sistemas, sin dejar de lado la resolución gráfica de ellos. Dentro de esta resolución se encuentran las técnicas manuales y con herramientas tecnológicas, para poder trabajar el elemento transversal de las TIC. Con la representación gráfica de los sistemas se busca que el alumnado sea capaz de interpretar la solución del sistema, a la par que pueda relacionar la expresión algebraica y la gráfica.

Mediante el trabajo de este objeto matemático, se van a desarrollar distintas competencias específicas que se recogen en el currículo, entre ellas encontramos las correspondientes al bloque competencial de resolución de problemas, que son CE.M.1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones; y CE.M.2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global. Estas dos competencias son fundamentales, ya que los sistemas de ecuaciones lineales se presentan como una herramienta de gran utilidad a la hora de abordar problemas contextualizados. Además, en su enseñanza se trabajan distintos métodos de resolución, siendo necesaria la comprobación de los resultados y el análisis de su validez en el contexto del problema.

Asimismo, se trabajan las competencias relacionadas con el razonamiento y prueba, siendo estas la CE.M.3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento; y la CE.M.4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz. Esto se debe a que, dado que el aprendizaje basado en problemas es un pilar fundamental en la enseñanza de matemáticas, el trabajo con los sistemas de ecuaciones busca que el alumnado desarrolle su pensamiento matemático

mediante la organización de los datos y la descomposición de los problemas en partes, identificando el método de resolución más adecuado en cada caso.

También se desarrolla la competencia relacionada con la comunicación y representación de conceptos, la CE.M.8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas. Esta competencia se trabaja al fomentar que los estudiantes expliquen, justifiquen los procedimientos y representen sus razonamientos matemáticos de manera clara y estructurada, guiando a los alumnos hacia un uso del lenguaje matemático riguroso.

Cabe destacar que las competencias específicas relacionadas con las destrezas socioafectivas deben estar presentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje a lo largo de todo el curso.

A partir de su introducción en el curso de 2º de ESO, el objeto matemático se sigue desarrollando en los cursos posteriores, profundizando su estudio mediante la incorporación de más incógnitas o el análisis de los sistemas no lineales. Asimismo, se exploran las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones a través de la resolución de problemas en diversos contextos reales.

Encontramos nuestro objeto matemático en el curso de 3º de ESO en el sentido espacial, en el conocimiento C.2. Localización y sistemas de representación, donde se explica que la geometría analítica emplea los sistemas de ecuaciones para abordar distintos problemas geométricos. De nuevo, la encontramos en el sentido algebraico y pensamiento computacional, en los conocimientos D.4. Igualdad y desigualdad, y D.5. Relaciones y funciones, donde se introducen y estudian los sistemas no lineales.

En 4º de ESO A aparece nuevamente en el sentido algebraico y pensamiento computacional en los conocimientos D.4. Igualdad y desigualdad, donde se especifica que se profundiza en el objeto mediante la resolución de problemas. Y finalmente, en 4º de ESO B aparece de la misma manera, buscando la profundización y comprensión del objeto.

Tras el análisis del currículo, cabe destacar la importancia que se da al hecho de que el alumnado sea capaz de enfrentarse a la resolución de problemas, tanto planteándolos como interpretando las soluciones en diferentes contextos.

1.3. Conocimientos previos del alumnado

Para abordar adecuadamente el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales en 2º de ESO, es fundamental que el alumno posea ciertos conocimientos previos que le sirvan de base para la construcción de los nuevos conocimientos. Conocer estos saberes previos permite detectar posibles dificultades y diseñar estrategias didácticas adecuadas para facilitar el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones.

Para comenzar, es preciso que, acorde a los objetivos generales de etapa de Educación Primaria de la Orden ECD/1112/2022, de 18 de julio, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, elaborado por el Departamento de Educación, Cultura y Deporte, se espera que los alumnos tengan un dominio adecuado de las operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división).

Con respecto a los conocimientos previos de Educación Secundaria, en 1º de ESO se agrupan en torno al sentido algebraico y pensamiento computacional. En este curso es cuando se introduce por primera vez el lenguaje algebraico, elemento imprescindible en el estudio de sistemas de ecuaciones. En 1º de ESO el alumno se familiariza con los mecanismos de cálculo algebraico enfocados en la resolución de problemas, la generalización de patrones y las situaciones funcionales.

Para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, en el curso anterior se espera que el alumno haya trabajado en el reconocimiento y generalización de formas equivalentes de expresiones algebraicas sencillas, así como de la resolución de ecuaciones lineales junto a su interpretación y comprobación de sus soluciones atendiendo a la contextualización de los ejercicios. Es preciso destacar el apartado D.4. Igualdad y desigualdad dentro del sentido algebraico, donde aparecen estos conocimientos.

También en el currículo se especifica que el alumno trabaje en este curso previo la comprensión del concepto de variable en sus diferentes naturalezas. Además, en este curso también se introduce la relación entre gráficas y álgebra mediante el uso de coordenadas de puntos de una recta. Esto se relaciona con el uso de las tecnologías, como el software GeoGebra, para que establezcan la conexión entre expresión algebraica de una función afín y la representación gráfica. Esto es útil a la hora de resolver los sistemas de ecuaciones de manera gráfica.

Para finalizar los conocimientos previos, es importante que los alumnos en este curso se familiaricen con las conexiones entre ecuación, tabla de valores y gráfica de una recta. Todos estos conocimientos establecen una base consolidada que permite el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales en el curso de 2º de ESO.

2. Objeto matemático

2.1. Definición del objeto matemático

En la siguiente propuesta didáctica, el objeto matemático a enseñar son los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. A continuación, se presenta una primera definición de este objeto matemático.

Un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

donde todos los coeficientes a_{ij} y b_j son números reales dados (Stanley et al., 2012, p.16), y el problema consiste en determinar la solución del sistema, es decir, los valores (x_1, x_2) que satisfacen ambas ecuaciones.

Sin embargo, esta definición es propia del saber sabio, es decir, es una definición propia del lenguaje matemático profesional, ya que emplea una notación compleja mediante el uso de subíndices. Por lo tanto, sería preciso hacer una transformación del objeto para poder ser enseñado, debido a que podría suponer un obstáculo en el proceso de aprendizaje para los alumnos del curso en el que se plantea el objeto matemático. Esta transformación se conoce como transposición didáctica.

Una definición más propia del saber escolar, como las que encontramos en los libros de texto sería la siguiente:

Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Donde a , b , a' y b' son números reales que se denominan coeficientes y c y c' también son números reales llamados términos independientes. Llamamos solución del sistema al par de valores (x, y) que satisfacen las dos ecuaciones del sistema (Caro, 2024, p.266).

2.2. Origen y desarrollo histórico del objeto matemático

Para comprender el tratamiento del objeto matemático en la actualidad, es preciso observar sus antecedentes y su evolución a lo largo de los años.

Desde los inicios de la humanidad, los números surgieron como respuesta a la necesidad de medir y resolver problemas complejos presentes en la vida cotidiana, como las mediciones, los repartos de bienes o salarios. Las operaciones aritméticas estaban ligadas a acciones físicas concretas, como juntar, añadir, repartir o quitar. Esta búsqueda constante por dar solución a situaciones reales y mejorar las condiciones de vida sentó las bases del desarrollo de las matemáticas a lo largo de la historia.

La historia del álgebra se puede empezar a contar desde hace 2000 a.C. con la cultura babilónica. Los babilonios determinaban con palabras como longitud y anchura incógnitas, y llegaron a plantear ecuaciones lineales, cuadráticas y cúbicas, así como sistemas de ecuaciones. En una tablilla babilónica encontramos un ejemplo de planteamiento y resolución de un sistema, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{ anchura} + \text{longitud} &= 7 \text{ manos} \\ \text{longitud} + \text{anchura} &= 10 \text{ manos} \end{aligned}$$

Su manera de proceder con la resolución fue tomar el valor $mano = 5$, obteniendo:

$$\frac{1}{4} anchura + longitud = 35 \text{ dedos}$$

$$anchura + longitud = 50 \text{ dedos}$$

y observando que tomando en la segunda ecuación $anchura = 20 \text{ dedos}$ y $longitud = 30 \text{ dedos}$ obtienen un resultado que la verifica, y que además cumple la primera ecuación, llegando de esta manera a la solución.

La resolución que llevaríamos a cabo hoy en día resulta muy sencilla aplicando el método de reducción, por el que restaríamos la primera ecuación menos la segunda, obteniendo $-\frac{3}{4}anchura = -3$, y despejando llegamos a que $anchura = 4$. Sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones se tiene que $longitud = 6$. Ambos métodos comparten ciertas similitudes, aunque se observa que los babilonios recurrían principalmente a la observación y al método de prueba y error, sin obtener un método general para todos los sistemas.

En la cultura egipcia se conservan papiros como el de Rhind o Ahmes, que data del año 1650 a.C., y en el que se encuentran ejemplos del álgebra que desarrollaron los egipcios. Este documento es el más extenso de los que contienen información, siendo de aproximadamente 30 centímetros de largo y 6 metros de ancho, y contiene alrededor de 80 problemas resueltos de carácter aritmético, geométrico y algunos que pueden considerarse algebraicos.

Estos últimos destacan porque no se referían a objetos concretos como pan o cerveza, a diferencia del resto, sino que piden lo equivalente a resolver ecuaciones lineales de la forma $x + ax = b$, o $x + ax + bx = c$, donde a , b y c son números conocidos y x es el número desconocido, al cual llamaban “aha” o montón, como podemos leer en el libro *Historia de la matemática* (Boyer, 1968).



Figura 1.1. Papiro de Rhind.

Un ejemplo destacable que encontramos es el Problema 24, cuyo enunciado es:

Calcula el valor del montón si el montón y un séptimo del montón es igual a 19.

Para proceder con su resolución, los egipcios empleaban un procedimiento basado en tomar un valor concreto para el montón (el cual sería seguramente incorrecto), efectuar las operaciones del problema y ajustar la respuesta mediante comparación y el uso de proporciones hasta alcanzar la solución, método que se denominaba como de la “falsa posición” o “regla flasi”, lo que se puede comparar hoy en día con el método de “ensayo y error”. Además, destaca que siempre comprobaban la respuesta por el método de sustitución del valor numérico, mostrando que nos encontramos en otra etapa significativa del desarrollo de la matemática.

El método de resolución egipcio sería de la siguiente forma: se toma como valor del montón 7, de manera que la expresión $x + \frac{1}{7}x$ es 8 en lugar de 19. Observan que $8(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = 19$, luego hay que multiplicar 7 por el paréntesis para obtener el valor correcto del montón. De esta manera encuentra la solución $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ y la comprueba sumándole un séptimo de esta, viendo que obtiene el número que busca, 19.

Por otro lado, en el siglo IV a.C., el matemático pitagórico Thymaridas de Paros ideó una fórmula que permitía resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, conocida como *la flor de Thymaridas*, respondiendo al siguiente enunciado:

Si se conoce la suma de n cantidades, y también la suma de cada uno de los pares que contienen a una particular de ellas, entonces esta cantidad particular es igual a $1/n-2$ de la diferencia entre las sumas de estos pares y la primera suma dada. (Marcos, 2018)

Este enunciado se representa de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = S \\ x + x_1 = a_1 \\ x + x_2 = a_2 \\ \vdots \\ x + x_{n-1} = a_{n-1} \end{cases}$$

Y su solución viene dada por: $x = \frac{1}{n-2} [(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) - S]$.

En nombre de la fórmula viene dado de esta manera porque las ecuaciones involucradas en el sistema se pueden expresar de la siguiente forma:

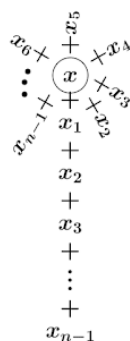


Figura 1.2. Flor de Thymaridas.

En el siglo III d.C. Diofanto realizó su mayor obra conocida, *Arithmetica*, una de las mayores aportaciones de los griegos al álgebra. En esta obra, Diofanto se destaca del álgebra geométrico que caracteriza su época y emplea números abstractos sin contextualización. Empieza a utilizar símbolos para las incógnitas y no para las operaciones. Otro rasgo característico de la obra es que no se planteó encontrar todas las soluciones de un problema, le bastaba encontrar una; además, no consideraba las soluciones negativas. De esta manera, la obra *Arithmetica* no se muestra como una exposición sobre las operaciones o la resolución de ecuaciones algebraicas, sino como una colección de unos 150 problemas resueltos.

Un problema que encontramos en esta obra sobre sistemas de ecuaciones es: “Encontrar dos números tales que su suma sea 20 y la suma de sus cuadrados sea 208.” (Medina y Albarracín, 2012, p.31)

Su manera de resolverlo es llamar a uno de los números $x + 10$, y al otro $x - 10$. Elevándolos al cuadrado, obtenía $(x + 10)^2 = x^2 + 20x + 100$ y $(x - 10)^2 = x^2 - 20x + 100$. Sumando los cuadrados llegaba a $2x^2 + 200 = 208$, y por lo tanto $x^2 = 4$, con lo que $x = 2$, ya que como hemos comentado, descartaba las soluciones negativas. Sustituyendo en las primeras ecuaciones, obtenía que $x = 12$ e $y = 8$.

La resolución que llevaríamos a cabo hoy en día consiste en plantear el siguiente sistema de ecuaciones, y aplicar uno de los métodos de resolución.

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x^2 + y^2 = 208 \end{cases}$$

Vemos que, si aplicamos el método de sustitución, se aprecian algunas similitudes entre ambos procedimientos de resolución.

Finalmente, las civilizaciones chinas hicieron numerosas aportaciones, destacando en el siglo III d.C. la obra *Los Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático*. El capítulo XIII tiene relevancia por la resolución de problemas que llevan a sistemas de ecuaciones lineales. Para resolverlos, empleaban un sistema de palillos y tableros, aplicando un procedimiento comparable al método de matrices que usamos hoy en día, aunque no

presentan una justificación de la técnica. Uno de los problemas que encontramos, es el siguiente:

Hay tres clases de granos; tres gavillas de primera clase, dos de la segunda clase y una de la tercera hacen 39 medidas; dos de la primera, tres de la segunda y una de la tercera hacen 34 medidas; y una de la primera, dos de segunda y tres de la tercera hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de granos están contenidas en una gavilla de cada clase? (Deivi y Peña, 2006, p.156)

Su forma de resolución era mediante operaciones sobre las columnas de la matriz que generaban a partir del enunciado de la siguiente manera (Figura 1.3), la cual reducían a la forma de la Figura 1.4:

1	2	3	0	0	3
2	3	2	0	5	2
3	1	1	36	1	1
26	34	39	99	24	39

Figura 1.3. Matriz 1 y Matriz 2 *Los Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático*

De esta manera llegaban a: $36z = 99$, $5y + x = 24$, $3x + 2y + z = 39$, y de ahí se obtenían las soluciones. Este procedimiento es el que hoy en día conocemos como método de Gauss. La diferencia es que, en la actualidad, para plantear el problema se formularía el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

A diferencia de Diofanto, en China sí que se consideraban las soluciones negativas, aunque se desestimaban por el contexto del problema.

3. Marco teórico

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos que sustentan el diseño de la secuencia didáctica que se expondrá más adelante, proporcionando un marco de referencia para la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático. En particular, se va a abordar la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), un enfoque desarrollado por Yves Chevallard, profesor de matemáticas e investigador de la Universidad de Aix-Marseille.

3.1. Teoría antropológica de lo didáctico

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) es un enfoque que entiende las matemáticas como un conocimiento cultural. Este marco teórico coloca el proceso de enseñanza-aprendizaje dentro de un contexto social; no se limita a la mera transmisión de contenidos, sino que implica también funciones sociales, culturales y saberes compartidos.

Este enfoque parte de la idea de que lo didáctico, además de una materia o contenido a enseñar, es también una práctica social que forma parte de la cultura de una comunidad y que involucra a distintos actores (docentes, estudiantes, instituciones) y a diversas formas de conocimiento.

La teoría fue desarrollada por Yves Chevallard y supuso un cambio importante al ampliar el objeto de estudio de la didáctica. No se centra únicamente en lo que ocurre dentro del aula, sino que analiza todo el proceso: desde la producción del saber matemático hasta su transformación en contenido escolar como saber enseñado, lo que se conoce como transposición didáctica.

El hecho de que la práctica didáctica no se puede entender aislada, al estar influida por el contexto cultural en el que se desarrolla, es un aspecto fundamental de la TAD. Esto implica que, al analizarla, hay que tener en cuenta cómo el conocimiento, las tareas, las técnicas y las tecnologías están conectados con los aspectos sociales y culturales del entorno para describir las prácticas docentes y de aprendizaje.

Para desarrollar las actividades didácticas, Chevallard analiza los tipos de tareas, las técnicas y las tecnologías, entendiéndolas como elementos que contribuyen a la construcción del saber a enseñar. A continuación, veamos qué se entiende en relación con cada uno de estos términos en el marco de la TAD:

- Tipos de tareas. Son las acciones concretas que se llevan a cabo en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es decir, las actividades que los estudiantes deben realizar para aprender un conocimiento o habilidad. Estas tareas presentan distintos niveles de complejidad, y constituyen el núcleo de la actividad didáctica. De acuerdo con Chevallard (1999):

Concretamente, un género de tareas no existe más que bajo la forma de diferentes tipos de tareas, cuyo contenido está estrechamente especificado. Calcular... es, se ha dicho, un género de tareas; pero calcular el valor (exacto) de una expresión numérica conteniendo un radical es un tipo de tareas, lo mismo que calcular el valor de una expresión conteniendo la letra x cuando se da a x un valor determinado. Durante los años de colegio, el género calcular... se enriquece de nuevos tipos de tareas; ocurrirá lo mismo en el instituto, donde el alumno va en primer lugar a aprender a calcular con vectores, después, más tarde, a calcular una integral o una primitiva, etc. Y se repetirá lo mismo, por supuesto, con los géneros Demostrar ...

- Técnicas. Son los procedimientos empleados para llevar a cabo las tareas, es decir, es el “saber hacer”. Entre ellos, se encuentran las estrategias de enseñanza, como explicaciones o ejercicios, así como procedimientos específicos para realizar actividades. Las técnicas no son necesariamente algorítmicas, aunque existe una tendencia general a la algoritmización.
- Tecnologías. Son los conocimientos, herramientas y recursos que apoyan las técnicas. Estas tecnologías tienen una doble función: por un lado, aseguran que se puedan realizar las tareas concretas, y por otro, justifican el por qué una técnica funciona y es válida.

3.2. Tipos de tareas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático

A continuación, se exponen los tipos de tareas, técnicas y tecnologías asociados a este objeto matemático, con los que se pretende trabajar en el aula mediante la propuesta didáctica diseñada.

Tipos de tareas

Antes de comenzar, es preciso señalar las diferencias existentes entre “problema” y “ejercicio”. Por problema entendemos una situación que requiere de modelización matemática, y la búsqueda de las técnicas necesarias para poder llegar a la solución; mientras que, por ejercicio se entiende una tarea donde se busca la solución mediante la repetición de técnica para practicar lo aprendido, sin contextualización. Así pues, consideramos los siguientes tipos de tareas asociados a este objeto matemático:

- TT.1. Modelizar situaciones mediante ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- TT.2. Modelizar situaciones mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- TT.3. Resolver ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- TT.4. Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Técnicas

- TC.1. Asociadas a las ecuaciones lineales con dos incógnitas.
 - TC.1.1. Establecer la ecuación lineal con dos incógnitas.
 - TC.1.2. Comprobar si el par (a,b) es solución de una ecuación lineal.
- TC.2. Asociados a los sistemas de ecuaciones lineales.
 - TC.2.1. Establecer el sistema de ecuaciones lineales.
 - TC.2.2. Determinar la(s) solución(es) mediante el método de sustitución.
 - TC.2.3. Determinar la(s) solución(es) mediante el método de igualación.

- TC.2.4. Determinar la(s) solución(es) mediante el método de reducción.
- TC.2.5. Determinar la(s) solución(es) mediante el método gráfico.
- TC.2.6. Construir tablas de valores.
- TC.2.7. Determinar la(s) solución(es) mediante las tablas de valores.
- TC.2.8. Comprobar si el par (a,b) es solución de un sistema de ecuaciones.
- TC.2.9. Clasificar los tipos de sistemas en: compatibles determinados, compatibles indeterminados y sistemas incompatibles.
- TC.2.10. Determinar la(s) solución(es) mediante el uso de GeoGebra.
- TC.2.11. Generar un sistema de ecuaciones equivalente.

Tecnologías

- TG.1. Asociadas a las definiciones.
 - TG.1.1. Definición de ecuación lineal con dos incógnitas.
 - TG.1.2. Definición de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
 - TG.1.3. Definición de ecuaciones equivalentes.
 - TG.1.4. Definición de sistemas de ecuaciones equivalentes.
- TG.2. Asociadas a las soluciones de los sistemas de ecuaciones.
 - TG.2.1. Definición de solución de una ecuación lineal.
 - TG.2.2. Definición de solución de un sistema de ecuaciones lineales.
 - TG.2.3. Conocer los tipos de sistemas de ecuaciones lineales según el número de soluciones: compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.
 - TG.2.4. Conocer los tipos de sistemas de ecuaciones lineales según su representación gráfica.

4. Análisis de libros de texto

En este capítulo se aborda el análisis del tratamiento de nuestro objeto matemático en diferentes libros de texto de 2º de Educación Secundaria Obligatoria, que como ya se ha comentado previamente, es el primer curso en el que se estudian atendiendo al currículo de Aragón. Dado que los libros de texto constituyen una herramienta muy empleada por los docentes en la enseñanza, es importante realizar este análisis, tanto para observar el proceso de enseñanza-aprendizaje del objeto, como para atender sus fortalezas y deficiencias.

Para llevar a cabo este análisis, seguiremos los principios de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, analizando la presencia o ausencia de los distintos tipos de tareas, técnicas

y tecnologías asociadas a los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas expuestas en el subapartado [3.2](#) de esta memoria.

Los libros de texto que se van a analizar a continuación se enmarcan todos dentro de la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, conocida como LOMLOE. Esta elección responde al interés de estudiar y comparar los distintos enfoques y tratamientos didácticos del objeto matemático en cuestión. Los libros de texto seleccionados los podemos encontrar en la siguiente Tabla 4.1.

Editorial	Proyecto editorial	Año
Santillana	Construyendo mundos	2023
Oxford	Geniox	2023
SM	Revuela	2023

Tabla 4.1. Libros de texto.

En los tres libros de texto se dedica una unidad entera al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, la cual viene tras el estudio de las ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita. Todas las editoriales siguen un esquema similar en sus libros: una introducción en la portada de la unidad, la presentación de los contenidos y, finalmente, una serie de actividades para repasar dichos contenidos, además de un breve resumen de los conceptos y métodos de la unidad.

A continuación, veamos cómo cada editorial presenta estas partes de la unidad, atendiendo a los tipos de tareas, técnicas y tecnologías.

La introducción a la unidad tiene diferentes aproximaciones dependiendo de la editorial. Para comenzar, la editorial Santillana presenta el tema “*Sistemas de ecuaciones*” con una serie de actividades llamadas “¿Qué sabes ya?”, de repaso sobre la elaboración de tablas de valores y la resolución de ecuaciones de primer grado. En ambos casos se incluyen los pasos detallados, un ejercicio resuelto a modo de ejemplo y otro propuesto para resolver. Además, se plantea un “DESAFÍO” como actividad introductoria.

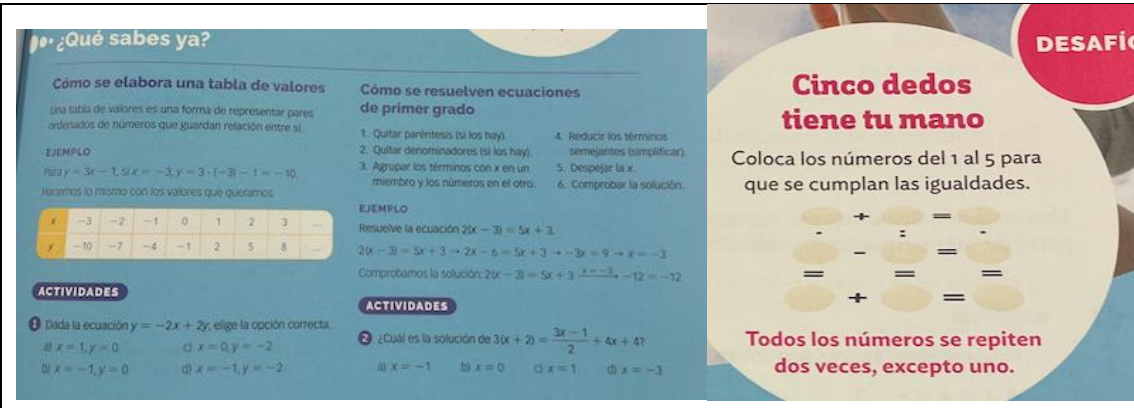


Figura 4.1. Introducción del libro de texto de Santillana (Alejo, S., et al., 2023, p.119).

En el libro de texto de la editorial Oxford, el tema llamado “*Sistemas de ecuaciones*” se presenta mediante una propuesta visualmente atractiva y con distintas contextualizaciones. Al comienzo encontramos un breve índice de lo que se va a trabajar a lo largo de la unidad, y posteriormente elementos que pretenden captar el interés del alumnado mediante una noticia real sobre un profesor que utiliza el rap para enseñar matemáticas, conectando así los contenidos con situaciones del mundo actual y recursos audiovisuales, y realizando preguntas que invitan al alumnado a reflexionar, fomentando una actitud crítica ante el papel de las matemáticas en la vida cotidiana. Asimismo, encontramos un enlace a un vídeo llamado Matemagia. Con esta presentación se busca despertar la curiosidad y el interés de los alumnos, así como mostrar la presencia de las matemáticas en contextos no académicos.



Figura 4.2. Introducción del libro de texto de Oxford (Machín y Rey, 2023, p.101).

Finalmente, en la editorial SM el tema de sistemas de ecuaciones recibe el nombre de “*¡Qué llega la y!*”. En la introducción encontramos, además del índice de los contenidos titulados “¡VAMOS A APRENDER!”, una breve historia sobre Hipatia de Alejandría, en la que se expone su relevancia en el ámbito de las matemáticas y su trágico final. De esta manera, se visibiliza el papel de las mujeres en la ciencia, ya que luego se proponen unas preguntas de debate sobre la igualdad de género. Además, se presenta un adelanto de “NUESTRO RETO”, una actividad que se desarrolla tras el estudio de los contenidos de la unidad que pretende continuar con el debate de la igualdad de género a través de problemas con sistemas de ecuaciones lineales. Esta forma de comenzar la unidad pretende llamar la atención de los alumnos, mostrando las matemáticas desde una perspectiva más contextualizada, acorde con los valores de la LOMLOE.

¡EMPEZAMOS!

Hipatia: una matemática y astrónoma pionera en la Antigüedad

Hipatia de Alejandría fue una importante matemática, astrónoma y filósofa que vivió en el siglo IV en la ciudad de Alejandría, en Egipto. Durante su vida hizo contribuciones significativas a la geometría y a la astronomía y su trabajo sigue siendo reconocido y valorado hoy en día. Sin embargo, a pesar de sus logros, Hipatia fue asesinada en el año 415 d.C. Es importante saber que la historia detrás del asesinato de Hipatia no está completamente clara y hay muchas teorías diferentes sobre lo que sucedió realmente. Lo que sí se sabe es que su muerte fue una gran pérdida para la comunidad matemática y científica de la época.

La película *Ágora*, dirigida por el cineasta español Alejandro Amenábar, se basa en la historia de Hipatia. Su vida y su obra son un recordatorio del importante papel que las mujeres han tenido y siguen teniendo en el mundo de la ciencia y las matemáticas.

- ¿Conocías la figura de Hipatia de Alejandría?
- ¿Conoces matemáticas, investigadoras o divulgadoras científicas de este siglo?
- ¿Crees que, a diferencia del caso de Hipatia, existe actualmente igualdad de oportunidades profesionales en el ámbito académico entre hombres y mujeres? ¿Por qué?

Figura 4.3. Introducción SM (Nieto et al., 2023, p.194).

Una vez analizada la introducción de la unidad de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, vamos a estudiar el contenido de los libros de texto. Para comenzar, conviene señalar que las tres editoriales ofrecen gran cantidad de actividades a lo largo de la unidad. Entre ellas, observamos que predominan los ejercicios centrados en la repetición de técnicas frente a los problemas contextualizados. A continuación, vamos a estudiar en detalle los tipos de tareas, las técnicas y las tecnologías que se muestran en los libros.

Tipos de tareas

Vamos a estudiar la presencia de los tipos de tareas expuestos en el subapartado 3.2, como ya se ha comentado, ya que son los tipos de tareas que se han considerado necesarios para llevar a cabo la propuesta de 2º de ESO, expuesta en apartados posteriores.

- TT.1. Modelizar situaciones mediante ecuaciones lineales con dos incógnitas.

En todos los libros de texto encontramos trabajo con relación a las ecuaciones lineales con dos incógnitas como paso previo al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. De esta manera, en todas las editoriales encontramos problemas donde se plantean diversas situaciones con el fin de que el alumnado modele los problemas. Es conveniente introducir este tipo de tareas como introducción al planteamiento de los sistemas de ecuaciones lineales.

6

Expresa estas oraciones mediante una ecuación lineal con dos incógnitas.

- a) El precio de dos bolígrafos y tres lapiceros es de 2 euros.
- b) La diferencia de nuestras edades es de 5 años.
- c) La estatura de una persona es 5 centímetros menor que la de otra.
- d) El perímetro de un rectángulo es 10 centímetros.

Figura 4.4. Ejemplo de TT.1 (Machín, P. y Rey, M.J., 2023, p.103).

- TT.2. Modelizar situaciones mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

De nuevo, en todos los libros de texto encontramos problemas que requieran la modelización de situaciones mediante el uso de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Estos problemas para modelizar aparecen en las editoriales desde distintas representaciones, como la gráfica o tabular, destacando la modelización a partir de la representación verbal del enunciado.

48 Hace dos años, la edad de Ana era la quinta parte de la edad de su padre. Dentro de siete años, sus edades sumarán 60 años. Calcula sus edades actuales.

Figura 4.5. Ejemplo de TT.2 (Nieto, M., et al., 2023, p.207).

- TT.3. Resolver ecuaciones lineales con dos incógnitas.

En todas las editoriales se trabaja con la resolución de ecuaciones lineales con dos incógnitas, empleando la representación tabular para exponer las distintas soluciones obtenidas, y en ocasiones, la representación gráfica.

13 Marta está renovando su armario. Por cada prenda que se compra va a donar una que ya no use. Decide comprarse tres sudaderas y dos pantalones por un total de 100 €.

- Escribe la ecuación correspondiente.
- Representa gráficamente las soluciones de la ecuación.
- ¿Puede ser una solución que cada sudadera cueste 18 €, y cada pantalón, 22 €? ¿Por qué?

Figura 4.6. Ejemplo 1 de TT.3 (Nieto, M., et al., 2023, p.197).

1 Escribe un par de soluciones de las siguientes ecuaciones lineales con dos incógnitas.

- $3x - 2y = 1$
- $-2x + 5y = 0$
- $-x + 3y = 5$
- $4x - 5y = 1$

Figura 4.7. Ejemplo 2 de TT.3 (Machín, P. y Rey, M.J., 2023, p.103).

- TT.4. Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Este es el tipo de tarea más abundante dentro de los libros de texto, ya que encontramos tanto ejercicios como problemas cuyo objetivo principal es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Todas las editoriales presentan actividades que requieran esta resolución, desde todas las representaciones, siendo las más habituales la verbal y la simbólica, a través de los diversos métodos que muestra cada editorial.

23 Resuelve por los métodos de igualación y sustitución, y comprueba que coinciden las soluciones.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 9y = -3 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} -4x + 3y = -7 \\ 2x + 5y = 7 \end{array} \right\} \end{array}$$

Figura 4.8. Ejemplo de TT.4 (Alejo, S., et al., 2023, p.125).

A continuación, encontramos la Tabla 4.2 donde se resumen todos los tipos de tareas que encontramos en cada libro de texto. Es importante destacar que la tabla solo expone la presencia o ausencia del tipo de tarea, no su frecuencia.

Libro / TT	Santillana	Oxford	SM
TT.1	Sí	Sí	Sí
TT.2	Sí	Sí	Sí
TT.3	Sí	Sí	Sí
TT.4	Sí	Sí	Sí

Tabla 4.2. Tipos de tareas presentes en los libros de texto.

Al analizar esta Tabla 4.2, observamos que todas las editoriales presentan actividades para los tipos de tareas que se han expuesto anteriormente. Atendiendo al número de tareas que incluye cada editorial, encontramos un mayor número en SM, ascendiendo a 102, frente a los 88 de Santillana y 76 de Oxford.

Técnicas

En los libros de texto, la mayoría de las técnicas presentadas se plantean como métodos a seguir para resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones, generalmente explicados a través de ejemplos resueltos exponiendo los pasos necesarios, actuando como “recetas” a seguir.

- TC.1. Asociadas a las ecuaciones lineales con dos incógnitas.
 - TC.1.1. Establecer la ecuación lineal con dos incógnitas.

• La suma de nuestras edades es 25: $x + y = 25$

• La diferencia entre tu edad y la mía es de 1 año: $x - y = 1$

Figura 4.9. Ejemplo de TC.1.1 (Machín, P. y Rey, M.J., 2023, p.102).

- TC.1.2. Comprobar si el par (a,b) es solución de una ecuación lineal.

Ejemplo

Comprobamos si los siguientes pares de números son solución de la ecuación $2x + 4y = 32$.

a. (5, -3)

b. (12, 2)

a. $2x + 4y = 32 \Rightarrow 2 \cdot 5 + 4 \cdot (-3) = 10 - 12 \neq 32 \Rightarrow$ No, (5, -3) no es solución.

b. $2x + 4y = 32 \Rightarrow 2 \cdot 12 + 4 \cdot 2 = 24 + 8 = 32 \Rightarrow$ Sí, (12, 2) es solución.

Figura 4.10. Ejemplo de TC.1.2 (Nieto, M., et al., 2023, p.195).

- TC.2. Asociados a los sistemas de ecuaciones lineales.

- TC.2.1. Establecer el sistema de ecuaciones lineales.

Paso 1

Comprender el problema: hacemos un dibujo o esquema de la situación si es necesario e identificamos en lenguaje algebraico lo que conocemos (datos) y asignamos una letra a lo que no (incógnita).

Asignamos al primer número la incógnita x , y al segundo, la y .

Paso 2

Trazar un plan para resolverlo: planteamos un sistema de ecuaciones que permite resolver el problema.

$$\begin{cases} x + y = 157 \\ x - y = 41 \end{cases}$$

Figura 4.11. Ejemplo 1 de TC.2.1 (Nieto, M., et al., 2023, p.206).

Cómo se resuelven problemas utilizando sistemas de ecuaciones

Un empleado de un almacén cobra 6 € por cada hora trabajada en horario diurno y 9 € por cada hora que trabaja en horario nocturno. Si al final del mes ha cobrado 840 € por trabajar 120 horas, ¿cuántas horas ha trabajado en cada turno?

Es importante comprobar que la solución del sistema tiene sentido en la situación real que estamos resolviendo.

6

1 Identificamos las incógnitas.

Lo que sabemos	Lo que no sabemos
Cada hora del turno de día cobra 6 €.	Nº de horas trabajadas de día: x .
Cada hora del turno de noche cobra 9 €.	Nº de horas trabajadas de noche: y .
Ha ganado 840 €.	
Ha trabajado 120 h.	

2 Planteamos el sistema.

Cobra 6 € por cada hora trabajada de día. $\rightarrow$ Salario cobrado por las horas diurnas: $6x$.

Cobra 9 € por cada hora trabajada de noche. $\rightarrow$ Salario cobrado por las horas nocturnas: $9y$.

Ha cobrado 840 €: $6x + 9y = 840$

Ha trabajado 120 h: $x + y = 120$

$\rightarrow$ El sistema obtenido es $\begin{cases} 6x + 9y = 840 \\ x + y = 120 \end{cases}$

3 Resolvemos el sistema.

Utilizamos el método de reducción.

$$\begin{array}{r} 6x + 9y = 840 \\ x + y = 120 \end{array} \xrightarrow{(-6)} \begin{array}{r} 6x + 9y = 840 \\ -6x - 6y = -720 \end{array} \xrightarrow{+} \begin{array}{r} 6x + 9y = 840 \\ -6x - 6y = -720 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 6x + 9y = 840 \\ -6x - 6y = -720 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 3y = 120 \\ y = \frac{120}{3} = 40 \end{array}$$

Calculamos el valor de x .

$x + y = 120$ $y = 40$ $x + 40 = 120 \rightarrow x = 120 - 40 \rightarrow x = 80$

4 Comprobamos e interpretamos la solución.

$\begin{cases} 6x + 9y = 840 \\ x + y = 120 \end{cases} \xrightarrow{x=80, y=40} \begin{array}{l} 6 \cdot 80 + 9 \cdot 40 = 840 \\ 80 + 40 = 120 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 840 = 840 \\ 120 = 120 \end{array}$

Obtenemos dos igualdades. La solución es válida.

Ha trabajado 80 horas en el horario diurno y 40 horas en el nocturno.

Figura 4.12. Ejemplo 2 de TC.2.1 (Alejo, S., et al., 2023, p.129).

- TC.2.2. Determinar la(s) solución(es) mediante el método de sustitución.

6. Resuelve este sistema por el método de sustitución.

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

1.º Despejamos una incógnita en una de las ecuaciones. Es conveniente despejar una con coeficiente 1 o -1, para evitar denominadores. En este caso, despejamos x de la primera ecuación.

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 - 2y \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

2.º Sustituimos la expresión obtenida en la otra ecuación.

$$2x - y = 3 \quad x = -1 - 2y \quad 2 \cdot (-1 - 2y) - y = 3$$

3.º Resolvemos la ecuación que resulta con una incógnita.

$$2(-1 - 2y) - y = 3 \rightarrow -2 - 4y - y = 3 \rightarrow -5y = 3 + 2 \rightarrow -5y = 5 \rightarrow y = \frac{5}{-5} = -1$$

4.º Calculamos el valor de la otra incógnita, sustituyendo el valor obtenido en la ecuación despejada.

$$x = -1 - 2y \quad y = -1 \rightarrow x = -1 - 2 \cdot (-1) = 1$$

El sistema tiene como solución $x = 1, y = -1$.

5.º Comprobamos que la solución obtenida es solución del sistema.

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, y=-1 \\ 1 + 2 \cdot (-1) = -1 \\ 2 \cdot 1 - (-1) = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 = -1 \\ 3 = 3 \end{cases}$$

Son identidades; por tanto, $x = 1, y = -1$ es la solución del sistema.

Figura 4.13. Ejemplo de TC.2.2 (Alejo, S., et al., 2023, p.124).

- TC.2.3. Determinar la(s) solución(es) mediante el método de igualación.

MÉTODO DE IGUALACIÓN

Resolvemos el sistema $\begin{cases} 5x - 4y = 23 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases}$.

Paso 1
Despejamos la misma incógnita en las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} 5x - 4y = 23 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{23 + 4y}{5} \\ x = \frac{-4 - 5y}{2} \end{cases}$$

Paso 2
Igualamos las expresiones obtenidas.

$$\frac{23 + 4y}{5} = \frac{-4 - 5y}{2}$$

Paso 3
Resolvemos la ecuación obtenida y hallamos el valor de la incógnita.

$$2(23 + 4y) = 5(-4 - 5y) \Rightarrow 46 + 8y = -20 - 25y \Rightarrow 33y = -66 \Rightarrow y = -\frac{66}{33} = -2$$

Paso 4
Sustituimos el valor obtenido en una de las ecuaciones despejadas y obtenemos el valor de la otra incógnita.

$$x = \frac{-4 - 5 \cdot (-2)}{2} = \frac{-4 + 10}{2} = 3$$

La solución del sistema es (3, -2).

Figura 4.14. Ejemplo de TC.2.3 (Nieto, M., et al., 2023, p.205).

- TC.2.4. Determinar la(s) solución(es) mediante el método de reducción.

En general, para resolver un sistema por reducción:

$$\begin{cases} 5x + 2y = -1 \\ -2x + 7y = 16 \end{cases}$$

1. Multiplicamos las ecuaciones por números apropiados para que, en una de las incógnitas, los coeficientes queden iguales, pero de signo contrario.

$$\begin{array}{rcl} 5x + 2y = -1 & \xrightarrow{(\cdot 2)} & 10x + 4y = -2 \\ -2x + 7y = 16 & \xrightarrow{(\cdot 5)} & -10x + 35y = 80 \end{array}$$

2. Sumamos las dos ecuaciones.

$$\begin{array}{rcl} 10x + 4y = -2 \\ -10x + 35y = 80 \\ \hline 39y = 78 \end{array}$$

3. Resolvemos la ecuación con una sola incógnita: $39y = 78 \rightarrow y = \frac{78}{39} = 2$

4. Sustituimos la incógnita ya hallada en una de las ecuaciones del sistema y despejamos la otra.

$$5x + 2y = -1 \quad y = 2 \rightarrow 5x + 2 \cdot 2 = -1 \rightarrow 5x + 4 = -1 \rightarrow 5x = -5 \rightarrow x = -1$$

La solución del sistema es: $x = -1, y = 2$

Figura 4.15. Ejemplo de TC.2.4 (Machín, P. y Rey, M.J., 2023, p.108).

- TC.2.5. Determinar la(s) solución(es) mediante el método gráfico.

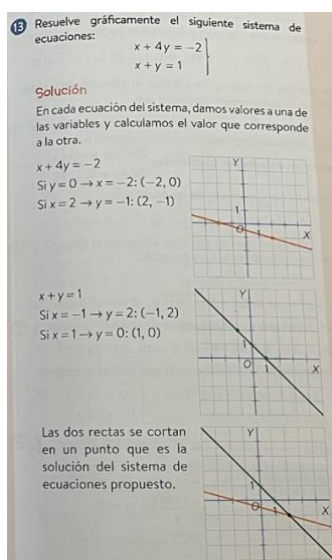


Figura 4.16. Ejemplo de TC.2.5 (Machín, P. y Rey, M.J., 2023, p.105).

- TC.2.6. Construir tablas de valores.

Damos valores a x para obtener los posibles valores de y y los representamos en una tabla.

x	$y = 30 - 2x$
-2	$30 - 2 \cdot (-2) = 34$
0	$30 - 2 \cdot 0 = 30$
5	$30 - 2 \cdot 5 = 20$
15	$30 - 2 \cdot 15 = 0$

Figura 4.17. Ejemplo de TC.2.6 (Nieto, M., et al., 2023, p.196).

- TC.2.7. Determinar la(s) solución(es) mediante las tablas de valores.

$x + y = 25$					
x	1	5	13	30	...
y	24	20	12	-5	...

$x - y = 1$					
x	-1	6	13	30	...
y	-2	5	12	29	...

El par de valores $x = 13$ e $y = 12$ verifica las dos ecuaciones y constituye una solución del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 25 \\ x - y = 1 \end{array} \right\}$$

Luego, la edad de los dos jóvenes es de 13 años y 12 años, respectivamente.

Figura 4.18. Ejemplo de TC.2.7 (Machín, P. y Rey, M.J., 2023, p.102).

- TC.2.8. Comprobar si el par (a,b) es solución de un sistema de ecuaciones.

EJEMPLO

4. Indica si estos valores son solución del sistema $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$.

a) $x = 1, y = 3$

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \xrightarrow{x=1, y=3} \begin{cases} 1 + 2 \cdot 3 = 7 \\ 3 \cdot 1 - 3 = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + 6 = 7 \\ 3 - 3 = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7 = 7 \\ 0 = 7 \end{cases}$$

No es solución.
La segunda ecuación no se cumple.

b) $x = 3, y = 2$

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \xrightarrow{x=3, y=2} \begin{cases} 3 + 2 \cdot 2 = 7 \\ 3 \cdot 3 - 2 = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 + 4 = 7 \\ 9 - 2 = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7 = 7 \\ 7 = 7 \end{cases}$$

Es solución.

c) $x = 0, y = -7$

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \xrightarrow{x=0, y=-7} \begin{cases} 0 + 2 \cdot (-7) = 7 \\ 3 \cdot 0 - (-7) = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 - 14 = 7 \\ 0 + 7 = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -14 = 7 \\ 7 = 7 \end{cases}$$

No es solución.
La primera ecuación no se cumple.

Figura 4.19. Ejemplo de TC.2.8 (Alejo, S., et al., 2023, p.122).

- TC.2.9. Clasificar los tipos de sistemas en: compatibles determinados, compatibles indeterminados y sistemas incompatibles.

En ninguno de los libros de texto se presenta una clasificación en función del número de soluciones. En las editoriales de Oxford y SM se indica el número de soluciones que puede tener un sistema, pero sin llegar a clasificarlos según si los sistemas son compatibles o incompatibles.

- TC.2.10. Determinar la(s) solución(es) mediante el uso de GeoGebra.

Notas:

- Introduce coeficientes enteros; si es preciso, elimina previamente los denominadores presentes en la ecuación (multiplicando por ellos toda la ecuación).
- Puedes recuperar las ecuaciones introducidas en la barra de Entrada haciendo clic en ella y pulsando las teclas ↑ y ↓.

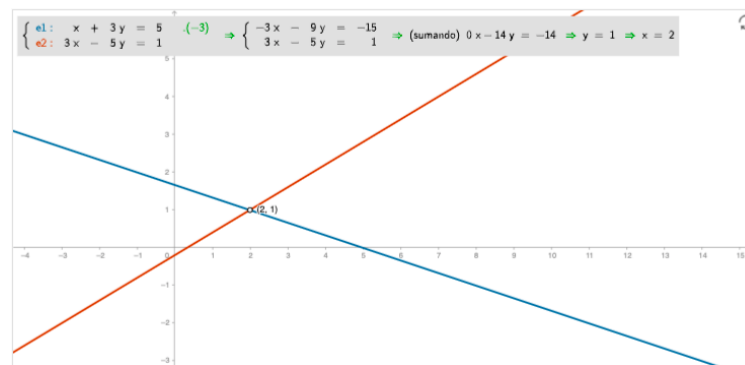


Figura 4.20. Ejemplo de TC.2.10 (recurso digital) (Nieto, M., 2023, et al).

- TC.2.11. Generar un sistema de ecuaciones equivalente.

Para obtener una ecuación equivalente a otra dada, basta con multiplicar o dividir la ecuación por un número distinto de cero.

$$x + y = 6 \xrightarrow{\cdot 2} 2x + 2y = 12$$

Figura 4.21. Ejemplo 1 de TC.2.11 (Alejo, S., et al., 2023, p.120).

Actividad resuelta

Encuentra tres sistemas equivalentes al sistema $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 2x-2y=10 \end{cases}$ que tiene como solución (3, -2).

Procedimiento	Sistema equivalente obtenido
Sumamos 3 en los dos miembros de la primera ecuación.	$\begin{cases} 2x+y+3=4+3 \\ 2x-2y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+3=7 \\ 2x-2y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 3+(-2)+3=7 \\ 2 \cdot 3-2 \cdot (-2)=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7=7 \\ 10=10 \end{cases}$
Dividimos la segunda ecuación entre 2.	$\begin{cases} 2x+y=4 \\ \frac{2x-2y}{2}=\frac{10}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=4 \\ x-y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 3+(-2)=4 \\ 3-(-2)=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4=4 \\ 5=5 \end{cases}$
Sustituimos la segunda ecuación por la suma de ambas.	$\begin{cases} 2x+y=4 \\ 2x+2x+y-2y=4+10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=4 \\ 4x-y=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 3+(-2)=4 \\ 4 \cdot 3-(-2)=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4=4 \\ 14=14 \end{cases}$

Figura 4.22. Ejemplo 2 de TC.2.11 (Nieto, M., et al., 2023, p.199).

A continuación, se muestra la Tabla 4.3 que resume toda esta información sobre la presencia de las distintas técnicas en los libros de texto.

Libro / TC	Santillana	Oxford	SM
TC.1.1	No	Sí	No
TC.1.2	Sí	No	Sí
TC.2.1	Sí	No	Sí
TC.2.2	Sí	Sí	Sí
TC.2.3	Sí	No	Sí
TC.2.4	Sí	Sí	Sí
TC.2.5	No	Sí	Sí
TC.2.6	Sí	Sí	Sí
TC.2.7	Sí	Sí	No
TC.2.8	Sí	Sí	Sí
TC.2.9	No	No	No
TC.2.10	No	No	Sí

Tabla 4.3. Técnicas en los libros de texto.

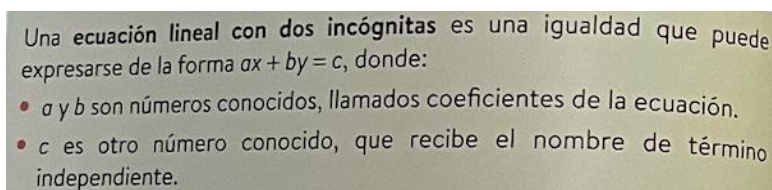
A partir de la Tabla 4.3, podemos realizar varias observaciones. La primera es que llama la atención que solo el libro de la editorial SM trabaja con sistemas de ecuaciones equivalentes, mientras la editorial de Santillana solo lo hace para ecuaciones. Asimismo, llama la atención que solo hay un libro de texto que presenta todos los métodos de resolución algebraicos junto con el método gráfico, a la par que técnicas para resolución de sistemas, que es el de la editorial SM. Esto podría terminar limitando las estrategias de resolución por parte del alumnado.

Finalmente, también destaca el hecho de que solo uno de los libros de texto incluye técnicas sobre la resolución de sistemas con el uso de GeoGebra.

Tecnologías

A continuación, veremos las tecnologías presentadas en el subapartado 3.2, es decir, las diferentes definiciones, propiedades y teoremas relacionados con el objeto matemático que estamos tratando. Antes de proceder, es preciso señalar que en este curso es común la ausencia de teoremas o justificaciones formales, de acuerdo con el nivel de los alumnos a los que van destinados estos libros de texto, ya que es necesario un alto nivel de abstracción. Es por eso por lo que la mayoría de las tecnologías que vamos a encontrar en los libros son definiciones o interpretaciones y aplicaciones de propiedades.

- TG.1. Asociadas a las definiciones.
 - TG.1.1. Definición de ecuación lineal con dos incógnitas.



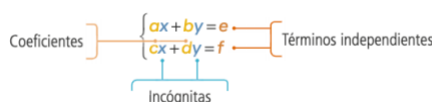
Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una igualdad que puede expresarse de la forma $ax + by = c$, donde:

- a y b son números conocidos, llamados coeficientes de la ecuación.
- c es otro número conocido, que recibe el nombre de término independiente.

Figura 4.23. Ejemplo de TG.1.1 (Machín, P. y Rey, M.J., 2023, p.102).

- TG.1.2. Definición de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

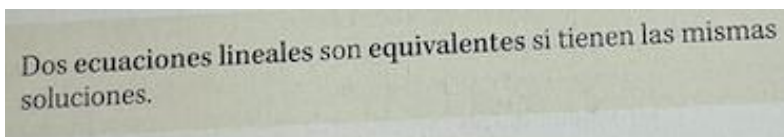
Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un par de ecuaciones de primer grado de la forma:


$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

El diagrama muestra las partes de las ecuaciones: los términos a y b en la primera ecuación y c y d en la segunda están agrupados por una corcheta y etiquetados como 'Coeficientes'. Los términos e y f están agrupados por una corcheta y etiquetados como 'Términos independientes'. Las variables x y y están agrupadas por una corcheta y etiquetadas como 'Incógnitas'.

Figura 4.24. Ejemplo de TG.1.2 (Nieto, M., et al., 2023, p.198).

- TG.1.3. Definición de ecuaciones equivalentes.



Dos **ecuaciones lineales** son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Figura 4.25. Ejemplo de TG.1.3 (Alejo, S., et al., 2023, p.120).

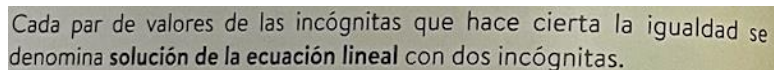
- TG.1.4. Definición de sistemas de ecuaciones equivalentes.



Dos **sistemas** de ecuaciones son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.

Figura 4.26. Ejemplo de TG.1.4 (Nieto, M., et al., 2023, p.199).

- TG.2. Asociadas a las soluciones de los sistemas de ecuaciones.
 - TG.2.1. Definición de solución de una ecuación lineal.



Cada par de valores de las incógnitas que hace cierta la igualdad se denomina **solución de la ecuación lineal** con dos incógnitas.

Figura 4.27. Ejemplo de TG.2.1 (Machín, P. y Rey, M.J., 2023, p.102).

- TG.2.2. Definición de solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Un par de números (x, y) es una **solución** del sistema cuando verifica las dos ecuaciones a la vez.

Figura 4.28. Ejemplo de TG.2.2 (Nieto, M., et al., 2023, p.198).

- TG.2.3. Conocer los tipos de sistemas de ecuaciones lineales según el número de soluciones: compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

En ninguno de los tres libros de texto se definen los tipos de sistemas de ecuaciones con esos términos, aunque sí encontramos una clasificación según el número de soluciones del sistema de la siguiente manera, aunque relacionada con la representación gráfica:

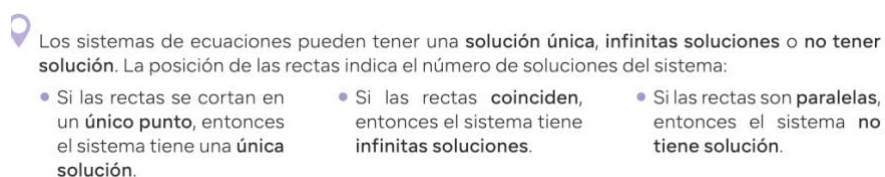


Figura 4.29. Ejemplo de TG.2.3 (Nieto, M., et al., 2023, p.201).

- TG.2.4. Conocer los tipos de sistemas de ecuaciones lineales según su representación gráfica.

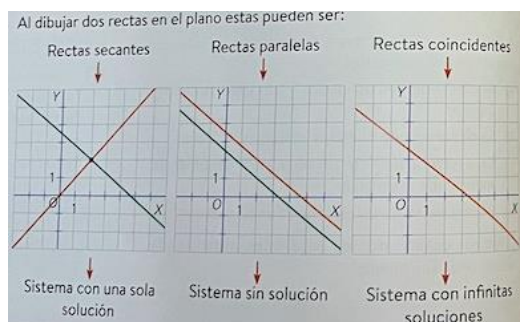


Figura 4.30. Ejemplo de TG.2.4 (Machín, P. y Rey, M.J., 2023, p.104).

A continuación, se presenta la Tabla 4.4 resumen de toda esta información.

Libro / TG	Santillana	Oxford	SM
TG.1.1	Sí	Sí	Sí
TG.1.2	Sí	Sí	Sí
TG.1.3	Sí	No	No
TG.1.4	No	No	Sí
TG.2.1	Sí	Sí	Sí
TG.2.2	Sí	Sí	Sí
TG.2.3	No	Sí	Sí

TG.2.4	No	Sí	Sí
--------	----	----	----

Tabla 4.4. Tecnologías en los libros de texto.

Observando la Tabla 4.4, observamos que el trabajo con ecuaciones o sistemas equivalentes es distinto en cada editorial, ya que hay una que solo presenta la definición de ecuación, otra que solo presenta la de sistema, mientras que la de Oxford no trabaja en ningún momento las equivalencias. Asimismo, llama la atención que en ninguna editorial se presenta el término de cada sistema de acuerdo con el número de soluciones que tenga, ya que en las dos editoriales que presentan el número de soluciones que puede tener un sistema lo justifica exclusivamente con la representación gráfica.

En los dos libros de texto donde se trabaja el método de resolución gráfico se aprecia el hincapié que hacen en la interpretación de las gráficas. Pero por el nivel del alumnado en este curso, se tiene que la presencia de tecnologías en los libros de texto es muy escasa.

Como conclusiones del análisis de libros de texto, vemos que los tres que hemos estudiado se ciñen a los contenidos que dicta el currículo, aunque en algunos libros de texto no se muestran todas las técnicas que se han expuesto. Otra conclusión relevante es que, en el currículo se encuentra la resolución de problemas como un enfoque metodológico para el aprendizaje de las matemáticas, y es un aspecto que no destaca especialmente en los libros de texto. Este enfoque metodológico permite que el alumnado analice las distintas estrategias de resolución, implicando la toma de decisiones de manera autónoma, y, aunque las editoriales presenten ejercicios donde no se especifica el método a tener en cuenta, no muestran el aprendizaje basado en problemas, donde el alumnado deba razonar los pasos que sigue y el por qué. En las distintas editoriales a lo largo de la unidad apenas emplean metodologías activas que resulten motivadoras para el alumnado, aunque es destacable que al final de la unidad todas presentan alguna actividad de estas características en las que se pone en práctica tanto el objeto matemático que estamos tratando, como de otras unidades. En el libro de SM encontramos un reto que, mediante el uso de sistemas de ecuaciones, ayuda a reflexionar sobre la igualdad de género en las universidades; en Oxford se presenta un proyecto sobre reciclaje, que además involucra el uso de herramientas digitales; y finalmente, en Santillana encontramos una situación de aprendizaje sobre la compra de un vehículo, analizando distintas características mediante los sistemas de ecuaciones. Estas actividades ayudan a los alumnos a ver la utilidad del objeto matemático que están trabajando, lo que puede reforzar su motivación.

5. Propuesta didáctica

En este capítulo se presenta la propuesta didáctica diseñada, enfocada al curso de 2º de ESO que, como se ha comentado previamente acorde al currículo de Aragón, es el primer curso donde se trabaja este objeto matemático.

Antes de presentar la secuencia en detalle, es preciso señalar qué competencias se pretenden movilizar con el trabajo del objeto matemático. Atendiendo a las competencias específicas del currículo de Matemáticas, se tiene que, mediante el desarrollo de esta propuesta didáctica, se pretenden trabajar de forma transversal todas ellas, aunque destacan las mencionadas en el apartado sobre el [Currículo de Aragón](#). De esta manera, a pesar de que todas en mayor o menor medida van a estar presentes durante la unidad, en cada sesión se van a destacar aquellas que considero de mayor relevancia de cara a la consecución de los objetivos propuestos en cada sesión durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

De cara a las competencias clave, a continuación, se expone de qué manera se pretenden trabajar:

- Competencia Matemática y Competencia en Ciencia, Tecnología e Ingeniería (STEM). El objetivo principal de esta propuesta es que los alumnos sean capaces de plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante razonamientos que pueden aplicar en su día a día.
- Competencia Digital (CD). Esta competencia se trabaja especialmente con el uso de la herramienta digital de GeoGebra, que permite a los alumnos visualizar y comprender mejor los conceptos que se exponen en el aula.
- Competencia en comunicación lingüística (CL). El trabajo de esta competencia durante la propuesta se basa en la comprensión lectora de los problemas para su correcta comprensión, además de la exposición por parte de los alumnos de los distintos procesos y métodos que llevan a cabo, especialmente en la realización de problemas en la pizarra.
- Competencia Persona, Social y de Aprender a Aprender (CPSAA). Esta competencia se desarrolla al enfrentarse a nuevos métodos de resolución, favoreciendo su autonomía, perseverancia y capacidad de reflexión sobre su actuación y errores en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, mediante el trabajo en grupo se fomenta la colaboración, el respeto y la comunicación entre iguales.

5.1. Cronograma de las sesiones

Tal y como se ha diseñado, la propuesta didáctica consta de 8 sesiones de 50 minutos cada una. A continuación, se presenta la Tabla 5.1, donde se resumen de las actividades de cada sesión junto a la duración estimada para cada una. Es preciso señalar que esta duración es orientativa, ya que se debe adaptar al ritmo de los alumnos de manera que se asegure un completo entendimiento y manejo del objeto matemático que se está trabajando.

SESIÓN	ACTIVIDAD	DURACIÓN
1	Inicio + Activación	10'
	Desmos	15'
	Problema autobús + Puesta en común	20'
	Institucionalización	5'
2	Inicio + Problema fiestas + Puesta en común	20'
	Resolución problema fiestas	15'
	Resolución problema equivalente	10'
	Institucionalización	5'
3	Inicio + Actividad Desmos	35'
	Actividad GeoGebra	10'
	Institucionalización	5'
4	Inicio + Actividad 1 Descubrimiento del método	20'
	Problemas + Observación trabajo de los grupos	20'
	Puesta en común + Institucionalización	10'
5	Inicio + Actividad 1 Descubrimiento del método	20'
	Problemas + Observación trabajo de los grupos	20'
	Puesta en común + Institucionalización	10'
6	Inicio + Actividad 1 Descubrimiento del método	20'
	Problemas + Observación trabajo de los grupos	20'
	Puesta en común + Institucionalización	10'
7	Inicio	5'
	Resolución problemas	35'
	Corrección + Puesta en común	10'
8	Inicio	5'
	Problem posing	20'
	Resolución problemas	15'
	Corrección + Puesta en común	10'

Tabla 5.1 Cronograma de las sesiones.

5.2. Diseño de las sesiones

La propuesta didáctica se ha diseñado en torno a 8 sesiones. El número de sesiones se debe a la relevancia de los sistemas de ecuaciones como objeto matemático en el Currículo, que se continúa trabajando en cursos posteriores, tal y como se ha comentado anteriormente, así como a la diversidad de métodos de resolución que se pueden trabajar. Es preciso tener en cuenta que, a la hora de implementarla en el aula, es posible que no se siga la secuenciación estrictamente, o incluso que sea necesaria la introducción de sesiones de repetición de técnicas. Todas las sesiones dependen del progreso del alumnado en las anteriores, por lo que, si algún concepto no ha sido comprendido correctamente, será necesario insistir en él en la siguiente sesión, llevando a cabo un segundo proceso de institucionalización del contenido. Por ello, esta propuesta actúa como un esquema flexible que permite adaptaciones en función de las necesidades de cada aula.

Otro aspecto que destacar en el diseño de esta propuesta es que va a estar basada en metodologías activas que fomentan el trabajo colaborativo y la argumentación matemática, mediante tareas de suelo bajo techo alto. En todas las sesiones se plantea que el alumnado trabaje en pequeños grupos heterogéneos, formados por el docente y distintos en cada sesión, para favorecer el intercambio de ideas, la colaboración con distintos compañeros y construir el conocimiento de forma conjunta. Esta organización se inspira en el enfoque de las *Thinking Classrooms* (Liljedahl, 2020), donde el trabajo en grupo, el razonamiento compartido y la participación activa del alumnado son fundamentales. Esta forma de trabajar no solo busca promover la implicación de todos los miembros, sino que permite a los alumnos desarrollar estrategias, confrontar distintos puntos de vista y construir su propio pensamiento matemático. En algunas sesiones, además, se apuesta por el aprendizaje por descubrimiento, potenciado por esta dinámica colaborativa. Este aprendizaje por descubrimiento busca que los alumnos lleguen a la formalización del conocimiento matemático a partir de sus descubrimientos, partiendo de los conocimientos que ya poseen, y se apoya en una orientación dirigida e institucionalización final para evitar errores a los que el alumnado puede llegar por inducción (Domínguez, 1991). El enfoque principal de la propuesta es la enseñanza a través de la resolución de problemas, ya que, acorde a Beltrán y Martínez-Juste (2021), esta permite que los contenidos matemáticos surjan de la propia actividad de los alumnos, favoreciendo así la construcción activa del conocimiento y el desarrollo del pensamiento matemático. El proceso de esta metodología de enseñanza sigue una estructura de la siguiente manera, de acorde a Beltrán y Martínez-Juste (2021):

- Los escolares se enfrentan a situaciones problemáticas sin haber recibido instrucción previa sobre los contenidos que quieren enseñarse.

- Los problemas deben promover la reflexión y la indagación hacia la búsqueda de estrategias que permitan resolverlos.
- El profesor utiliza las respuestas de los alumnos para organizar una puesta en común que permita introducir los nuevos conceptos.
- Por último, los alumnos resuelven problemas para afianzar los nuevos contenidos. (p. 2-3)

Antes de comenzar con la propuesta didáctica, es preciso señalar que no se considera necesario realizar una evaluación inicial específica para esta unidad, ya que la unidad anterior, acorde con los contenidos del curso, trata sobre ecuaciones lineales. Por tanto, el desempeño de los alumnos y su evaluación a lo largo de la unidad actúan como evaluación inicial previa para obtener información sobre el punto de partida del alumnado. A partir de esa información, el docente puede preparar su actividad adaptando las metodologías y los feedback que se consideren adecuados en las actividades, con el objetivo de que todos los alumnos puedan seguir la unidad sin dificultades. Con respecto al trabajo con los ejes cartesianos, se repasará a lo largo de las sesiones en caso de que no se haya abordado durante el curso escolar, a pesar de haberlo trabajado en cursos anteriores, como se ha mencionado previamente.

A continuación, se detallan cada una de las sesiones, incluyendo las competencias específicas que se trabajan, los criterios de evaluación, los objetivos, metodologías y actividades a realizar, incluyendo posibles dificultades del alumnado.

SESIÓN 1. ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

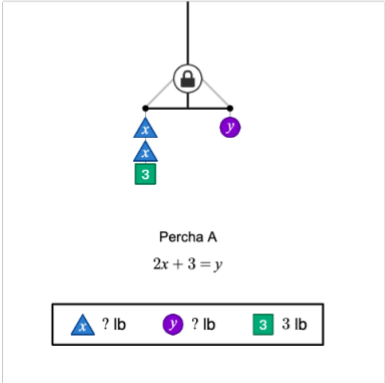
Competencias específicas	CE.M.1, CE.M.2 y CE.M.8.
Criterios de evaluación	1.1, 1.2, 2.1, 2.2 y 8.1.
Objetivos de la sesión	-Introducir el concepto de ecuación lineal con dos incógnitas y solución de una ecuación lineal con dos incógnitas. -Observar que una ecuación con dos incógnitas tiene infinitas soluciones. -Trabajar con las distintas representaciones de una ecuación lineal con dos incógnitas.
Tipos de tareas, técnicas y tecnologías empleadas	TT.1, TT.3. TC.1.1, TC.1.2. TG.1.1, TG.2.1.

ACTIVIDADES DE LA SESIÓN

1. Dos números suman 10. ¿De qué números se trata? ¿Cómo podríamos expresar esta operación si no conocemos los números?"
2. Realiza las actividades propuestas en Desmos para encontrar el equilibrio en las siguientes balanzas.
3. Un autobús llega a una parada con 15 personas dentro. En esa parada, suben algunas personas y bajan otras. En la siguiente parada, hay 20 personas en el autobús. ¿Cuántas personas subieron? ¿Cuántas bajaron? ¿Se puede saber solo con esta información?
 - Buscad y anotad distintas combinaciones posibles de personas que subieron y que bajaron.
 - ¿Qué relación se cumple entre las personas que suben y que bajan?
 - Representad los datos en los ejes cartesianos. ¿Qué forma tiene la representación? Comprobadlo con GeoGebra. ¿Cuántos datos necesitáis para poder hacer la representación?
 - ¿Es posible que en una parada suban 24 y bajen 6? ¿Y que $x=15$ e $y=10$? ¿Y $x = 5$ e $y = -5$? ¿Cómo lo habéis sabido?

La actividad 2 de Desmos (adaptada de los autores Jay Chow y Kayla Muñoz) se encuentra en el siguiente enlace, que reciben los alumnos: <https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/6842be3a2f8b4b065315a013?lang=e>

Encuentra el equilibrio



Encuentra los valores de x y y para que la percha se mantenga en equilibrio.

Haz clic en "Probar" para ver si la percha está nivelada.

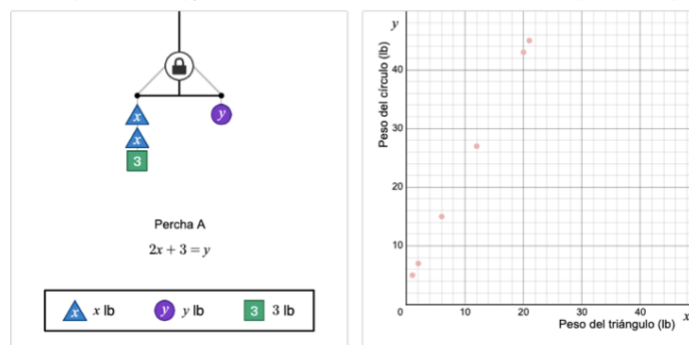
¿Encontráis más de una pareja de valores? Anotad la(s) respuesta(s) que encontréis.

x	y

Probar

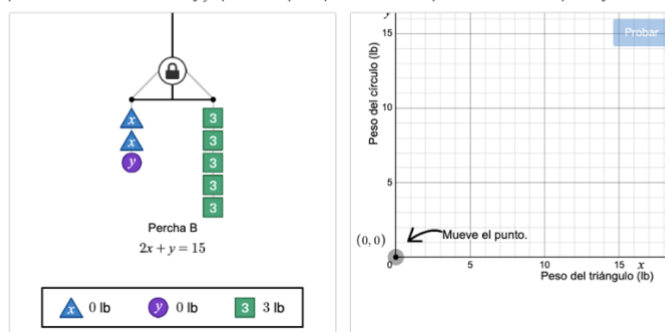
¿Qué se forma?

La gráfica muestra los puntos cuyos valores de x y y mantienen el equilibrio de la percha. Discute lo que notas y lo que te preguntas sobre estos puntos.



Logra que se mantenga en equilibrio

Encuentra tres pares diferentes de valores x y y que harán que la percha esté en equilibrio moviendo el punto y haciendo clic en "Probar".



ORGANIZACIÓN DE LA SESIÓN

Durante toda la sesión, el alumnado trabajará en grupos de 3 o 4 personas, fomentando el trabajo colaborativo. La sesión está centrada en el aprendizaje por descubrimiento, potenciado por esta dinámica grupal. Las actividades han sido seleccionadas para promover un aprendizaje activo mediante tareas de suelo bajo y techo alto, de manera que todos los estudiantes puedan participar y avanzar desde su propio nivel de partida.

Inicio de la sesión. Los primeros 5' de la sesión se dedican a organizar la clase en los grupos heterogéneos formados por el profesor buscando el intercambio de ideas que ayude al trabajo grupal. Se reparte la ficha con el primer enunciado.

Desarrollo de la sesión.

Los siguientes 5' se dedican a que los distintos grupos resuelvan la primera actividad, que actúa como actividad de iniciación, mientras el docente se pasea por el aula observando el trabajo que realizan, atendiendo a las posibles dudas y ofreciendo diversos feedback en función de las necesidades de cada grupo.

Seguidamente, se destinan 15' a que los alumnos realicen la actividad de Desmos, donde los alumnos comienzan a ver la representación tabular y gráfica de las ecuaciones lineales con dos incógnitas, así como afianzar la idea del número de soluciones que han comenzado a ver en la actividad 1.

Tras acabar estas actividades, se entrega una segunda ficha con la actividad 3, para la que se dejan 20' y se sigue la misma metodología que para la actividad anterior. Con esta actividad los alumnos deben llegar a las diferentes formas de representar la información: verbal, algebraica, tabular y gráfica. Se pide que también que los alumnos comiencen a trabajar con el software de GeoGebra, para afianzar la representación gráfica. Para llegar a esto, las preguntas de la ficha actúan como orientación dirigida. La cuarta pregunta se plantea para que los alumnos comprendan que es tan importante la solución como su veracidad en el contexto.

Al acabar ambas actividades se hace una puesta en común del trabajo que han estado haciendo los grupos, a la par que las conclusiones que han extraído.

Cierre de la sesión. Los últimos 5' de la sesión se dedican a la institucionalización de la definición de ecuación lineal con dos incógnitas y solución de una ecuación, junto con la propiedad de que tienen infinitas soluciones. Asimismo, se exponen formalmente las formas de representación. Los alumnos deben anotar en sus cuadernos con sus palabras lo trabajado en la sesión bajo el título “Qué he aprendido hoy”, para así favorecer la reflexión sobre su propio proceso de aprendizaje, consolidar los contenidos abordados y fomentar la autonomía.

ANÁLISIS PREVIO DE LA SESIÓN

En la primera actividad, se espera que los alumnos comiencen a dar respuestas empleando números naturales como “ $1+9$ ”, o “ $4+6$ ”, sin incluir respuestas con números negativos o números racionales. Aun así, de esta manera comienzan a observar que hay múltiples soluciones y el posible feedback para esta actividad consiste en indicar que qué ocurre si uno de los números es negativo o una fracción. En el enunciado encontramos preguntas que sirven de orientación dirigida para que los alumnos lleguen a la representación algebraica. De esta manera, los alumnos llegan a la solución: $x + y = 10$.

La segunda actividad de Desmos pretende actuar como introductora a la actividad final de la sesión. En la primera ficha de nuevo se esperan soluciones en las que los alumnos de nuevo no empleen números negativos ni racionales. Con respecto a la segunda, se espera que los alumnos no encuentren gran dificultad en razonar que la gráfica que se obtiene es una recta, aunque se esperan dificultades en la interpretación de la recta como las infinitas soluciones de la ecuación. Con el fin de solventar esta dificultad, se realiza la tercera ficha, en la que cada grupo puede obtener soluciones distintas.

La tercera actividad sobre el autobús se usa para modelizar la situación mediante una ecuación lineal con dos variables, lo que puede suponer una dificultad inicial para algunos estudiantes, con respecto a la interpretación del problema y el planteamiento de la situación. Al haber trabajado ya en Desmos con tabla de valores y gráfica, se espera que los alumnos no encuentren grandes dificultades en las distintas representaciones. Se pide

la comprobación con la herramienta GeoGebra para que comiencen a familiarizarse con ella.

El trabajo colaborativo ayudará a que los alumnos contrasten ideas y argumenten diferentes soluciones, aunque puede ser necesario que el docente intervenga para guiar la reflexión y corregir errores conceptuales.

SESIÓN 2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Competencias específicas	CE.M.1, CE.M.3 y CE.M.4
Criterios de evaluación	1.1, 1.2, 3.1 y 4.2.
Objetivos de la sesión	-Introducir el concepto de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y solución de un sistema. -Resolver sistemas mediante el uso de tablas de valores. -Introducir el concepto de ecuaciones y sistemas equivalentes.
Tipos de tareas, técnicas y tecnologías empleadas	TT.2, TT.4. TC.2.1, TC.2.6, TC.2.7, TC.2.11. TG.1.2, TG.1.3, TG.1.4, TG.2.2.

ACTIVIDADES DE LA SESIÓN

1. ¡Son las fiestas del instituto! Este año, los grupos de 2º de ESO han montado varios puestos para vender bocadillos y refrescos. Necesitan recaudar dinero, así que han apuntado lo que han vendido para ver si les sale rentable. Vamos a ayudarles a averiguar cuánto estaban cobrando por cada cosa.
 - En 2º A, vendieron 4 bocadillos y 6 refrescos, y recaudaron 17€.
 - En 2º B, vendieron 6 bocadillos y 4 refrescos, y recaudaron 18 €.¿Cuánto han cobrado por cada bocadillo y por cada refresco?
Encontrad la(s) combinación(es) que funcionen para los dos grupos.
2. Hemos preguntado a los otros grupos de 2º de ESO, y nos han mostrado lo que han vendido apuntado en la siguiente tabla:

Curso	Bocadillos	Refrescos	Recaudado
2º C	8	12	34€
2º D	3	2	9€

¿Estos grupos han cambiado el precio de los bocadillos y refrescos? ¿Cómo varían los precios en los cursos de 2º A y 2º C? ¿Y entre 2º B y 2º D?

ORGANIZACIÓN DE LA SESIÓN

Al igual que en la sesión anterior, esta está enfocada en el aprendizaje por descubrimiento mediante el trabajo colaborativo entre alumnos. Por ello, durante toda la sesión, el alumnado trabajará en grupos de 3 o 4 personas.

Inicio de la sesión. Los primeros 5' de la sesión se dedican a organizar la clase en los grupos heterogéneos formados por el profesor buscando el intercambio de ideas que ayude al trabajo grupal. Se reparte la ficha con el primer enunciado, haciendo una lectura en voz alta para que todos los grupos entiendan la tarea que se pide.

Desarrollo de la sesión.

Los siguientes 10' se dedican a que los distintos grupos traten de plantear la situación del primer problema, sin haber mencionado en ningún momento el concepto de sistema de ecuaciones lineales. El docente mientras tanto se pasea por los distintos grupos observando los trabajos y tratando de resolver cualquier posible duda que pueda surgir.

Cuando todos los grupos tengan planteado el problema, en los siguientes 5', se hace una puesta en común para reconducirlo al planteamiento del enunciado y se realizan en alto las siguientes cuestiones: “¿Qué estamos buscando? ¿Por qué necesitamos dos ecuaciones?”. De esta manera, se realiza un pequeño debate con toda la clase donde comienza a surgir la idea de un sistema de ecuaciones lineales.

Durante los siguientes 15' se deja al alumnado tiempo para que intente resolver el sistema planteado en la actividad 1. El objetivo es que lo resuelvan mediante tablas de valores, para lo que el docente indicará que vayan probando distintos precios posibles para los dos casos. Así, los alumnos deben descubrir que la solución del sistema será la solución que encuentren en común en las dos tablas de valores.

Tras acabar esta actividad, se entrega una segunda ficha con la actividad 2, que deben resolver en los siguientes 10'. Se plantea con el fin de que los alumnos descubran que los conjuntos de soluciones coinciden con los de la actividad 1, así como que trabajen con el registro tabular.

Al acabar ambas actividades se hace una puesta en común del trabajo que han estado haciendo los grupos, a la par que las conclusiones que han extraído.

Cierre de la sesión. Los últimos 5' de la sesión se dedican a la institucionalización de la definición de sistema lineal con dos incógnitas y solución de un sistema. También se presenta la definición de ecuación y sistema equivalente, así como las técnicas para obtenerlos. De nuevo, los alumnos deben anotar en su diario reflexivo los conocimientos que hayan adquirido durante la sesión.

ANÁLISIS PREVIO DE LA SESIÓN

La solución de la primera actividad es (2,1.5) tras plantear el sistema
$$\begin{cases} 4x + 6y = 17 \\ 6x + 4y = 18 \end{cases}$$

La solución de la segunda actividad es la misma, al tratarse de sistemas equivalentes ya que la primera ecuación de este segundo sistema es la primera ecuación del primer sistema multiplicada a ambos lados por 2, y la segunda ecuación corresponde con la segunda del primer sistema dividida entre 2:
$$\begin{cases} 8x + 12y = 34 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

En la primera actividad, se espera que al alumnado le cueste entender qué representan exactamente las incógnitas, ya que pueden confundir si se refieren al precio o a la cantidad de objetos vendidos.

Con respecto a la resolución, se espera que los alumnos comiencen a dar valores sin organizar la información que obtienen en una tabla, lo que hará más complicado el proceso de llegar a la solución del sistema. Para ello, es preciso que el docente realice comentarios que actúen de orientación dirigida, recordando las tablas de valores de la sesión anterior. No se espera que prueben con números negativos, lo que resulta adecuado en este contexto. En la resolución de los problemas aparecen números decimales, lo que va a hacer que los alumnos piensen que lo están haciendo mal, o incluso que el problema es más complicado. Es preciso que sean conscientes de que la solución debe tener sentido en relación con el contexto con el que está relacionada.

Si han comprendido la primera actividad, no se esperan grandes dificultades en la segunda más allá de encontrar la relación entre los dos sistemas.

El trabajo colaborativo será clave para que los estudiantes contrasten ideas y argumenten sus resultados, aunque es probable que el docente tenga que intervenir para clarificar conceptos y evitar malentendidos. También es posible que algunos alumnos muestren dificultad para expresar verbalmente o por escrito las conclusiones a las que llegan, por lo que, de nuevo, será clave la intervención del profesor.

SESIÓN 3. MÉTODO GRÁFICO DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

Competencias específicas	CE.M.3, CE.M.4, CE.M.8.
Criterios de evaluación	3.1, 3.2, 3.3, 4.1, 8.1
Objetivos de la sesión	-Conocer y aplicar el método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones. -Resolver problemas mediante el método gráfico. -Usar GeoGebra para comprobar las soluciones. -Conocer los distintos tipos de sistemas de ecuaciones según el número de soluciones. -Clasificar sistemas según su representación gráfica.
Tipos de tareas, técnicas y tecnologías empleadas	TT.2, TT.3, TT.4. TC.2.1, TC.2.5, TC.2.9, TC.2.10 TC.2.11. TG.1.2, TG.1.3, TG.2.2, TG. 2.3, TG.2.4.

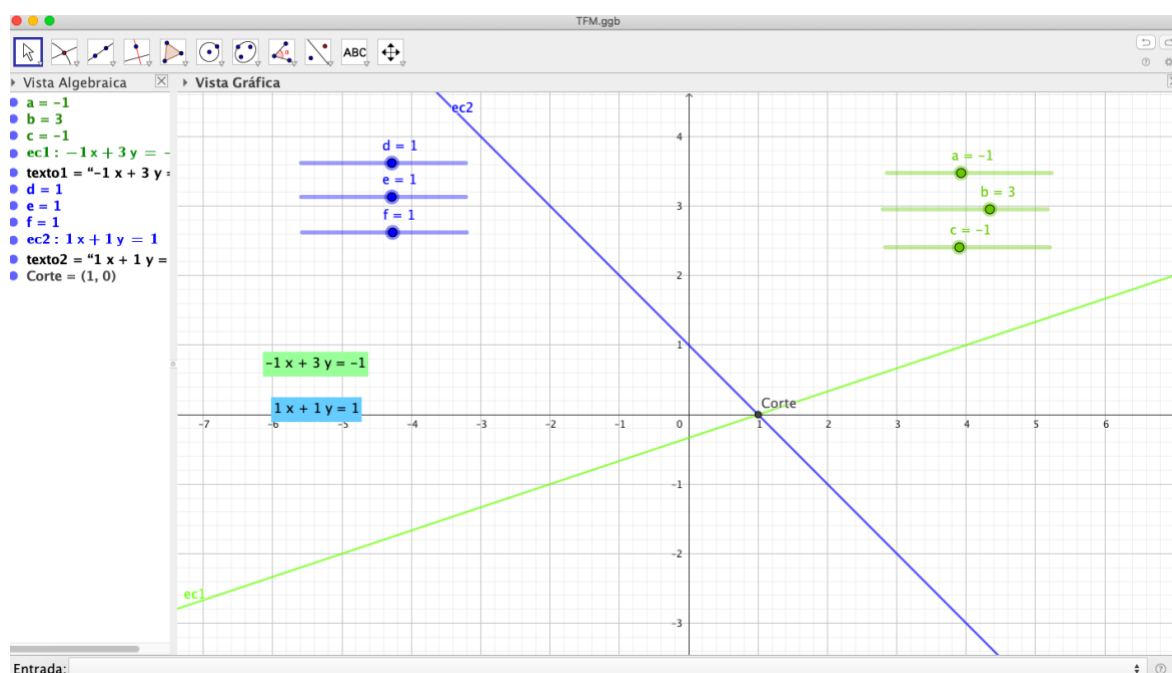
ACTIVIDADES DE LA SESIÓN

1. Resolved las actividades de Desmos. (Los enunciados se encuentran en [Anexo II](#))
2. Usando ahora GeoGebra, responded a las siguientes preguntas:
 - a) Prueba a mover los deslizadores para que las dos rectas se corten en un solo punto. ¿Qué relación observas entre los coeficientes de ambas ecuaciones?
 - b) Ahora intenta que las dos rectas sean paralelas. ¿Cómo son los coeficientes de las dos ecuaciones en este caso? ¿Y qué ocurre con el número de soluciones del sistema?
 - c) Modifica los deslizadores para que las dos rectas coincidan. ¿Qué puedes decir sobre los coeficientes y los términos independientes de ambas ecuaciones?
 - d) Resume lo que has descubierto: ¿cómo influye la relación entre los coeficientes de dos ecuaciones lineales en el número de soluciones que tiene el sistema?

*Los alumnos recibirán el enlace de Desmos, adaptado de la autora Lola Morales dado por

<https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/6845a1a01c6ba5d35191a247?lang=es>

Junto con el applet de GeoGebra, que tiene la siguiente forma:



ORGANIZACIÓN DE LA SESIÓN

Esta sesión está enfocada de nuevo en el aprendizaje por descubrimiento a través del trabajo colaborativo por parte de los alumnos, para trabajar y comprender el método gráfico de resolución de sistemas lineales, así como los tipos de sistemas según su número de soluciones, junto con su representación gráfica. Es por ello por lo que van a estar colocados en grupos de 3 o 4 distintos a los de las sesiones anteriores.

Inicio de la sesión. Los primeros 5' de la clase se dedican a la formación de los grupos y el comienzo de la primera actividad.

Desarrollo de la sesión.

En los siguientes 30' deben resolver la primera actividad. Esta actividad trata de una exploración guiada con la herramienta digital de Desmos, en la que se hace un repaso de las ecuaciones lineales y su representación gráfica, para que los alumnos lleguen a la representación gráfica de un sistema y la interpretación de la solución del sistema como el punto de corte de las rectas. Esta actividad hace reflexionar a los alumnos mediante la representación gráfica el número de soluciones que pueden tener los sistemas, mediante actividades de reflexión e invención de sistemas. Dentro de las diapositivas también encontramos preguntas que favorecen la reflexión y la comunicación y argumentación matemática. La actividad finaliza con la institucionalización de los tipos de sistema según el número de soluciones y su representación gráfica.

Los siguientes 10' se dedican a exploración abierta con la actividad de GeoGebra para que descubran la relación entre los coeficientes de los sistemas según el número de soluciones que tienen. De esta manera relacionan los sistemas compatibles indefinidos

con las ecuaciones equivalentes y pueden, de manera manipulativa, afianzar la comprensión de los conceptos trabajados en la primera actividad.

Cierre de la sesión. Los últimos 5' se hace una puesta en común de lo aprendido en la sesión, a la par que se institucionaliza el método gráfico de resolución de sistemas de ecuaciones.

ANÁLISIS PREVIO DE LA SESIÓN

Esta sesión está diseñada para que los alumnos, desde un repaso de las ecuaciones lineales, sepan identificar la solución del sistema como el punto de intersección, para lo que no se esperan grandes dificultades. Dentro de las respuestas esperadas, especialmente en la invención de sistemas en Desmos, se esperan sistemas similares a los que hayan visto en los ejemplos, para lo que el docente ofrece un feedback para que traten de ser originales.

Asimismo, se espera que la mayor dificultad esté en la comprensión de los sistemas compatibles indeterminados, aunque la representación gráfica sirve de ayuda para la comprensión. Además, se espera que a los alumnos les cueste relacionar este tipo de sistemas con las ecuaciones equivalentes, vistas en la sesión anterior.

Es posible también encontrar dificultades relacionadas con el uso de Demos y GeoGebra, para lo que el profesor va pasando por los distintos grupos asegurándose de que todos comprenden las herramientas que se emplean. Asimismo, en el applet de GeoGebra se hará hincapié en que hagan múltiples pruebas, para evitar que saquen conclusiones precipitadas.

Algún error que se espera, en el ejercicio de inventar un sistema con infinitas soluciones, se puede esperar que algún grupo escriba dos ecuaciones con la misma solución sin que sean equivalentes, es decir, que cree un sistema compatible determinado.

SESIÓN 4. MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Competencias específicas	CE.M.1, CE.M.3, CE.M.4.
Criterios de evaluación	1.1, 1.2, 3.1, 4.1, 4.2
Objetivos de la sesión	-Conocer y aplicar el método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones. -Resolver problemas mediante el método de sustitución.

	-Usar GeoGebra para comprobar las soluciones.
Tipos de tareas, técnicas y tecnologías empleadas	TT.2, TT.4. TC.2.1, TC.2.2, TC.2.8, TC.2.9 TC.2.10. TG.1.2, TG.2.2, TG.2.3.

ACTIVIDADES DE LA SESIÓN

- En una granja hay gallinas y cerdos. Hay el doble de cerdos que de gallinas, y en total hay 36 animales. ¿Cuántos hay de cada tipo?
 - Leed con atención el enunciado y pensad qué información tenéis.
 - Asignad a cada animal una incógnita.
 - ¿Cómo podéis resolverlo sin tablas de valores ni gráficas? ¿Podéis expresar una de las incógnitas en función de la otra y llegar a una ecuación con una incógnita?
 - Anotad los pasos que habéis seguido para resolver el problema.

Resolved los siguientes problemas empleando el mismo método que acabáis de descubrir. Usad GeoGebra para comprobar vuestros resultados.

- Calcula dos números que si se suman dan 10, y el doble del primero menos el triple del segundo da el número cero.
- El profesor de Matemáticas de un instituto les prometió un día libre sin clase a sus alumnos si encontraban la solución del siguiente sistema:
$$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ -4x + 2y = -6 \end{cases}$$
 ¿Tuvieron los alumnos un día libre?

ORGANIZACIÓN DE LA SESIÓN

Esta sesión se ha organizado de manera que, mediante una orientación dirigida, los alumnos descubren por sí solos los pasos del método de sustitución en grupos reducidos de 4 personas distintos a los de la sesión anterior. Seguidamente, en los mismos grupos, resuelven dos problemas contextualizados aplicando el método. Esta última parte resulta especialmente importante, ya que, como se ha mencionado anteriormente, el enfoque principal de la propuesta se basa en la resolución de problemas, fomentando así la modelización, la discusión y la aplicación de los procedimientos aprendidos a situaciones reales.

Inicio de la sesión. Los primeros 5' de la sesión se destinan a la formación de los grupos y la entrega de la ficha con el enunciado de la primera actividad, haciendo una lectura en voz alta para que los alumnos comprendan la tarea que deben realizar.

Desarrollo de la sesión.

Los siguientes 15' de la sesión están destinados a que traten de resolver y descubrir el método de sustitución con la actividad 1. La actividad 1 tiene un par de preguntas que sirven como orientación dirigida a los alumnos para lograr que sustituyan una incógnita en la otra ecuación mediante trabajo colaborativo. Mientras los grupos trabajan en esta primera actividad, el docente pasa por las mesas observando la labor que realizan y atendiendo cualquier duda que pueda surgir. Finalmente, se hace una breve puesta en común de los pasos que han seguido en la resolución.

Seguidamente, se dejan 15' para que los alumnos, en los mismos grupos, resuelvan dos problemas para profundizar en la técnica. Estos problemas incluyen uno sin solución, y dado que en la sesión anterior ya se abordaron los tipos de sistemas según el número de soluciones mediante el método gráfico, esta actividad busca que los estudiantes consoliden esa comprensión desde el punto de vista algebraico. Antes de comenzar, el profesor hace hincapié en que comprueben los resultados que obtienen como manera de comprobar si la solución es correcta. Durante este tiempo, de nuevo el docente va observando el trabajo de cada grupo, en busca de dificultades o posibles errores. En caso de que se observe algún error reiterado, lo explicará en voz alta para todos los alumnos. Se pide que los alumnos comprueben las soluciones que han obtenido mediante el software de GeoGebra.

En los siguientes 5' se exponen las resoluciones de los grupos en la pizarra, de modo que el alumnado pueda observar y comparar las diferentes maneras de aplicar el método de sustitución. Aunque todos los grupos han utilizado el mismo procedimiento general, pueden apreciarse diferencias en el planteamiento, el orden de los pasos o la claridad en la resolución.

Cierre de la sesión. Finalmente, en los últimos 10' se realiza una breve puesta en común en la que se comentan estas diferencias y se reflexiona sobre las estrategias utilizadas, y el docente institucionaliza el método de sustitución para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, argumentando que se puede despejar cualquier incógnita de cualquier ecuación, evitando que los alumnos interioricen procedimientos erróneos y motivándoles a reflexionar a la hora de hacer los problemas cuál es la incógnita que resulta más sencilla. Para finalizar, entre todos se recuerdan los pasos del método de sustitución, que el alumnado anota a modo de diario de aprendizaje con la pregunta “¿Qué he aprendido hoy?”.

ANÁLISIS PREVIO DE LA SESIÓN

Para la primera actividad de descubrimiento del método, el principal error o dificultad que se puede encontrar es que lo planteen como una única ecuación con una incógnita, al ser similar a los que pueden resolver en la unidad anterior. Para ello, el docente hace hincapié en que buscamos tanto el número de gallinas como el de cerdos, y para ello deben plantear un sistema.

Los principales errores que se esperan en el aprendizaje del método de sustitución están relacionados con el despeje de variables, especialmente cuando las incógnitas tienen coeficientes negativos. Un ejemplo puede ser:

$$2x - y = 4 \Rightarrow y = 4 - 2x$$

También se esperan errores al sustituir las expresiones despejadas si aparecen coeficientes negativos, de la siguiente manera:

$$\text{Sistema para resolver: } \begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad \text{Despeje: } y = 6 - x$$

$$\text{Al sustituir en la otra ecuación: } 3x - 2(6 - x) = 8 \Rightarrow 3x - 12 - x = 8.$$

Para tratar de evitar estos errores, el docente va pasando por las mesas revisando el trabajo de las distintas parejas o grupos en el caso de los problemas.

En relación con el método de sustitución, puede ser que algunos alumnos interioricen que siempre hay que despejar, por ejemplo, la incógnita x de la primera ecuación. Por ello, el docente debe insistir en que son ellos quienes eligen qué variable y ecuación despejar, promoviendo así el desarrollo de su pensamiento matemático y la reflexión sobre qué opción es más sencilla o conveniente en cada caso.

Respecto al sistema sin solución de la última actividad, a pesar de que en la sesión anterior con el método gráfico se vieron los diferentes tipos de sistemas, es probable que aparezcan dificultades para reconocer esta situación desde la representación algebraica. Esto se debe a que los alumnos pueden llegar a $0x = -8$, y pueden escribir $x = -8$. Cuando realicen esta actividad, se hará una relación con la anterior preguntando qué ocurre con las rectas de este sistema.

Por último, se espera que el planteamiento de los problemas contextualizados suponga una dificultad añadida para algunos alumnos. Por este motivo, en todas las sesiones se destina un tiempo específico a la resolución de problemas, para trabajar la modelización de diversas situaciones y la aplicación práctica de los contenidos.

SESIÓN 5. MÉTODO DE IGUALACIÓN

Competencias específicas	CE.M.1, CE.M.3, CE.M.8
Criterios de evaluación	1.1, 1.2, 3.1, 8.1
Objetivos de la sesión	-Conocer y aplicar el método de igualación para resolver sistemas de ecuaciones. -Resolver problemas mediante el método de igualación. -Usar GeoGebra para comprobar las soluciones.

Tipos de tareas, técnicas y tecnologías empleadas	TT.2, TT.4. TC.2.1, TC.2.3, TC.2.8, TC.2.9 TC.2.10. TG.1.2, TG.2.2, TG.2.3.
---	---

ACTIVIDADES DE LA SESIÓN

1. Miriam y Vera están resolviendo el siguiente problema que tienen de deberes:

Dos empresas de reparto calculan el precio del envío según la distancia que recorren, medida en kilómetros.

- La empresa 1 cobra 2€ por cada kilómetro más 1€ de tarifa fija.
- La empresa 2 cobra 1€ por cada kilómetro más 7€ de tarifa fija.

¿Con qué distancia recorrida ambas empresas cobran lo mismo?

Miriam resuelve el problema de la siguiente manera, afirmando que ha empleado el método de sustitución:

$x = \text{kilómetros que recorre}, y = \text{precio del envío}$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x + 7 \end{cases}, \quad y = 2x + 1 \Rightarrow 2x + 1 = x + 7 \Rightarrow 2x - x = 7 - 1 \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

$$y = 2 \cdot 6 + 1 = 12 + 1 \Rightarrow \boxed{y = 13}$$

Solución: Cuando recorren 6 kilómetros ambas empresas cobran lo mismo, 13€.

Vera lo resuelve de la siguiente manera, mediante el método de igualación:

$x = \text{kilómetros que recorre}, y = \text{precio del envío}$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x + 7 \end{cases}, \quad 2x + 1 = x + 7 \Rightarrow 2x - x = 7 - 1 \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

$$y = 2x + 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 6 + 1 \Rightarrow \boxed{y = 13}$$

Solución: Si recorren 6 kilómetros ambas empresas cobran lo mismo, que son 13€.

¿Qué diferencias y similitudes encontráis en las resoluciones con cada método?

Utilizando el procedimiento del método de igualación, resolved los siguientes problemas. Comprobad los resultados que obtenéis con GeoGebra.

2. Una familia tiene periquitos y perros como mascotas. Averigua cuántos perros y cuántos periquitos tienen, sabiendo que en total hay 6 animales y el número total de patas es 16.
3. En una heladería hay dos helados del mes, chocolate y pistacho, a los que aseguran haber hecho una rebaja. Antes el helado de chocolate costaba 2€, y el de pistacho 3€. Las ofertas que han puesto son:

- Oferta 1: 5 conos de chocolate y 3 de pistacho por 23€.
- Oferta 2: 2 conos de chocolate y 4 de pistacho por 16€.

¿Hay realmente una oferta? Razonad la respuesta.

4. En una cafetería se preparan dos tipos de zumos: naranja y manzana. El lunes se vendieron 3 zumos de naranja y 6 de manzana, con un total de 21€ recaudados. El martes se vendieron 2 zumos de naranja y 4 de manzana, recaudando 14€. ¿Podéis determinar el precio de cada zumo? ¿Tengo información suficiente para saber cuánto vale cada zumo?

ORGANIZACIÓN DE LA SESIÓN

En esta sesión, al igual que en las anteriores, se pretende introducir el método de igualación a través de un ejemplo por descubrimiento por grupos reducidos, mediante una orientación dirigida por el docente, que se lleva a cabo mediante preguntas que invitan a la reflexión. De nuevo, la sesión finaliza con problemas donde el alumnado debe poner en práctica la técnica que han aprendido.

Inicio de la sesión. En 5' se organizan los grupos de 3-4 personas y se entrega la ficha con el primer enunciado, haciendo una lectura en alto para que el docente se asegure que los alumnos entienden la tarea que deben realizar.

Desarrollo de la sesión.

Los siguientes 15' se dejan para que el alumnado plantee y resuelva la primera actividad. Mientras tanto, el docente se pasa por los distintos grupos observando su trabajo, y atendiendo las dudas y errores que observe. Al finalizar, se hace una puesta en común con todos los grupos, donde se trate la principal diferencia que observan con respecto al método de sustitución, pregunta que se les ha pedido que argumenten en la ficha. De esta manera, se observa cómo va evolucionado la argumentación matemática del alumnado.

En los siguientes 20' se reparte la segunda ficha con los enunciados de las actividades 2, 3 y 4, donde se pide a los alumnos que trabajen con el mismo método que han observado en la primera actividad. La actividad 3 se plantea como una actividad que invita a la reflexión crítica sobre las soluciones que se obtienen, y la actividad 4 corresponde a un sistema compatible indeterminado, donde los alumnos deben razonar que no tenemos información suficiente. Finalmente, se exponen las resoluciones de los grupos, y los alumnos se dedican a observar y analizar el trabajo de otros grupos.

Cierre de la sesión. Los últimos 10' se dedican a la puesta en común de las observaciones de las resoluciones del alumnado, así como las diferentes estrategias que han visto. Para finalizar, se lleva a cabo la institucionalización del método de igualación, donde el docente expone los pasos que se han de seguir, haciendo hincapié en que se puede despejar cualquier incógnita mientras sea la misma en ambas ecuaciones, evitando que

los alumnos saquen conclusiones erróneas. Toda esta información la deben anotar los alumnos en su diario de aprendizaje.

ANÁLISIS PREVIO DE LA SESIÓN

La principal dificultad que se plantea en esta sesión es que los alumnos pueden no diferenciar este método con el de sustitución. Por ello, se hace una puesta en común antes de la resolución de los problemas 2 y 3, para tratar de encaminar a los alumnos mediante una orientación guiada hacia el nuevo método, para el cual la actividad 1 actúa como tarea activadora de conocimientos, al plantear un sistema de la forma $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$ con $x =$ *distancia recorrida* e $y =$ *precio que cobra la empresa*.

Entre los errores que se esperan de los alumnos, de nuevo pueden ser errores al trabajar con expresiones algebraicas, o errores aritméticos en el caso de que aparezca el trabajo con fracciones.

Con respecto a la actividad 3, sobre la reflexión de la oferta, no se espera grandes dificultades en la resolución, aunque pueden existir diversos razonamientos. Esto se debe a que la solución es que el helado de chocolate ahora vale aproximadamente 3,14, es decir, ha subido de precio, y el de pistacho 2,43, es decir, ha bajado de precio. Entre las posibles respuestas de los alumnos se encuentra que alguno dé esta respuesta y ya, o algunos alumnos más adelantados puedan comprobar cómo cambia el precio con las combinaciones de las ofertas y el precio inicial, razonando que es una oferta o no dependiendo del número de helados de cada tipo que escojas.

La actividad 4 se plantea para que los alumnos trabajen de manera algebraica con un sistema con infinitas soluciones, aunque se espera que al llegar a $0x = 0$, algunos alumnos consideren que la solución es $x = 0$. Para ello, es clave la labor del docente ofreciendo feedback como *¿Qué ocurre si x es 4? ¿se cumple esta igualdad?* Asimismo, se espera que algunos alumnos encuentren dificultad en comprender en este contexto qué significa que haya infinitas soluciones, y no razonen que es porque falta información. Para ello, de nuevo es clave la labor docente.

SESIÓN 6. MÉTODO DE REDUCCIÓN

Competencias específicas	CE.M.1, CE.M.2 y CE.M.4.
Criterios de evaluación	1.1, 2.1, 4.1 y 4.2.
Objetivos de la sesión	-Conocer y aplicar el método de reducción para resolver sistemas de ecuaciones.

	-Resolver problemas mediante el método de reducción. -Usar GeoGebra para comprobar las soluciones.
Tipos de tareas, técnicas y tecnologías empleadas	TT.1, TT.2, TT.4. TC.2.1, TC.2.4, TC.2.8, TC.2.10. TG.1.2, TG.2.2.

ACTIVIDADES DE LA SESIÓN

1. María se ha presentado a un concurso de Matemáticas. Para conseguir el premio, en la prueba final le han pedido que resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$.

Ella ha resuelto el sistema de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases} +$$

$$5x = 20$$

$$x = \frac{20}{5}$$

$x = 4$

Entonces:

$$(4) + y = 6$$

$$y = 6 - 4$$

$y = 2$

¿Se va a llevar el premio del concurso? ¿Podríais explicar los pasos que ha seguido?

Resolved los siguientes problemas empleando el mismo método que ha usado María. Usad GeoGebra para comprobar vuestros resultados.

2. Durante la Semana de las Matemáticas, varios institutos de Zaragoza participan en un concurso para ganar un viaje a PortAventura. Los puntos se consiguen publicando vídeos en Instagram y TikTok resolviendo problemas matemáticos. En cada red social hay una puntuación distinta, pero no la han publicado. Sin embargo, sabemos esta información de dos institutos que ya han participado:
- El Instituto Norte subió 3 vídeos a TikTok y 12 a Instagram, y consiguió 69 puntos.
 - El Instituto Sur subió 8 vídeos a TikTok y 6 a Instagram, y obtuvo 80 puntos.

¿Cuántos puntos se consiguen por cada vídeo en TikTok y en Instagram? Si nuestro instituto participa y queremos obtener al menos 100 puntos, ¿cuántos vídeos habría que publicar como mínimo en cada red social?

3. Dos cajas de peras y una de manzanas pesan 37 kilos. Si una caja de manzanas pesa 4 kilos más que una de peras, ¿Cuántos kilos pesa cada una de las cajas?

ORGANIZACIÓN DE LA SESIÓN

Esta sesión se ha diseñado de manera que, mediante un ejemplo dado, los alumnos descubren los pasos del método de reducción en grupos reducidos de 4 personas. Seguidamente, en los mismos grupos, resuelven dos problemas contextualizados. De nuevo la resolución de problemas es el eje central del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Inicio de la sesión. Los primeros 5' de la sesión se destinan a la formación de los grupos y la entrega de la ficha con el enunciado de la primera actividad, haciendo una lectura en voz alta para que los alumnos comprendan la tarea que deben realizar.

Desarrollo de la sesión.

Los siguientes 15' de la sesión están destinados a la resolución de la actividad 1, donde deben comprobar la solución que se expone en el problema, y enunciar los pasos a seguir en el método de reducción. De esta manera los alumnos, mediante trabajo colaborativo trabajan con el último método algebraico de resolución de sistemas de ecuaciones. Mientras los grupos trabajan en esta primera actividad, el docente pasa por las mesas observando la labor que realizan y atendiendo cualquier duda que pueda surgir.

Seguidamente, se reparte otra ficha con los dos siguientes problemas y se dejan 15' para que los alumnos, en los mismos grupos, los resuelvan para profundizar en la técnica. Antes de comenzar, el profesor hace hincapié en que comprueben los resultados que obtienen como manera de comprobar si la solución es correcta. Durante este tiempo, de nuevo el docente va observando el trabajo de cada grupo, en busca de dificultades o posibles errores. En caso de que se observe algún error reiterado, lo explicará en voz alta para todos los alumnos. Se pide que los alumnos comprueben las soluciones que han obtenido mediante el software de GeoGebra.

En los siguientes 5' se exponen las resoluciones de los grupos en la pizarra, de modo que cada grupo pueda observar y comparar las diferentes maneras de aplicar el método de reducción. Aunque todos los grupos han utilizado el mismo procedimiento general, pueden apreciarse diferencias en el planteamiento, como la incógnita que eliminan, o la claridad en la resolución.

Cierre de la sesión. Finalmente, en los últimos 10' se realiza una breve puesta en común en la que se comentan estas diferencias y se reflexiona sobre las estrategias utilizadas, y el docente institucionaliza el método de reducción para la resolución de sistemas de

ecuaciones lineales con dos incógnitas. Para finalizar, entre todos se recuerdan los pasos del método de reducción y los anotan en su diario de aprendizaje.

ANÁLISIS PREVIO DE LA SESIÓN

El planteamiento de la actividad 2 es: $\begin{cases} 3x + 12y = 69 \\ 8x + 6y = 80 \end{cases}$ y tiene como solución $x = 7, y = 4$, con x siendo el número de puntos que se ganan por cada vídeo en TikTok, e y los puntos que se ganan con cada vídeo en Instagram. Esta segunda actividad se plantea para que los alumnos no interioricen que siempre aparecen las ecuaciones con coeficientes opuestos, y pueden surgir distintas formas de proceder. Como siempre, el docente actúa como guía en caso de que algún grupo encuentre dificultades. Asimismo, la segunda pregunta se plantea para que el alumnado desarrolle su pensamiento matemático, como refuerzo de los conocimientos que ha ido adquiriendo a lo largo de la unidad.

El planteamiento de la actividad 3 es: $\begin{cases} 2y + x = 37 \\ x = y + 4 \end{cases}$, y su solución es $x = 15, y = 11$, donde x representa el peso de una caja de manzanas e y el de la caja de peras. En esta actividad la dificultad de los alumnos puede encontrarse en que el sistema no está dispuesto de la forma general, y pueden pasar por alto la necesidad de reagrupar las incógnitas en un mismo lado, procediendo directamente con el método sin haber organizado previamente el sistema.

En esta sesión es donde se espera que el alumnado tenga más dudas con respecto al método que se va a trabajar de resolución de sistemas, tanto por comprender el método como por ejecutarlo. Esto se debe a que el alumnado suele encontrar dificultad con el método de reducción para identificar qué coeficientes buscamos. En ocasiones optan por multiplicar los coeficientes, sin buscar cuál es el mínimo común múltiplo, que puede ayudarles a simplificar los cálculos. Es muy habitual que los alumnos cometan errores de tipo aritmético en este método en particular (Díaz, 2016).

Asimismo, entre estas dificultades se espera que en algún momento solo multipliquen las incógnitas, ignorando el término independiente, de la siguiente manera:

$$x - 3y = 4 \Rightarrow 2x - 6y = 4$$

En esta sesión es de gran importancia la institucionalización por parte del docente sobre el método, para que los alumnos comprendan en profundidad cuál es el objetivo del método, y no confundan la suma o resta de ecuaciones.

SESIÓN 7. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Competencias específicas	CE.M.1, CE.M.4, CE.M.8.
Criterios de evaluación	1.1, 1.2, 1.3, 4.2, 8.1.
Objetivos de la sesión	-Trabajar con sistemas que no vengan dados en su forma general. -Resolver problemas mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Tipos de tareas, técnicas y tecnologías empleadas	TT.2, TT.4. TC.2.1, TC.2.2, TC.2.3, TC.2.4, TC.2.5, TC.2.8, TC.2.10. TG.1.2, TG.2.2.

ACTIVIDADES DE LA SESIÓN

1. ¡Un mago ha realizado un hechizo sobre nuestros sistemas! Pero algo no encaja... Parece que estas ecuaciones están disfrazadas, como si ocultaran su verdadera forma. Con inteligencia y astucia, debéis encontrar la solución de estos sistemas.

a)
$$\begin{cases} 3x - 2(y - 1) = y - x + 1 \\ 2x - y = x + y - 9 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{5x-3y}{2} = 2x + 5 \\ 3(2x + 1) - 4y = 4(1 - 2y) + 8 \end{cases}$$
2. La edad de un padre es el doble de la del hijo. Hace 10 años la edad del padre era el triple de la del hijo. Halla sus edades.
3. Mateo y Natalia han conseguido 48 puntos entre los dos en el último partido. Si hubieran anotado 6 puntos más cada uno, Natalia habría conseguido 5 veces los puntos de Andrés. ¿cuántos puntos ha conseguido cada uno?
4. Quieren construir una piscina en el instituto. Encuentra de cuánto tienen que ser los lados si su perímetro quieren que sea de 60 metros y la longitud debe ser el doble que la anchura. Dibujad la piscina resultante.

ORGANIZACIÓN DE LA SESIÓN

Para esta sesión se sigue una metodología basada en el trabajo en grupos reducidos, en línea con las *Thinking Classrooms* (Liljedahl, 2020). El objetivo es fomentar la autonomía, el razonamiento y la colaboración entre el alumnado, partiendo de tareas con suelo bajo y techo alto, para que todos los alumnos puedan participar en la resolución de

las tareas. Se pretende trabajar con sistemas que no vengan dados en su forma general, dejando al alumno razonar cuáles han de ser los pasos previos a la resolución con cualquiera de los métodos vistos. Asimismo, se realizan problemas con el objetivo de profundizar en todos los conceptos vistos a lo largo de la unidad.

Inicio de la sesión. En los primeros 5', el docente presenta la dinámica de trabajo y recuerda brevemente todos los métodos y conceptos vistos en las sesiones anteriores para poder abordar problemas con sistemas de ecuaciones. El alumnado se organiza en grupos de tres personas, para promover la interacción entre distintos compañeros y el intercambio de ideas. En la línea de las *Thinking classrooms*, se trabajará en pizarras verticales, lo que permite a los estudiantes mantenerse activos, visualizar mejor los procedimientos y colaborar de forma más dinámica y eficiente en la resolución de los problemas.

Desarrollo de la sesión.

Se entrega una ficha a cada grupo donde se proponen varios problemas que deben resolverse utilizando un sistema de ecuaciones. Se destinan 35' para que resuelvan las tareas en grupo, haciendo hincapié en que deben participar todos. No se especifica qué método deben usar, para que el alumnado elija entre los métodos aprendidos (sustitución, igualación o reducción) en función de su criterio, lo que contribuye a desarrollar su capacidad de decisión matemática. Se pretende que los alumnos debatan entre ellos, justifiquen sus pasos y utilicen GeoGebra para verificar las soluciones que obtienen.

Este uso de GeoGebra es especialmente interesante en la comprobación de la actividad 1, para que introduzcan tanto el sistema del enunciado, como el que han obtenido, para observar que llegan a la misma solución, es decir, son sistemas equivalentes.

Cierre de la sesión. En los últimos 10' se realiza una puesta en común. Los grupos exponen en la pizarra sus resoluciones, y entre todos se corrigen y se comparan las distintas estrategias, métodos y formas de representar la información. De esta manera, los alumnos observan de manera crítica estas diferencias en las resoluciones. Asimismo, el docente expone de manera formal qué pasos se han de seguir cuando el sistema no viene dado en su forma general.

ANÁLISIS PREVIO DE LA SESIÓN

Sistemas y soluciones de la actividad 1:

- a) $\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ x - 2y = -9 \end{cases}$ Solución (5,7)
- b) $\begin{cases} x - 3y = 10 \\ 6x + 4y = 5 \end{cases}$ Solución $\left(\frac{5}{2}, \frac{-5}{2}\right) = (2.5, -2.5)$

Actividad 2: $\begin{cases} x = 2y \\ x - 10 = 3(y - 10) \end{cases}$ donde $x = \text{edad actual padre}, y = \text{edad actual hijo}$. Solución (40,20).

Actividad 3: $\begin{cases} x + y = 48 \\ (x + 6) \cdot 5 = y + 6 \end{cases}$ con $x = \text{puntos anotados por Mateo}, y = \text{puntos Natalia}$. Solución (4,44).

Actividad 4: $\begin{cases} 2x + 2y = 50 \\ x = 2y \end{cases}$ con $x = \text{largo piscina}, y = \text{ancho piscina}$.

Solución (20,10).

Con respecto a la sesión, las principales dificultades se encuentran en la reorganización de los sistemas para llegar a la forma general. Con respecto a las ecuaciones en las que aparecen paréntesis, no se esperan dificultades al haber trabajado con este tipo de expresiones algebraicas en la unidad anterior. Se puede esperar algún error al operar con los signos en la propiedad distributiva de la forma $-2(y - 1) = -2y - 2$. Aquí se pone de manifiesto la importancia de comprobar las soluciones, ya que de esta manera les permite identificar que ha habido un error, y les orienta a encontrar dónde.

Asimismo, se pueden esperar fallos principalmente de cálculo, especialmente en el trabajo con fracciones, que suele generar más fallos aritméticos entre los alumnos.

Con respecto a los problemas de enunciado verbal, se pueden esperar algunas dificultades al plantear las ecuaciones a partir del texto, como malinterpretar “el doble de” y multiplicar por dos la incógnita errónea; o en “Hace 10 años la edad del padre era el triple de la del hijo” escribirlo como $3y - 10$.

Todos estos errores de planteamiento y de cálculo algebraico y aritmético se pueden tratar con el análisis y comprobación de la validez de las soluciones que obtienen, desarrollando su pensamiento matemático y lógico a la hora de corregir posibles fallos.

Se espera que los alumnos empleen los métodos que encuentren más sencillos, por lo que se pide que traten de resolver los problemas aplicando diversos métodos de resolución, ya que el objetivo principal es repasar las distintas técnicas vistas a lo largo de la unidad.

SESIÓN 8. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Competencias específicas	CE.M.2, CE.M.3, CE.M.8.
Criterios de evaluación	2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 8.1

Objetivos de la sesión	-Resolver problemas mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Tipos de tareas, técnicas y tecnologías empleadas	TT.2, TT.4. TC.2.1, TC.2.2, TC.2.3, TC.2.4, TC.2.5, TC.2.8, TC.2.10. TG.1.2, TG.2.2.

ACTIVIDADES DE LA SESIÓN

1. - *Plantea un problema que se resuelva mediante un sistema de ecuaciones lineales, que tenga la siguiente solución:
 a) $(2,4)$ b) $(-1,3)$ c) $(5,0)$
 - Resuelve el problema de tu compañero.
 - Corrige los posibles errores en la resolución de tu compañero.
2. En una balanza, el peso de uno de los platillos es igual a dos tercios del peso del otro platillo. Si pasamos 70 gramos de uno a otro, la balanza está en equilibrio. ¿Cuántos gramos había inicialmente en cada platillo?
3. La edad de Marta hace 2 años es igual a la de su prima Carla dentro de 3 años. Dentro de 2 años Carla tendrá la mitad de los años que Marta. ¿Qué edades tienen ahora cada una?

*En la actividad 1 cada miembro del grupo recibirá una solución, y el resto de los compañeros no sabrán si es correcta hasta el final de la actividad.

ORGANIZACIÓN DE LA SESIÓN

Esta sesión pretende ir en la misma línea de la anterior, siguiendo una metodología de las *Thinking Classrooms* (Liljedahl, 2020). De esta manera, se pretende continuar con la labor de repaso de los conceptos de la unidad a través de la resolución de problemas y un *problem posing* en el que los alumnos llevan a cabo un aprendizaje más significativo, ya que tienen libertad para contextualizar el problema en sus gustos e intereses.

Inicio de la sesión. Al igual que en la sesión anterior, en los primeros 5' el docente recuerda la dinámica de trabajo y los métodos y conceptos vistos en la unidad para poder llevar a cabo las actividades. El alumnado se organiza en grupos de tres personas, para promover la interacción entre distintos compañeros y el intercambio de ideas, y se sigue trabajando con las pizarras verticales para que los estudiantes se mantengan activos, visualicen mejor los procedimientos y colaboren de forma más dinámica y eficiente en la resolución de los problemas.

Desarrollo de la sesión

Se comienza por una actividad de *problem posing*, donde cada miembro del grupo debe crear su propio problema en 5' en un folio. Seguidamente, se destinan 10' a que cada miembro del grupo realice el problema de su compañero en las pizarras verticales. Finalmente, un tercer miembro en 5' se encarga de corregir el problema. Esta dinámica favorece no solo la aplicación del conocimiento, sino también la revisión crítica de soluciones ajenas y la expresión clara de ideas matemáticas.

Seguidamente, se dejan 15' para la resolución de dos problemas para continuar trabajando la técnica a través de diferentes contextos. Durante la resolución, el docente observa los trabajos de los distintos grupos, atendiendo a la participación de todos y resolviendo cualquier posible duda.

Cierre de la sesión. Los últimos 10' se destinan a la puesta en común del trabajo de la sesión. Se recogen ejemplos de problemas creados por los propios alumnos y se comentan errores frecuentes detectados durante la corrección entre grupos. También se exponen las resoluciones de los problemas planteados al igual que en la sesión anterior, dejando que los grupos se paseen observando las diferentes maneras que pueden surgir al resolver un problema.

ANÁLISIS PREVIO DE LA SESIÓN

Con respecto a la actividad de *problem posing*, se espera que los alumnos intenten plantear problemas contextualizados similares a los trabajados a lo largo de la unidad. Es posible que surjan algunas dificultades relacionadas con la coherencia entre el enunciado y la solución que se indica en el enunciado, especialmente en los casos en los que la solución contiene valores que pueden resultar problemáticos en ciertos contextos. Por ejemplo, en la solución b) aparece un número negativo, lo que puede dificultar su interpretación si se plantea un problema de edades o cantidades físicas. Del mismo modo, en la solución c) se pide $y = 0$, y puede suponer un reto para algunos estudiantes a la hora de contextualizarlo de manera realista.

Entre los errores que se prevé que puedan aparecer destacan principalmente los errores de cálculo, que pueden estar relacionados con el método de resolución que el alumnado haya elegido, así como no comprobar la solución obtenida. En cuanto a la tarea de corrección de los problemas planteados por sus compañeros, es esperable que, en caso de detectar un fallo, algunos estudiantes se limiten a tacharlo sin explicar ni justificar el error encontrado, sin mostrar ninguna argumentación matemática.

Para evitar estos errores destaca la labor del docente, que durante la sesión va pasando y observando el trabajo de los alumnos, ofreciendo cualquier feedback que sea conveniente.

Con respecto a los problemas que deben resolver, se espera que algún grupo comience a resolverlos sin organizar previamente la información que ofrece el problema, lo que puede derivar en un mal planteamiento del sistema. Por ejemplo, en la actividad 2,

encontramos un platillo en la balanza que es dos tercios del peso del otro platillo, y se puede encontrar error en a qué incógnita le asignan ese $\frac{2}{3}$. O en la actividad de las edades, que no realicen la tabla para identificar mejor la información.

Los planteamientos y soluciones de los dos problemas son:

Actividad 2: $\begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ x + 70 = y - 70 \end{cases}$, siendo $x = \text{peso del platillo ligero}$, $y = \text{peso del platillo pesado}$. La solución es $x = 280, y = 420$.

Actividad 3: $\begin{cases} x - 2 = y + 3 \\ y + 2 = \frac{1}{2}(x + 2) \end{cases}$, siendo $x = \text{edad actual de Marta}$, $y = \text{edad actual de Carla}$. La solución es $x = 8, y = 3$.

6. Evaluación

La evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje que surge de esta propuesta didáctica es continua, formativa e integradora, de acuerdo con la normativa vigente. Por ello, el proceso de evaluación tiene lugar a lo largo de todas las sesiones descritas anteriormente, estudiando la evolución del alumnado a lo largo de la propuesta, hasta una evaluación final, donde se recoge información sobre el grado de consecución de los objetivos de aprendizaje y el desarrollo competencial del alumnado. Para esta evaluación, a lo largo de las sesiones se obtiene información mediante distintos instrumentos, que principalmente son la recogida de las fichas del trabajo realizado por los alumnos, así como las producciones digitales en las sesiones donde se trabaje con Desmos o GeoGebra.

A continuación, se presenta la Tabla 6.1 donde se recogen los criterios de evaluación presentes en cada sesión, y las actividades a las que corresponden.

	Criterios de evaluación asociados a las competencias											
	CE.M.1		CE.M.2		CE.M.3			CE.M.4		CE.M.8	CE.M.10	
	1.1	1.2	2.1	2.2	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	8.1	10.1	10.2
S1. Actividad 1	✓	✓	✓								✓	
S1. Actividad 2		✓								✓	✓	
S1. Actividad 3	✓	✓	✓	✓						✓	✓	
S2. Actividad 1	✓	✓			✓				✓		✓	
S2. Actividad 2	✓	✓							✓		✓	
S3. Actividad 1					✓	✓	✓	✓		✓	✓	
S3. Actividad 2					✓		✓	✓		✓	✓	
S4. Actividad 1	✓	✓			✓			✓	✓		✓	
S4. Actividad 2	✓	✓			✓			✓	✓		✓	
S4. Actividad 3	✓	✓			✓			✓	✓		✓	

S5. Actividad 1	✓	✓			✓					✓	✓
S5. Actividad 2	✓	✓									✓
S5. Actividad 3	✓	✓								✓	✓
S5. Actividad 4	✓	✓								✓	✓
S6. Actividad 1	✓		✓					✓	✓		✓
S6. Actividad 2	✓		✓						✓		✓
S6. Actividad 3	✓		✓						✓		✓
S7. Actividades	✓	✓							✓	✓	✓
S8. Actividad 1			✓	✓	✓	✓				✓	✓
S8. Actividad 2,3			✓	✓	✓					✓	✓

Tabla 6.1 Evaluación de la propuesta.

Las competencias específicas que se evalúan a lo largo de la propuesta corresponden a las principales competencias que se movilizan mediante el trabajo de sistemas de ecuaciones lineales, aunque, como se ha mencionado previamente, de manera indirecta se trabajan todas las competencias específicas que menciona el currículo de Aragón. Estas competencias que se han seleccionado, junto con los criterios de evaluación, se relacionan principalmente con la interpretación de los problemas, así como el uso de las herramientas apropiadas en su resolución, la comprobación e interpretación de la validez de las soluciones, la formulación de conjeturas y aplicación del conocimiento matemático para validarlas, el uso del pensamiento computacional para el reconocimiento de patrones y modelización de situaciones, y finalmente, la comunicación de los argumentos mediante el lenguaje matemático apropiado. Para cada criterio se van a establecer tres grados de consecución (bajo, intermedio y alto), que describen qué se espera del alumnado con respecto a dicho criterio y permiten identificar el nivel de logro del alumnado. Todos estos criterios con sus niveles se recogen en una rúbrica expuesta en [Anexo IV](#).

Además, en todas las sesiones se evalúa la competencia específica CE.M.10. relacionada con el trabajo en distintos grupos que se ha ido haciendo a lo largo de la propuesta, de manera que se dé importancia al desarrollo de habilidades sociales mediante estrategias que incluyan la conversación, el razonamiento y el respeto entre iguales. Por ello, en la tabla aparecen los criterios 10.1 y 10.2, que se evaluarán mediante una rúbrica de observación directa de la acción de los alumnos en el aula. Esta rúbrica se encuentra en el [Anexo V](#).

En una última sesión 9 de la propuesta se ha optado por realizar una prueba individual, que se encuentra en el subapartado siguiente, en la que se trabajan todas las competencias específicas, y que actúa como evaluación final de la unidad. Esta prueba tiene como objetivo principal valorar el progreso alcanzado por los alumnos tras la unidad, así como analizar su situación dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje. De esta manera, se comprueba en qué medida los estudiantes han adquirido los contenidos y competencias trabajadas a lo largo de la propuesta. Se realiza de manera individual para

identificar los puntos fuertes y/o posibles dificultades o aspectos que requieran refuerzo. Esta evaluación también sirve para reflexionar sobre la efectividad de la propuesta didáctica, identificando sus fortalezas y áreas de mejora, así como valorar el impacto real que ha tenido su aplicación en el aula sobre el aprendizaje y la participación del alumnado.

Esta última prueba de evaluación se evalúa en torno a una rúbrica (mostrada en [Anexo VI](#)), donde se analiza el desempeño del alumnado con las tareas, técnicas y tecnologías trabajadas.

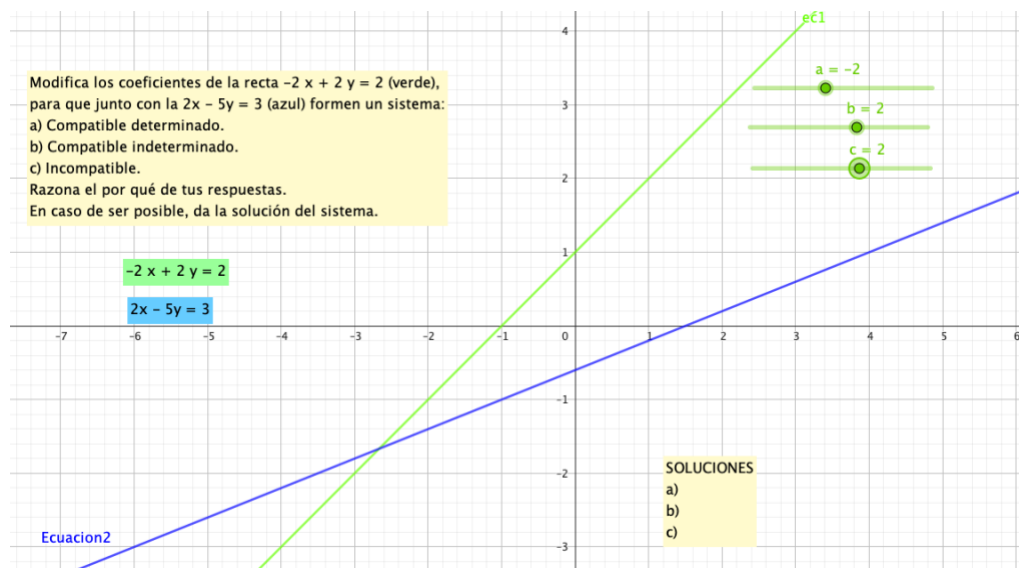
En el caso de que se quisiera calificar al alumnado tras la propuesta, se sugiere que se divida la nota en un 40% destinado al trabajo durante las sesiones, en el que se valore el trabajo en equipo, así como la participación y el interés del alumnado; y un 60% para la prueba final. Esta división de porcentajes se debe a que el objetivo principal de la propuesta no es únicamente la adquisición de contenidos, sino también el desarrollo de habilidades como la cooperación, la comunicación matemática y la toma de decisiones en grupo, aspectos que se fomentan especialmente a lo largo de las sesiones. Para ello, se plantea una evaluación continua en la que, en cada sesión, el alumnado pueda obtener hasta 5 puntos. Esta puntuación se otorgará en función de su implicación en la tarea, su actitud ante el trabajo compartido y, sobre todo, del análisis del grado en que se han alcanzado los criterios de evaluación que se movilizan en dicha sesión. Para la asignación de puntos por sesión ello, se utilizarán tanto la rúbrica basada en los criterios de evaluación del currículo [Anexo IV](#) como la rúbrica de observación directa del trabajo en el aula [Anexo V](#), que permiten recoger información cualitativa y cuantitativa sobre el proceso de aprendizaje desde una perspectiva competencial.

6.1. Prueba de evaluación

A continuación, se expone la información sobre una sesión 9 de esta propuesta, en la que se lleva a cabo una prueba de evaluación, donde el objetivo es obtener información de los conocimientos del alumnado tras el desarrollo de la unidad y se pretenden evaluar los conocimientos adquiridos durante el desarrollo de la propuesta. En la prueba se trabajarán todas las competencias específicas desarrolladas en la unidad.

ACTIVIDADES DE LA SESIÓN

1. Realiza la actividad en GeoGebra.



Resuelve cada uno de los siguientes problemas aplicando un método distinto.

2. Un comerciante tiene a la venta 50 pares de zapatillas deportivas, a 40 € el par. Cuando ha vendido unos cuantos, los rebaja a 30 € el par, continuando la venta hasta que se agotan. Si la recaudación ha sido de 1.620 €. ¿Cuántos pares de cada uno vendió?

Además de las zapatillas, el comerciante vende calcetines. Por la mañana los vende a 10 € cada par y por la tarde a 5 € cada par hasta que se agotan, recaudando un total de 35 €. ¿Cuántos calcetines tenía?

3. Los alumnos de 2º de ESO quieren hacer una fiesta sorpresa a sus profesores. Si cada uno pone 5€, sobran 3€ para pagar la decoración. Sin embargo, si cada uno aporta 4€, les faltan 7 € para cubrir el coste total. ¿Cuántos compañeros participan en la organización? ¿Cuál es el coste total de la decoración?
4. Tres amigas se han apuntado a un curso de pintura, donde pintan dos tipos de cuadros: paisajes y retratos. Cada una ha pintado un número distinto de cuadros, y han anotado el tiempo que han invertido en una semana.

Amiga	Paisajes pintados	Retratos pintados	Tiempo total invertido (horas)
Paula	3	2	13
Inés	6	5	28
Cris	4	3	18

Sabiendo que cada tipo de cuadro requiere un tiempo fijo por unidad, responde a las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto se tarda en pintar cada tipo de cuadro?
- ¿Es necesario utilizar los datos de las tres amigas para resolver el sistema y encontrar el tiempo que tarda en pintar cada tipo de cuadro? Justifica tu respuesta.

- ¿Cuánto tiempo tardaría en pintar 2 paisajes y 7 retratos?
 - José ha dicho que él ha trabajado 32 horas y ha pintado 4 paisajes y 6 retratos. ¿Dice la verdad?
5. Inventa un problema que se resuelva mediante el siguiente sistema: $\begin{cases} -x + 3y = 4 \\ \frac{1}{2}x + y = 8 \end{cases}$.
- Resuélvelo. Obtén un sistema equivalente, indicando cómo lo consigues.

ORGANIZACIÓN DE LA SESIÓN

Esta sesión al tratarse de una prueba de evaluación final, los 50' se destinan enteramente a la resolución de los distintos problemas de la prueba, distribuidos en el tiempo según la consideración de cada alumno.

ANÁLISIS PREVIO DE LA SESIÓN

La resolución de la prueba final se encuentra en el apartado de [Anexo III](#).

Para esta sesión no se esperan grandes dificultades por parte del alumnado, al tratarse de problemas como los que se han estado trabajando a lo largo de la unidad. La mayor parte de los errores se esperan en errores aritméticos, o al encontrar problemas sin solución o con infinitas soluciones. Es decir, errores que han ido apareciendo a lo largo de la unidad, o despistes del alumnado.

Algunos de los problemas contienen preguntas de reflexión, para observar el pensamiento crítico y la argumentación matemática de los alumnos, aspectos clave en su desarrollo. En la segunda actividad, se plantea una pregunta donde se trabaja con una ecuación lineal con dos incógnitas, y se espera que el alumnado dé más de una solución, empleando una tabla de valores. La tercera actividad es un problema como los trabajados en clase; mientras que la cuarta requiere que los alumnos argumenten por qué solo se necesitan 2 ecuaciones, además de que comprueben posibles soluciones, para lo cual no se esperan dificultades. En la quinta actividad es donde se esperan más errores, ya que algunos alumnos pueden comenzar a plantear el enunciado sin comprobar antes que la solución del sistema se ajusta al contexto que van a utilizar.

7. Conclusiones

Para finalizar este documento, se exponen unas conclusiones a raíz del trabajo elaborado.

En esta memoria se ha diseñado una propuesta didáctica que pretende ofrecer aspectos novedosos tras el estudio de la situación del objeto matemático en la actualidad, teniendo en cuenta tanto los errores habituales del alumnado como las estrategias didácticas que han demostrado ser beneficiosas y eficaces en su aprendizaje, según los

diversos artículos analizados. Así, se plantea una secuencia didáctica centrada en el aprendizaje por descubrimiento y en la resolución de problemas, con el objetivo de que los alumnos desarrollen su autonomía en el aprendizaje.

También destaca el uso de distintas herramientas digitales como Desmos y GeoGebra, que resultan motivadoras para el alumnado y les ayudan a comprender mejor los conceptos trabajados, favoreciendo así un aprendizaje más profundo y significativo. Asimismo, otro de los elementos innovadores que destacan en esta propuesta es la contextualización de los problemas en situaciones cercanas a la realidad del alumnado, lo que ayuda a que perciban las matemáticas como una herramienta útil y cercana a su día a día.

Estos aspectos novedosos se presentan como los principales puntos fuertes de la propuesta, aunque es preciso destacar un punto débil que se ha encontrado en el trabajo: la falta de implementación del diseño en el aula. Esto afecta al desconocer la actuación de los estudiantes frente a las actividades planteadas, información que resulta útil en la posible adaptación de esta misma. La puesta en práctica permitiría valorar la viabilidad de las tareas, la secuenciación de la propuesta y el grado de consecución de los objetivos planteados, así como recoger impresiones de los alumnos para mejorar la propuesta. Por ello, se especifica que la propuesta se plantea como un posible esquema que ha de ser ajustado al grupo clase con el que se trabaje.

Como futura docente, tengo la intención de poner en práctica esta propuesta en el aula para el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, continuando el desarrollo y mejora de la unidad a partir de la experiencia y necesidades que surjan del alumnado. Espero que este trabajo no solo haya contribuido a mi formación profesional, sino que también pueda servir de referencia para otros docentes interesados en innovar en su práctica educativa dentro del ámbito de las matemáticas.

Referencias

- Alejo, S., Lavado, C.I. y Marín, S. (2023). *Matemáticas 2o ESO. Proyecto Construyendo Mundos*. Madrid: Editorial Santillana.
- Beltrán, P. y Martínez, S. (2021). Enseñar a través de la resolución de problemas. *Suma*, 98, 11-21.
- Boyer, C. (1968). *Historia de la matemática*. Alianza.
- Bruno, D. y Rivas, F. (2014). Sistemas de ecuaciones: tratamiento de la solución en libros de texto de la escuela secundaria. In Acta de la X Conferencia Argentina de Educación Matemática (pp. 195-202).
- Caro, R. (2024, Agosto). *Capítulo 10: Álgebra*. Apuntes Marea Verde. https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/LOMLOE/2ESO/2_10_algebra.pdf
- Carrillo, M. (2017). *Enseñanza de los sistemas lineales en Secundaria: Una propuesta de mejora a través de la integración de tecnologías*. [Tesis doctoral, Universidad de Murcia].
- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica*. Aique Grupo Editor S.A.
- Chevallard, Y. (1999). *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266. <https://www.researchgate.net/publication/237274102>
- Chicoma, E. O. (2024). *Estrategia de enseñanza aprendizaje de la matemática para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes de secundaria* [Tesis de maestría]. Universidad Señor de Sipán S.A.C., Pimentel, Perú.
- Deivi, L. y Peña, A. (2006). Historia del algebra lineal hasta los albores del siglo XX. *Divulgaciones Matemáticas*, 14, 153-170.
- Díaz, B. (2016). *Análisis de errores en la Prueba de Acceso a la Universidad: El caso de los sistemas de ecuaciones lineales*. [Trabajo Fin de Máster, Universidad de Oviedo]. Recuperado de <http://hdl.handle.net/10651/38434>
- Domínguez, M. (1991). El aprendizaje por descubrimiento dirigido aplicado a la enseñanza de las matemáticas. *Suma*, 7, 39-41.
- Falcón, O. J. G. (2018). Experiencias docentes: Auto-creación de problemas para la resolución de sistemas de ecuaciones en matemáticas. *Revista Pensamiento Matemático*, 8(1), 15-30. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6447874>
- Guerrero, A. C., Carrillo, J. y Contreras, L. C. (2014). Problemas de sistemas de ecuaciones lineales en libros de texto de 3º ESO. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 395-404). Salamanca: SEIEM.

Grossman, S. I., Stanley, I. y Flores, J. (2012). *Álgebra lineal*. (7a ed.). México: McGraw Hill Latinoamericana.

Hernández, C. M. (2013). Consideraciones para el uso del GeoGebra en ecuaciones, inecuaciones, sistemas y funciones. *Números*, 82, 115-129. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4165084>

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

Liljedahl, P. (2020). *Building Thinking Classrooms in Mathematics*. Corwin Mathematics Series.

Machín, P. y Rey, M.J. (2023). *Matemáticas 2.o ESO Geniox*. Madrid: Editorial Oxford.

Marcos, J.C. (2018). *La Flor de Thymaridas de Paros*. Bitácora de Matemáticas. <https://bitacoradematematicasdejucarmarsa.blogspot.com/2018/12/1a-flor-de-thymaridas-de-paros.html>

Medina, I. y Albarracín, A. (2012). *Un estudio de la principal obra de Diofanto de Alejandría: La aritmética*. [Trabajo de grado, Universidad pedagógica nacional de Bogotá]. <http://hdl.handle.net/20.500.12209/2164>

Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Muñiz, L.J. y Abella, A. (2022). Errores del alumnado de Educación Secundaria al manejar y resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, 111, 7-28. https://thales.cica.es/epsilon_d9/node/4957

Nieto, M., Alcaide, F. y Pérez, A. (2023). *Matemáticas 2o ESO Revuela*. Madrid: Editorial SM.

Orden ECD/1112/2022, de 18 de julio, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Orden ECD/1172/2022, de 2 de agosto, por la que se aprueba el currículo y las características de la evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria.

Pérez, E. G. y Vargas, V. (2019). Secuencia didáctica para el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales con GeoGebra. *Revista Electrónica AMIUTEM*, 7(2), 88-97. <http://revista.amiutem.edu.mx>

Pusdà, M. P., Rosero, R. H. y Benavides, G. G. (2022). Evaluación del software GeoGebra como recurso de enseñanza en sistemas de ecuaciones. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 6(4), 3406-3419. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v6i4.2843

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.

Anexos

Anexo I. Explicación de los métodos algebraicos de resolución

Método de sustitución

Se despeja una incógnita de una de las dos ecuaciones y a continuación se sustituye en la otra ecuación. Con esto lo que se consigue es obtener una ecuación con una única incógnita y así hallar su valor. Por último, ese valor obtenido se vuelve a sustituir en la primera y se obtiene el valor de la otra incógnita.

Ejemplo resuelto:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

Tratamos de despejar la incógnita que tenga como coeficiente 1 o -1 en caso de ser posible. En este caso despejamos la incógnita x de la primera ecuación:

$$x + y = 5 \Rightarrow x = 5 - y$$

Seguidamente, se sustituye esta expresión algebraica para x en la otra ecuación, en este caso en la segunda:

$$2 \cdot (5 - y) - y = 4 \Rightarrow 10 - 2y - y = 4 \Rightarrow 10 - 4 = 3y \Rightarrow 6 = 3y \Rightarrow \frac{6}{3} = y \Rightarrow 2 = y$$

Una vez obtenido el valor de esta incógnita $y = 2$, pasamos a sustituir en la ecuación que hemos despejado inicialmente: $x = 5 - y \Rightarrow x = 5 - 2 \Rightarrow x = 3$.

Por lo tanto, la solución del sistema es: $x = 3, y = 2$.

Método de igualación

Se despejan las mismas incógnitas en las dos ecuaciones del sistema y una vez estén despejadas, se igualan. De esta manera, obtenemos una ecuación de primer grado con una incógnita y se obtiene una solución. Finalmente, basta con sustituir ese valor en una de las ecuaciones iniciales.

Ejemplo resuelto:

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + 3y = -5 \end{cases}$$

Elegimos una de las dos incógnitas y la despejamos de las dos ecuaciones, en este caso por ejemplo la incógnita y :

$$\text{Ecuación 1: } y = 2 - 3x$$

$$\text{Ecuación 2: } 3y = -5 + 2x \Rightarrow y = \frac{-5+2x}{3}$$

$$\text{Igualamos estas dos expresiones algebraicas: } 2 - 3x = \frac{-5+2x}{3}$$

Resolvemos la ecuación que obtenemos:

$$2 - 3x = \frac{-5+2x}{3} \Rightarrow 6 - 9x = -5 + 2x \Rightarrow 6 + 5 = 2x + 9x \Rightarrow 11 = 11x \Rightarrow x = 1.$$

Ahora se sustituye este valor en cualquiera de las dos expresiones algebraicas obtenidas de despejar la incógnita y . Por ejemplo, $y = 2 - 3x \Rightarrow y = 2 - 3 \cdot 1 \Rightarrow y = -1$.

Por lo tanto, la solución es $x = 1, y = -1$.

Método de reducción

Se selecciona una incógnita para hacer que sus coeficientes en ambas ecuaciones sean opuestos. Así, ambas ecuaciones se pueden sumar y obtenemos una ecuación de primer grado. Una vez resuelto, se obtiene un valor y se sustituye en cualquiera de las ecuaciones iniciales del sistema y se obtiene el otro valor.

Ejemplo resuelto:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 5x - 6y = 3 \end{cases}$$

Vamos a operar para eliminar la incógnita y , ya que para esta incógnita ya tenemos los signos opuestos, por lo que solo es preciso operar para obtener el mismo coeficiente (en valor absoluto). Para encontrar el valor que buscamos en los coeficientes de la variable que vamos a eliminar, se puede proceder con *m. c. m.* $(3,6) = 6$.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 5x - 6y = 3 \end{cases} \xrightarrow{1^a \text{ ec} \cdot 2} \begin{cases} 8x + 6y = 36 \\ 5x - 6y = 3 \end{cases}$$

De esta manera, sumamos y obtenemos la ecuación: $13x = 39$. Resolviendo obtenemos $x = 3$.

Sustituimos este valor en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema y obtenemos el valor de la segunda incógnita. Por ejemplo: $4 \cdot 3 + 3y = 18 \Rightarrow 3y = 18 - 12 \Rightarrow y = 2$.

Así, la solución del sistema es $x = 3, y = 2$.

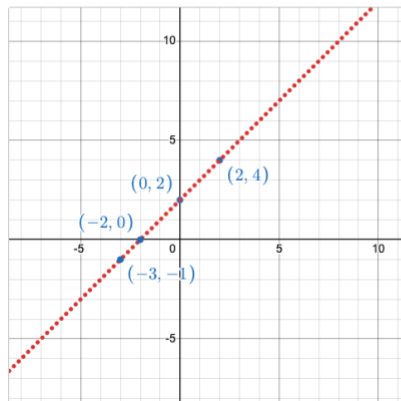
Anexo II. Capturas del Applet de Desmos Sesión 3

de la página



1 de 16

Repaso de ecuaciones con dos incógnitas



Atentos al gráfico. Podemos observar puntos de la recta, que tienen dos coordenadas, una x (horizontal) y una y (vertical). ¿Qué característica tienen todos ellos? ¿Encuentras algo que sea común a todos? ¿Se puede expresar de alguna manera?



Entregar



5 de 16

¿Solución de ambas?

En la sesión anterior vimos que una manera de obtener la solución de las dos ecuaciones a la vez era mediante tablas de valores. ¿Se te ocurre alguna otra manera de saber si hay alguna pareja de números (x, y) que sea solución de ambas ecuaciones a la vez?



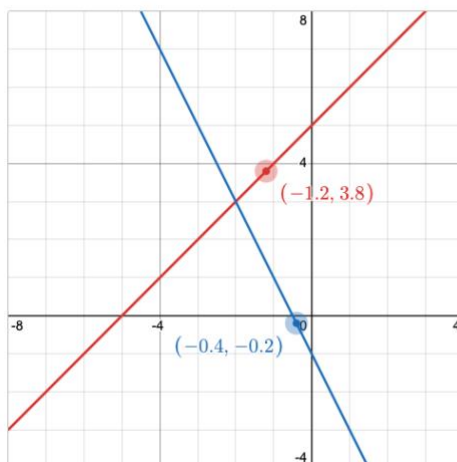
Entregar

de la página



6 de 16

Una pista



Vamos a verlo con la representación de todos los puntos que son solución de esas ecuaciones.

En rojo están todos los puntos que son solución de $y = x + 5$.

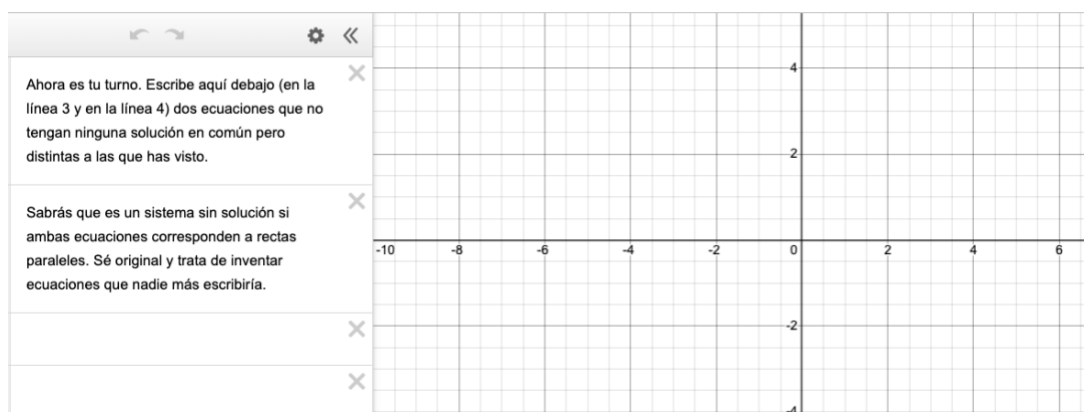
En azul puedes ver todos los puntos que son solución de $y = -2x - 1$.

¿Qué observas en el gráfico? ¿Cómo te ayuda esto a responder a la pregunta anterior?



Entregar

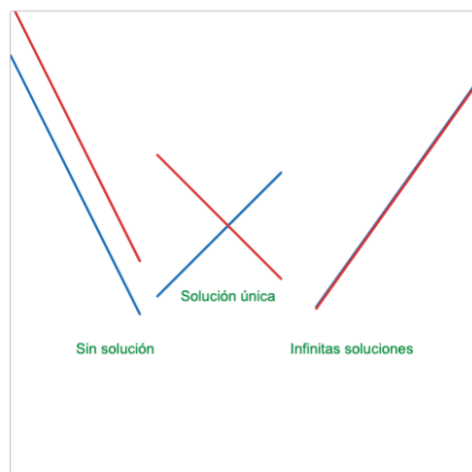
Inventa un sistema sin solución



Sistemas con más de una solución



Conclusión



Como ves, hay tres posibilidades:

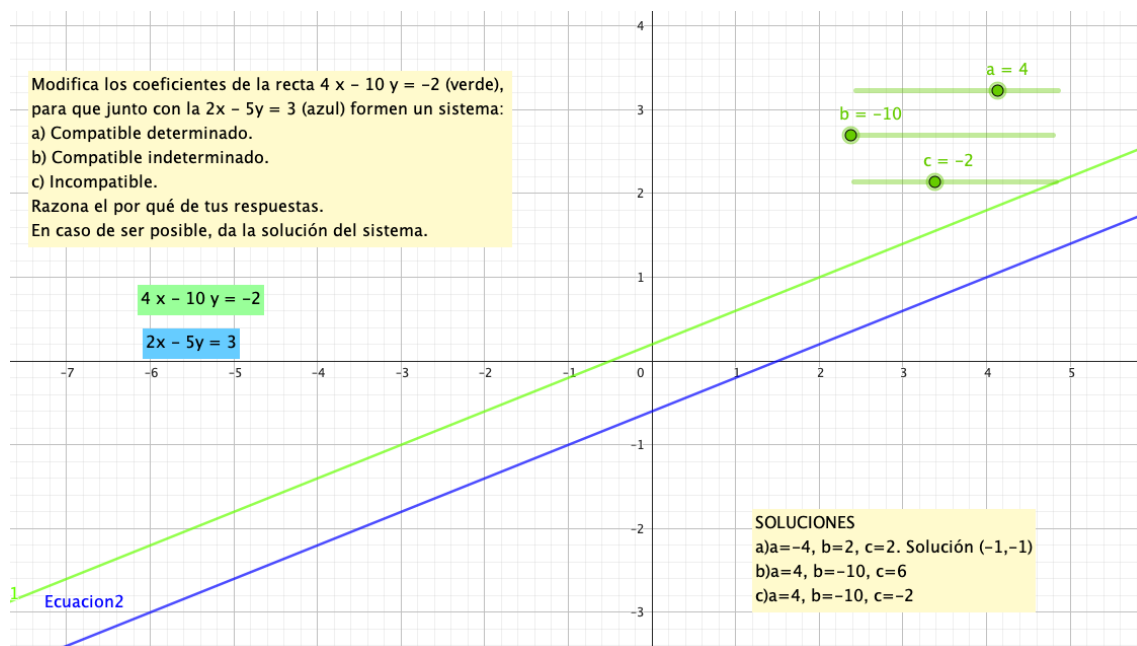
-Si las rectas son paralelas, no es posible que haya un punto (solución) común a ambas. Este sistema se llama **SISTEMA INCOMPATIBLE**.

-Si las rectas se cortan, se cortarán solo en un punto, no hay más posibilidades. Es la solución del sistema. Este sistema se llama **SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO**.

-Por último, lo que también puede pasar es que en realidad sean la misma recta y estén superpuestas: todos los puntos de la primera pertenecen a la segunda, con lo cual las soluciones de una de las ecuaciones también lo son de la otra. Tendremos por tanto infinitas soluciones. Este sistema se llama **SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO**.

Anexo III. Soluciones de los problemas de la prueba final

Actividad 1. GeoGebra (se muestra una solución para cada apartado, pero no es la única solución)



Para argumentar las soluciones, en el apartado a) basta con indicar que se obtienen dos rectas secantes al no presentar ningún tipo de proporcionalidad en los coeficientes, y la solución es el punto de corte de ellas. En el apartado b) se tiene que los nuevos coeficientes y el término independiente son múltiplos de 2 de los de la ecuación 2, obteniendo de esta manera ecuaciones equivalentes (coincidentes), por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones. Para el último apartado, solo son proporcionales los coeficientes de las variables, no el término independiente, por lo tanto, se obtienen rectas paralelas y el sistema no tiene solución.

Para todos los problemas se muestra una posible resolución, sin ser la única, ya que podría cambiar el orden de las variables o el método con el que se resuelva.

Actividad 2.

$\begin{cases} x + y = 50 \\ 40x + 30y = 1620 \end{cases}$ siendo $x = n^\circ$ de zapatillas vendidas sin rebaja, $y = n^\circ$ de zapatillas vendidas con rebaja.

Para este método conviene obtener una ecuación equivalente de la segunda ecuación, dividiendo a ambos lados de la igualdad por 10. $4x + 3y = 162$

De esta manera tenemos el sistema: $\begin{cases} x + y = 50 \\ 4x + 3y = 162 \end{cases}$, para el que se va a usar el método de sustitución. De la primera ecuación despejamos la incógnita x : $x = 50 - y$.

Sustituyendo en la segunda ecuación, obtenemos: $4 \cdot (50 - y) + 3y = 162 \Rightarrow 200 - 4y + 3y = 162 \Rightarrow 200 - 162 = 38 = y$.

Volviendo a donde hemos despejado la incógnita x : $x = 50 - 38 = 12$.

Por lo tanto, se han vendido 12 zapatillas sin rebaja y 38 con rebaja.

Con respecto a los calcetines se plantea la ecuación $10x + 5y = 35$, siendo $x = n^{\circ}$ de pares que vende sin rebaja, $y = n^{\circ}$ de pares que vende con rebaja.

Como no tenemos más datos, hacemos una tabla de valores para estudiar los casos posibles del número de calcetines que podría tener.

x	0	1	2	3
y	7	5	3	1

Ya no habría más combinaciones, porque a partir de $x=4$, se obtienen valores negativos, lo cual no es posible en este contexto.

Actividad 3

Si $x = n^{\circ}$ alumnos que participa en la fiesta, $y =$ precio decoración, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 5x = y + 3 \\ 4x = y - 7 \end{cases}$$

Para resolver este problema, procedemos por el método de igualación, despejando la incógnita x .

En la primera ecuación: $x = \frac{y+3}{5}$. En la segunda: $x = \frac{y-7}{4}$

Igualamos: $\frac{y+3}{5} = \frac{y-7}{4} \Rightarrow 4 \cdot (y + 3) = 5 \cdot (y - 7) \Rightarrow 4y + 12 = 5y - 35$

Resolvemos la ecuación: $35 + 12 = 5y - 4y \Rightarrow 47 = y$

Sustituyendo este valor en una de las expresiones para x obtenemos: $x = \frac{47-7}{4} = \frac{40}{4} = 10$.

Por lo tanto, participan 10 alumnos y la decoración cuesta 47€.

Actividad 4

Tomamos a las dos primeras amigas para hacer el sistema ya que, respondiendo a la segunda cuestión, solo son necesarias dos ecuaciones para resolver un sistema con dos incógnitas.

Si $x =$ horas en pintar un paisaje, $y =$ horas en pintar un retrato, el sistema que obtenemos es:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 6x + 5y = 28 \end{cases}$$

Elegimos, por ejemplo, el método de reducción. Multiplicamos la 1ª ecuación por -2 y obtenemos:

$$\begin{cases} -6x - 4y = -26 \\ 6x + 5y = 28 \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones, obteniendo: $y = 2$.

Sustituyendo este valor en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema se tiene: $3x + 2 \cdot 2 = 13 \Rightarrow 3x = 13 - 4 \Rightarrow x = 3$.

Por tanto, se tardan 3 horas en pintar un paisaje y 2 horas en pintar un retrato.

Para la tercera pregunta: ¿Cuánto tiempo tardaría en pintar 2 paisajes y 7 retratos?

Se tiene: $3x + 2y = n^{\circ} \text{ de horas}$ con $x = \text{paisajes pintados}$, $y = \text{retratos pintados}$
 $3 \cdot 2 + 2 \cdot 7 = 6 + 14 = 20$ horas.

Con respecto a la última pregunta, se sustituye en la ecuación anterior y se comprueba si es solución el par (4,6):

$3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 12 + 12 = 24$ horas, que no son 36 como afirma José, por lo tanto está mintiendo.

Actividad 5.

Un posible enunciado para el sistema $\begin{cases} -x + 3y = 4 \\ \frac{1}{2}x + y = 8 \end{cases}$ es:

En un huerto, se recogen tomates y pimientos. Un día se recogen los alimentos, pero solo se sabe que la diferencia entre 3 veces la cantidad de kilos tomates menos la cantidad de kilos pimientos es 4 kilogramos, y si se hubiera cogido la mitad de los kilos de pimientos y la misma cantidad de tomates, hubiésemos recogido 4 kilogramos.

Para resolverlo, llamamos x a los kilos de pimientos e y a los kilos de tomate recogidos usando el método de reducción, por el que se multiplica la ecuación dos por 2, obteniendo:

$\begin{cases} -x + 3y = 4 \\ x + 2y = 16 \end{cases}$ y sumando las ecuaciones obtenemos: $5y = 20$, luego $y = 4$.

Sustituyendo este valor en la primera ecuación tenemos: $-x + 3 \cdot 4 = 4 \Rightarrow 12 - 4 = x \Rightarrow x = 8$.

Por lo tanto, la solución del enunciado es que se recogieron 8 kilos de pimientos , y 4 kilos de tomates.

Para obtener un sistema equivalente, basta multiplicar una de las dos ecuaciones por dos,

como hemos hecho en el método de reducción: $\begin{cases} -x + 3y = 4 \\ x + 2y = 16 \end{cases}$.

Anexo IV. Rúbrica para los criterios de evaluación

Criterio	Nivel Bajo	Nivel Intermedio	Nivel Alto
1.1. Interpretar problemas organizando datos y comprendiendo la pregunta	No identifica correctamente los datos ni entiende la pregunta del problema.	Organiza parcialmente los datos y entiende de forma general la pregunta, aunque con imprecisiones.	Organiza con claridad los datos relevantes y comprende completamente la situación y lo que se le pregunta.
1.2. Aplicar herramientas y estrategias apropiadas para resolver el sistema	Aplica un método incorrecto o lo abandona sin llegar a una solución.	Aplica un método adecuado, pero con errores en el procedimiento o los cálculos.	Escoge y aplica correctamente un método eficaz (igualación, reducción, sustitución, tabla, etc.) y llega a la solución de manera justificada.
2.1. Comprobar la corrección matemática de la solución	No comprueba si la solución obtenida es correcta.	Intenta comprobar la solución, pero con errores o de forma incompleta.	Sustituye correctamente las soluciones en el sistema y comprueba con éxito su validez matemática.
2.2. Evaluar la coherencia de la solución en su contexto	No relaciona la solución con el contexto o plantea respuestas incoherentes.	Interpreta la solución con cierta coherencia, pero sin justificar plenamente.	Evalúa la solución dentro del contexto planteado, justificando su validez con sentido común.
3.1. Formular y comprobar conjeturas sencillas	No plantea ninguna conjetura o lo hace sin base lógica.	Propone alguna conjetura con cierta justificación.	Plantea conjeturas relevantes y las comprueba usando patrones o relaciones entre datos.
3.2. Plantear variantes de un problema	No plantea nuevas versiones del problema.	Propone una variante modificando algún dato, pero sin analizar las consecuencias.	Propone variantes del problema modificando condiciones y anticipa cómo cambiaría la solución.

3.3. Uso de herramientas tecnológicas (GeoGebra o Desmos)	No utiliza herramientas digitales o las usa de forma incorrecta.	Usa una herramienta digital de forma básica para resolver o representar el sistema.	Integra adecuadamente herramientas tecnológicas para representar, explorar o resolver el sistema y comprobar conjeturas.
4.1. Pensamiento computacional: descomponer y organizar datos	Tiene dificultades para organizar los datos y el problema.	Descompone parcialmente el problema e identifica algunos patrones.	Organiza los datos de forma eficaz, detecta patrones relevantes y estructura el problema para facilitar su resolución.
4.2. Modelización e interpretación de algoritmos	No consigue modelizar el problema con un sistema de ecuaciones.	Modeliza el problema parcialmente, aunque con errores de interpretación o de estructura.	Modeliza correctamente el problema con un sistema y lo resuelve eficazmente, justificando su procedimiento.
8.1. Comunicación oral, escrita y digital del razonamiento matemático	Explica de forma desorganizada, con lenguaje poco preciso o sin justificar.	Comunica su razonamiento de forma comprensible, aunque con lenguaje o justificaciones mejorables.	Explica con claridad, usa terminología matemática adecuada y justifica sus procedimientos y conclusiones oralmente, por escrito y/o con medios digitales.

Anexo V. Rúbrica de observación directa para la evaluación del alumnado

Indicador	Nivel Bajo	Nivel Intermedio	Nivel Alto
Participación activa en el grupo	Apenas participa o se mantiene al margen del trabajo en grupo.	Participa de forma puntual en las tareas del grupo, aunque a veces necesita recordatorios para implicarse.	Participa activamente en las tareas del grupo, propone ideas y colabora de forma constante y responsable.
Asunción de roles y responsabilidades dentro del equipo	No asume un rol claro o evita responsabilidades.	Acepta el rol asignado y cumple con sus responsabilidades.	Desempeña su rol con iniciativa, se implica en las decisiones del grupo y contribuye al buen funcionamiento del grupo.
Respeto hacia las aportaciones y emociones de los compañeros	Interrumpe o ignora las opiniones de sus compañeros; muestra poca empatía o respeto.	Escucha a los demás y respeta sus opiniones, aunque a veces le cuesta aceptar puntos de vista diferentes.	Muestra empatía, valora las aportaciones ajenas y contribuye a un clima de respeto y confianza dentro del grupo.
Predisposición y actitud en el aula	Muestra desinterés o una actitud negativa frente a las actividades o el trabajo en equipo.	Mantiene una actitud generalmente positiva, aunque a veces le cuesta mantener la motivación o el compromiso.	Se muestra motivado, con actitud abierta y positiva ante el trabajo en grupo y las actividades del aula.
Contribución al bienestar común y a la creación de relaciones saludables	Su actitud puede dificultar el bienestar del grupo; no cuida las relaciones ni el ambiente de trabajo.	Favorece un ambiente adecuado de trabajo, aunque de forma algo pasiva o sin intervenir ante conflictos o dificultades.	Aporta activamente al bienestar del grupo, cuida las relaciones interpersonales y ayuda a resolver conflictos de forma constructiva.

Anexo VI. Rúbrica de la prueba final de la sesión 9

Criterio	Nivel Bajo	Nivel Intermedio	Nivel Alto
Comprensión del concepto de sistema	Presenta dificultades para identificar qué es un sistema de ecuaciones y su finalidad.	Identifica correctamente qué es un sistema, pero muestra cierta confusión en algunos aspectos.	Comprende claramente qué es un sistema de ecuaciones y su propósito en la resolución de problemas.
Resolución y cálculo	Comete errores frecuentes en los cálculos y en el proceso de resolución.	Resuelve el sistema correctamente, aunque con pequeños errores de cálculo o pasos incompletos.	Resuelve correctamente el sistema sin errores, mostrando claridad y precisión en cada paso.
Razonamiento y justificación	No explica ni justifica los pasos realizados o sus respuestas carecen de sentido lógico.	Ofrece una justificación básica de sus procedimientos, aunque poco detallada.	Explica con claridad y rigor el procedimiento seguido, justificando cada paso y resultado.
Interpretación de resultados	No interpreta o interpreta incorrectamente la solución del sistema.	Interpreta correctamente la solución, pero con falta de detalle o explicación.	Interpreta y explica correctamente la solución, indicando su significado en el contexto del problema.
Resolución de problemas aplicados	Tiene dificultades para plantear y resolver problemas mediante sistemas de ecuaciones.	Plantea y resuelve problemas aplicados con cierto acierto, aunque con imprecisiones o errores.	Plantea y resuelve problemas aplicados correctamente, demostrando buena comprensión y habilidad para modelar situaciones.
Presentación y claridad	Presenta un desarrollo desordenado y difícil de seguir.	Presenta el trabajo con cierta organización, aunque mejora necesaria en la claridad.	Presenta un desarrollo claro, ordenado y legible, facilitando la comprensión del examen.