



---

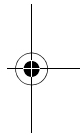
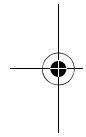
# Transferencia de calor

---



José M<sup>a</sup> Marín, C. Monné y J.Uche

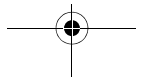
Área de Máquinas y Motores Térmicos  
Universidad de Zaragoza

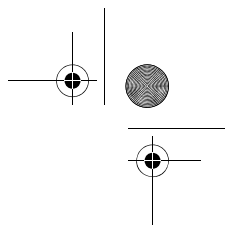
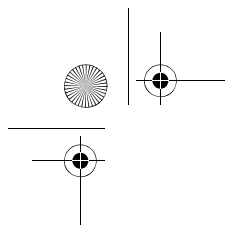


2ª Edición: Febrero 2007

Depósito Legal: 3017/98

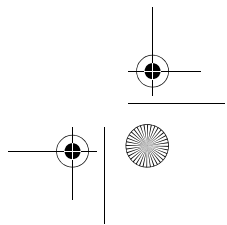
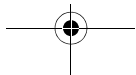
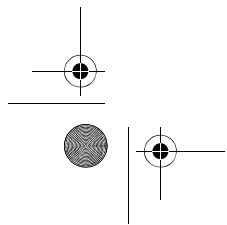
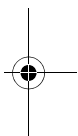
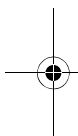
I.S.B.N.: 84-88502-73-7

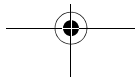
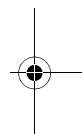
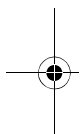




A la memoria de mi padre

José Mari



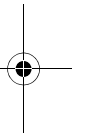
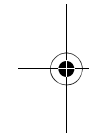




---

# PRÓLOGO

---



Este material que se ofrece es, en primer lugar, un libro de texto adecuado para ser utilizado en Escuelas de Ingeniería Superior y en Facultades de Ciencias, pero también pretende ser un manual práctico con información suficiente para abordar muchos problemas reales de ingeniería térmica en que la transferencia de calor juegue un papel preponderante.

Para que los contenidos de esta materia estuvieran mejor cubiertos faltaría, como mínimo, incluir los casos más ligados al transporte de materia, como las torres de refrigeración (equipo de mucha importancia térmica en grandes plantas industriales como centrales térmicas y plantas químicas) y otros equipos. Debido a la duración cuatrimestral de las asignaturas en los actuales planes de estudio, no ha parecido oportuno incrementar más el contenido, ya suficientemente extenso. No obstante, el uso de una herramienta tan fructífera como las analogías entre los diversos fenómenos de transporte, incluidas el texto, permite paliar en parte estas carencias.

En algunas partes del texto quizá se aprecie un lenguaje más bien esquemático al estilo de los clásicos apuntes. Esto se explica porque el origen de este material son los apuntes de la asignatura de Calor y Frío Industrial de los planes de estudio de la E.T.S.I.I. de Zaragoza de 1964 y 1984, que a través de una profunda reforma han llegado a convertirse en el presente texto. En cualquier caso el contenido de cualquier apartado se entiende que es suficientemente comprensible.

Para guiar al alumno en la comprensión de lo fundamental se ha añadido al final de cada capítulo una síntesis (o resumen) del mismo con los hitos principales, una colección de cuestiones que facilitan la detección y asimilación del conjunto de conocimientos que incluyendo conceptos, definiciones, leyes y relaciones funda-

---

## Prólogo

---

mentales y desarrollos básicos, constituyen el mínimo imprescindible que, a final de curso, el estudiante debe saber afrontar por sí solo sin recurrir a ningún material de apoyo, apuntes o libro. Éstos deberá usarlos para la resolución de problemas más amplios que exijan el manejo de fórmulas que, evidentemente, no se pueden ni se deben memorizar. Las cuestiones corresponden aproximadamente a cada capítulo, pero en algunos casos ha habido necesidad de reagruparlos por exceso o defecto de ellas, por lo que se verá que las cuestiones del final de algún capítulo no se pueden resolver hasta avanzar más la materia o que por contra en el final de algún capítulo no aparece lista de cuestiones. En este último caso deben buscarse al final de algún capítulo afín.

Como es habitual en los textos de Transferencia de Calor, al final de cada capítulo aparece una colección de problemas (salvo en los dos primeros, dada su naturaleza) para que el estudiante, solo o en interacción con el profesor, pueda entrenar la habilidad para resolver casos prácticos, lo más cercanos que sea posible a las aplicaciones reales. El último capítulo de este libro contiene exclusivamente problemas donde intervienen de una forma algo más complicada varios mecanismos de transmisión de calor (multimodo). Para orientar sobre la validez de los resultados obtenidos, se incluyen al final del libro las soluciones de una parte de los problemas propuestos.

La diferencia entre la presente edición y las anteriores estriba en la corrección de erratas, que seguirán apareciendo y por la s que se piden disculpas, la adición y supresión de algunos problemas del final de los capítulos y, principalmente, la revisión y ampliación de las soluciones que se ofrecen al final del libro.

Febrero de 2007

*Los autores*

---

# ÍNDICE

---

Prólogo .....	v
Índice .....	vii
Nomenclatura .....	xvii
<b>CAPÍTULO 1. TRANSFERENCIA DE CALOR. ASPECTOS BÁSICOS .....</b>	<b>1</b>
Introducción .....	1
Hitos históricos en Transferencia de Calor .....	2
Importancia de la transmisión de calor en la vida cotidiana y en la actividad industrial .....	3
Relación calor-temperatura .....	3
Mecanismos de transporte de calor .....	4
Leyes básicas .....	6
Otras leyes importantes .....	7
Órdenes de magnitud .....	8
Referencias .....	11
Cuestiones generales de Transferencia de Calor .....	12
<b>CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE CONDUCCIÓN DEL CALOR .....</b>	<b>15</b>
Ley de Fourier .....	15
Conductividad térmica .....	16
Órdenes de magnitud .....	16
Dependencia con la temperatura .....	17
Ecuación de difusión del calor .....	18
Ecuación de difusión del calor en coordenadas radiales .....	19
Otras expresiones de la ecuación de difusión del calor .....	20
Condiciones de contorno .....	21
Referencias .....	22
Síntesis del capítulo .....	23
Cuestiones .....	24
<b>CAPÍTULO 3. CONDUCCIÓN UNIDIMENSIONAL Y ESTACIONARIA .....</b>	<b>29</b>
Conducción sin generación térmica .....	29
La pared plana infinita .....	29
La pared cilíndrica infinita .....	31
Conducción cuasi-unidireccional .....	32
Casos particulares .....	33
Otro ejemplo: la pared esférica .....	34

---

**Índice**

---

Los sistemas compuestos .....	34
Ejemplo 1: Resistencias en serie .....	34
Ejemplo 2: Resistencias en paralelo .....	37
Ejemplo 3: Asociaciones mixtas .....	39
¿Cuándo se puede utilizar la herramienta de las resistencias térmicas?.....	39
Resistencia de contacto .....	40
Conducción con generación térmica .....	42
La pared plana .....	42
El cilindro .....	44
Aletas (superficies extendidas) .....	45
Ecuación general de una aleta .....	46
Aletas de sección constante .....	48
Ecuación general de una aleta circular (anular) .....	50
Aletas de sección (espesor) variable. Rendimientos .....	52
Ejercicio .....	54
Referencias .....	55
Síntesis del capítulo .....	56
Cuestiones .....	58
Problemas .....	62
Aletas .....	65
<b>CAPÍTULO 4. CONDUCCIÓN MULTIDIMENSIONAL Y ESTACIONARIA .....</b>	<b>71</b>
Un caso analíticamente resoluble .....	72
El método gráfico. El factor de forma .....	73
Analogía eléctrica .....	76
El método de las diferencias finitas .....	77
Referencias .....	81
Síntesis del capítulo .....	83
Cuestiones .....	84
Problemas .....	87
<b>CAPÍTULO 5. CONDUCCIÓN TRANSITORIA .....</b>	<b>95</b>
Sistemas de capacidad .....	95
Interpretación .....	97
Cálculo del valor evacuado del sólido .....	98
Validez del método .....	98
Sistemas unidimensionales clásicos .....	101
Pared plana infinita .....	102
Cilindro infinito .....	103
Esfera .....	103
El sólido semiinfinito .....	105
Análisis .....	105
Sistemas multidimensionales producto .....	108

---

**Índice**

---

Método de diferencias finitas .....	111
Referencias .....	114
Síntesis de del capítulo .....	115
Cuestiones .....	116
Problemas .....	119
<b>CAPÍTULO 6. FUNDAMENTOS DE CONVECCIÓN DEL CALOR .....</b>	<b>127</b>
Planteamiento matemático .....	128
Ecuación de la energía térmica de un fluido .....	128
Casos particulares .....	129
Otras ecuaciones necesarias para resolver un problema de convección ....	131
Ecuación de las especies químicas .....	131
Resolución de las ecuaciones de la convección .....	132
Simplificaciones habituales .....	133
Capa límite. Concepto .....	134
Aproximaciones de capa límite .....	138
Ecuaciones simplificadas en dos dimensiones .....	138
Ejercicio .....	140
Planteamiento histórico .....	141
Análisis dimensional .....	142
Adimensionalización de las Ecuaciones Diferenciales de Variación .....	142
Forma funcional de las soluciones .....	144
Tratamiento de las propiedades del fluido .....	149
Condiciones de contorno .....	150
Analogías entre los fenómenos de transporte .....	151
Primera: Analogía transferencia de calor–transferencia de masa .....	151
Segunda: Analogía de Reynolds .....	154
Referencias .....	155
Síntesis del capítulo .....	156
Cuestiones .....	158
Problemas .....	161
<b>CAPÍTULO 7. CONVECCIÓN FORZADA EXTERIOR .....</b>	<b>163</b>
Flujo paralelo a una placa isoterma. Régimen laminar .....	164
Desarrollo matemático .....	164
Soluciones en la capa límite térmica .....	167
Soluciones en la capa límite de concentraciones .....	168
Observaciones generales .....	169
Flujo en placa plana con Pr muy pequeño .....	170
Flujo paralelo a una placa plana. Régimen turbulento .....	170
Observaciones .....	171
Condiciones mixtas .....	172
Flujo paralelo a una placa plana isoflujo .....	172

---

**Índice**

---

El cilindro en flujo cruzado .....	173
Expresiones globales .....	176
La esfera .....	178
Los bancos de tubos .....	179
Intercambio de calor .....	181
Correlaciones para calcular $\bar{h}$ .....	183
Flujo perpendicular a un banco de tubos lisos .....	183
Flujo perpendicular a un banco de tubos con aletas .....	186
Intercambiadores de carcasa y tubos. Flujo mixto .....	189
Flujo en paralelo a los tubos .....	190
Chorros normales a superficies .....	190
Consideraciones hidrodinámicas y geométricas .....	191
Correlaciones experimentales .....	194
Lechos empaquetados .....	196
Superficies giratorias .....	197
Referencias .....	199
Síntesis del capítulo .....	201
Problemas .....	202
<b>CAPÍTULO 8. CONVECCIÓN FORZADA INTERIOR .....</b>	<b>209</b>
Aspectos térmicos .....	210
Temperatura media .....	212
Ley cinética para convección interior .....	212
Condiciones de pleno desarrollo .....	212
Balance de energía .....	213
Variación de $T_m$ y $T_s$ en las dos condiciones de contorno habituales .....	214
Correlaciones para el coeficiente de convección en tubos circulares .....	217
Régimen laminar. Región completamente desarrollada .....	217
Régimen laminar. Región de entrada .....	219
Régimen de transición .....	221
Régimen turbulento. Región completamente desarrollada .....	222
Consideraciones generales sobre las correlaciones del rég. turbulento .....	224
Líquidos metálicos o fluidos de número de Prandtl muy bajo .....	225
Correlaciones para el coeficiente de convección en tubos no circulares .....	225
Correlaciones para el coeficiente de convección en tubos anulares .....	227
Régimen laminar. Región completamente desarrollada .....	228
Régimen turbulento. Región completamente desarrollada .....	230
Referencias .....	231
Síntesis del capítulo .....	233
Cuestiones .....	234
Problemas .....	237
<b>CAPÍTULO 9. CONVECCIÓN NATURAL .....</b>	<b>247</b>

---

**Índice**

---

Fenomenología y ecuaciones físicas .....	249
Convección laminar en una superficie vertical isoterma. Estudio teórico .....	252
Convección laminar en una placa vertical no isoterma .....	254
Correlaciones empíricas. Generalidades .....	255
Correlaciones empíricas para la placa vertical .....	256
Correlaciones para el cilindro vertical .....	258
Placas horizontales .....	259
Placas inclinadas .....	261
Flujo de calor uniforme en la superficie ( $q''_s = \text{cte}$ ) .....	262
El cilindro horizontal largo .....	263
La esfera .....	264
Otros cuerpos sumergidos .....	265
Canales .....	266
Canales verticales en placas planas .....	266
Distancia óptima .....	269
Canales verticales de otras secciones .....	270
Recintos cerrados .....	270
Correlaciones empíricas sencillas .....	272
Correlaciones empíricas más exactas .....	272
Convección mixta (forzada y natural).....	277
Referencias .....	278
Síntesis del capítulo .....	282
Cuestiones .....	284
Problemas .....	286
<b>CAPÍTULO 10. CONVECCIÓN BIFÁSICA.....</b>	<b>293</b>
Introducción .....	293
Condensación .....	293
Mecanismos físicos .....	293
Modelo de Nusselt para condensación sobre una placa plana .....	294
Aplicación del modelo de Nusselt a otras geometrías .....	302
Régimen no laminar .....	307
Condensación forzada .....	309
Condensación en gotas .....	313
Presencia de gases incondensables .....	314
Ebullición .....	315
Tipos de ebullición .....	315
Ebullición en piscina .....	315
Correlaciones para ebullición en piscina .....	317
Ebullición forzada. Zonas en un tubo vertical .....	322
Correlaciones para ebullición forzada en un tubo vertical .....	323
Ebullición forzada en tubos horizontales .....	326
Correlaciones para ebullición forzada en tubos horizontales	

---

**Índice**

---

y verticales .....	326
Referencias .....	328
Síntesis del capítulo .....	332
Condensación .....	332
Ebullición .....	334
Cuestiones .....	336
Problemas .....	340
<b>CAPÍTULO 11. INTERCAMBIADORES DE CALOR .....</b>	<b>343</b>
Descriptiva .....	344
Intercambio de calor por contacto directo .....	344
Intercambiadores de calor tubulares .....	346
Otras configuraciones en IC de carcasa y tubos .....	348
Conexiones de intercambiadores de carcasa y tubos .....	349
Compactos de tubos y aletas .....	350
Otros tipos de intercambiadores de calor tubulares .....	351
Intercambiadores de calor de placas .....	352
Intercambiadores de calor regenerativos .....	354
Disposición de los flujos y perfiles térmicos .....	355
Otras características de los intercambiadores de calor .....	358
Compacidad .....	358
Mecanismos que participan en la transferencia de calor .....	358
Análisis de los intercambiadores de calor .....	359
Eficiencia y resistencia convectiva de una superficie aleteada .....	359
Coeficiente global de transferencia de calor .....	360
Método MLDT .....	362
Intercambiadores de flujos en paralelo .....	363
Flujo en contracorriente .....	365
Flujos en direcciones no paralelas .....	366
Coeficiente global, U, variable .....	373
El condensador de un frigorífico doméstico .....	374
Método NTU- $\epsilon$ .....	375
Determinación de la eficiencia, $\epsilon$ .....	376
Flujo paralelo .....	376
Metodología de trabajo en intercambiadores de calor .....	380
Diseño .....	380
Análisis .....	380
Regeneradores .....	380
Métodos de aumento de la transferencia de calor .....	386
Referencias .....	387
Síntesis del capítulo .....	389
Cuestiones .....	390
Problemas .....	393

---

**Índice**

---

CAPÍTULO 12. RADIACIÓN. FUNDAMENTOS .....	407
Características principales de la radiación .....	408
Tipos de radiación .....	409
Aplicaciones de la radiación .....	410
Conceptos fundamentales .....	410
Intensidad .....	411
Conceptos hemisféricos .....	412
El cuerpo negro .....	416
Leyes del cuerpo negro .....	417
Los radiadores reales .....	422
Emisividad, $\epsilon$ .....	422
Absorción, reflexión y transmisión .....	426
Medios semitransparentes. Ejercicio .....	428
Leyes de Kirchhoff .....	429
Demostración .....	430
Radiación ambiental .....	432
Radiación solar .....	432
Radiación atmosférica .....	435
Emisión de la superficie de La Tierra .....	436
Referencias .....	437
Síntesis del capítulo .....	439
Cuestiones .....	440
Problemas .....	445
CAPÍTULO 13. INTERCAMBIO RADIATIVO ENTRE SUPERFICIES .....	453
El factor de vista .....	453
Relaciones algebraicas de los factores de vista .....	459
Ejemplos .....	460
Intercambio entre cuerpos negros .....	461
El recinto cerrado de superficies difusas y grises .....	462
Caso particular: El recinto de dos superficies .....	465
Ejemplos de recintos de dos superficies .....	466
Ejercicio con paredes semitransparentes .....	467
Paredes refractarias. Superficies reirradiantes .....	468
Caso particular .....	469
Comentarios .....	471
Referencias .....	471
Síntesis del capítulo .....	473
Cuestiones .....	475
Problemas .....	477
CAPÍTULO 14. RADIACIÓN VOLUMÉTRICA .....	493
La atenuación de la radiación en un medio participativo .....	494

---

**Índice**

---

Componentes y magnitudes derivadas de $k_\lambda$	495
Coeficientes de absorción y dispersión .....	496
La ecuación del transporte radiativo .....	498
Propiedades direccionales de los medios radiantes .....	500
Absortancia direccional en un medio termodinámicamente uniforme .....	500
Emitancia direccional en un medio termodinámicamente uniforme .....	501
Transmitancia direccional .....	502
Propiedades hemisféricas de los medios radiantes .....	502
Base teórica de la longitud media de haz .....	504
Gas (medio) ópticamente delgado .....	506
Gas medio ópticamente no delgado .....	507
Emitancia total hemisférica. Curvas de Hottel .....	507
Intercambio radiativo entre un gas y su contorno, ambos isotermos .....	511
Intercambio radiante entre una masa isoterma de gas y su contorno negro e isoterma .....	512
Comportamiento radiante de un gas con partículas. Llamas .....	513
Hollín .....	513
Propiedades radiantes del hollín .....	514
Grandes partículas .....	516
Emitancia de una llama real .....	518
Intercambio radiante en situaciones no isotermas .....	518
Método de las zonas de Hottel .....	519
Referencias .....	533
Síntesis del capítulo .....	535
Cuestiones .....	536
Problemas .....	539
<b>CAPÍTULO 15. TRANSFERENCIA DE CALOR MULTIMODO .....</b>	<b>543</b>
Problemas .....	543
<b>APÉNDICE A. Dimensiones, unidades y constantes físicas .....</b>	<b>547</b>
Dimensiones .....	547
Unidades .....	547
Múltiplos y submúltiplos del Sistema Internacional .....	550
Constantes universales .....	551
Referencias .....	552
<b>APÉNDICE B. Propiedades termofísicas de la materia</b>	<b>553</b>
Tabla B.1 Propiedades termofísicas de sólidos metálicos a 300 K .....	553

---

**Índice**

---

Tabla B.2	Variación de la conductividad térmica de los metales con la temperatura .....	555
Tabla B.3	Variación del calor específico de los metales con la temperatura .....	556
Tabla B.4	Propiedades termofísicas de dieléctricos sólidos .....	557
Tabla B.5	Propiedades termofísicas de aislantes y materiales de construcción .....	559
Tabla B.6	Propiedades termofísicas de gases a presión atmosférica .....	561
Tabla B.7	Propiedades termofísicas del agua saturada .....	564
Tabla B.8	Propiedades termofísicas del refrigerante 12 saturado .....	566
Tabla B.9	Propiedades termofísicas del refrigerante 134a saturado .....	567
Tabla B.10	Propiedades termofísicas del refrigerante 717 saturado .....	568
Tabla B.11	Propiedades termofísicas de fluidos orgánicos para intercambio de calor .....	569
Tabla B.12	Propiedades termofísicas del fluido térmico Therminol 60 como líquido saturado .....	569
Tabla B.13	Propiedades termofísicas de soluciones acuosas de etilenglicol a diversas concentraciones .....	570
Tabla B.14	Propiedades termofísicas de líquidos dieléctricos saturados .....	571
Tabla B.15	Propiedades termofísicas de líquidos metálicos saturados .....	573
Tabla B.16	Absortividad espectral de materiales diversos .....	574
Tabla B.17	Propiedades radiativas espectrales de vidrios .....	574
Tabla B.18	Emisividad total de metales sólidos en función de la temperatura .....	575
Tabla B.19	Emisividad total de materiales no metálicos .....	576
Tabla B.20	Comportamiento radiativo de algunos materiales respecto de la radiación solar .....	578
Referencias	.....	579
APÉNDICE C. Cálculo de pérdidas de carga .....		581
Pérdidas de carga en conductos .....		581
Régimen laminar, $Re < 2000$ .....		581
Régimen turbulento, $Re > 4000$ .....		583
Fuerza de arrastre sobre objetos sumergidos en un fluido .....		584
Pérdida de carga en banco de tubos .....		585
Pérdida de carga en intercambiadores de calor .....		586
Variación de la presión en intercambiadores de calor debido a cambios apreciables de densidad del fluido .....		587
Potencia de bombeo .....		588
Referencias .....		588
APÉNDICE D. Dimensiones comerciales de tubos para intercambiadores de calor.....		591

---

**Índice**

---

APÉNDICE E. Funciones matemáticas de uso en transmisión de calor .....	593
Funciones de Bessel .....	593
Función error de Gauss .....	596
Transformadas de Laplace .....	597
Referencias .....	599
Soluciones de algunos problemas propuestos .....	601

---

# Nomenclatura

---

La nomenclatura de este texto se ha procurado ceñir, en la medida de lo posible, a los convenios acordados en la 8ª Conferencia Internacional sobre Transferencia de Calor que tuvo lugar el año 1986 en San Francisco, EE.UU.

Entre paréntesis figuran las unidades de cada magnitud en el S.I. (Sistema Internacional), que es el que se utiliza en este texto.

## Letras latinas

- A Área ( $\text{m}^2$ ).
- $A_c$  Área de una sección ( $\text{m}^2$ ).
- $A_s$  Área superficial ( $\text{m}^2$ ).
- a Difusividad térmica,  $a \equiv \lambda/\rho c_p$  ( $\text{m}^2/\text{s}$ )  
Coeficiente de absorción espectral de un gas gris ( $\text{m}^{-1}$ )
- $a_\lambda$  Coeficiente de absorción espectral ( $\text{m}^{-1}$ ).
- C Capacidad calorífica de un fluido circulante ( $\text{W/K}$ ),  $C \equiv mc_p$ .  
Concentración volumétrica de partículas (volumen de partículas por unidad de volumen).
- $C_f$  Coeficiente de fricción superficial,  $C_f \equiv \frac{\tau_s}{(1/2)\rho V^2}$ .
- c Calor específico de una sustancia incompresible ( $\text{J/kg}\cdot\text{K}$  o  $\text{kJ/kg}\cdot\text{K}$ ).  
Velocidad de la luz ( $\text{m/s}$ ).
- $c_p$  Calor específico a presión constante ( $\text{J/kg}\cdot\text{K}$  o  $\text{kJ/kg}\cdot\text{K}$ ).
- $c_v$  Calor específico a volumen constante ( $\text{J/kg}\cdot\text{K}$  o  $\text{kJ/kg}\cdot\text{K}$ ).
- D Diámetro ( $\text{m}$ ).
- $D_{AB}$  Coeficiente de difusión binaria de la especie química A en la mezcla formada por las especies A y B ( $\text{m}^2/\text{s}$ ).
- $D_h$  Diámetro hidráulico ( $\text{m}$ ).
- $D/Dt$  Derivada sustancial respecto al tiempo ( $\text{s}^{-1}$ ).
- d Diferencial.

---

**Nomenclatura**

---

div	Divergencia.
E	Poder emisivo total (W/m <sup>2</sup> ).
E <sub>λ</sub>	Poder emisivo espectral (W/m <sup>2</sup> ·μm)
e	Base de los logaritmos neperianos Espesor (m).
F	Eficiencia de un intercambiador de calor respecto al de contracorriente, $F \equiv \frac{\Delta T_m}{\Delta T_{ml,cc}}$
F <sub>ij</sub>	Factor de vista.
f	Factor de fricción en un tubo, $f \equiv - \frac{dp/dx}{(1/2)\rho V^2} D_h$ .
$\vec{G}$	Flujo másico, $\vec{G} \equiv \rho \vec{V}$ ; $G =  \vec{G}  = \frac{\dot{m}}{A_c} \left( \text{kg/s} \cdot \text{m}^2 \right)$ .
G	Irradiación total (W/m <sup>2</sup> ).
G <sub>λ</sub>	Irradiación espectral (W/m <sup>2</sup> ·μm).
g	Aceleración de la gravedad (m/s <sup>2</sup> ).
H	Altura de un objeto (m).
h	Coefficiente de convección del calor (W/m <sup>2</sup> ·K). Entalpía específica (J/kg o kJ/kg). Constante de Planck (ver apéndice A.3).
h <sub>lg</sub>	Entalpía de vaporización (condensación) (J/kg o kJ/kg).
h <sub>m</sub>	Coefficiente de convección de masa (m/s).
I	Intensidad total (W/m <sup>2</sup> ·sr).
I <sub>λ</sub>	Intensidad espectral (W/m <sup>2</sup> ·sr·μm).
J	Radiosidad total (W/m <sup>2</sup> ).
J <sub>λ</sub>	Radiosidad espectral (W/m <sup>2</sup> ·μm).
k	Rugosidad (mm). Constante de Boltzmann (ver apéndice A.3)
k <sub>λ</sub>	Coefficiente de atenuación espectral (m <sup>-1</sup> ), $k_\lambda = a_\lambda + \sigma_\lambda$ .
L	Longitud característica de un objeto (m).

---

## Nomenclatura

---

$L_e$	Longitud media de haz (m).
$L_{e,o}$	Longitud media de haz de un medio ópticamente delgado.
$\ln$	Logaritmo neperiano.
$\log$	Logaritmo decimal.
$\tilde{M}$	Masa molar (kg/kmol).
$Ma$	Número de Mach.
$\dot{m}$	Caudal másico (kg/s).
$N$	Número de partículas por unidad de volumen ( $m^{-3}$ ).
$\vec{n}$	Vector unitario normal a una superficie.
NTU	(Siglas inglesas de) número de unidades de transferencia, $NTU \equiv \frac{UA}{C_{\min}}$ .
$p$	Presión (bar, Pa).
$Q$	Energía intercambiada en forma de calor (J).
$q$	Calor que circula por unidad de tiempo; en este texto, simplemente calor (W).
$q'$	Calor por unidad de longitud (W/m).
$\vec{q}''$ , $q''$	flujo de calor ( $W/m^2$ ).
$q'''$	Calor generado o consumido por unidad de volumen ( $W/m^3$ ).
$R$	Radio de un objeto (m).
$\bar{R}$	Constante universal de los gases (ver apéndice A.3).
$R_t$	Resistencia térmica (K/W).
$r$	Coordenada radial (m).
$r, \phi, z$	Componentes de las coordenadas cilíndricas (m, rad, m).
$r, \theta, \phi$	Componentes de las coordenadas esféricas (m, rad, rad).
$S$	Camino recorrido por un rayo (m).
	Factor de forma en conducción bidimensional (m).
	Distancia entre los centros de los tubos en bancos de tubos (m).
$s$	Coordenada transformada de Laplace del tiempo ( $s^{-1}$ ).
$s_\lambda$	Sección dispersiva espectral ( $m^2$ ).
$T$	Temperatura (K, °C).
$t$	Tiempo (s).

---

## Nomenclatura

---

	Espesor (m).
U	Coefficiente global de transferencia de calor ( $\text{W/m}^2 \text{ K}$ ).
u	Energía interna específica (J/kg o kJ/kg).
u, v, w	componentes de la velocidad en coordenadas cartesianas (m/s).
V	Velocidad de acercamiento unidireccional de un fluido (m/s).
	Volumen ( $\text{m}^3$ ).
$\vec{V}$	Vector velocidad (m/s).
$\dot{V}$	Caudal volumétrico ( $\text{m}^3/\text{s}$ ).
$\hat{V}$	Volumen específico ( $\text{m}^3/\text{kg}$ ).
$v_i$	Componente genérica de la velocidad (m/s).
W	Anchura de un objeto (m).
x	Título.
x, y, z	Componentes espaciales de las coordenadas cartesianas (m).
$x_{cd}$	Longitud de entrada (m).
$x_i$	Coordenada genérica.

## Letras griegas

$\alpha$	Absortividad, absortancia.
$\beta$	Coefficiente de dilatación isobara, $\beta \equiv -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \left( \text{K}^{-1} \right)$ .
	Espesor óptico.
$\gamma$	Salto, cambio, incremento finito.
$\delta$	Espesor de la capa límite, espesor de la película de condensado (m).
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ , $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ ).
$\varepsilon$	Porosidad, $\varepsilon = \frac{\text{Volumen vacío}}{\text{Volumen total}}$
	Eficiencia de un intercambiador de calor, $\varepsilon \equiv \frac{q}{q_{\max}} = \frac{q}{C_{\min} (T_{ce} - T_{fe})}$ .
	Emisividad, emitancia.
$\eta, \eta_a$	Eficiencia de una aleta, $\eta \equiv \frac{q_a}{h A_a \theta_b}$ .

---

## Nomenclatura

---

$\eta_0$	Eficiencia de una superficie con aletas, $\eta_0 \equiv 1 - \frac{A_a}{A} (1 - \eta_a)$ .
$\theta$	Ángulo de una dirección respecto de la normal (rad).
$\lambda$	Conductividad térmica (W/m·K). Longitud de onda ( $\mu\text{m}$ , m).
$\mu$	Viscosidad dinámica (Pa·s).
$\nu$	Viscosidad cinemática ( $\text{m}^2/\text{s}$ ).
$\rho$	Densidad ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ). Reflectividad.
$\sigma$	Tensión superficial (N/m). Constante de Stefan–Boltzman (ver apéndice A.3).
$\sigma_\lambda$	Coefficiente de dispersión espectral ( $\text{m}^{-1}$ ).
$\tau$	Esfuerzo cortante (Pa). Esfuerzo viscoso (Pa). Transmisividad, transmitancia.
$\phi$	Ángulo (rad) Función de disipación viscosa ( $\text{s}^{-2}$ ). Diámetro de partículas (m, $\mu\text{m}$ ).
$\psi$	Función de corriente ( $\text{m}^2/\text{s}$ ).
$\omega$	Ángulo sólido (sr).
$\dot{\omega}$	Velocidad angular ( $\text{s}^{-1}$ ).

## Subíndices

a	Referido a aleta(s).
b	Base de una aleta.
c	(Fluido) caliente. Sobre la concentración de especies químicas.
e	A la entrada.
f	Fluido. (Fluido) frío.
g	En estado gaseoso.
h	Hidráulico.

---

## Nomenclatura

---

i	Inicial.
i, j, k	Índices enteros identificativos de objetos (superficies, celdillas, nodos en MDF, ...).
l	En estado líquido.
m	Valor medio, particularmente en la sección de un tubo y del salto de temperaturas entre los fluidos de un intercambiador de calor ( $\bar{y}T_m$ ).
ml	Media logarítmica.
max	Mayor valor de una magnitud física, particularmente entre los dos fluidos de un intercambiador de calor.
min	Menor valor de una magnitud física, particularmente entre los dos fluidos de un intercambiador de calor.
p	Pared.
s	Superficial. A la salida.
t	Térmico.
v	En estado de vapor.
$\lambda$	Espectral.
$\omega$	Direccional.
$\infty$	En el fluido libre (a mucha distancia de la zona de interacción).

## Superíndices

p	Instante temporal en el MDF.
—	Valor global (o medio), particularmente de los coeficientes de convección y del coeficiente global de transferencia de calor.

## Símbolos matemáticos

$\vec{\nabla}$	Operador diferencial vectorial expresado en coordenadas cartesianas por el vector $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ .
$\vec{\nabla}A$	Gradiente del campo escalar A.

---

## Nomenclatura

---

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ ,  $\text{div } \vec{B}$ ,  $\text{div } (\vec{B})$     Divergencia del campo vectorial  $\vec{B}$ .

$\vec{\nabla} \cdot \tilde{\tau}$ ,  $\text{div } \tilde{\tau}$ ,  $\text{div } (\tilde{\tau})$     Divergencia del campo tensorial  $\tilde{\tau}$ .

$\nabla^2$     Operador laplaciano, cuya expresión en coordenadas cartesianas es

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Las magnitudes vectoriales se indican alternativamente en negrita o con una flecha encima de su símbolo

## Siglas

EDC    Ecuación de difusión del calor.

MDF    Método de las diferencias finitas.

NTU    (Ver letras latinas).

## Números adimensionales

Ver la página 148.

## Número entre corchetes

Indica referencia al final del capítulo.

---

**Nomenclatura**

---

---

# CAPÍTULO 1

## Transferencia de calor. Aspectos básicos

---

### Introducción

Los conceptos básicos de esta rama de las ciencias térmicas, calor y temperatura, se definen en termodinámica, la cual estudia los estados de equilibrio y los procesos entre ellos.

Con los procesos hay asociados intercambios energéticos en forma de calor y trabajo, de los cuales la termodinámica estudia su cuantía total pero no su naturaleza ni su ritmo de intercambio. Esto lo estudian las ciencias de la transferencia, que son básicamente la mecánica (de sólidos o fluidos) y la Electricidad para el trabajo y la Transferencia de Calor para el calor.

Por tanto, la *transferencia (o transmisión) de calor* es la parte de las ciencias, o si se quiere de la ingeniería térmica, que se ocupa de estudiar la velocidad y los mecanismos por los que se transfiere el calor de las zonas calientes del espacio a las frías. En su desarrollo histórico comenzó vinculada a la termodinámica, y es fundamentalmente a partir de la obra capital de J. Fourier *Theorie Analytique de la Chaleur* (1812–1822) [1] cuando comienza su andadura como cuerpo de doctrina propio; tiene por tanto unos dos siglos de vida.

A continuación se presentan los hechos principales que han ido contribuyendo a la construcción del actual cuerpo de doctrina, aunque aspectos del frío y del calor

---

**Transferencia de calor. Aspectos básicos**

---

ya eran estudiados en la antigüedad, se considera que las ciencias térmicas, tal y como se conocen hoy en día, arrancan de los experimentos de Galileo.

**Hitos históricos en transferencia de calor [2]**

<b>1597</b>	Termómetro de aire de Galileo.	
<b>1701</b>	Ley de enfriamiento de Newton.	
<b>1757</b>	Black: Distinción entre calor y temperatura. Percepción de la existencia de tres mecanismos de transferencia de calor: conducción, convección y radiación.	
<b>1812–1822</b>	<i>Theorie Analytique de la Chaleur</i> (J. Fourier).	
<b>1822–1845</b>	Ecuaciones de Navier–Stokes.	
<b>1879</b>	Ley de Stefan (Experimental).	Ley de Stefan–Boltzman
<b>1884</b>	Demostración teórica de la Ley de Stefan (Boltzman).	
<b>1879–1881</b>	Oberbeck y Lorenz: Análisis Teórico de la Convección natural.	
<b>1883</b>	Reynolds: Transición del régimen laminar al turbulento.	
<b>1883–1885</b>	Problemas de la entrada térmica (Graetz).	
<b>1893</b>	Ley de desplazamiento radiativo de Wien.	
<b>1900–1911</b>	Trabajos de Planck sobre la teoría cuántica de la radiación. <i>Zur Theorie der Wärmestrahlung</i> (1911).	
<b>1904</b>	Teoría de la <i>capa límite</i> de Prandtl.	
<b>1915</b>	Teoría de la condensación en película de Nusselt.	
<b>1921</b>	Un texto de Gröber asigna nombres a los números adimensionales (Re, Pe, Gr,...).	

## Importancia de la transmisión de calor en la vida cotidiana y en la actividad industrial

La transmisión del calor es un fenómeno presente en multitud de equipos y procesos de la actividad industrial y de la vida cotidiana. En el cuadro siguiente se muestran un conjunto de equipos, sistemas y conceptos ligados a actividades habituales en nuestra sociedad actual.

<b>Actividad</b>	<b>Equipos y sistemas de intercambio de calor</b>
Transporte, vehículos	Radiadores (refrigeración del motor, calefacción de la cabina,...)
Conservación de alimentos	Frigorífico
Tratamientos térmicos de multitud de sustancias industriales	Hornos Intercambiadores de Calor
Confort humano	Calefacción Aire Acondicionado
Generación de Fluidos Térmicos	Calderas
Conservación de la vida	Temperatura húmeda <sup>a</sup>

- a. Este no es equipo ni un sistema de intercambio de calor, sino un concepto relacionado con la transmisión de calor y materia que permite mantener la vida de los seres vivos.

## Relación calor-temperatura

Debe recordarse que el **calor** es una **energía en tránsito**, de naturaleza microscópica. Esta energía circula debido a las diferencias o gradientes de ciertas magnitudes físicas llamadas **potenciales**. El principal potencial causante de la existencia del calor es, en los casos de interés para la ingeniería, la temperatura y de hecho es el único que se considera habitualmente.

Por tanto se buscarán relaciones del tipo

$$q \quad \text{ó} \quad \vec{q}'' = f\left(T_i, \vec{\nabla}T\right)$$

llamadas leyes cinéticas, cuya expresión particular se concretará en cada caso y donde

$q$  es el calor que circula por unidad de tiempo, a través de una superficie.  
A partir de ahora, calor (W),

$\vec{q}''$  es el flujo de calor ( $W/m^2$ ) en un punto del sistema estudiado.

$T_i$  designa genéricamente la temperatura (K, °C) de un conjunto de puntos significativos del sistema.

$\vec{\nabla}T$  es el gradiente de temperaturas (K/m).

---

## Mecanismos de transporte de calor

---

Son tres: conducción, convección y radiación. Aunque se hará un estudio exhaustivo de cada uno de ellos en sus partes correspondientes del texto, a continuación se adelanta un breve resumen de cada uno de ellos, entre otros motivos para poder trabajar con aquellos problemas de conducción donde aparezca a la vez alguno de los otros dos mecanismos de transmisión del calor.

### 1. Conducción

Es un transporte de naturaleza molecular (difusión molecular), en el que la actividad de los componentes elementales de la materia (átomos y moléculas) es la responsable de la propagación del calor.

Esta actividad toma muchas formas diferentes:

- Interacción molécula a molécula (choque), en los gases.
- Vibración de la red en los sólidos.
- Conducción electrónica, en los conductores (eléctricos y térmicos).

**Ejemplos:** Barra metálica y cuchara.

Ley cinética: **la de Fourier** que se estudia en la lección siguiente.

### 2. Convección

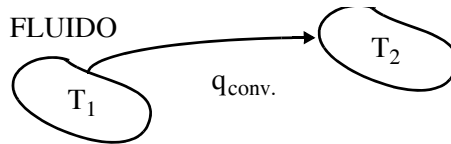
En los fluidos (líquidos y gases) además de la difusión molecular (conducción), la energía se transporta mediante el desplazamiento de bloques macroscópicos del fluido a distintas temperaturas (**advección**).

---

## Mecanismos de transporte de calor

---

Al transporte de calor por los mecanismos combinados de advección y conducción se le denomina convección. En algunos textos, se identifica la advección con la convección y a la conducción se le denomina a veces **difusión**.



Convección = Conducción + Advección

Lo que interesa en la práctica es el calor intercambiado entre el fluido y las paredes en contacto con él, que fue el problema que se planteó Newton cuando estudió el enfriamiento de un objeto caliente en contacto con el aire ambiente.

Por ello, la ley básica (cinética) utilizada hasta el presente es

$$q = hA(T_s - T_f)$$

donde:

- q Calor (vatios, W).
- A Área de contacto superficie sólida–fluido ( $m^2$ ).
- $T_s$  Temperatura de la superficie sólida (K, °C).
- $T_f$  Temperatura del fluido (K, °C).
- h Coeficiente de convección ( $W/m^2 \cdot K$ ).

En esta ley, mal llamada por algunos [3] *Ley de enfriamiento de Newton*, el complejo problema de la convección se contiene en h.

En la parte de convección se estudiará su determinación para los casos más habituales:

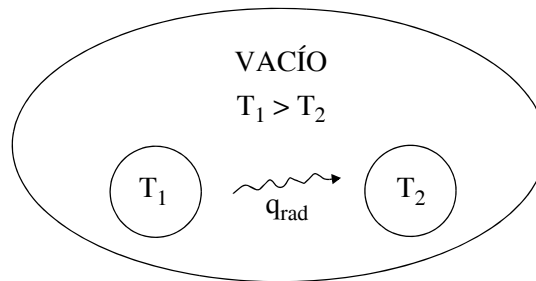
- *Según el movimiento del fluido:* Forzada,  
Libre o Natural
- *Según el número de Fases:* Monofásica  
Bifásica: Ebullición  
Condensación

**Ejemplos:** Las paredes de una habitación y el aire en calefacción. El radiador y el aire en calefacción.

### 3. Radiación

Es un transporte de calor por medio de ondas electromagnéticas que no necesita soporte material (aunque se da también dentro de la materia) y que actúa a distancia (diferencias esenciales respecto a la conducción y a la convección, que tienen consecuencias matemáticas como se verá en su momento).

En la figura siguiente se representa la demostración experimental de la existencia de la radiación, al haberse observado como dos objetos a distinta temperatura entre los que se ha hecho el vacío acaban uniformizando sus temperaturas.



La causa de la existencia de la radiación está en las modificaciones de las configuraciones electrónicas de los átomos, los movimientos de rotación y vibración de las moléculas y las redes cristalinas que producen estas **ondas electromagnéticas**, cuya energía transportada ( $q_{rad}$ ) se toma de la propia energía interna de la materia ( $u$ ), que a su vez está relacionada con su temperatura.

#### Leyes básicas

Las leyes cinéticas de la radiación explican la interacción entre la radiación y la materia. Aunque en las lecciones correspondientes, se justificarán mejor las distintas ecuaciones utilizadas, por el momento es suficiente saber que todo cuerpo emite calor radiante según la expresión siguiente

$$q_{emitido} = A\varepsilon\sigma T^4$$

donde

A Área superficial.

$\varepsilon$  Propiedad de la materia, emisividad ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ).

$\sigma$  Constante de Stefan–Boltzman,  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ .

---

### Otras leyes importantes

---

y que absorbe parte de la radiación que recibe según la expresión

$$q_{\text{absorbido}} = \alpha AG$$

donde

$\alpha$  Absortividad, propiedad de la materia ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ).

$G$  Irradiación recibida ( $\text{W}/\text{m}^2$ ).

### Otras leyes importantes

---

Serán de amplio uso las leyes de conservación de:

Masa

Momento

Energía

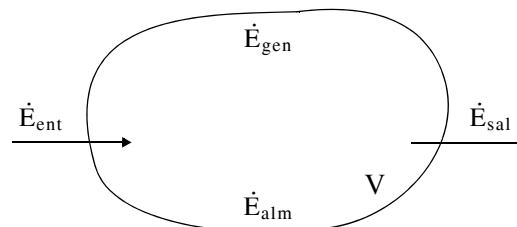
Especies químicas

de todas ellas interesa y se utilizará especialmente la ley de conservación de la energía, que contiene términos distintos según que se haga sobre un volumen o sobre una superficie.

a) En un volumen  $V$

Aunque pueda adoptar distintas apariencias o formas matemáticas, cualquier balance de energía (o de otras magnitudes) en el interior de un volumen contiene siempre cuatro términos:

- Entrada y salida, que suelen ir agrupados
- Generación (o consunción)
- Acumulación (o pérdida)



relacionados por la siguiente ecuación

$$\dot{E}_{alm} = \underbrace{\dot{E}_{ent} - \dot{E}_{sal}} + \dot{E}_{gen}$$

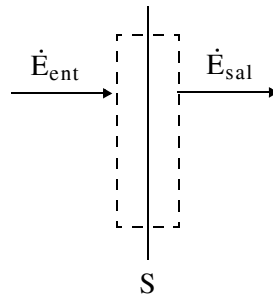
puede ser  $\begin{cases} >0 & \text{Fuente} \\ <0 & \text{Sumidero} \end{cases}$

Suelen ir juntas en términos tipo divergencia

En esta disciplina **generación** significa **transformación** de otra forma de energía en energía térmica ( $\dot{E}_{gen} > 0$ ) o viceversa ( $\dot{E}_{gen} < 0$ ), ya que es sabido que la energía total se conserva.

b) En una superficie S

Al no haber volumen y por tanto materia, los términos de acumulación y generación desaparecen y el balance de energía se reduce a  $\dot{E}_{ent} = \dot{E}_{sal}$ .



En radiación debe matizarse esta expresión.

## Órdenes de magnitud

---

Una parte fundamental de la actividad de un ingeniero es conocer el tamaño de los equipos y sistemas con los que trabaja, así como el orden de magnitud de las variables físico-químicas que va a manejar. En el caso del ingeniero térmico, debe valorar el orden de magnitud de las variables térmicas de cada problema al que se enfrente. Los cuadros siguientes dan información sobre el calor (tamaño térmico de los equipos), flujo de calor [4] (intensidad del calor transmitido) y coeficiente de convección [4] en el rango de valores que tienen en las aplicaciones reales.

---

**Órdenes de magnitud**

---

**TABLA 1.1** Calor (W).

Crioenfriadores para imágenes infrarrojas	< 1 W
Crioenfriadores para superconductores	
Calor disipado por un dispositivo electrónico de potencia	1–100 W
Metabolismo basal del cuerpo humano (durmiendo)	70 W
Calor disipado por el cuerpo humano paseando	250 W
Calor disipado por el cuerpo humano jugando al squash	700 W
Calor evacuado por un frigorífico doméstico (evaporador)	50–200 W
Electrodomésticos que generan calor (horno, lavadora, lavavajillas, estufa, ...)	1–2 kW
Caldera de calefacción individual (vivienda de 90 m <sup>2</sup> )	10–20 kW
Radiador de un coche de tamaño medio	20–34 kW
Calderas de calefacción del CPS	2 MW
Caldera industrial pequeña	
Caldera industrial grande	10–50 MW
Caldera de potencia grande	> 1 GW

---

**Transferencia de calor. Aspectos básicos**

---

**TABLA 1.2** Flujos de calor,  $q''$ 

Radiación térmica escasamente perceptible por la piel humana	40 W/m <sup>2</sup>
Límite de dolor de la radiación térmica	1500–2500 W/m <sup>2</sup>
Pérdida de calor desde el cuerpo humano	50 W/m <sup>2</sup>
Radiación general desde la atmósfera sin nubes	200 W/m <sup>2</sup>
Calentamiento de agua (en el elemento calefactor)	500–800 W/m <sup>2</sup>
Irradiación solar en la superficie terrestre en pleno verano	500–800 W/m <sup>2</sup>
Constante solar	1326 W/m <sup>2</sup>
Electrodomésticos con calefacción de un recinto (hornos, lavadoras, lavavajillas, etc)	1–8 W/cm <sup>2</sup>
Calderas supercríticas	50 W/cm <sup>2</sup>
Combustible en un reactor nuclear	100 W/cm <sup>2</sup>
Refrigeración de toberas de cohetes	4500 W/cm <sup>2</sup>

---

**TABLA 1.3** Coeficientes de convección del calor,  $h$ .

$h / (\text{W/m}^2 \text{ K})$	
Convección natural	
Gases	3 – 20
Agua	100 – 600
Agua hirviendo	1000 – 20000
Convección forzada	
Gases	10 – 100
Líquidos viscosos	50 – 500
Agua	500 – 10000
Vapor condensante	1000 – 100000

---

**Referencias**

---

**Referencias**

---

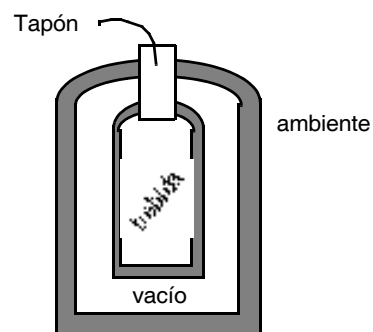
1. Joseph Fourier  
*Theorie Analytique de la Chaleur*  
Ed. Jacques Gabay, 1988. Sceaux.
2. E. T. Layton, Jr and J. H. Lienhard (Ed's)  
*History of Heat Transfer*  
ASME, 1988, New York.
3. E. F. Adiutori  
*A New Look at the Origin of the Heat Transfer Coefficient Concept*  
Ventuno Press, 1988.
4. U. Grigull and H. Sandner  
*Heat Conduction*  
Hemisphere Publishing Corporation, 1984, Washington.

# Cuestiones generales de transferencia de calor

---

1. Definir clara y concisamente en qué consisten los tres mecanismos de transferencia de calor.

2. La bebida introducida en un termo está separada del ambiente por las paredes interiores, el vacío y las paredes exteriores del mismo. Indicar con detalle y claridad los mecanismos de transmisión de calor por los que la bebida va igualando su temperatura con la ambiental.



3. En el seno de una masa de agua, cuya distribución de temperaturas oscila entre 100 °C y 200 °C, ¿cuáles serán los mecanismos preponderantes de transferencia de calor?

- a) Conducción, convección y radiación.
- b) Conducción, advección y radiación.
- c) Conducción y radiación.
- d) Conducción y advección.
- e) Advección y radiación.

4. Señalar aquel valor de la relación siguiente que es claramente incorrecto:

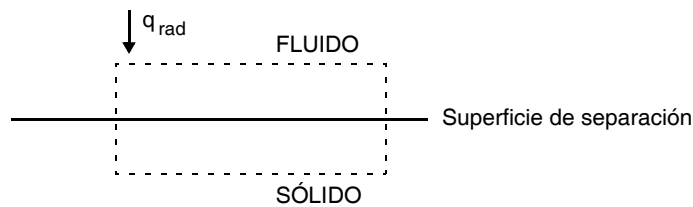
- a) Metal,  $\lambda = 50 \text{ W/mK}$ .
- b) Gas,  $\lambda = 0.05 \text{ W/mK}$ .
- c) Convección natural en gases,  $h = 10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ .
- d) Convección forzada en agua,  $h = 2000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ .
- e) Ebullición del agua,  $h = 100 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ .

---

**Cuestiones generales de transferencia de calor**

---

5. Señala, rodeando con un círculo la letra del apartado correspondiente, cuál de los siguientes valores es incorrecto:
- Convección forzada en aire,  $h = 200 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ .
  - Acero,  $\lambda = 50 \text{ W/mK}$ .
  - Flujo crítico de calor para ebullición de agua en piscina a 1 atm,  $q''_c = 1 \text{ kW/m}^2$ .
  - Condensación sobre un cilindro horizontal,  $h = 10000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ .
6. Escribir el balance de energía para una superficie de separación entre un fluido y un sólido, teniendo en cuenta que en el lado del fluido hay radiación e incluyendo los demás términos que parezcan pertinentes.



7. La definición de los números de Biot y Nusselt es aparentemente idéntica,  $hL/\lambda$ . ¿En dónde estriba la diferencia entre ambos?
8. Especificar los datos en la tabla para las siguientes correlaciones de convección:

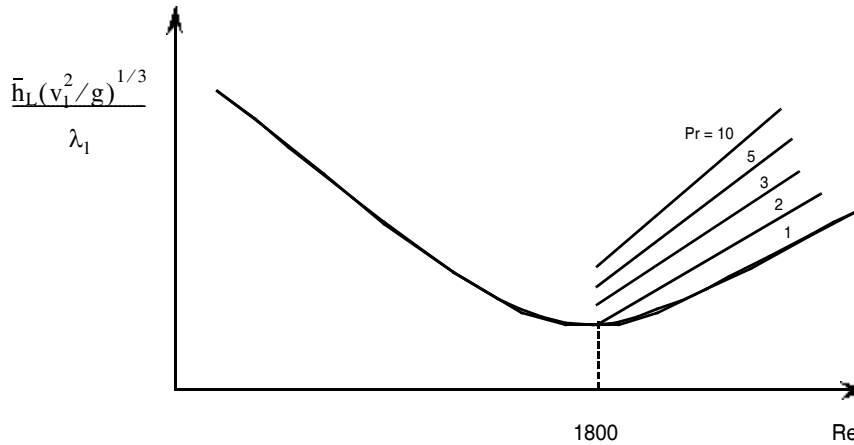
	Geometría	Flujo externo o interno	Forzada o natural	Número de fases	Régimen
a) $\overline{Nu}_x = 0.664 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$					
b) $Nu = 4.36$					
c) $Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^n$					
d) $\overline{Nu}_L = 0.943 \left[ \frac{\rho_l g (\rho_l - \rho_v) h'_{fg} L^3}{\mu_l \lambda_l (T_{sat} - T_s)} \right]^{1/4}$					

---

**Cuestiones generales de transferencia de calor**

---

9. ¿A qué tipo de transferencia de calor corresponde la gráfica siguiente?



- a) Convección forzada monofásica en flujo interno.
  - b) Condensación en película.
  - c) Ebullición en un tubo.
  - d) Convección forzada monofásica en flujo externo.
10. Un objeto sólido se enfría sumergiéndolo en un fluido en reposo, estando dado el coeficiente de convección natural por la relación  $\bar{h} = CT^{1/4}$  donde  $C$  es una constante, y  $\Delta T = T - T_\infty$ ,  $T$  la temperatura del sólido y  $T_\infty$  la del fluido. Suponiendo válida la aproximación de sistema de capacidad, obtener la expresión que da el tiempo de enfriamiento del sólido desde una temperatura inicial  $T_i$  a otra final  $T_f$
11. Calcular a partir de qué temperatura del aire ambiente se congelarán los charcos en la carretera, en una noche fría y despejada del invierno, si la temperatura del cielo es de  $-73^\circ\text{C}$ . La emisividad del agua y del hielo es 0.95, se pueden despreciar los intercambios de calor de los charcos con el asfalto de la carretera,  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$  y el coeficiente de calor convectivo entre el agua y el aire es  $h = 20 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

---

## CAPÍTULO 2

# Fundamentos de conducción del calor

---

### Ley de Fourier

Es la ley cinética de la conducción. Fue establecida por J. Fourier en su obra capital *Theorie Analytique de la Chaleur* [1] (1822), donde estableció de forma definitiva el estudio matemático de la Conducción, sentó las bases para el estudio científico de la Convección y percibió la existencia de la Radiación.

Según Fourier, en conducción del calor existe una relación proporcional entre el flujo de calor y el gradiente de temperaturas dada por la expresión

$$\vec{q}'' = -\lambda \nabla T \quad (2.1)$$

donde  $\vec{q}''$  es el flujo de calor en un punto ( $\text{W}/\text{m}^2$ ),  $\nabla T$  el gradiente de temperatura en ese punto, y  $\lambda$  una propiedad termofísica de la materia ( $\text{W}/\text{m}\cdot\text{K}$ ) llamada **conductividad térmica**.

Es una ley **empírica**, deducida a partir de una hipótesis sobre la transmisión de calor entre moléculas [1], [2], que liga la Radiación y la Conducción a nivel microscópico. Sin embargo los efectos macroscópicos de ambos mecanismos de transmisión de calor son muy diferentes y eso ha conducido a un tratamiento muy distinto de cada uno de ellos.

Otro aspecto a remarcar de la ecuación (2.1) es que implica que el flujo de calor se adapta instantáneamente a un cambio del campo de temperaturas, o lo que es lo

mismo, el calor se propagaría a una velocidad infinita. Si el cambio es excesivamente brusco, eso no es cierto y debe añadirse un término a la ecuación (2.1) debido a que el calor se propaga por conducción a una velocidad finita, del mismo orden de magnitud que la velocidad del sonido en cada medio. El término mencionado sólo debe tenerse en cuenta en situaciones muy especiales [3]; en ingeniería térmica la ecuación (2.1) es totalmente exacta.

También existe la posibilidad de que el flujo de calor sea causado por gradientes de potenciales distintos de la temperatura, lo que es objeto de estudio de la termodinámica de fenómenos irreversibles y que en la práctica ingenieril supone una contribución tan pequeña que es imposible de detectar [4].

Finalmente, si el medio es anisótropo, la conductividad térmica es un tensor de orden dos y la expresión (2.1) es un producto tensorial [5], [6].

---

## Conductividad térmica

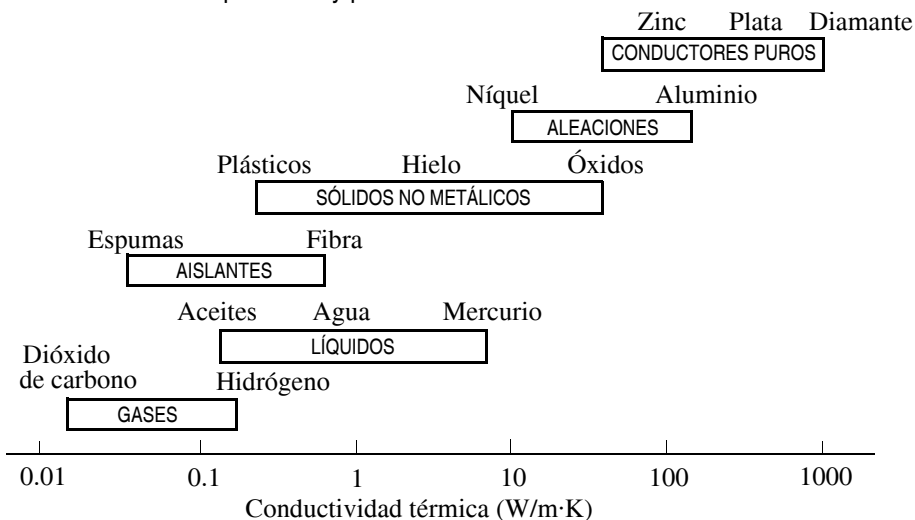
---

### Órdenes de magnitud

Aunque el valor particular de esta propiedad hay que buscarlo en cada caso en las referencias bibliográficas adecuadas, es importante tener una expectativa previa de su orden de magnitud para cada tipo de sustancia. La figura 2.1 es muy útil en este objetivo.

---

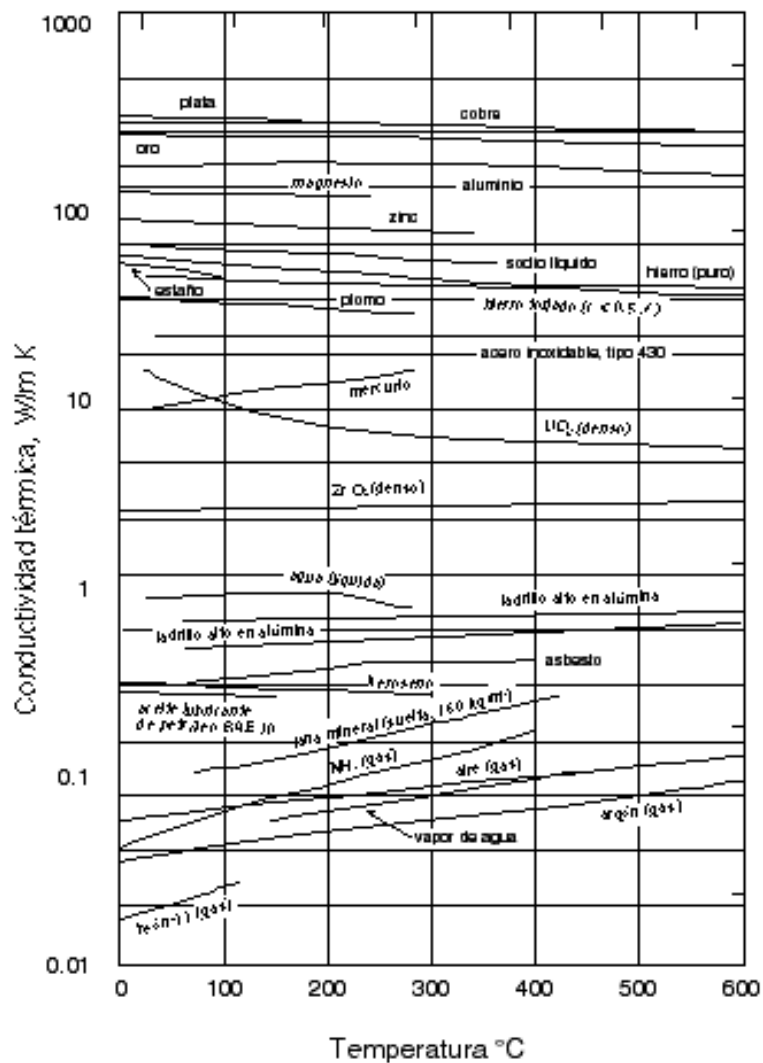
**FIGURA 2.1** Rango de conductividad térmica para varios estados de la materia a temperaturas y presiones ordinarias.



### Dependencia con la temperatura

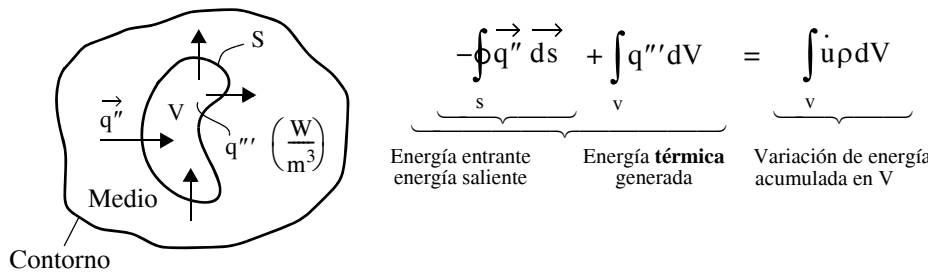
La conductividad térmica, como cualquier otra propiedad termofísica de la materia, depende de la temperatura y de la presión. La dependencia con esta última es débil, sobre todo en sólidos y líquidos, y se presta más atención a su dependencia con la temperatura, que además es la magnitud más variable en transmisión de calor. Esto tiene especial importancia, porque es frecuente la imposición de la constancia de  $\lambda$ , lo cual, como se ve en la figura 2.2, no está siempre justificado.

FIGURA 2.2 Conductividad térmica de algunos materiales típicos de ingeniería.



## Ecuación de difusión del calor

Esta ecuación es la fundamental en conducción de calor. Con las obligadas condiciones de contorno, permite obtener la distribución de temperaturas y el flujo de calor en el seno del medio, objetivos del cálculo. La ecuación se obtiene haciendo un **balance de energía** en un **volumen** arbitrario



Por el teorema de Gauss  $-\oint_S \vec{q}'' \cdot \vec{ds} = -\int_V (\text{div } \vec{q}'') dV$ , que conduce a

$$-\int_V (\text{div } \vec{q}'') dV + \int_V q''' dV = \int_V \dot{u} \rho dV$$

Por ser V arbitrario  $-\text{div } \vec{q}'' + q''' = \dot{u} \rho$ .

Sustituyendo  $\vec{q}''$  por la Ley de Fourier y  $\dot{u}$  por la ecuación térmica de estado se obtiene la **ecuación de difusión del calor** (EDC).

$$\boxed{\text{div}(\lambda \nabla T) + q''' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}} \quad (2.2)$$

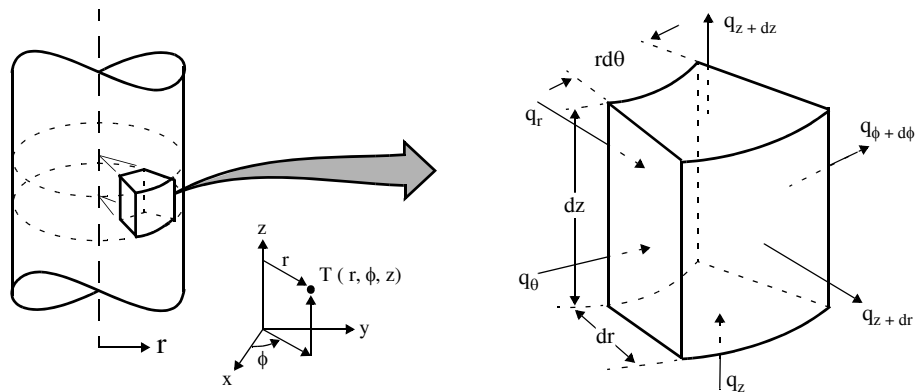
donde:  $q'''$  es la energía térmica generada por unidad de volumen ( $\text{W}/\text{m}^3$ );  $\rho$ , la densidad del medio;  $c_p$ , el calor específico del medio y  $t$ , el tiempo.

Si se tiene en cuenta la velocidad finita de propagación del calor por conducción, la ecuación (2.2), que es una ecuación diferencial parabólica típica de los fenómenos difusivos, se transforma en una ecuación diferencial hiperbólica típica de la propagación de ondas [7], [8].

### Ecuación de difusión del calor en coordenadas radiales

El desarrollo de la ecuación anterior (Ec. 2.2) en coordenadas cartesianas es muy fácil de recordar pero no en otros sistemas. Dado que las coordenadas radiales se usan con mucha frecuencia se presentan a continuación los desarrollos correspondientes.

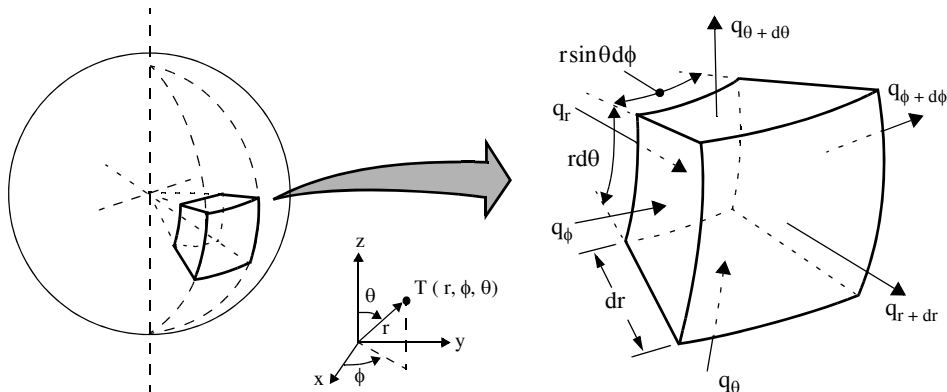
**FIGURA 2.3** Volumen de control diferencial,  $dr \cdot r d\phi \cdot dz$ , para el análisis de la conducción en coordenadas cilíndricas.



Sustituyendo la expresión de la divergencia en coordenadas cilíndricas en la EDC

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q''' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

**FIGURA 2.4** Volumen de control diferencial,  $dr \cdot r \sin\theta d\phi \cdot r d\theta$ , para el análisis de la conducción en coordenadas esféricas.



En coordenadas esféricas, la EDC toma la forma

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + q''' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}.$$

### Otras expresiones de la ecuación de difusión del calor

La Ec. (2.2) cubre todos los casos posibles, pero en muchos de ellos se puede simplificar a otras expresiones más simples como se muestra a continuación

#### 1º) Caso de $\lambda = \text{cte}$

En ciertas ocasiones, si el intervalo de variación de T no es muy grande y  $\lambda$  no depende fuertemente de T, se puede tomar  $\lambda = \text{cte}$ , lo que simplifica apreciablemente los cálculos. En particular, la ecuación anterior queda

$$\nabla^2 T + \frac{q'''}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{ecuación parabólica (difusión)}$$

donde

$\nabla^2$  : Laplaciano

a : Difusividad térmica, otra propiedad termofísica de la materia, definida por  $a \equiv \lambda/\rho c_p$  ( $\text{m}^2/\text{s}$ ), cuyo significado físico es análogo a v en transporte de calor. Un par de ejercicios interesantes sobre a son:

- Hacer una interpretación física sobre el cociente.
- Buscar ejemplos de sustancias con valores grandes y pequeños de esta propiedad.

#### 2º) Caso de situación estacionaria

Manteniendo la hipótesis de  $\lambda = \text{cte}$ , y suprimiendo la dependencia temporal, la ecuación de difusión del calor queda

$$\nabla^2 T + \frac{q'''}{\lambda} = 0 \quad (\text{ecuación de Poisson})$$

---

## Condiciones de contorno

---

### 3º) Situación estacionaria y sin generación térmica

Si  $q''' = 0$ , se tiene  $\nabla^2 T = 0$  (ecuación de Laplace).

---

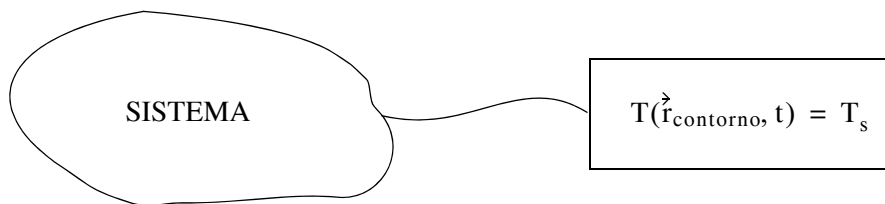
## Condiciones de contorno

---

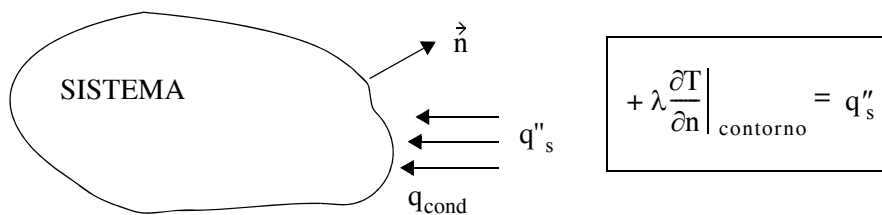
La resolución de cualquier ecuación diferencial exige la imposición de las condiciones en el contorno del sistema. Cuando el problema depende del espacio y el tiempo, hay que especificar condiciones sobre el contorno espacial y en el tiempo (inicial).

- *Condición inicial:*  $T(\vec{r}, t_0) = T_0(\vec{r})$ .
- *Condiciones de contorno (espaciales):* Son habitualmente de una, o varias, de las tres clases siguientes.

#### 1. De Dirichlet. Fija la función (temperatura) en el contorno.



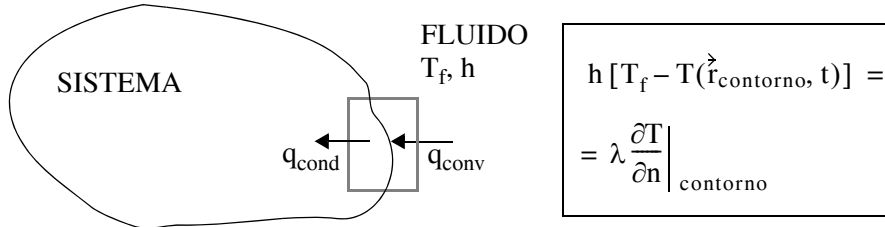
#### 2. De Neumann. Fija la primera derivada espacial (flujo de calor) en el contorno.



Un caso particular habitual e importante es el del contorno adiabático

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\text{contorno}} = 0.$$

3. **De Fourier o Robin.** Liga la función y la primera derivada espacial en el contorno. En Transferencia de Calor se llama *condición convectiva*.



---

## Referencias

---

1. Joseph Fourier  
*Theorie Analytique de la Chaleur*  
Ed. Jacques Gabay, 1988. Sceaux.
2. R. Mariño  
*Producción y transmisión industrial del calor*  
Saeta, 1941, Madrid.
3. M. Chester  
*Second Sound in Solids*  
Physical Review, vol. 131, p. 2013, 1963.
4. W. M. Kays  
*Convective Heat and Mass Transfer*  
Tata McGraw-Hill, New Delhi, 1979.
5. R. W. Fahien  
*Fundamentals of Transport Phenomena*  
McGraw-Hill, New York, 1983.
6. M. N. Özisik  
*Boundary Value Problems of Heat Conduction*  
Dover, New York, 1968.
7. K. J. Baumeister and T. D. Hamill  
*Hyperbolic Heat-Conduction Equation.*  
*A Solution for the Semi-Infinite Body Problem*  
Journal of Heat Transfer, vol. 91, p. 543, 1969.
8. H. D. Weyman  
*Finite Speed of Propagation in Heat Conduction, Diffusion, and Viscous Shear Motion*  
American Journal of Physics, vol. 35, p. 488, 1967.

---

## Síntesis del capítulo

---

- La ley cinética de la conducción del calor es la **ley de Fourier**

$$\vec{q}'' = -\lambda \vec{\nabla} T$$

donde  $\lambda$  es una propiedad termofísica de la materia llamada conductividad térmica.

- La expresión que determina la distribución de temperaturas en un cuerpo en el que sólo se transmite el calor por conducción es la **ecuación de difusión del calor** (EDC)

$$\operatorname{div}(\lambda \vec{\nabla} T) + q''' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

- La resolución de esta ecuación diferencial exige, en un caso general, conocer dos condiciones de contorno espaciales y una temporal (llamada condición inicial).
- Como se verá en las lecciones siguientes, el **procedimiento habitual** para resolver un problema de conducción será:
  1. Resolución de la EDC para obtener la distribución de temperaturas en el cuerpo.
  2. Una vez conocida la distribución de temperaturas  $T(\vec{r}, t)$ , se aplica la ley de Fourier para conocer el flujo de calor o el calor transmitido en cada parte del cuerpo.

# Cuestiones

---

1. ¿Cuál de los siguientes valores es incorrecto?
  - a) Aire,  $\lambda = 0.03 \text{ W/mK}$ .
  - b) Cobre,  $\lambda = 400 \text{ W/mK}$ .
  - c) Agua,  $\lambda = 200 \text{ W/mK}$ .
  - d) Lana de vidrio,  $\lambda = 0.05 \text{ W/mK}$ .
  - e) Acero,  $\lambda = 50 \text{ W/mK}$ .
2. Deducir la ecuación de difusión del calor.
3. En un cuerpo metálico de conductividad térmica  $\lambda = 50 \text{ W/m}\cdot\text{K}$  existe la siguiente distribución de temperaturas:  $T = (3x + 2y + z) t$ . Calcular el flujo de calor en el punto  $(0,0,0)$  a los dos segundos de tiempo.
4. En un material de difusividad térmica  $a = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  y conductividad térmica  $\lambda = 100 \text{ W/m}\cdot\text{K}$  en cuyo seno existe una generación térmica de valor  $q''' = 100 \text{ W/m}^3$ , existe en un instante dado de tiempo una distribución de temperaturas  $T = x^2 - y^2 + z^2 + 3zx$ , donde  $T$  viene dado por Kelvin y las coordenadas espaciales en metros. Calcular la variación temporal de la temperatura en ese instante de tiempo.
5. Escribir brevemente en el espacio indicado el significado de los tres términos que aparecen en la ecuación general de difusión del calor

$$\underbrace{\text{div}(\lambda \vec{\nabla} T)}_A + \underbrace{q'''}_B = \underbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}}_C$$

A:

B:

C:

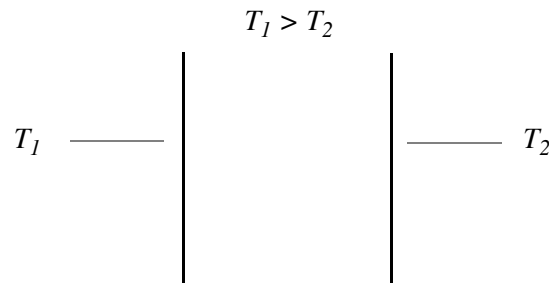
---

**Cuestiones**

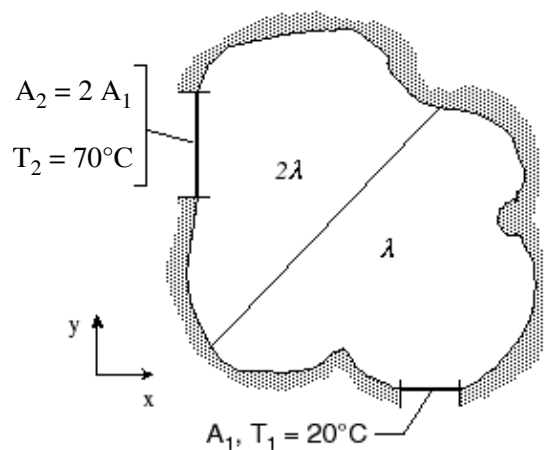
---

6. ¿Por qué los buenos conductores eléctricos (metales principalmente) son buenos conductores térmicos?
7. Para determinar la dependencia de la temperatura con la conductividad térmica, considérese un material cuya conductividad térmica obedece a la expresión  $\lambda = \lambda_0 + aT$ , donde  $\lambda_0$  es una constante positiva y  $a$  un coeficiente que puede ser positivo, nulo o negativo. Dibujar el perfil de temperaturas en la pared plana de la figura, en situación estacionaria, para los tres casos  $a > 0$ ,  $a = 0$  y  $a < 0$ .

Justificar matemáticamente la respuesta.



8. El cuerpo bidimensional de la figura tiene todo su contorno aislado adiabáticamente, salvo las dos zonas isotermas indicadas, 1 y 2, y está formado por dos materiales diferentes de conductividades térmicas una el doble que la otra.



---

**Cuestiones**

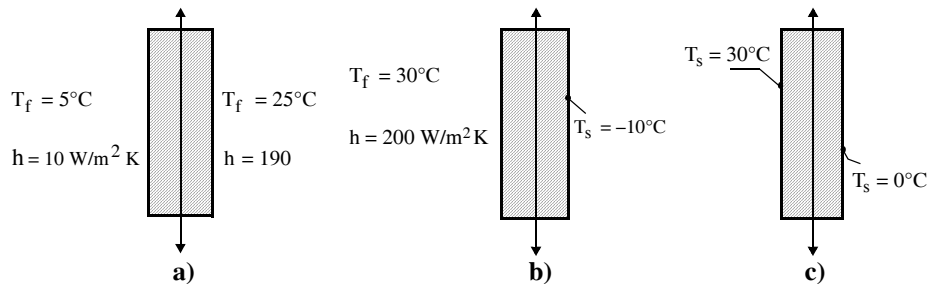
---

Si en situación estacionaria y sin generación térmica, se cumple en la superficie 1 que

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 10\text{K/m},$$

calcular en la superficie 2 los valores de  $\frac{\partial T}{\partial x}$  y  $\frac{\partial T}{\partial y}$ .

9. ¿Qué condiciones debe cumplir un problema de transmisión de calor para que se pueda aplicar la herramienta de las resistencias térmicas?
10. Un superconductor del calor es un material ideal que tiene una conductividad térmica infinita y por tanto conduce el calor sin gradiente de temperaturas. Se dispone imaginariamente de una placa muy grande de tal material. Para los tres juegos de condiciones de contorno que se muestran en el esquema, indicar la distribución de temperaturas en el sólido.

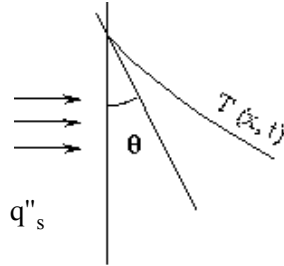


11. Calcular el ángulo  $\theta$  que forma la distribución de temperaturas con la pared de un sólido semiinfinito sometido a una situación de conducción transitoria y a un flujo de calor exterior constante,  $q''_s = 1000\text{ W/m}^2$ . La conductividad térmica del sólido vale  $\lambda = 50\text{ W/m}\cdot\text{K}$ .

---

**Cuestiones**

---

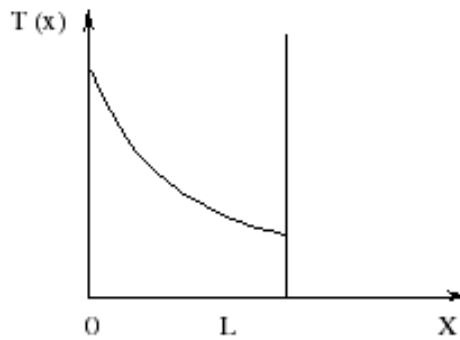


12. En un determinado instante del tiempo, la distribución de temperaturas dentro de un sólido homogéneo infinito viene dada por la expresión:

$$T(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - xy + 2yz$$

Suponiendo que las propiedades termofísicas son constantes y que no hay generación térmica, determinar las regiones donde la temperatura cambia con el tiempo.

13. La distribución de temperatura en una pared (sin generación térmica interior) en un momento determinado  $t_1$  de un proceso transitorio se muestra en la figura



La pared, ¿se está calentando o enfriando?

Justificar brevemente la respuesta.

---

## Cuestiones

---

---

## CAPÍTULO 3

# Conducción unidimensional y estacionaria

---

Siendo una situación idealizada particularmente sencilla de tratar matemáticamente, ya que en la mayoría de los casos se puede dar una **solución analítica**, sirve sin embargo para estudiar multitud de casos reales, como los listados a continuación.

- Calefacción: cargas térmicas y radiadores.
- Frío: frigoríficos, congeladores, etc., carga frigorífica y equipos (evaporador y condensador).
- Tuberías: pérdidas (o ganancias) de calor.
- Superficies aleteadas: radiador de un coche, radiador de un dispositivo electrónico.
- Proceso térmico en la barra de un reactor nuclear.

## Conducción sin generación térmica

---

### La pared plana infinita

Se trata de calcular el calor intercambiado entre las dos superficies de una pared plana de área  $A$ , de espesor  $e$  mucho menor que sus otras dos dimensiones y de conductividad térmica  $\lambda$ , a temperaturas  $T_1$  y  $T_2$  respectivamente.

---

**Conducción unidimensional y estacionaria**

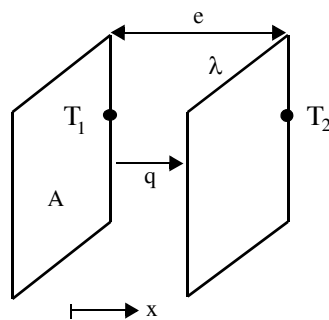
---

En esta situación el calor circula exclusivamente en una dirección, que tomaremos arbitrariamente como eje  $x$  y dado que

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \text{ la EDC se reduce a } \frac{d^2 T}{dx^2} = 0.$$

---

**FIGURA 3.1** Transferencia de calor unidimensional en una pared plana (sistema cartesiano).



Con las condiciones de contorno  $T(x=0) = T_1$  y  $T(x=e) = T_2$  la solución es simple y resulta la siguiente distribución lineal de temperaturas

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{e} x + T_1 \quad (3.1)$$

El calor intercambiado lo da la ley de Fourier

$$q_x = q''_x A = -\lambda A \frac{dT}{dx} = \frac{T_1 - T_2}{e} \lambda A = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{\lambda A}} = q_x \quad (3.2)$$

Esta expresión es análoga a la ley de Ohm y a  $e/\lambda A$  se le llama resistencia térmica de la pared plana

$$R_t = \frac{e}{\lambda A} \quad (3.3)$$

**Ejemplo:** Un caso importante de esta situación es el cálculo de cargas térmicas de una pared en calefacción o refrigeración.

---

**Conducción sin generación térmica**

---

**Nota:**  $\lambda$  se ha tomado constante. Si varía apreciablemente habría que tomar un valor medio

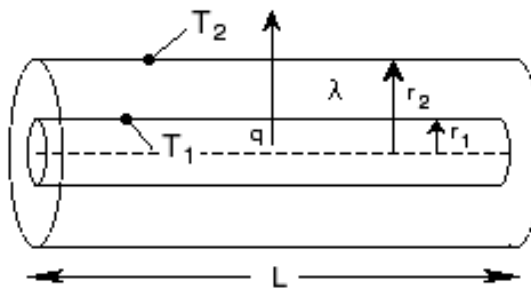
$$\bar{\lambda} = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \lambda dT$$

**La pared cilíndrica infinita**

Esta geometría es también muy habitual y sirve, por ejemplo, para calcular las pérdidas o ganancias de calor de una tubería, cuyo diámetro es mucho menor que su longitud.

---

**FIGURA 3.2** Transferencia de calor radial en una pared cilíndrica.



La EDC en este caso resulta

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \lambda r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

Con las condiciones de contorno  $T(r_1) = T_1$  y  $T(r_2) = T_2$ .

El resultado es

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) + T_2 \quad (3.4)$$

y para el calor intercambiado

$$q_r = q''_r 2\pi r L = \left(-\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r L\right) = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L \lambda}} = q_r \quad (3.5)$$

Por tanto la resistencia térmica de la pared cilíndrica es

$$R_t = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L \lambda} \quad (3.6)$$

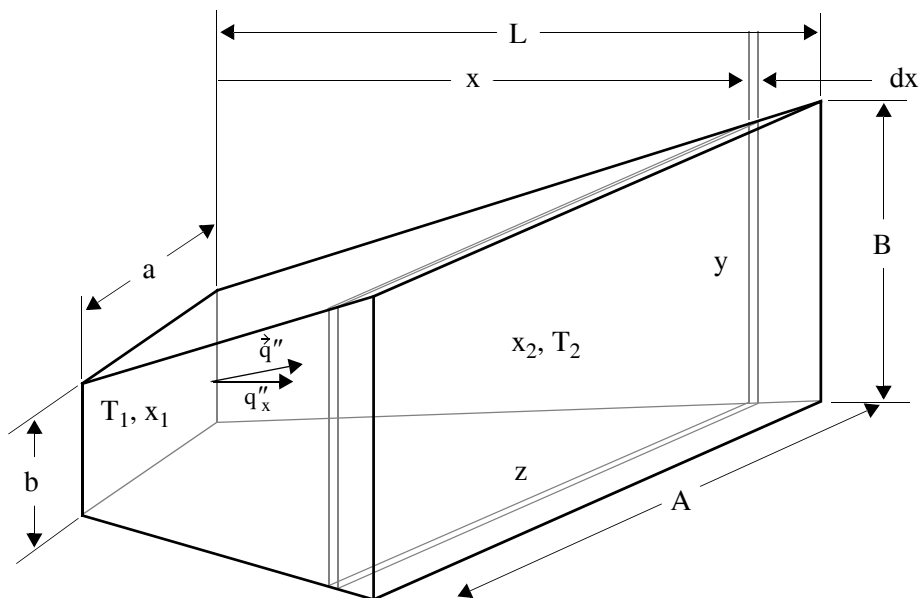
## Conducción cuasi-unidireccional

---

Hay situaciones en que la conducción no es estrictamente unidimensional, pero sí que se produce una transmisión preferente en una determinada dirección. Esto sucede en la geometría de la figura 3.3, típica de un molde de inyección de plásticos [1].

---

**FIGURA 3.3** Transferencia de calor preferentemente unidimensional.



---

**Conducción cuasi-unidireccional**

---

El calor se transfiere de la superficie ab (por ejemplo, la cavidad caliente) a la superficie AB (por ejemplo, los canales fríos de la refrigeración). Las superficies laterales se consideran adiabáticas.

Intentar resolver la ecuación de difusión del calor en este caso es incómodo ya que al tener el flujo de calor componentes en las tres direcciones habría que trabajar con

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \text{ de solución analítica complicada o imposible.}$$

Una aproximación más simple la proporciona el hecho de que por el principio de conservación de la energía, el calor propagado en la dirección x es constante. Si se desprecia la variación de T en y y z frente a su variación en x (es decir  $q''_y, q''_z \ll q''_x$ ),

justificado por la geometría, queda  $q_x = \text{constante} \approx -\lambda A(x) \frac{dT}{dx}$ , donde la apro-

ximación consiste en transformar la derivada parcial  $\partial T/\partial x$  en una derivada ordinaria,  $dT/dx$ , con lo que aparece una ecuación diferencial ordinaria sencilla de integrar.

$$\text{Efectivamente, } q_x \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{A(x)} = -\lambda \int_{T_1}^{T_2} dT = \lambda(T_1 - T_2) \Rightarrow q_x = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{\lambda} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{A(x)}}$$

Luego la resistencia térmica vale

$$R_t = \frac{1}{\lambda} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{A(x)} \quad (3.7)$$

### Casos particulares

Como este caso es más general que los anteriores, debe recogerlos como casos particulares.

Efectivamente, si se aplica la expresión última (3.7) a los casos de la pared plana y la pared cilíndrica se obtienen las expresiones (3.3) y (3.6).

---

## Conducción unidimensional y estacionaria

---

En la figura 3.3 como los dos lados de cada plano ( $zy$ ) que dan el área  $A(x) = zy$  crecen linealmente se tiene

$$\begin{cases} z = a + Mx \\ y = b + Nx \end{cases}$$

y  $x_1 = 0$  y  $x_2 = L$  con lo que resulta

$$R_t = \frac{1}{\lambda} \int_0^L \frac{dx}{(a + Mx)(b + Nx)} = \frac{L}{\lambda a B} = R_t \quad (3.8)$$

donde

$L$  es la distancia entre ambas caras,

$a$  es uno de los lados de la cara 1 y

$B$  es el otro lado de la cara 2.

### Otro ejemplo: La pared esférica

Es un ejercicio interesante obtener la resistencia térmica de una pared esférica por este procedimiento y por resolución de la EDC, comparando ambos resultados. Además del entrenamiento que se adquiere, se obtiene el valor de la resistencia en una geometría que, aunque no tan frecuente como la pared plana o el cilindro, corresponde a muchos casos reales.

## Los sistemas compuestos

---

Las leyes ya conocidas de composición de resistencias permiten resolver de forma sencilla muchos casos de sistemas compuestos aparentemente complicados.

### Ejemplo 1: Resistencias en serie

Determinar el calor que pierde una tubería (por unidad de longitud,  $(W/m)$ ) que transporta agua caliente a  $90^\circ\text{C}$  (por ejemplo de calefacción) a través de una tubería de acero sin aislar de 2 cm de diámetro interior y 2 mm de espesor, al pasar por un ambiente interior que se encuentra a  $15^\circ\text{C}$  (por ejemplo un edificio o una nave industrial).

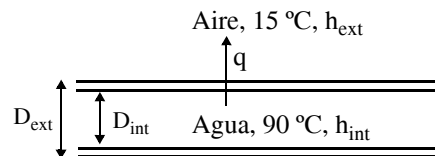
---

## Los sistemas compuestos

---

La transferencia de calor entre el agua y el aire se produce a través de tres mecanismos consecutivos:

- Convección interior,
- Conducción en las paredes de la tubería y
- Convección exterior.



De la misma manera que en Conducción, en Convección se puede formular la existencia de una resistencia térmica.

Como se vió en la lección introductoria, el intercambio de calor convectivo entre una superficie a temperatura  $T_s$  y un fluido a temperatura  $T_f$  viene dado por

$$q = Ah(T_s - T_f) \quad (3.9)$$

Si se pone (3.9) de la forma siguiente

$$q = \frac{T_s - T_f}{\frac{1}{hA}}$$

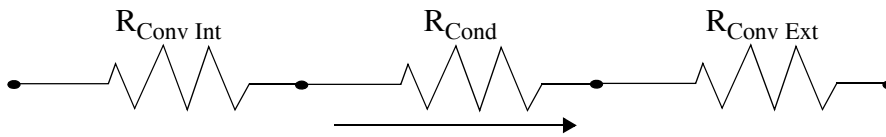
se deduce que la resistencia a la convección vale

$$R_{\text{conv}} = \frac{1}{hA} \quad (3.10)$$

Por tanto en este caso existen entre los dos potenciales térmicos  $T_{\text{agua}}$  y  $T_{\text{aire}}$  tres mecanismos de transmisión de calor consecutivos cuyas resistencias térmicas se van a colocar en serie.

Como se sabe de los circuitos eléctricos, varias resistencias en serie suman sus valores, con lo que

$$\begin{aligned} R_{\text{TOTAL}} &= (R_{\text{Conv Int}} + R_{\text{Conduc}} + R_{\text{Conv Ext}}) \\ &= \frac{1}{h_{\text{int}} \cdot A_{\text{int}}} + \frac{\ln(D_{\text{ext}}/D_{\text{int}})}{2\pi L \lambda} + \frac{1}{h_{\text{ext}} A_{\text{ext}}} \\ &= \frac{1}{h_{\text{int}} \pi D_{\text{int}} L} + \frac{\ln(D_{\text{ext}}/D_{\text{int}})}{2\pi L \lambda} + \frac{1}{h_{\text{ext}} \pi D_{\text{ext}} L} \end{aligned}$$



$$q = \frac{T_{\text{agua}} - T_{\text{aire}}}{R_{\text{total}}}$$

El objeto de la Convección (como parte del cuerpo de doctrina) es obtener el valor de  $\alpha$  correspondiente a cada situación. Como eso se verá más adelante, para poder resolver este problema se consideran unos valores de  $h_{\text{int}}$  y  $h_{\text{ext}}$  típicos, a saber,

$$h_{\text{int}} \approx 5000 \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad h_{\text{ext}} \approx 25 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

La conductividad térmica  $\lambda$  del tubo depende del tipo de acero que se trate, pero podemos tomar también un valor típico,  $\lambda \approx 50 \text{ W/m K}$ .

La longitud del tubo está indeterminada, por lo que es conveniente hacer los cálculos por unidad de longitud.

$$R'_{\text{ConvInt}} = \frac{1}{h_{\text{int}} \pi D_{\text{int}}} = 3.2 \times 10^{-3} \frac{\text{K} \cdot \text{m}}{\text{W}}$$

$$R'_{\text{Cond}} = \frac{\ln(D_{\text{ext}}/D_{\text{int}})}{2\pi \lambda} = 5.8 \times 10^{-4} \frac{\text{K} \cdot \text{m}}{\text{W}}$$

$$R'_{\text{ConvExt}} = \frac{1}{h_{\text{ext}} \pi D_{\text{ext}}} = 0.53 \frac{\text{K} \cdot \text{m}}{\text{W}}$$

**Observaciones:**

1. La prima sobre cada R indica que es resistencia por unidad de longitud.  
La resistencia total en una cierta longitud L se mide en K/W y la resistencia por unidad de superficie en  $K \cdot m^2/W$ .
2. Hay un valor mucho mayor que los otros dos. Eso indica o implica que
  - 2.1) La resistencia **importante** en este proceso es la de convección exterior (la mayor).
  - 2.2) Se comete un error pequeño, habitualmente menor a otros (por ejemplo el de la determinación de h, ...), despreciando los términos menores y tomando  $R_{total} = R_{conv ext}$ .
  - 2.3) La temperatura del exterior del tubo es aproximadamente la del agua (por eso un radiador quema si se toca cuando funciona la calefacción).

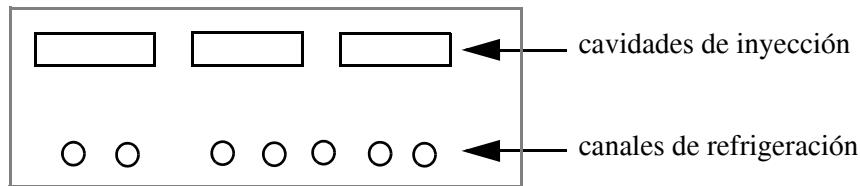
La conclusión del problema es

$$q' = \frac{T_{agua} - T_{aire}}{R'_{Total}} = \boxed{140.5 \frac{W}{m} = q'}$$

Este caso corresponde pues al de resistencias en serie.

**Ejemplo 2: Resistencias en paralelo**

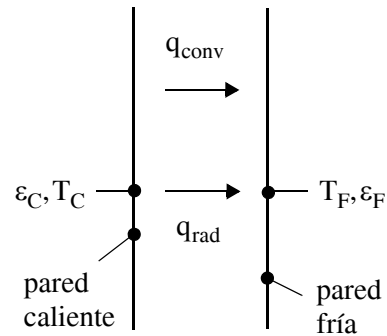
- 2.1. En los moldes de inyección de plásticos habitualmente hay presentes varias cavidades y numerosos canales de refrigeración. La resistencia térmica total del sistema se puede calcular fácilmente a partir de la resistencia individual entre cada cavidad y cada canal mediante su asociación en paralelo.



De la misma manera que en los circuitos eléctricos, cuando la disposición es en paralelo se suman las inversas de las resistencias (conductancias).

$$\frac{1}{R_{Total}} = \sum \frac{1}{R_{individual}}$$

2.2. Otra situación que se trata a veces con resistencias en paralelo es el de dos (o más) mecanismos de transferencia de calor que actúan a la vez. En ciertas situaciones donde existe refrigeración por aire, si ésta es pequeña (convección natural), puede ser apreciable la contribución de la radiación.



$$\begin{aligned}
 q_{\text{Total}} &= q_{\text{conv}} + q_{\text{rad}} = hA(T_C - T_F) + \frac{A\sigma(T_C^4 - T_F^4)}{\frac{1}{\varepsilon_C} + \frac{1}{\varepsilon_F} - 1} \\
 &= Ah(T_C - T_F) + Ah_{\text{rad}}(T_C - T_F) = \\
 &= \frac{(T_C - T_F)}{1/hA} + \frac{(T_C - T_F)}{1/h_{\text{rad}}A} = \frac{(T_C - T_F)}{R_{\text{Total}}}
 \end{aligned}$$

luego

$$\boxed{\frac{1}{R_{\text{Total}}} = \frac{1}{R_{\text{conv}}} + \frac{1}{R_{\text{rad}}}}$$

Se ha definido

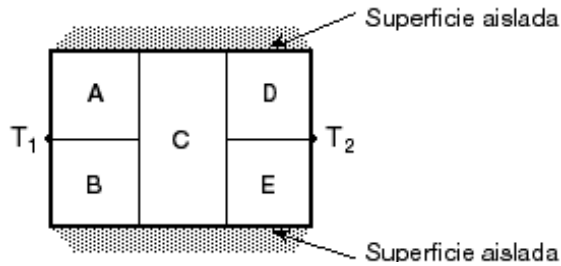
$$h_{\text{rad}} = \frac{\sigma(T_C^4 - T_F^4)}{\left(\frac{1}{\varepsilon_C} + \frac{1}{\varepsilon_F} - 1\right)(T_C - T_F)}$$

luego el coeficiente definido depende de las temperaturas y no es por tanto un buen método, aunque se utilice.

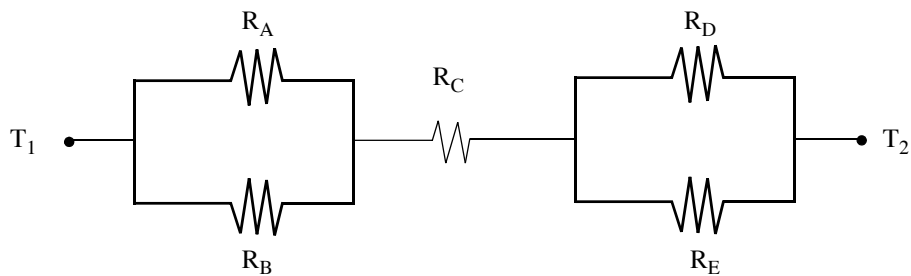
Las letras  $\varepsilon_C$  y  $\varepsilon_F$  designan la emisividad de ambas superficies.

### Ejemplo 3: Asociaciones mixtas

A veces puede suceder que se presenten situaciones donde las resistencias aparecen asociadas tanto en paralelo como en serie. Por ejemplo, en la pared mixta de la figura



El circuito que representa esta situación es el siguiente



### ¿Cuándo se puede utilizar la herramienta de las resistencias térmicas?

La herramienta de las resistencias térmicas es muy útil y potente siempre que se puede aplicar. Pero conviene tener presente las situaciones a las que está restringido su uso. El concepto de resistencia representa la existencia, en general, de una relación lineal entre una diferencia de potenciales y un flujo y, en particular, entre una diferencia de temperaturas y el calor que circula debido a ella.

Por ello no se podrá aplicar en ningún caso en que se rompa la linealidad, lo cual sucede siempre que existe generación térmica (ver más adelante), la situación es transitoria,  $\lambda$  depende de la temperatura y frecuentemente, aunque no siempre, cuando la conducción no es unidimensional.

Un caso particular en el que esta herramienta se puede usar es aquél en el que se cumplen las condiciones exigidas para el cálculo desarrollado anteriormente,

pero en algunos casos en que alguna de estas condiciones no se cumple, se puede volver a encontrar de nuevo una relación lineal entre el calor y la diferencia de temperaturas entre dos puntos (ciertos casos de conducción multidimensional,  $\lambda$  variable, ...) y se pueden definir y usar las resistencias térmicas; en otros casos, ésto es imposible (por ejemplo, con generación térmica) y no se puede usar esta herramienta.

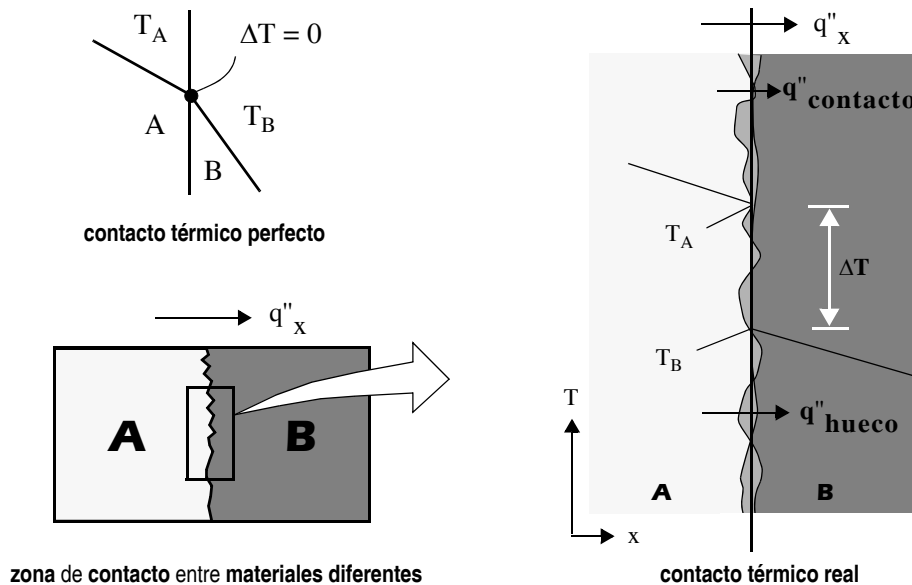
## Resistencia de contacto

---

En el estudio de sistemas compuestos se ha supuesto que el contacto entre materiales era térmicamente perfecto, es decir, se ha ignorado la posible existencia de un salto de temperaturas al pasar de un material a otro en la zona de contacto.

---

**FIGURA 3.4** Diferencia entre contacto térmico perfecto (caso ideal) y contacto térmico real.



En la práctica las zonas de contacto entre materiales diferentes suelen ser irregulares y el calor tiene dificultad en pasar por ellas, apareciendo la llamada **resistencia térmica de contacto**, o lo que es lo mismo, un salto de temperaturas entre los dos lados de la zona de contacto.

---

### Resistencia de contacto

---

La relación entre el salto de temperaturas en la intercara y la resistencia de contacto viene dado simplemente por la expresión

$$R_{t,c} \equiv \frac{T_A - T_B}{q}$$

donde  $q$  es el calor total circulante. Más habitual es trabajar con la unidad de área, con lo que

$$R''_{t,c} \equiv \frac{T_A - T_B}{q''}$$

siendo  $R''_{t,c} \left( \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}} \right)$  la resistencia térmica de contacto por unidad de superficie, que es la forma en que se suele presentar en la bibliografía [2] (ver tablas 3.1 y 3.2).

---

**TABLA 3.1** Resistencia térmica de contacto,  $R''_{t,c}/10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{K}/\text{W}$ .

<sup>a</sup> Intercara vacía			<sup>b</sup> Con fluido interfacial		
Material	Presión de contacto	1 bar	100 bar	Aire	2.75
	Acero inoxidable		6–25	0.7–4.0	Helio
Cobre		1–10	0.1–0.5	Hidrógeno	0.720
Magnesio		1.5–3.5	0.2–0.4	Aceite de silicona	0.525
Aluminio		1.5–5.0	0.2–0.4	Clicerina	0.265

- a. Para contactos metálicos en condiciones de vacío y diferentes presiones de contacto.  
 b. Para intercara de aluminio (rugosidad de 10  $\mu\text{m}$  y presión de 1 bar) con diferentes fluidos interfaciales.

Cualquier medida tendente a mejorar el contacto térmico, disminuirá el valor de la resistencia térmica de contacto  $R_{t,c}$ .

- Una de ellas será aumentar la presión de contacto (Tabla 3.1(a)).
- Otra disminuir la rugosidad mediante el pulido de las superficies en contacto para aumentar el área de los lugares de contacto.
- Una tercera es rellenar los huecos con alguna sustancia mejor conductora que el aire; se suele utilizar: Metales blandos (indio, plomo, estaño, plata), o grasas térmicas (Tablas 3.1(b) y 3.2).

**TABLA 3.2** Resistencia térmica de intercargas representativas entre sólidos.

Intercara	$R''_{t,c} / 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$
Pastilla de silicio cubierta con aluminio en aire (0.3–5 bar)	0.3 – 0.6
Aluminio–aluminio con relleno de iridio (~1 bar)	~0.07
Acero inoxidable con acero inoxidable relleno de iridio (~3.5 bar)	~0.04
Aluminio–aluminio con revestimiento de plomo	0.01 – 0.1
Aluminio–aluminio con grasa Dow Corning 340 (~1 bar)	~0.07
Acero inoxidable–acero inoxidable con grasa Dow Corning 340 (~3.5 bar)	~0.04
Pastilla de silicio–aluminio con epoxy de 0.02 mm	0.2 – 0.9
Latón–latón soldado con estaño de 15 $\mu\text{m}$	0.025 – 0.14

En cualquier caso los resultados experimentales son los más fiables para obtener  $R''_{t,c}$  (por unidad de área) y exigen indicar principalmente materiales de ambos lados, rugosidad, fluido interfacial y presión de contacto.

## Conducción con generación térmica

---

Aunque sencillos de cálculo también, los problemas de conducción unidimensional estacionarios con generación térmica pierden la condición de linealidad necesaria para poder utilizar la herramienta de los circuitos resistivos. No obstante, estas situaciones se abordan mediante el cálculo analítico directo, fácil de aplicar a las geometrías más comunes.

### La pared plana

Si se considera  $\lambda$  y  $q'''$  constantes, la ecuación de difusión del calor resulta,

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q'''}{\lambda} = 0$$

fácilmente integrable y que, suponiendo conocidas las temperaturas de sus superficies exteriores,  $T(x = -L) = T_1$  y  $T(x = L) = T_2$ , conduce a la ec. (3.11). Esta

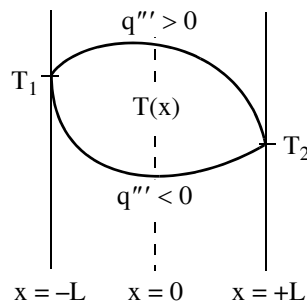
---

**Conducción con generación térmica**

---

ecuación es la de una parábola, convexa o cóncava según el signo de  $q'''$  como se muestra en la figura 3.5. Es fácil de justificar, tanto matemática como físicamente, la forma de ambas curvas.

**FIGURA 3.5** Distribución de temperaturas en una pared plana infinita con generación térmica uniforme.

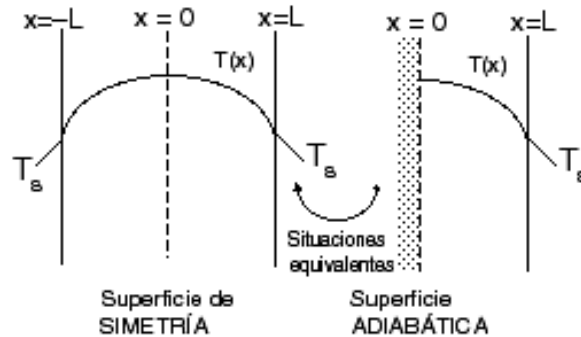


$$T(x) = \frac{q'''}{2\lambda} L^2 \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + \frac{T_2 - T_1}{2} \frac{x}{L} + \frac{T_1 + T_2}{2} \quad (3.11)$$

Si hay simetría:  $T_1 = T_2 = T_s$  y la distribución de temperaturas queda

$$T(x) = \frac{q'''}{2\lambda} L^2 \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + T_s \quad (3.12)$$

**FIGURA 3.6** Distribución de temperaturas en el caso de la figura 3.5 con simetría en el plano central de la pared.



---

## Conducción unidimensional y estacionaria

---

Frecuentemente la condición de contorno impuesta no es de temperatura superficial,  $T_s$ , sino convectiva ( $T_f, h$ ). En este caso se puede obtener fácilmente por balance de energía, local o global, el valor de  $T_s$  y sustituirlo en la Ec. (3.12)

$$\left. \begin{array}{l} -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = h(T_s - T_f) \\ \text{ó} \\ \dot{E}_g = \dot{E}_{\text{sal}} \Rightarrow q''' L = h(T_s - T_f) \end{array} \right\} \boxed{T_s = \frac{q''' L}{h} + T_f} \quad (3.13)$$

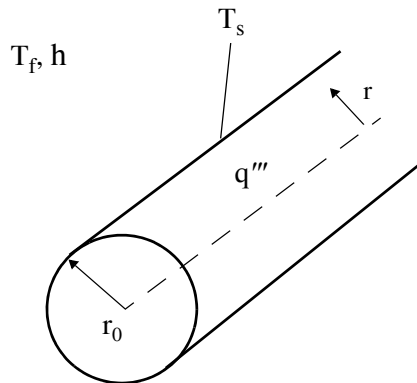
Es interesante observar en la figura 3.6 como al ser el plano central un plano de simetría, la distribución de temperaturas es idéntica a la de otra pared de espesor la mitad del de la inicial y con una superficie adiabática y la otra igual a la de la primera.

## El cilindro

Es un caso muy frecuente (resistencias eléctricas, barra de combustible en un reactor nuclear).

---

**FIGURA 3.7** Cilindro infinito con generación interna.



Antes de hacer el cálculo analítico de esta geometría, es útil dar una expresión común a las tres geometrías habituales (cartesiana, cilíndrica y esférica) para los casos de conducción unidimensional, estacionaria y con  $\lambda = \text{cte}$ .

---

**Aletas (superficies extendidas)**

---

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{n}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q'''}{\lambda} = 0$$

donde:  $n = 0, 1, 2$  para coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas respectivamente;  $r = x$  para coordenadas cartesianas y el radio para las radiales.

En el caso del cilindro, la EDC resulta  $\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q'''}{\lambda} = 0$

y las condiciones de contorno  $T(r_0) = T_s, \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0$

conducen a 
$$T(r) = \frac{q''' r_0^2}{4\lambda} \left( 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) + T_s \quad (3.14)$$

En el caso particular de que  $q''' = 0$  la distribución de temperaturas se reduce a  $T(r) = T_s$  ¿Es esto lógico?

Si la condición de contorno es convectiva, se demuestra como en la pared plana

que 
$$T_s = T_f + \frac{q''' r_0}{2h} \quad (3.15)$$

---

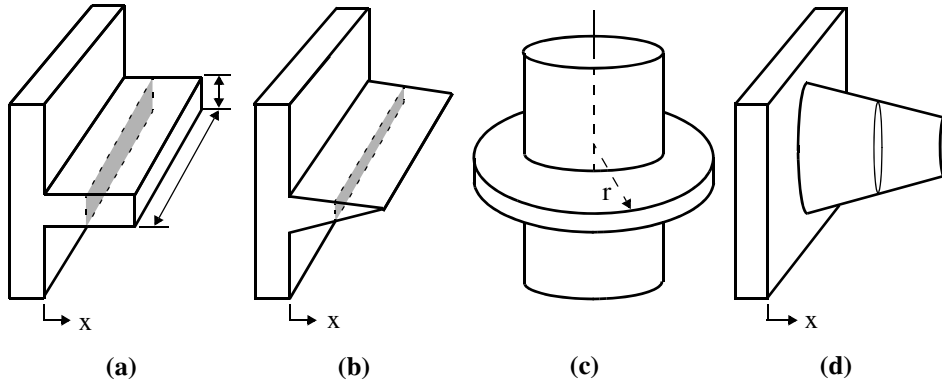
**Aletas (superficies extendidas)**

---

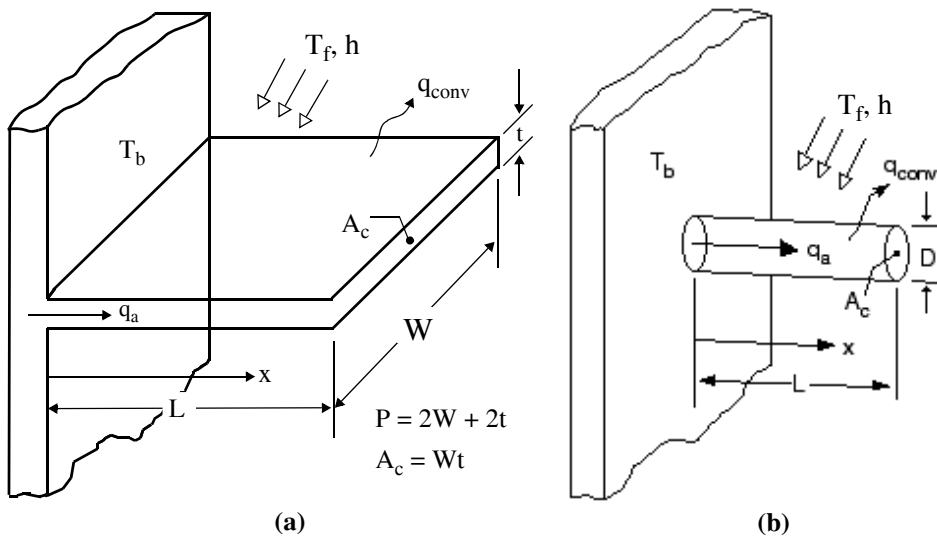
En una situación convectiva el calor intercambiado entre la superficie sólida y el fluido viene dado por la expresión  $q = hA(T_s - T_f)$  según se vió. En muchos casos se requiere intercambiar una cierta cantidad de calor con temperaturas prefijadas,  $T_s$  y  $T_f$ , y pequeño valor de  $h$ , lo cual sucede en los gases y especialmente en convección natural. La única manera de conseguirlo es aumentando la única variable libre, el área. Ese aumento conduce a lo que se conoce como aletas.

Ejemplos del uso de aletas se encuentran en las siguientes aplicaciones: refrigeración de transformadores y equipos electrónicos, calefacción, aire acondicionado, radiadores de los coches, recuperación de calores residuales, etc., y en general cuando el fluido sea un gas.

**FIGURA 3.8** Tipos de aletas: a) Aleta recta de sección uniforme. b) Aleta recta de sección no uniforme. c) Aleta anular. d) Aleta tipo pin.



**FIGURA 3.9** Aletas de sección uniforme: (a) Recta.(b) Tipo pin.



### Ecuación general de una aleta

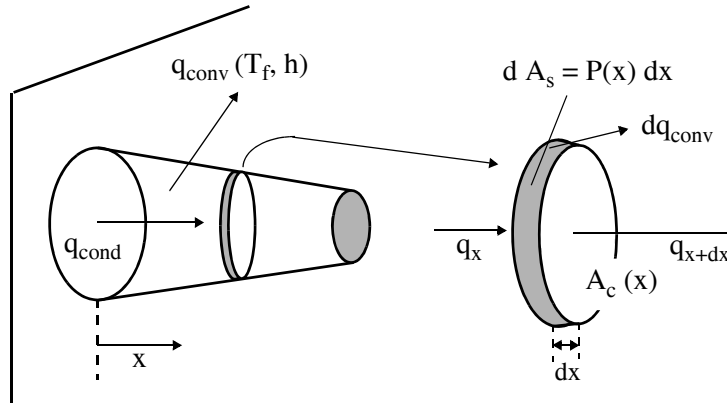
Aunque se deduce la ecuación general para obtener la distribución de temperaturas (y como consecuencia el calor evacuado) para una aleta de geometría cartesiana, es decir apoyada en una superficie plana y con dirección preferente en un eje cartesiano, se procede de forma totalmente similar en otro tipo de aletas, como la anular (geometría cilíndrica).

---

**Aletas (superficies extendidas)**

---

**FIGURA 3.10** Sección de una aleta, donde se hace el balance de energía que conduce a la obtención de su ecuación.



La aleta, como se justificará más adelante, debe ser un objeto delgado para ser eficaz. Por ello, para analizarla se realiza un corte perpendicular a su eje (figura 3.10).

El balance de energía aplicado a la rodaja, bajo la hipótesis razonable de unidireccionalidad (es decir despreciando las variaciones de temperatura en las otras direcciones, dadas sus dimensiones relativas) se reduce a

$$\left. \begin{aligned} dq_{\text{cond}} &= -dq_x = -\frac{dq_x}{dx} dx \\ dq_{\text{conv}} &= h(T - T_f) dA_s \end{aligned} \right\} \frac{d}{dx} \left( \lambda A_c \frac{dT}{dx} \right) dx = h(T - T_f) dA_s$$

Tomando  $\lambda = \text{cte}$ , queda

$$\frac{d}{dx} \left( A_c \frac{dT}{dx} \right) - \frac{h}{\lambda} \frac{dA_s}{dx} (T - T_f) = 0$$

y manipulando matemáticamente resulta la ecuación diferencial que determina la distribución de temperaturas en el seno de una aleta cualquiera de tipo cartesiano

$$\boxed{\frac{d^2 T}{dx^2} + \left( \frac{1}{A_c} \frac{dA_c}{dx} \right) \frac{dT}{dx} - \left( \frac{P}{A_c} \frac{h}{\lambda} \right) (T - T_f) = 0} \quad (3.16)$$

### Aletas de sección constante

Si la sección es constante a lo largo de la aleta (como en la figura 3.9), la Ec. (3.16) se simplifica y se puede resolver analíticamente. Efectivamente, al ser  $A_c = \text{cte.}$ , la ecuación queda:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{\lambda A_c}(T - T_f) = 0$$

Se definen  $\frac{hP}{\lambda A_c} \equiv m^2$  y  $T - T_f \equiv \theta$  resultando  $\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$  cuya solución

general es  $\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$ .

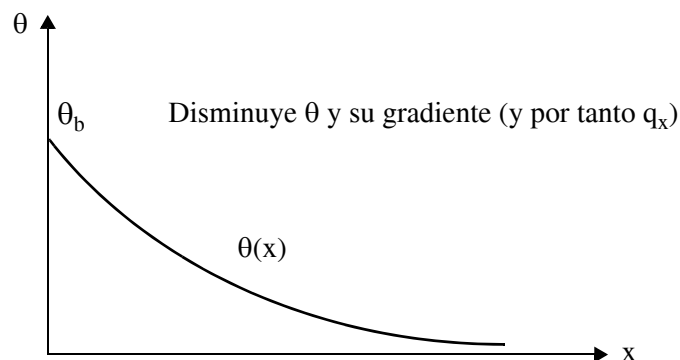
$C_1$  y  $C_2$  se determinan con las condiciones de contorno, que son:

1. En la base de la aleta,  $T(x=0) = T_b \rightarrow \theta(x=0) = \theta_b$ .
2. En la punta ( $x=L$ ) es variable, dando lugar a soluciones diferentes según la tabla 3.3.

En cualquier caso, el aspecto de la distribución de temperaturas dentro de la aleta es el de la figura 3.11.

---

**FIGURA 3.11** Variación de la temperatura diferencial de una aleta a lo largo de su longitud.



---

**Aletas (superficies extendidas)**


---

**TABLA 3.3** Distribuciones de temperaturas en aletas de sección uniforme según las condiciones en la punta.

Condición en la punta	$\theta/\theta_b$
Convectiva (la más realista): $h'\theta(L) = -\lambda \frac{d\theta}{dx} \Big _{x=L}$	$\frac{\cosh[m(L-x)] + \left(\frac{h'}{m\lambda}\right) \sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \left(\frac{h'}{m\lambda}\right) \sinh(mL)}$
Adiabática (condición límite) $\frac{d\theta}{dx} \Big _{x=L} = 0$	$\frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}$
Aleta infinita (condición límite para aletas muy largas): $\theta(L) = 0$	$e^{-mx}$
Temperatura fija (condición académica, poco realista): $\theta(L) = \theta_L$	$\frac{(\theta_L/\theta_b) \sinh(mx) + \sinh[m(L-x)]}{\sinh(mL)}$

$h'$  : coeficiente de convección en la punta, que no tiene porque coincidir con el del resto de la aleta.

También es importante el cálculo del calor evacuado por la aleta,  $q_a$ , que se puede obtener por dos procedimientos:

- a) Mediante el calor que pasa por la base

$$q_a = q_b = -\lambda A_c \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = -\lambda A_c \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0}$$

- b) Sumando el calor evacuado por toda su superficie

$$\begin{aligned}
 q_a &= \int_{A_s} h[T(x) - T_f] dA_s + h'[T(L) - T_f] A_{\text{punta}} = \\
 &= \int_{A_s} h\theta(x) dA_s + h'\theta(L) A_{\text{punta}}
 \end{aligned}$$

---

### Conducción unidimensional y estacionaria

---

Los resultados para cada tipo de condición en la punta son los mostrados en la tabla 3.4.

**TABLA 3.4** Calor evacuado por las aletas de sección uniforme,  $q_a$ , según la condición en la punta que aparece en la tabla 3.4.

Convectiva $M \frac{\sinh(mL) + \left(\frac{h}{\lambda m}\right) \cosh(mL)}{\cosh(mL) + \left(\frac{h'}{\lambda m}\right) \sinh(mL)}$	Infinita $M$
Adiabática $M \tanh(mL)$	Temperatura fija $M \frac{\cosh(mL) - (\theta_L/\theta_b)}{\sinh(mL)}$

$$\text{con } M \equiv \sqrt{h P \lambda A_c} \theta_b.$$

### Ecuación general de una aleta circular (anular)

De la misma manera que en el caso cartesiano, se deduce la ecuación para el caso general en el que el espesor  $t$  depende del radio  $r$ , y luego se particulariza al caso en que  $t = \text{cte}$ .

Haciendo el mismo balance de energía que en la aleta recta, ahora sobre una rodaja anular [3], se llega a:

$$t \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\theta}{dr} \right) + \frac{dt}{dr} r \frac{d\theta}{dr} - \frac{h}{\lambda} r \theta = 0 \quad (3.17)$$

Caso particular de espesor uniforme ( $t = \text{cte}$ .)

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{h}{\lambda t} \theta = 0$$

ecuación diferencial típica de un sistema cilíndrico, de solución general

---

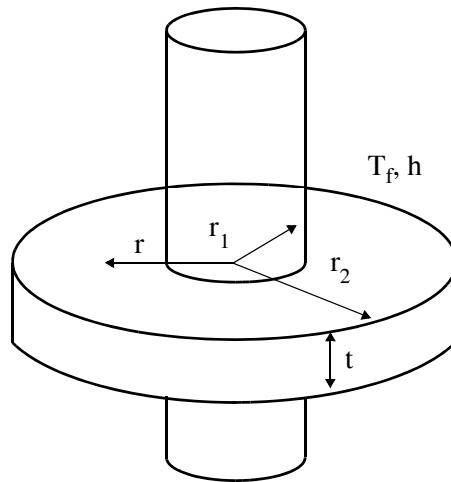
**Aletas (superficies extendidas)**

---

$$\theta = C_1 J_0(imr) + C_2 iH_0(imr) \text{ con } \begin{cases} i = \sqrt{-1}, m \equiv \sqrt{\frac{h}{\lambda t}} \\ J_0 : \text{F. Bessel 1ª especie y orden 0} \\ Y_0 : \text{F. Bessel 2ª especie y orden 0} \\ H_0 = J_0 + iY_0, \text{ F. Hankel de orden 0} \end{cases}$$

---

**FIGURA 3.12** Esquema de una aleta anular.



Tomando como condiciones de contorno

$$\theta(r_1) = \theta_b \quad \text{y} \quad \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r_{2c}} = 0 \quad (\text{Condición adiabática corregida})$$

resulta la solución particular

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{J_0(imr)H_1(imr_{2c}) + iH_0(imr)iJ_1(imr_{2c})}{J_0(imr_1)H_1(imr_{2c}) + iH_0(imr_1)iJ_1(imr_{2c})} \quad (3.18)$$

Todas las funciones toman valor real para  $mr > 0$ .

$J_1$  y  $H_1$  son las funciones de Bessel y Hankel de orden 1.

## Aletas de sección (espesor) variable. Rendimientos

En el caso de aletas cuya sección (o espesor) varía en la dirección de propagación del calor ( $x$  ó  $r$ ), el tratamiento analítico es más difícil (aunque existe en algunos casos) y se suelen emplear otros procedimientos.

En relación con estos procedimientos, existen unas magnitudes que se van a definir.

El primero es la **efectividad**, que compara (por división) el calor evacuado con y sin aleta

$$\varepsilon \equiv \frac{q_a}{hA_{c,b}\theta_b} \quad (3.19)$$

y que, obviamente, debe ser lo mayor posible. Es ilustrativo ver de quien depende  $\varepsilon$  en el caso particularmente sencillo de la aleta infinita. Es fácil comprobar que se obtiene

$$\varepsilon = \left( \frac{\lambda P}{hA_c} \right)^{1/2}$$

de donde se extraen unas importantes conclusiones respecto a las características y uso de las aletas. Para conseguir una alta efectividad de la aleta deben darse los siguientes factores

1. La aleta debe fabricarse con un material de alta conductividad térmica (los más utilizados son cobre y aluminio).
2. Para que el cociente  $P/A_c$  sea alto las aletas deben ser muy finas.
3. Son interesantes si  $h$  es pequeño, es decir, con gases y particularmente en convección natural.

### Eficiencia:

Es otro interesante y útil concepto, introducido por Harper y Brown en 1922

$$\eta \equiv \frac{q_a}{q_{\max}} = \frac{q_a}{hA_a\theta_b} \quad (3.20)$$

que permite obtener el calor evacuado por las aletas de sección variable,  $q_a$ , sin pasar por el cálculo analítico.

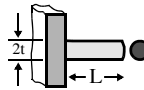
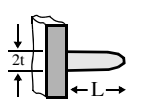
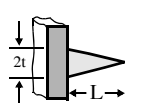
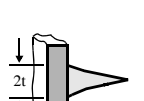
**Aletas (superficies extendidas)**

En la tabla siguiente [4], [5] se presentan expresiones que permiten calcular  $\eta$  para un conjunto de aletas comunes, considerando punta adiabática.

**TABLA 3.5** Eficiencia de aletas de punta adiabática de diversas geometrías. Área superficial por unidad de anchura ( $A'_s$ ) y área de perfil ( $A_p$ ) para aletas rectas; área superficial ( $A_s$ ) y volumen ( $V$ ) para aletas anulares y agujas;  $m \equiv (h/\lambda t)^{1/2}$ .  $I$  y  $K$  son las funciones de Bessel de primera y segunda especie, respectivamente.

<b>ALETAS RECTAS DE ANCHURA INFINITA</b>		
Rectangular $y = t$ *		$\eta = \frac{1}{mL} \tanh(mL)$ $A'_s = 2L$ $A_p = 2tL$
Parabólica $y = t(1-x/L)^{1/2}$		$\eta = \frac{1}{mL} \frac{I_{2/3}(\frac{4}{3}mL)}{I_{-1/3}(\frac{4}{3}mL)}$ $A'_s = tB + (t^2/2L) \ln(2L/t + B)$ $B = \sqrt{1 + 4L^2/t^2}$ , $A_p = \frac{4}{3}tL$
Triangular $y = t(1-x/L)$		$\eta = \frac{1}{mL} \frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$ $A'_s = 2\sqrt{t^2 + L^2}$ $A_p = tL$
Parabólica $y = t(1-x/L)^2$		$\eta = \frac{2}{\sqrt{4(mL)^2 + 1} + 1}$ $A'_s = LB + (L^2/2t) \ln(2t/L + B)$ $B = \sqrt{1 + 4t^2/L^2}$ , $A_p = \frac{2}{3}tL$
<b>ALETAS ANULARES</b>		
Rectangular $y = t$		$\eta = \frac{2r_1/m}{(r_2^2 - r_1^2)} \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_2) - I_1(mr_1)K_1(mr_2)}{K_0(mr_1)I_1(mr_2) + I_0(mr_1)K_1(mr_2)}$ $A_s = 2\pi(r_2^2 - r_1^2)$ , $V = 2\pi(r_2^2 - r_1^2)t$
Hiperbólica $y = t(r_1/r)$		$\eta = \frac{2r_1/m}{(r_2^2 - r_1^2)} \frac{I_{2/3}(\frac{2}{3}mr_1)I_{-2/3}(\frac{2}{3}mr_2\sqrt{r_2/r_1}) - I_{-2/3}(\frac{2}{3}mr_1\sqrt{r_2/r_1})I_{2/3}(\frac{2}{3}mr_2)}{I_{1/3}(\frac{2}{3}mr_1)I_{2/3}(\frac{2}{3}mr_2\sqrt{r_2/r_1}) - I_{-2/3}(\frac{2}{3}mr_1\sqrt{r_2/r_1})I_{-1/3}(\frac{2}{3}mr_2)}$ $A_s = 2\pi r_1 \left\{ C - B + \frac{1}{2} \ln \frac{(C-t)(B+t)}{(C+t)(B-t)} \right\}$ $B = \sqrt{r_1^2 + t^2}$ $V = 4\pi r_1 (r_2 - r_1)$ $C = \sqrt{(r_2/r_1)^2 + t^2}$

**TABLA 3.5** Eficiencia de aletas de punta adiabática de diversas geometrías. Área superficial por unidad de anchura ( $A'_s$ ) y área de perfil ( $A_p$ ) para aletas rectas; área superficial ( $A_s$ ) y volumen ( $V$ ) para aletas anulares y agujas;  $m \equiv (h/\lambda t)^{1/2}$ .  $I$  y  $K$  son las funciones de Bessel de primera y segunda especie, respectivamente.

AGUJA (Sección circular)		
Aguja cilíndrica $y = t$ 	$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}mL} \tanh(\sqrt{2}mL), \quad A_s = 2\pi tL, \quad V = \pi t^2L$	
Parabólica $y = t(1-x/L)^{1/2}$ 	$\eta = \frac{3}{2\sqrt{2}mL} \frac{I_1\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}mL\right)}{I_0\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}mL\right)} \quad A_s = (t^4\pi/6L^2) \left\{ \left(\frac{4L^2}{t^2} + 1\right)^{3/2} - 1 \right\}$ $V = (\pi/2)t^2L$	
Triangular $y = t(1-x/L)$ 	$\eta = \frac{2}{\sqrt{2}mL} \frac{I_2(2\sqrt{2}mL)}{I_1(2\sqrt{2}mL)} \quad A_s = \pi t\sqrt{L^2 + t^2}, \quad V = (\pi/3)t^2L$	
Parabólica $y = t(1-x/L)^2$ 	$\eta = \frac{2}{\sqrt{8/9(mL)^2 + 1 + 1}}, \quad V = (\pi/5)t^2L$ $A_s = (\pi L^3/16t) \{ AB - (L/4t) \ln [(4tB/L) + A] \}$ $A = 1 + (8t^2/L^2), \quad B = \sqrt{1 + (4t^2/L^2)}$	

\* Estas ecuaciones son las del perfil de la aleta, donde  $x$  es la dirección axial e  $y$  la dirección transversal menor.

Una de las mayores utilidades que tiene el concepto de eficiencia es que permite definir la resistencia térmica de la aleta como

$$R_a = \frac{\theta_b}{q_a} = \frac{1}{\eta h A_a} \quad (3.21)$$

### Ejercicio

Calcular las dimensiones ( $L$  y  $t$ ) que tiene que tener una aleta de sección recta y perfil rectangular para realizar una tarea determinada:

- evacuar una cierta cantidad de calor por unidad de anchura,  $q'_a \equiv \frac{q_a}{W}$
- con una cierta temperatura diferencial de la base,  $\theta_b \equiv T_b - T_f$

con la mínima cantidad de material.

---

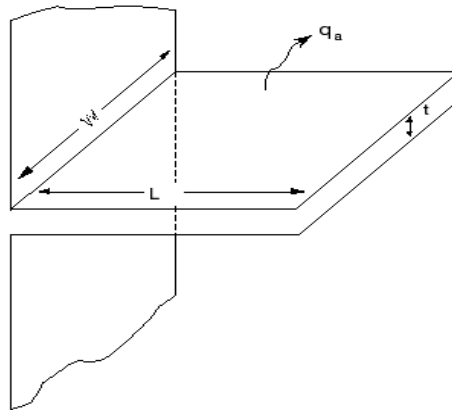
## Referencias

---

Están dados:

- las condiciones convectivas,  $h$
- el material de la aleta,  $\lambda$

Se toma aleta de punta adiabática, con  $L_c = L + \frac{t}{2}$



Como consecuencia del resultado obtenido: ¿Es razonable la aleta infinita?

## Referencias

---

1. H. Gastrow  
*Injection Molds*  
Hanser Publishers, Munich, 1983.
2. F. Incropera and D. de Witt  
*Fundamentals of Heat and Mass Transfer*  
Wiley, 1990.
3. M. Jakob  
*Heat Transfer, vol. I*  
Wiley, New York, 1967.
4. P. J. Schneider  
*Handbook Heat Transfer (edited by W. M. Rohsenow and J. P. Hartnett), sec. 3*  
McGraw-Hill, New York, 1973.
5. A. F. Mills  
*Transferencia de calor*  
Irwin, Madrid, 1995.

---

## Síntesis del capítulo

---

- Cuando la conducción es unidimensional, sin generación térmica y estacionaria y la conductividad térmica es constante, el principal concepto que aparece es el de **resistencia térmica**, totalmente análogo al de resistencia eléctrica, que indica que se puede establecer una relación lineal entre el flujo (calor) y la diferencia de potencial (temperatura) dada por la ley de Ohm. Esto permite resolver con sencillez problemas con sistemas compuestos de subsistemas, aplicando las familiares leyes de composición de resistencias y de resolución de circuitos eléctricos.

Esta herramienta se puede aplicar a ciertos casos multidimensionales (según se verá más adelante), a casos transitorios (introduciendo el concepto de capacidad térmica, semejante al condensador eléctrico) y a sistemas cuya conductividad térmica varíe con la temperatura (definiendo una conductividad media o mediante otras transformaciones matemáticas); pero nunca a casos con generación térmica, debido a que se rompe la linealidad necesaria al concepto de resistencia.

- En cierto tipo de problemas es más conveniente aplicar primero la ley de Fourier, en lugar de la ecuación de difusión del calor, e integrarla para obtener tanto el calor intercambiado como la distribución de temperaturas. Sólo se aplica a las situaciones llamadas de conducción cuasi-unidimensional.
- El concepto de resistencia de contacto indica que, en general, el contacto entre cuerpos es microscópicamente irregular y que aparece un salto de temperaturas al pasar el calor de uno a otro. Su valor es muy difícil de conocer mediante modelos teóricos y se determina a partir de valores empíricos.
- Un tipo de cuerpo especial que presenta conducción unidimensional a la vez que convección son las **aletas**. El hecho de tener en cada punto de ellas conducción y convección hace que su tratamiento sea distinto al de otros cuerpos unidimensionales; **no se les puede aplicar la ecuación de difusión**

---

## Síntesis del capítulo

---

**del calor**, sino que debe obtenerse su propia ecuación de distribución de temperaturas mediante un balance de energía diferencial que dice que *el calor que evacúa (o gana) la aleta por convección hacia (desde) el exterior es igual a la disminución (o aumento) del calor que sigue propagándose por conducción en el interior de la aleta.*

Igual que en el resto de casos de conducción que se ven, una vez conocida la distribución de temperaturas de la aleta, resolviendo su ecuación diferencial, es sencillo calcular el calor que intercambia la aleta con el exterior.

El concepto de eficiencia permite definir con facilidad la resistencia térmica de la aleta.

---

# Cuestiones\*

---

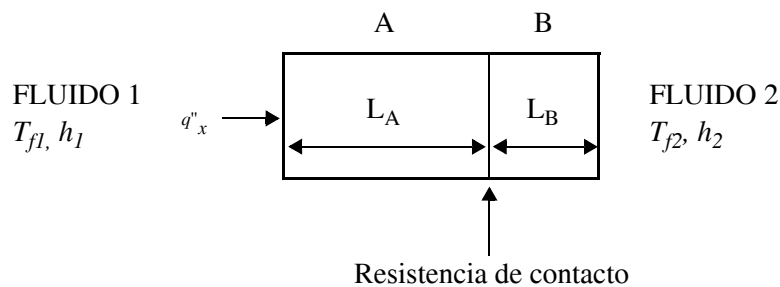
1. *Demostrar que en conducción estacionaria y sin generación térmica ( $q''' = 0$ ) en una pared plana infinita se cumple la ley de Ohm.*
2. *Calcular la resistencia de contacto por unidad de superficie,  $R''_c$ , entre los dos materiales A y B que forman una pared de separación entre dos fluidos, sabiendo que el flujo de calor intercambiado entre ambos fluidos es  $q''_x = 2000 \text{ W/m}^2$  y con los otros datos siguientes:*

$$\lambda_A = 1 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}, L_A = 1 \text{ cm}$$

$$\lambda_B = 1 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}, L_B = 1 \text{ mm}$$

$$T_{f1} = 100 \text{ }^\circ\text{C}, h_1 = 100 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

$$T_{f2} = 0 \text{ }^\circ\text{C}, h_2 = 100 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$



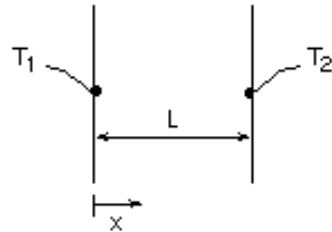
3. *En la figura se muestra una pared plana donde existe conducción unidimensional y estacionaria y sin generación térmica. Su conductividad térmica vale  $25 \text{ W/m}\cdot\text{K}$  y su espesor  $L$  es  $0.5 \text{ m}$ .*

---

\*. Las cuestiones de conducción con generación térmica y de aletas se encuentran incluidas entre las cuestiones del capítulo 4.

## Cuestiones

Determinar las incógnitas de la tabla siguiente.



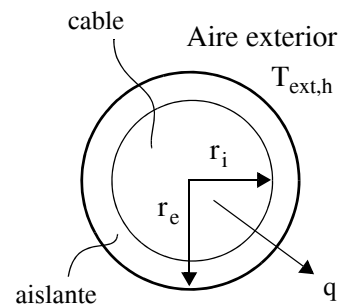
Caso	$T_1$ (K)	$T_2$ (K)	$\frac{dT}{dx}$ $\left(\frac{K}{m}\right)$	$q''_x$ $\left(\frac{W}{m^2}\right)$
1	400	300		
2	350		250	
3		200		3000

4. En la edificación se utiliza como aislante térmico (y acústico) la ventana doble. Sea una, consistente en dos láminas de vidrio de 7 mm de grosos separados por una cámara de aire de otros 7 mm. Esta doble ventana separa el interior de una habitación a  $20^\circ\text{C}$  del exterior a  $-10^\circ\text{C}$ .

Suponiendo que el aire de la cámara permanece inmóvil, que el coeficiente de convección de la superficie interna de la ventana con el aire de la habitación es de  $10/\text{m}^2\text{K}$  y el del exterior de  $80 \text{ W}/\text{m}^2\text{K}$ , calcular las pérdidas de calor a través de la ventana si sus dimensiones son de  $0.8 \times 0.5 \text{ m}$ .

La conductividad térmica del aire vale  $0.025 \text{ W}/\text{mK}$  y la del vidrio  $1.4 \text{ W}/\text{mK}$ .

5. Si se aísla un cable caliente muy delgado (por ejemplo de electricidad), las pérdidas de calor aumentan al colocar el aislante hasta que éste no alcanza un cierto espesor. Demostrar que el radio exterior del aislante debe tener como mínimo el valor  $r_e = \lambda_{\text{aislante}}/h$  para que las pérdidas de calor al exterior disminuyan al aumentar el espesor del aislante.

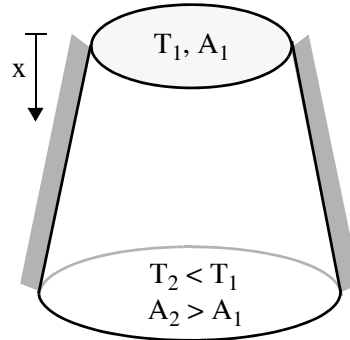


6. En el tronco de cono que muestra la figura hay una situación térmica estacionaria, donde la base inferior se encuentra a una temperatura  $T_2$  inferior a la temperatura  $T_1$  de la base superior y la superficie lateral está adiabáticamente aislada. La conductividad térmica del sólido depende de

**Cuestiones**

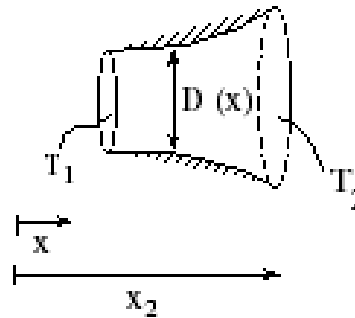
la temperatura según la relación  $\lambda = \lambda_0 - aT$ , donde  $a$  es una constante positiva.

Indicar, con la mínima justificación necesaria, si las siguientes magnitudes físicas aumentan, disminuyen o permanecen constantes al aumentar  $x$ .

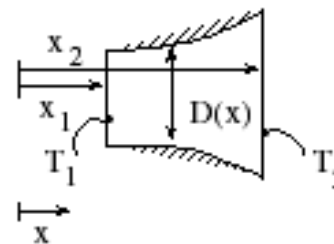


- a) Calor transferido en la dirección  $x$ ,  $q_x$
- b) Flujo de calor en la dirección  $x$ ,  $q''_x$ .
- c) Conductividad térmica,  $\lambda$ .
- d) Gradiente térmico,  $dT/dx$ .

7. En el cuerpo de la figura de sección circular, el diámetro varía con  $x$  de la forma  $D = ax^{3/2}$  con  $a = 1.0 \text{ m}^{-1.2}$ . Siendo constante la conductividad térmica del cuerpo, la situación estacionaria, el contorno lateral aislado adiabáticamente y las bases isotermas, obtener la distribución de temperaturas  $T(x)$  en función de los parámetros  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $x_1$  y  $x_2$ .



8. Determinar el calor transferido entre las dos superficies del cuerpo tronconónico de sección circular mostrado en la figura, a partir de los siguientes datos:



Situación estacionaria:

$$D = ax^{3/2}, a = 1.0 \text{ m}^{-1/2}, \lambda = 20 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$$

Superficie lateral adiabática:

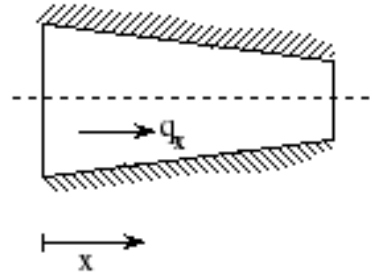
---

**Cuestiones**

---

$$x_1 = 5\text{cm}, x_2 = 10\text{cm}, T_1 = 100^\circ\text{C}, T_2 = 200^\circ\text{C}$$

9. Suponiendo conducción estacionaria y sin generación térmica a través del cuerpo de revolución de la figura siguiente, obtener la expresión analítica de la conductividad térmica  $\lambda(x)$  si se dan las siguientes condiciones:

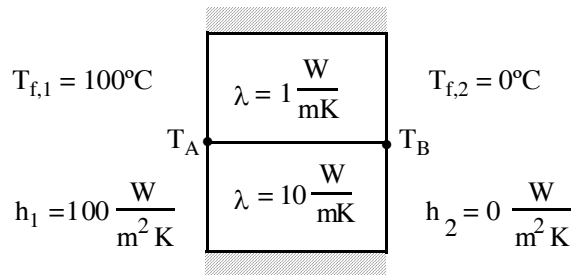


$$A(x) = 1 - x$$

$$T(x) = 300(1 - 2x - x^3), q_x = 6000\text{ W}$$

estando  $A$  en  $\text{m}^2$ ,  $x$  en metros y  $T$  en Kelvin.

10. En la pared compuesta de la figura existe una situación estacionaria y no hay generación térmica, con coeficientes de convección a ambos lados cuyo valor se indica. Las superficies superior e inferior son adiabáticas. Calcular  $T_A$  y  $T_B$ .

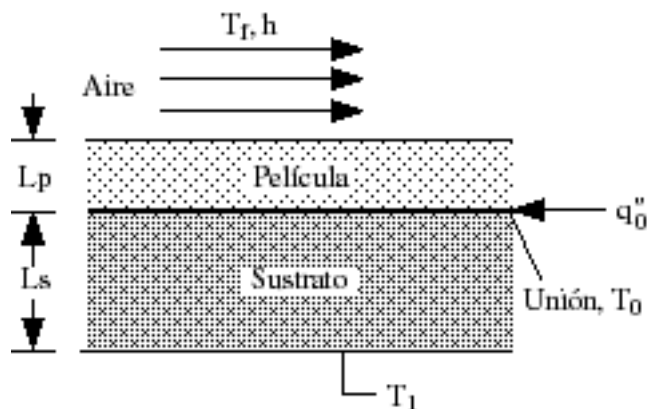


---

# Problemas

---

1. En cierto proceso de fabricación se adhiere una película transparente a un sustrato tal como se muestra en la figura. Para que la unión se consolide es necesario mantenerla a una temperatura  $T_0$ , lo cual se consigue suministrándole un flujo de calor  $q''_0$  ( $\text{W/m}^2$ ) que se absorbe totalmente en la unión. El fondo del sustrato se mantiene a una temperatura  $T_1$ , mientras que la superficie libre de la película está expuesta a una corriente de aire a  $T_f$  con un coeficiente de convección  $h$ .



DATOS:

$$L_p = 0.25 \text{ mm.}$$

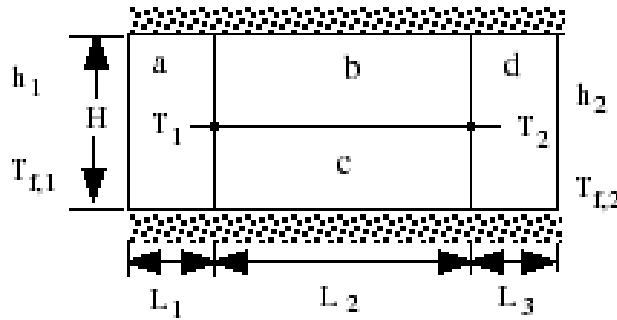
$$\lambda_p = 0.025 \text{ W/mK}$$

$$L_s = 1 \text{ mm.}$$

$$\lambda_s = 0.05 \text{ W/mK}$$

- a) Dibujar el circuito térmico que representa la transferencia de calor en estado estacionario.
- b) Calcular el flujo de calor  $q''_0$  necesario para mantener la superficie de unión  $T_0 = 60 \text{ }^\circ\text{C}$  si  $T_1 = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_f = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  y  $h = 50 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ .
2. Una pared de altura  $H$  y profundidad unidad, aislada en los extremos está compuesta de cuatro materiales distintos dispuestos tal como se indica en la figura.

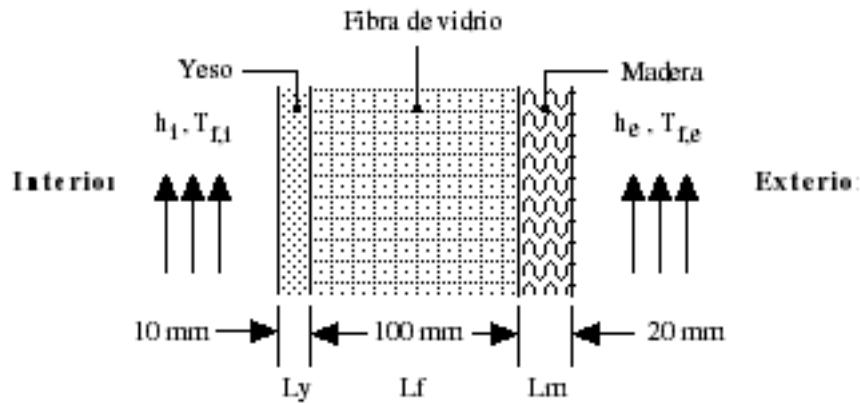
**Problemas**



DATOS:  
 $H = 3 \text{ m}$   
 $H_b = H_c = 1.5 \text{ m}$   
 $L_1 = L_3 = 0.05 \text{ m}$   
 $L_2 = 0.1 \text{ m}$   
 $\lambda_a = \lambda_d = 50 \text{ W/mK}$   
 $\lambda_b = 10 \text{ W/mK}$   
 $\lambda_c = 1 \text{ W/mK}$

- Dibujar el circuito térmico del sistema.
- Para unas condiciones tales que  $T_{f,1} = 200 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $h_1 = 50 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ ,  $T_{f,2} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$  y  $h_2 = 10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ , ¿cuál es la potencia transferida a través de la pared? ¿cuáles son las temperaturas de las uniones  $T_1$  y  $T_2$ ?

- 3.** Las paredes de una casa están compuestas por madera, aislamiento de fibra de vidrio y yeso, tal como se indica en la figura. En un día de invierno los coeficientes de transferencia de calor por convección interior y exterior valen  $h_i = 30 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ ,  $h_e = 60 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  y las temperaturas  $T_{f,i} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  y  $T_{f,e} = -15 \text{ }^\circ\text{C}$ . La superficie total de la pared son  $350 \text{ m}^2$ .  $\lambda_{\text{yeso}} = 0.17 \text{ W/mK}$ ,  $\lambda_{\text{madera}} = 0.12 \text{ W/mK}$ .



- Hallar una expresión simbólica para la resistencia total de la pared, incluyendo la convección exterior e interior.
- Determinar las pérdidas de calor totales (W) a través de la pared.

---

**Problemas**

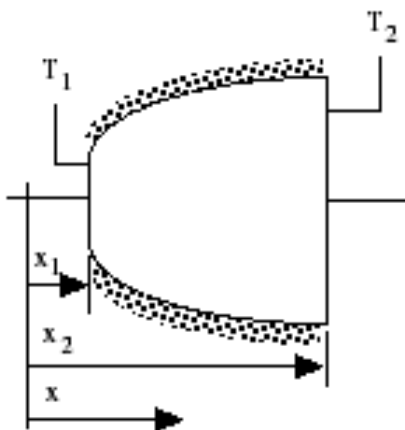
---

- c) En un día de viento, en el que valor del coeficiente de convección externo puede aumentar hasta  $h_e = 300 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ , determinar el porcentaje de aumento de pérdidas respecto del caso anterior.
- d) Estimar las pérdidas de calor diarias a través de la pared si se considera una expresión variable para la temperatura exterior  $T_{f,e}$  (condición más parecida a la realidad) tal que:

$$T_{f,e} \text{ (K)} = 273 + 5 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{24} t \right) \quad 0 \leq t \leq 12\text{h}$$

$$T_{f,e} \text{ (K)} = 273 + 11 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{24} t \right) \quad 12 \leq t \leq 24\text{h}$$

4. La ventanilla trasera de un automóvil se desempaña pasando aire caliente a  $40 \text{ }^\circ\text{C}$  sobre una superficie interior, siendo el coeficiente de convección asociado de  $30 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Si la temperatura exterior es de  $-10 \text{ }^\circ\text{C}$  y el coeficiente de convección asociado es de  $6.5 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ , ¿cuáles son las temperaturas de las superficies interna y externa de la ventana, que tiene un espesor de  $4 \text{ mm}$ ?
5. Calcular la distribución de temperaturas  $T(x)$  y la potencia transferida para la geometría cónica de sección circular de la figura, cuyo diámetro viene dado por la expresión  $D = ax^{1/2}$ , siendo  $a = 0.5 \text{ m}^{1/2}$ .



DATOS:

$$x_1 = 25 \text{ mm}$$

$$x_2 = 125 \text{ mm}$$

$$T_1 = 600 \text{ K}$$

$$T_2 = 400 \text{ K}$$

Material: aluminio puro

Superficie lateral aislada

---

## Problemas

---

6. Se desea evitar la condensación de humedad atmosférica sobre una tubería de 50 mm de diámetro interno y 2.5 mm. de espesor, por cuyo interior circula un refrigerante que mantiene la cara interna del tubo a  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Se dispone para ello de un aislante térmico con  $\lambda = 0.06\text{ W/mK}$ . La conductividad del metal del tubo es de  $386\text{ W/mK}$ . Calcular el mínimo espesor de aislante necesario si las condiciones del entorno son  $T_f = 22\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $h = 11.63\text{ W/m}^2\text{K}$  y la humedad del ambiente es tal que la condensación comienza a  $14\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

7. Una barra cilíndrica larga de material nuclear ( $\lambda = 0.5\text{ W/m K}$ ), cuyo radio es de 10 cm, genera  $24\text{ kW/m}^3$  uniformemente en todo su volumen. La barra se encuentra encapsulada dentro de otro cilindro de radio exterior 20 cm y de conductividad térmica  $4\text{ W/m K}$ . La superficie exterior está rodeada por un fluido a  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  y con coeficiente de convección  $20\text{ W/m}^2\text{ K}$  entre el fluido y dicha superficie.

Obtener la distribución de temperaturas en ambos cilindros y calcular las temperaturas en la intercara de ambos cilindros y en la superficie exterior.

8. Una esfera de aluminio hueca, con un calentador eléctrico en el centro, se utiliza en pruebas de determinación de conductividad térmica de materiales aislantes. Sus radios externo e interno son 0.18 m y 0.15 m respectivamente y las pruebas se realizan en condiciones estacionarias con la superficie interna mantenida a  $250\text{ }^{\circ}\text{C}$ . En una prueba determinada, una corteza esférica de aislante de espesor 0.12 m cubre la esfera que se encuentra en una habitación en la cual la temperatura del aire es de  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  y el coeficiente de convección entre el aislante y el aire es de  $30\text{ W/m}^2\text{ K}$ . Si se disipan 80 W en el calentador en condiciones estacionarias, ¿cuál es la conductividad térmica del aislante?

## Aletas

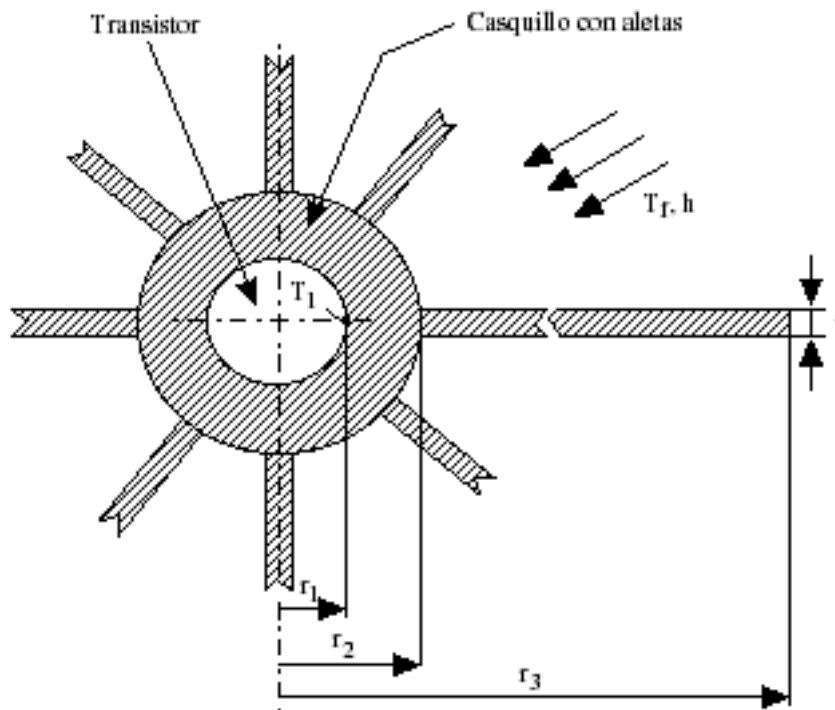
9. Determinar qué porcentaje aumenta el calor transferido por una pared plana si se le añaden aletas de aluminio de perfil rectangular. Las dimensiones de las aletas son 50 mm de largo y 0.5 mm. de espesor y se encuentran a 4 mm de distancia entre sí (250 aletas/m). El coeficiente de convección asociado a la pared lisa es  $40\text{ W/m}^2\text{ K}$  y a la pared con aletas  $30\text{ W/m}^2\text{ K}$ .

---

**Problemas**

---

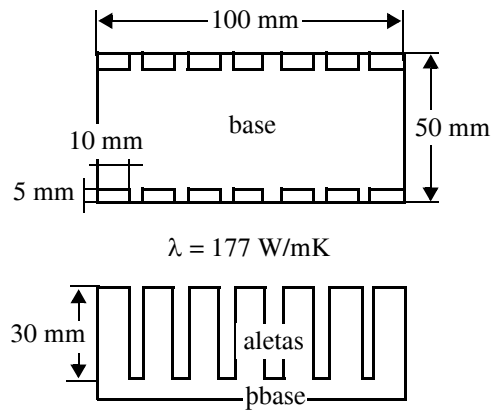
- 10.** Para mejorar la transferencia de calor, se instalan aletas anulares de perfil rectangular una tubería de 25 mm de diámetro exterior y de temperatura superficial 250 °C. Las dimensiones de las aletas son 1 mm de espesor y 10 mm de longitud, y se encuentran a 5 mm de distancia entre sí. La temperatura del fluido exterior es de 25 °C y el coeficiente de convección de 25 W/m<sup>2</sup> K ¿Cuál es la pérdida de calor por aleta? Si se instalan 200 aletas a lo largo del tubo ¿Cuál es la pérdida de calor por metro de tubería? El material de las aletas es Duraluminio.
- 11.** Un transistor se refrigera por medio de un casquillo de aluminio ( $\lambda = 200$  W/m K) que tiene doce aletas longitudinales conformadas en la superficie exterior. El radio del transistor y su altura son  $r_1 = 2$  mm y  $H = 6$  mm. Las aletas son de longitud  $L = r_3 - r_2 = 10$  mm y de espesor uniforme  $e = 0.7$  mm. El espesor de la base del casquillo es  $r_2 - r_1 = 1$  mm. La resistencia térmica de contacto entre transistor y casquillo se estima en  $R''_{t,c} \approx 10^{-3}$  m<sup>2</sup> K/W . Sobre el circuito fluye aire a  $T_f = 20$  °C con un coeficiente de convección  $h = 25$  W/m<sup>2</sup> K.



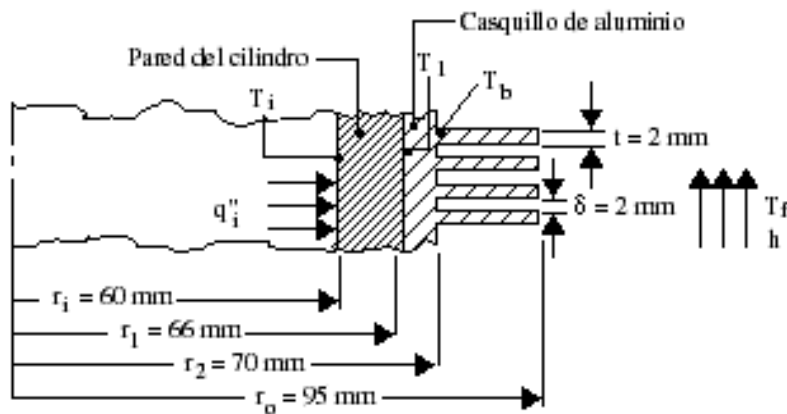
**Problemas**

- a) Suponiendo transferencia unidimensional en dirección radial, dibujar el circuito térmico equivalente desde la superficie del transistor ( $r = r_1$ ).
- b) Evalúa las resistencias térmicas del anterior circuito. Si la temperatura del transistor es  $T_1 = 80\text{ }^\circ\text{C}$ , ¿qué potencia se evacúa?

12. El artefacto de la figura es el radiador de un transistor de potencia. Para que el componente funcione bien la base no debe sobrepasar los  $50\text{ }^\circ\text{C}$  al ser refrigerado con aire a  $15\text{ }^\circ\text{C}$  y  $h = 10\text{ W/m}^2\text{ K}$ . ¿Cuánta potencia puede disipar como máximo? ¿Cuánta es debida al efecto de las aletas?



13. Los cilindros de una cámara de combustión se refrigeran mediante un casquillo de aluminio con aletas anulares ( $\lambda = 240\text{ W/m K}$ ) montado sobre las paredes del cilindro ( $\lambda = 50\text{ W/m K}$ ). El aire está a  $320\text{ K}$  y el coeficiente de convección asociado es de  $100\text{ W/m}^2\text{ K}$ . Aunque el calentamiento de la superficie interior es periódico, es razonable suponer situación estacionaria con un flujo de calor promediado en el tiempo de  $q''_i = 10^5\text{ W/m}^2$ .



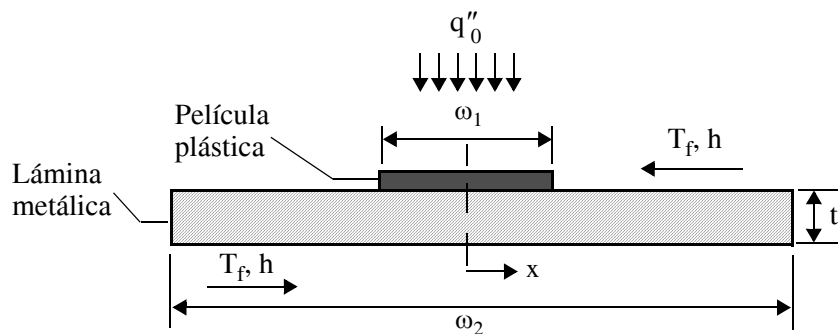
---

**Problemas**

---

La resistencia de contacto entre la pared del cilindro y el casquillo es  $R''_{t,c} = 10^{-4} \text{ m}^2\text{K/W}$ . Determinar la temperatura interior de la pared  $T_i$ , la temperatura de la entrecara  $T_1$  y la temperatura de la base de las aletas  $T_b$ .

14. En un proceso productivo se desea adherir una película plástica a una lámina metálica, para lo cual se utiliza un láser que aporta un flujo de calor constante  $q''_0$  sobre la superficie superior de la película. La lámina metálica tiene un espesor  $t = 1.25 \text{ mm}$ , mientras que el espesor de la película se puede considerar mucho menor. Las conductividad térmica de la lámina es  $\lambda = 60 \text{ W/m K}$ . La resistencia térmica de la película es despreciable y su anchura  $\omega_1 = 40 \text{ mm}$ . La anchura de la lámina  $\omega_2$  es mucho mayor que la anchura de la película  $\omega_1$ . La superficie superior e inferior de la lámina (incluyendo la película plástica) está afectada de una convección caracterizada por una temperatura  $T_f$  y coeficiente de convección  $h \text{ (W/m}^2\text{)}$ . La película y la lámina son muy largas en dirección normal a la página.



Suponer que los bordes de la lámina se encuentran a temperatura  $T_f$ . Encontrar la ecuación diferencial de la distribución de la temperatura a la porción de lámina bajo la película plástica ( $-\omega_1/2 \leq x \leq +\omega_1/2$ ) y las condiciones de contorno necesarias para resolverla.

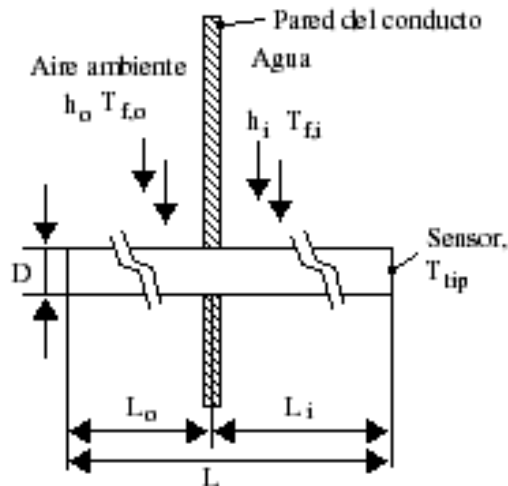
15. Un sensor de longitud total  $L = 200 \text{ mm}$  y diámetro  $D = 15 \text{ mm}$  se inserta a través de la pared de una tubería, de tal forma que una parte del mismo de longitud  $L_i$  se encuentra sumergida en una tubería por la cual circula un caudal de agua cuya temperatura  $T_{f,i}$  se quiere medir. Los coeficientes de convección sobre la parte sumergida y sobre la parte exterior son, respectivamente,  $h_i = 1100 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  y  $h_o = 10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . El sensor tiene una conduc-

## Problemas

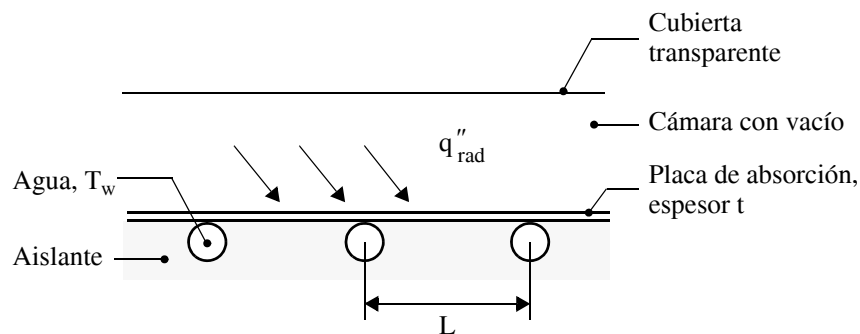
tividad térmica  $\lambda = 177 \text{ W/m K}$  y el contacto térmico del sensor con la pared es prácticamente inexistente.

Obtener una expresión para evaluar el error de inmersión,  $\Delta T_{\text{err}} = T_{\text{tip}} - T_{f,i}$  que es la diferencia entre la temperatura del extremo del sensor  $T_{\text{tip}}$  (valor medido) y la temperatura del agua  $T_{f,i}$  (valor que se quiere medir) en función de  $h_o$ ,  $T_{f,o}$ ,  $h_i$ ,  $T_{f,i}$  y los parámetros geométricos del sensor.

Calcular el error de inmersión  $\Delta T_{\text{err}}$  para el caso en que  $T_{f,i} = 80^\circ \text{ C}$ ,  $T_{f,o} = 20^\circ \text{ C}$  y  $L_i/L = 0.225$ .



16. La figura representa un colector solar compuesto de una placa plana de absorción unida a un conjunto de tuberías de cobre.



La placa de absorción es de aleación de Duraluminio y tiene 6 mm de espesor. Su superficie inferior está bien aislada. Una cámara en la que se ha hecho el vacío separa la superficie superior de la placa de una cubierta transparente. Los tubos están espaciados entre sí una distancia  $L$  de 0.20 m

---

**Problemas**

---

Por su interior circula agua, que actúa como sumidero de la energía recogida. Puede suponerse que el agua se encuentra a una temperatura uniforme  $T_w = 60^\circ \text{C}$ . En funcionamiento estacionario, el flujo neto de radiación en la superficie es  $q''_{\text{rad}} = 800 \text{ W/m}^2$ . ¿Qué temperatura máxima alcanza el material de la placa? ¿Cuánta potencia se transfiere por unidad de longitud de tubo? Obsérvese que  $q''_{\text{rad}}$  representa el efecto neto de absorción de la radiación solar por parte de la placa, así como el intercambio entre la placa y su entorno radiativo. Puede suponerse que la temperatura de la placa en el punto de contacto con el tubo es igual a la del agua.

Plantear el mismo problema sin cubierta transparente ni cámara de vacío, caracterizándose el intercambio de convección placa-ambiente por los valores  $T_{\text{amb}} = 25^\circ \text{C}$  y  $h = 10 \text{ W/m}^2 \text{K}$ .

---

## CAPÍTULO 4

# Conducción multidimensional y estacionaria

---

Cuando el calor se propaga en más de una dirección, hay **muy pocos casos** que se pueden resolver **analíticamente**, y los pocos resolubles por análisis conducen a **soluciones farragosas** (Tipo **serie infinita**) aunque la ecuación diferencial y las condiciones de contorno sean de apariencia matemática sencilla.

Por ello, prácticamente siempre, es necesario recurrir a otros procedimientos, imponiéndose cada vez más los **numéricos**. Históricamente, antes de la difusión masiva de los ordenadores, se han ido desarrollando otros procedimientos que vale la pena comentar.

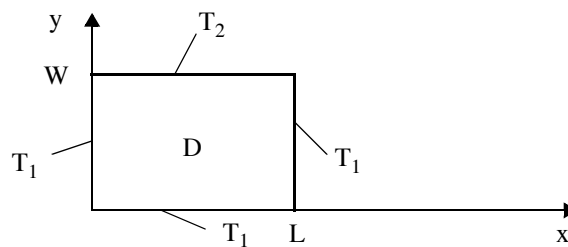
Para tener una panorámica de los métodos que se van a mencionar, a continuación se presenta un cuadro con una clasificación esquemática:

<b>EXACTOS</b>	<b>Analíticos</b>	Sólo para casos muy simples
<b>APROXIMADOS</b>	<b>Gráficos</b> <b>Analógicos</b>	Históricos
	<b>Numéricos</b>	Actualmente, los más importantes

## Un caso analíticamente resoluble

El caso estacionario multidimensional más sencillo a resolver es la conducción 2-D en un recinto rectangular, sin generación térmica y con condiciones de contorno sencillas [1].

**FIGURA 4.1** Conducción bidimensional en un rectángulo.



La ecuación diferencial es:  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ .

Las condiciones de contorno:

$$T(0 \leq x \leq L, y=0) = T(x=0, 0 \leq y \leq W) = T(x=L, 0 \leq y \leq W) = T_1$$

$$T(0 \leq x \leq L, y = W) = T_2$$

Para resolverlo se toma  $\theta \equiv \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$  y se factoriza  $\theta(x,y) = X(x) Y(y)$ , resultando

dos ecuaciones diferenciales ordinarias ligadas  $-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \text{Cte} = \lambda^2$ .

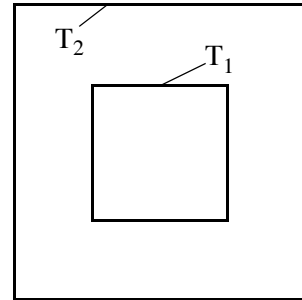
La solución es

$$\theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{\text{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}{\text{senh}\left(\frac{n\pi W}{L}\right)} \quad (4.1)$$

observándose la incomodidad matemática que presenta a pesar de la aparente sencillez del problema planteado.

## El método gráfico. El factor de forma

Es un método adecuado para casos bidimensionales. Se trata de conseguir una representación, lo más fiable posible, de la forma de las **isotermas** en el sistema estudiado, y de ahí intentar calcular el calor que intercambian las dos superficies límite del sistema. Para entenderlo se desarrolla el procedimiento sobre el caso particular sencillo mostrado en la figura [2].

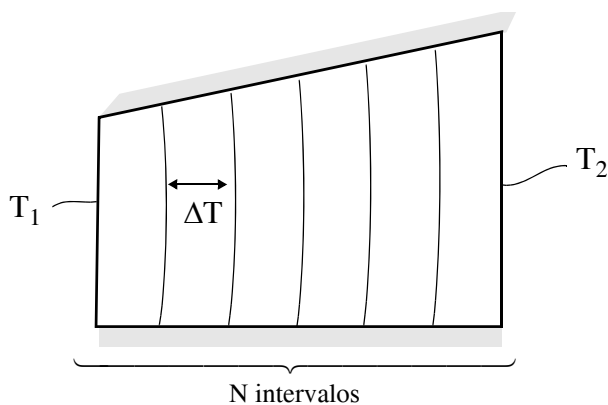
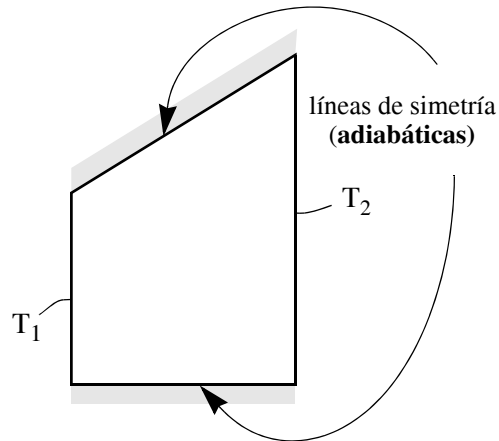


Sean dos superficies cuadradas rectangulares a temperaturas distintas  $T_1$  y  $T_2$  y se trata de calcular el calor intercambiado entre ambas. Para ello se dan los siguientes pasos.

1. Identificación de simetrías.

En este caso el problema se reduce a medio cuadrante

2. Tomando como referencia las líneas del contorno, dibujar isotermas uniformemente espaciadas (aproximadamente) según un número  $N$  (entero) de intervalos arbitrariamente elegido.

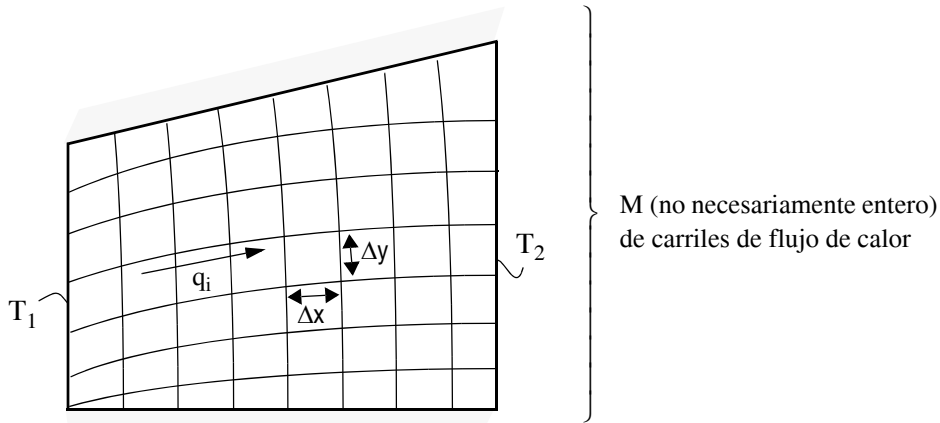


---

**Conducción multidimensional y estacionaria**

---

3. Dibujar las líneas de flujo de calor (perpendiculares a las isoterma) de manera que se obtenga una malla aproximadamente cuadrada (aunque de lados curvos)



$$q = Mq_i = M\lambda(\Delta y \cdot l) \frac{\Delta T}{\Delta x} \approx M\lambda l \left( \frac{T_1 - T_2}{N} \right)$$

A  $\frac{M}{N} l$  se le llama factor de forma,  $S$ , y depende de la geometría, siendo  $l$  la profundidad, por lo que  $S$  tiene dimensiones de longitud.

Resulta por tanto que la relación entre el calor intercambiado,  $q$ , y la temperatura de ambas superficies,  $T_1$  y  $T_2$ , viene dada por

$$\boxed{q = S\lambda(T_1 - T_2)} \quad (4.2)$$

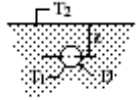
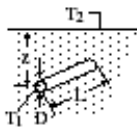
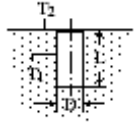
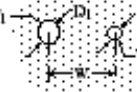
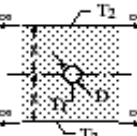
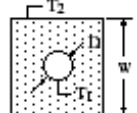
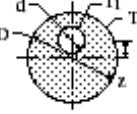
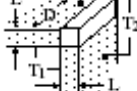

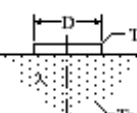
A continuación se ofrece la tabla 4.1 con expresiones para calcular  $S$  en geometrías corrientes.

Este concepto permite definir una resistencia térmica de la siguiente manera:

$$R_t \equiv \frac{T_1 - T_2}{q} = \frac{1}{S\lambda} \quad (4.3)$$

**El método gráfico. El factor de forma**

**TABLA 4.1** Factores de forma para algunos sistemas bidimensionales [2], [3].

Sistema	Esquema	Limitaciones	Factor de forma
Esfera isoterma enterrada en un medio semiinfinito.		$z > D/2$	$\frac{2\pi D}{1 - D/4z}$
Cilindro horizontal isoterma de longitud L enterrado en un medio semiinfinito.		$L \gg D$ $L \gg D$ $z > 3D/2$	$\frac{2\pi L}{\text{arcCosh}(2z/D)}$ $\frac{2\pi L}{\ln(4z/D)}$
Cilindro vertical en un medio semiinfinito.		$L \gg D$	$\frac{2\pi L}{\ln(4L/D)}$
Conducción entre dos cilindros de longitud L en un medio infinito.		$L \gg D_1, D_2$ $L \gg w$	$\frac{2\pi L}{\text{arcCosh}\left(\frac{4w^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1D_2}\right)}$
Cilindro horizontal de longitud L equidistante de dos planos paralelos de igual longitud y anchura infinita.		$z > D/2$	$\frac{2\pi L}{\ln(8z/\pi D)}$
Cilindro de longitud L en un sólido cuadrado de igual longitud.		$w > D$	$\frac{2\pi L}{\ln(1.08w/D)}$
Cilindro excéntrico de longitud L en un cilindro de igual longitud.		$D > d$	$\frac{2\pi L}{\text{arcCosh}\left(\frac{D^2 + d^2 - 4z^2}{2Dd}\right)}$
Conducción a través de la arista de paredes adyacentes.		$D > L/5$	0.54 D
Conducción a través de una esquina de tres paredes con una diferencia de temperaturas $T_1 - T_2$ entre sus caras.		$L \ll$ longitud y anchura de la pared	0.15 L
Disco de diámetro D y temperatura $T_1$ sobre un medio semiinfinito de conductividad térmica l y temperatura $T_2$ .		Ninguna	2 D

Algunos casos distintos aparecen en la ref. [4].

## Analogía eléctrica

Es frecuente en la investigación científica el uso de las analogías, donde se busca conseguir información de una disciplina (en este caso la conducción del calor) experimentando en otra que sigue leyes matemáticamente iguales. En este apartado se va a usar la analogía de la conducción del calor con la conducción eléctrica.

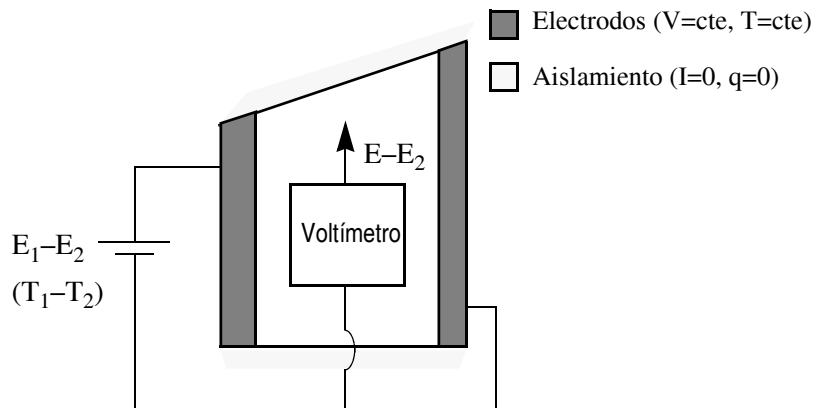
En un medio de permitividad eléctrica  $\epsilon$  constante, la ecuación que rige la distribución del potencial eléctrico  $V$  es

$$\nabla^2 V = - \frac{\rho}{\epsilon} \quad (4.4)$$

Si no hay cargas fijas ( $\rho = 0$ ) la ecuación (4.4) se reduce a la ecuación de Laplace  $\nabla^2 V = 0$ , que es **formalmente idéntica** a  $\nabla^2 T = 0$ .

Si las condiciones de contorno son análogas  $T(x,y)$  será formalmente igual a  $V(x,y)$ , que es fácilmente medible. Las medidas y el montaje para hacer una analogía con el caso utilizado como ejemplo en la sección anterior (método gráfico) serían los mostrados en la figura 4.2.

**FIGURA 4.2** Montaje experimental para la analogía entre la conducción eléctrica y la conducción térmica.



La analogía implica que  $\frac{T - T_2}{T_1 - T_2} = \frac{V - V_2}{V_1 - V_2}$  y las **isotermas** coinciden con las **isopotenciales**. Una vez establecidas las isotermas se puede determinar el factor de forma  $S$ , según se ha indicado en la sección anterior.

## El método de las diferencias finitas

---

Los métodos numéricos sirven para resolver ecuaciones diferenciales de forma aproximada. Normalmente, se emplean para resolver dichas ecuaciones si son de difícil resolución. El método más empleado en transmisión de calor es el habitualmente llamado método de las diferencias finitas (MDF), aunque debería llamarse más apropiadamente de los volúmenes de control o volúmenes finitos.

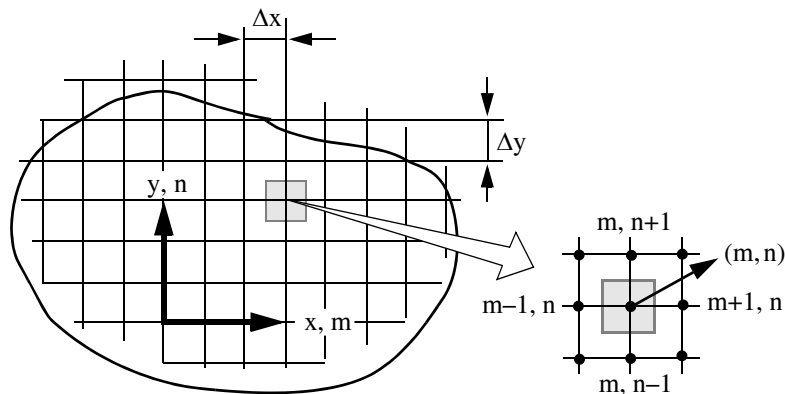
Este método consiste en la transformación de una ecuación diferencial extendida a todo el dominio en un conjunto finito de ecuaciones algebraicas obtenidas al transformar el dominio continuo en un dominio discreto y convertir las derivadas en cocientes de cantidades finitas. Por tanto sólo se resuelve la ecuación diferencial en algunos puntos del dominio.

La discretización del dominio se ilustra en la figura 4.3 sobre un caso bidimensional (suficiente y adecuado para razonar), consistiendo en dividir el recinto en un conjunto finito de celdillas de tamaño finito, aunque no necesariamente iguales, en cuyo interior se sitúa un punto, no necesariamente en el centro, llamado **nodo**, cuya temperatura, que es una medida de la temperatura media de la celdilla, va a ser el objetivo del cálculo.

Es necesario identificar los nodos con algún tipo de índices. En la figura 4.3 se utiliza el índice  $m$  para indicar la coordenada  $x$  del nodo ( $x = x_0 + m \Delta x$ ) y el índice  $n$  para indicar su coordenada  $y$  ( $y = y_0 + n \Delta y$ ); donde  $(x_0, y_0)$  sería el origen de coordenadas. No obstante, las coordenadas reales  $(x, y)$  no tienen interés práctico en este método, sino la identificación clara de cada nodo mediante el conjunto de índices elegidos.

---

**FIGURA 4.3** Discretización de un dominio para aplicación del MDF.



---

**Conducción multidimensional y estacionaria**

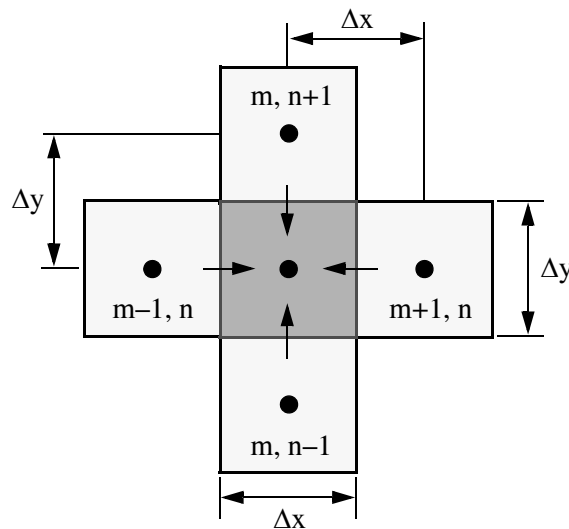
---

La ecuación en diferencias finitas para un nodo puede obtenerse aplicando la ecuación de conservación de la energía a un volumen control que rodea al nodo. Es conveniente formular el balance de energía asumiendo que todo el flujo de calor converge hacia el nodo en estudio. Esta condición no se da normalmente, pero la forma de las ecuaciones es expresada de una manera consistente teniendo en cuenta dicha condición, y por tanto se obtienen correctamente las ecuaciones en diferencias finitas.

Para un sistema estacionario con generación interna la ecuación de conservación de la energía adquiere la forma siguiente:  $\dot{E}_{in} + \dot{E}_g = 0$ .

---

**FIGURA 4.4** Conducción hacia un nodo interior desde los nodos inmediatamente próximos a él.



Aplicando la ecuación anterior al volumen de control que rodea al nodo (m, n), como muestra la figura 4.4, se obtiene la siguiente expresión

$$\sum_{i=1}^4 q_{(i) \rightarrow (m, n)} + q''' (\Delta x \cdot \Delta y \cdot l) = 0$$

donde el subíndice  $i$  se refiere a los nodos inmediatamente próximos al nodo (m, n),  $q_{(i) \rightarrow (m, n)}$  es el calor transferido por conducción entre los nodos  $i$  y (m, n), y  $l$  es una profundidad arbitraria.

---

## El método de las diferencias finitas

---

Por ejemplo, el calor transferido por conducción del nodo  $(m-1, n)$  al nodo  $(m, n)$  puede expresarse como

$$q_{(m-1, n) \rightarrow (m, n)} = \lambda(\Delta y \cdot 1) \frac{T_{m+1, n} - T_{m, n}}{\Delta x}$$

donde  $(\Delta y \cdot 1)$  es el área de transferencia de calor, y el término  $(T_{m-1, n} - T_{m, n})/\Delta x$  es la aproximación en diferencias finitas del gradiente de temperatura en la frontera entre dos celdillas.

Análogamente, los demás calores transferidos por conducción entre dos nodos pueden expresarse como

$$q_{(m+1, n) \rightarrow (m, n)} = \lambda(\Delta y \cdot 1) \frac{T_{m+1, n} - T_{m, n}}{\Delta x}$$

$$q_{(m, n+1) \rightarrow (m, n)} = \lambda(\Delta x \cdot 1) \frac{T_{m, n+1} - T_{m, n}}{\Delta y}$$

$$q_{(m, n-1) \rightarrow (m, n)} = \lambda(\Delta x \cdot 1) \frac{T_{m, n-1} - T_{m, n}}{\Delta y}$$

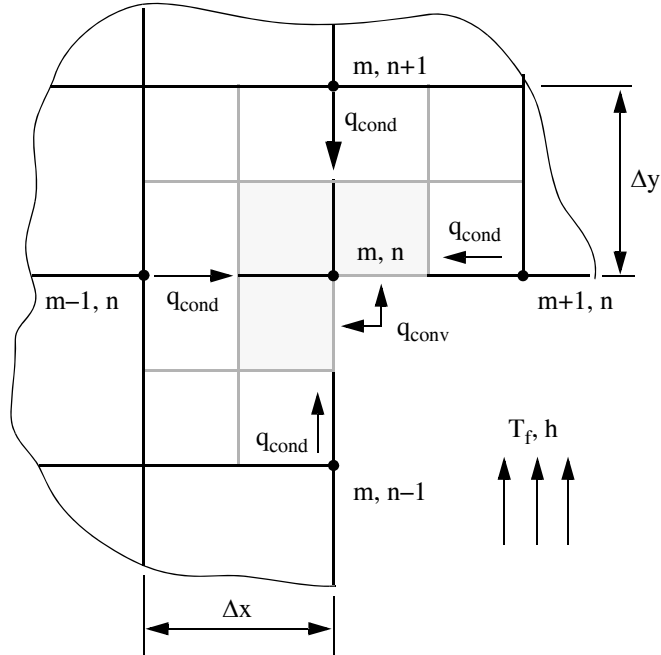
Sustituyendo las cuatro ecuaciones inmediatamente anteriores en el balance de energía y considerando (por conveniencia)  $\Delta x = \Delta y$ , se obtiene que la ecuación de difusión del calor en diferencias finitas para un nudo interior con generación interna es

$$T_{m, n+1} + T_{m, n-1} + T_{m+1, n} + T_{m-1, n} + \frac{q'''(\Delta x \cdot \Delta y)}{\lambda} - 4T_{m, n} = 0$$

Si no hay generación de energía interna esta ecuación se reduce a indicar que la temperatura de cada nodo es un promedio aritmético de las temperaturas de los nodos vecinos.

Es importante hacer notar que una ecuación en diferencias finitas es necesaria para cada nodo en el que la temperatura es desconocida. Para un nodo exterior, se aplica el mismo procedimiento del balance de energía. Sea el nodo  $(m, n)$  situado en la frontera de un dominio, tal y como se muestra en la figura 4.5.

**FIGURA 4.5** Formulación de la ecuación en diferencias finitas para una esquina interna de un sólido con superficie convectiva.



Entre el nodo (m, n) y el fluido que rodea a la superficie convectiva del sólido existe una transferencia de calor por convección. También tiene lugar una transferencia de calor por conducción entre el citado nodo y sus inmediatamente próximos que puede expresarse así

$$q_{(m-1, n) \rightarrow (m, n)} = \lambda(\Delta y \cdot 1) \frac{T_{m-1, n} - T_{m, n}}{\Delta x}$$

$$q_{(m, n+1) \rightarrow (m, n)} = \lambda(\Delta x \cdot 1) \frac{T_{m, n+1} - T_{m, n}}{\Delta y}$$

$$q_{(m, n-1) \rightarrow (m, n)} = \lambda\left(\frac{\Delta x}{2} \cdot 1\right) \frac{T_{m, n-1} - T_{m, n}}{\Delta y}$$

$$q_{(m+1, n) \rightarrow (m, n)} = \lambda\left(\frac{\Delta y}{2} \cdot 1\right) \frac{T_{m+1, n} - T_{m, n}}{\Delta x}$$

---

## Referencias

---

Hay que hacer notar que las áreas en las que se produce la transferencia de calor por conducción, correspondientes a las zonas nodales  $(m-1, n)$  y  $(m, n+1)$  son proporcionales a  $\Delta y$  y  $\Delta x$  respectivamente, y las áreas correspondientes a las zonas nodales  $(m+1, n)$  y  $(m, n-1)$  son proporcionales a  $\Delta y/2$  y  $\Delta x/2$  respectivamente.

El calor transferido por convección, ya que el sólido está rodeado por un fluido a  $T_f$  y su superficie es convectiva puede expresarse como

$$q_{(f) \rightarrow (m, n)} = h \left( \frac{\Delta x}{2} \cdot 1 \right) (T_f - T_{m, n}) + h \left( \frac{\Delta y}{2} \cdot 1 \right) (T_f - T_{m, n})$$

Sumando todos los aportes de calor e igualando a cero, tras asumir que  $\Delta x = \Delta y$ , se obtiene la ecuación de transferencia de calor en diferencias finitas para el nodo  $m, n$

$$T_{m-1, n} + T_{m, n+1} + \frac{1}{2}(T_{m+1, n} + T_{m, n-1}) + \frac{h\Delta x}{\lambda} T_f - \left( 3 + \frac{h\Delta x}{\lambda} \right) T_{m, n} = 0$$

$(h \Delta x / \lambda)$  es un grupo adimensional importante cuando existe conducción y convección de calor simultáneas a ambos lados de un contorno. Este grupo se llama número de Biot (Bi) y se ve en más detalle en la lección de conducción transitoria.

Para otro nodo exterior los cálculos se realizan de manera análoga. El cálculo es más complicado en el caso de que la superficie de contorno sea irregular, porque hay que hacer determinaciones y aproximaciones geométricas a veces algo pesadas.

Información mucho más detallada del método de diferencias finitas puede encontrarse en la bibliografía especializada [1], [4] y [5]. En particular, el cálculo de la ecuación en diferencias finitas de los nodos de un contorno irregular aparece en la referencia [1].

## Referencias

---

1. S. Kakaç and Y. Yener  
*Heat Conduction*  
Taylor & Francis, Washington, 1993.
2. F. Incropera and D. de Witt  
*Fundamentals of Heat and Mass Transfer*  
Wiley, 1990.

---

**Conducción multidimensional y estacionaria**

---

3. P. J. Schneider  
*Handbook Heat Transfer (edited by W. M. Rohsenow and J. P. Hartnett), sec. 3*  
McGraw-Hill, New York, 1973.
4. A. F. Mills  
*Transferencia de Calor*  
Irwin, Madrid, 1995
5. G. Myers  
*Analytical Methods in Conduction Heat Transfer*  
Genium Publishing Corporation, 1987
6. S. V. Patankar  
*Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*  
Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980

---

## Síntesis del capítulo

---

- La forma más utilizada hoy en día para resolver problemas de más de una dimensional espacial son los métodos numéricos, especialmente el **método de las diferencias finitas** (MDF).
- El MDF utiliza un conjunto de **ecuaciones algebraicas** para obtener la distribución de temperaturas. Estas ecuaciones las construye realizando balances de energía sobre zonas finitas (celdillas) en que se divide el sistema y calculando cada término del balance de forma discreta (no diferencial).

La resolución de un sistema de ecuaciones algebraicas, especialmente si es lineal, es mucho más sencillo que el de una ecuación diferencial. A cambio, la información obtenida es menor porque sólo se determina la temperatura de los nodos elegidos (una en cada celdilla); aunque en la práctica, lo único que se puede comprobar experimentalmente en cualquier sistema es la temperatura de un conjunto discreto de sus puntos.

- Un concepto que se puede utilizar para resolver fácilmente cierto tipo de problemas bi o tridimensionales es el de **factor de forma**. Este concepto además permite definir una resistencia térmica, con las ventajas que eso acarrea.

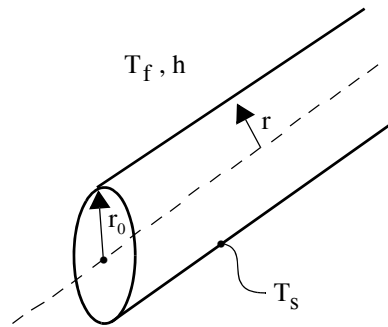
---

## Cuestiones\*

---

1. La distribución de temperatura estacionaria en una pared unidimensional de conductividad térmica  $50 \text{ W/m}\cdot\text{K}$  y espesor  $50 \text{ mm}$  se observa que es  $T (\text{ }^\circ\text{C}) = a + bx^2$ , donde  $a = 200 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $b = 2000 \text{ }^\circ\text{C/m}^2$  y  $x$  se expresa en metros.
- ¿Cuál es la generación térmica  $q'''$  ( $\text{W/m}^3$ ) en la pared?
  - Determinar los flujos de calor en las dos superficies exteriores de la pared.
  - ¿Cuál es la relación entre los flujos de calor y el calor generado en el interior de la pared?
2. Calcular la temperatura superficial de una esfera maciza en cuyo interior se produce una generación térmica por unidad de volumen  $q''' = 60 \text{ kW/m}^3$  y cuyo radio es de  $r_0 = 10 \text{ cm}$ . El fluido exterior está a una temperatura de  $T_f = 25 \text{ }^\circ\text{C}$  y el coeficiente de convección entre la superficie de la esfera y el fluido vale  $h = 200 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ . La situación es estacionaria.
3. Unos residuos radiactivos se almacenan en contenedores cilíndricos largos y de paredes delgadas, generando una energía térmica por unidad de volumen dada por la expresión

$$q''' = q'''_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right],$$



donde  $q'''_0$  es una constante y  $r_0$  el radio del contenedor. Se mantiene una situación estacionaria sumergiendo el contenedor en un líquido a una tem-

---

\*. Se incluyen cuestiones de conducción con generación térmica y aletas además de la conducción multidimensional estacionaria.

---

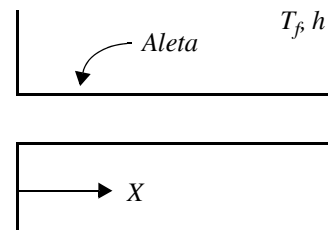
**Cuestiones**

---

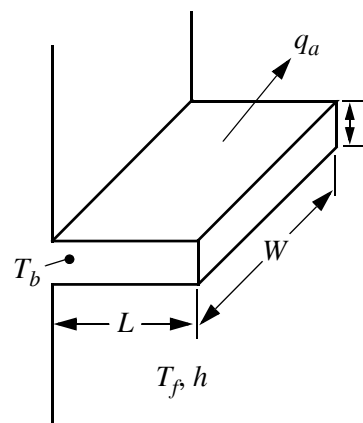
peratura  $T_f$  con el que intercambia calor por convección con un coeficiente  $h$ . Obtener la expresión que permite calcular la temperatura  $T_s$  de la superficie del contenedor.

4. Si se mete una cucharilla en una taza de café caliente, éste ¿se enfriará más rápidamente, más lentamente, o a la misma velocidad que si la cucharilla no está medida?, ¿por qué?

5. Una vez resuelta la ecuación diferencial de una aleta y obtenida su distribución de temperaturas  $T(x)$ , el calor que evacúa al exterior puede calcularse mediante dos expresiones diferentes ¿Cuáles son?



6. Calcular el calor,  $q_a$ , que evacúa al exterior la aleta recta de la figura considerando infinita,  $\theta = Ce^{-mx}$ , siendo  $m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A_C}}$  y con los siguientes datos:

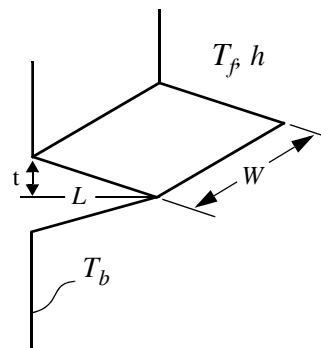


$\lambda = 100 \text{ (W/m K)}$ ,  $t = 0.5 \text{ mm}$ ,  $W = 2 \text{ cm}$ ,  
 $T_b = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_f = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $h = 10 \text{ (W/m}^2 \text{ K)}$ .

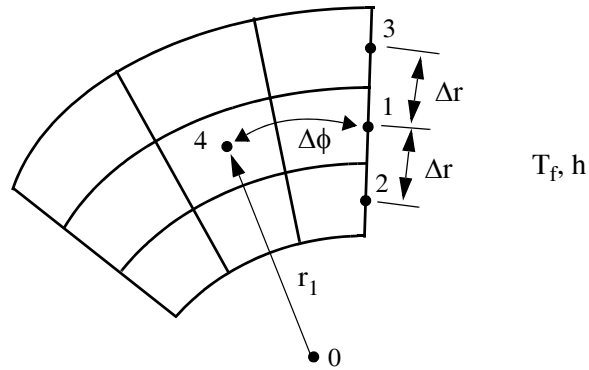
Estimar un valor mínimo de la longitud de la aleta  $L$ , para que se pueda considerar infinita.

7. Calcular el calor evacuado por la aleta triangular de la figura.

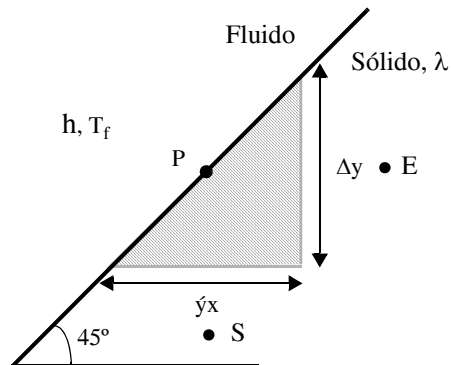
Datos:  $T_b = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  
 $T_f = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  
 $h = 50 \text{ (W/m}^2 \text{ K)}$ ,  
 $t \text{ (semiespesor)} = 1 \text{ mm}$ ,  
 $L = 2 \text{ cm}$ ,  
 $W = 1 \text{ cm}$ ,  
 $\eta = 0.8$ .



8. En el sistema cilíndrico bidimensional de la figura, obtener la ecuación en el MDF para el nudo 1 en conducción transitoria.



9. Obtener la ecuación de diferencias finitas del nudo P situado en el contorno exterior del cuerpo bidimensional de la figura, en situación estacionaria y con una cierta generación térmica no nula  $q'''$ . La malla elegida es cuadrada ( $\Delta x = \Delta y$ ).

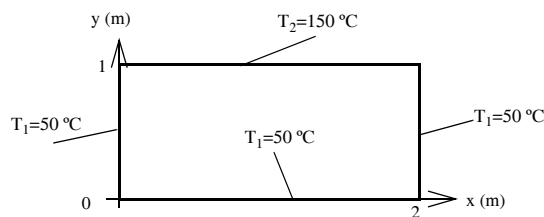


---

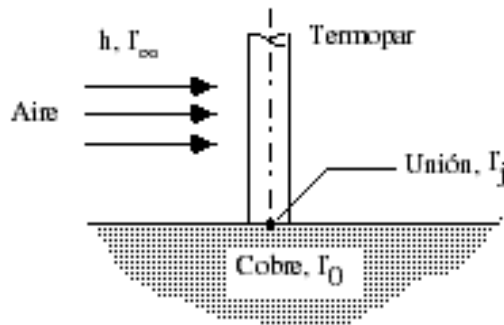
## Problemas

---

1. Una placa rectangular bidimensional está sometido a las temperaturas de contorno uniformes que muestra la figura. Utilizando la solución analítica del método de separación de variables para este caso, calcular la temperatura en el punto medio considerando los cinco primeros términos no nulos de la serie. Calcular el error resultante si se utilizaran sólo los tres primeros de la serie.



2. Un alambre largo de constantán de 1 mm. de diámetro está soldado a tope a la superficie de un bloque de cobre grande, formando una unión termopar. El alambre se comporta como una aleta permitiendo que el calor fluya desde la superficie por lo cual la temperatura de la unión ( $T_j$ ) es menor que la del bloque de cobre ( $T_0$ ). Si el alambre está rodeado por aire a 25 °C, con un coeficiente de convección  $h$  de 10 W/m<sup>2</sup> K, estimar el error de medida del termopar ( $T_j - T_0$ ) cuando la temperatura del cobre es de 125 °C.

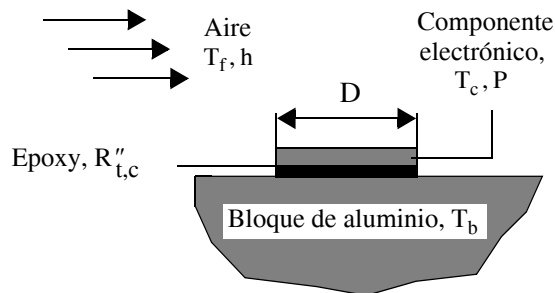


---

**Problemas**

---

3. Un tanque esférico de 0.5 m de diámetro que contiene basura radiactiva se entierra a una profundidad de 1.25 m medidos desde el centro de la esfera. La conductividad térmica del terreno es 0.8 W/m K, siendo 15 °C la temperatura superficial. Si se estima que se generan unos 240 W como resultado de los procesos de desintegración radiactiva, ¿a qué temperatura (supuesta uniforme) se encuentra el contenedor?
4. Un delgado componente electrónico disipador de potencia tiene un diámetro  $D = 10$  mm. Una de sus caras está pegada con resina epoxy a un gran bloque de aluminio ( $\lambda = 237$  W/m K). La resistencia térmica por unidad de área de la unión de epoxy vale  $R''_{t,c} = 0.5 \times 10^{-4}$  m<sup>2</sup>K/W. En puntos alejados del componente, el bloque se mantiene a una temperatura  $T_b = 25$  °C. La superficie exterior está expuesta a una corriente de aire para la que  $h = 25$  W/m<sup>2</sup> K y  $T_f = 25$  °C.



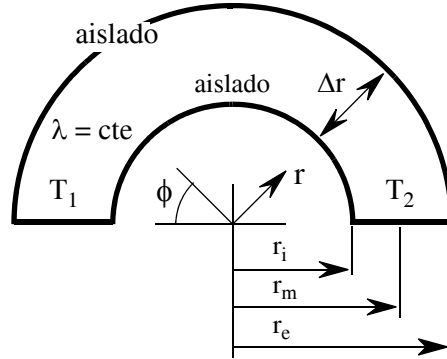
Dibujar el circuito térmico equivalente de este sistema, indicando las resistencias térmicas, la dirección de los flujos de calor y las temperaturas  $T_b$  y  $T_f$ . Si la temperatura del componente no puede superar el valor  $T_c = 100$  °C, ¿cuál es la potencia máxima de funcionamiento  $P$ ?

---

**Problemas**

---

5. Una pieza sólida en forma de teja conduce calor desde la sección  $\phi = 0$  que está a temperatura  $T_1$  hasta la sección  $\phi = \pi$  a  $T_2$ . Los laterales están aislados y se supone que la longitud perpendicular al dibujo es mucho mayor que cualquier otra dimensión. Para el caso en que la pieza sea delgada ( $\Delta r \ll r_m$ ) demostrar que la solución unidimensional

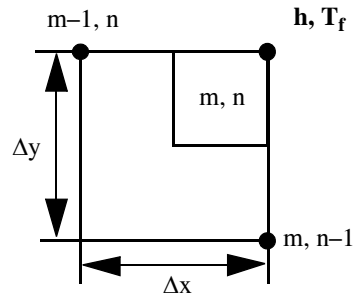


de temperaturas es lineal con  $\phi$ , es decir  $T(\phi) = T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \phi / \pi$ . Calcular el calor transferido en función de la diferencia de temperaturas  $T_1 - T_2$ .

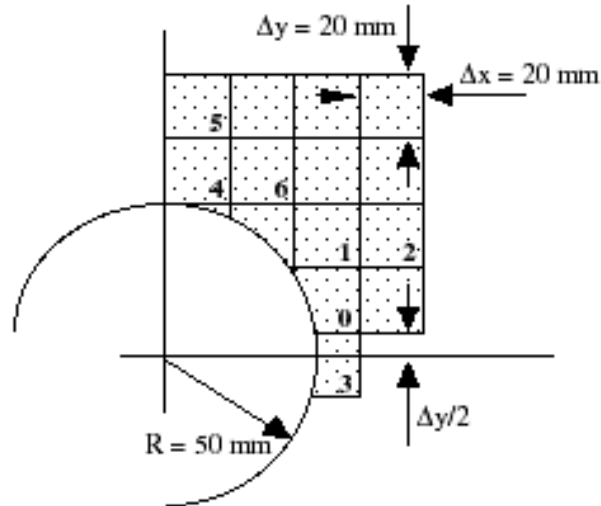
La solución anterior resulta ser una solución general, válida incluso si  $\Delta r$  es del orden de  $r_m$ . Comprobarlo planteando el problema bidimensional. Calcular entonces el flujo de calor  $q''_{\phi} = -\lambda \cdot (\partial T / r \partial \phi)$  y la resistencia térmica.

6. Considerando la configuración nodal de la figura, derivar las ecuaciones en diferencias finitas en situación estacionaria para las siguientes situaciones:

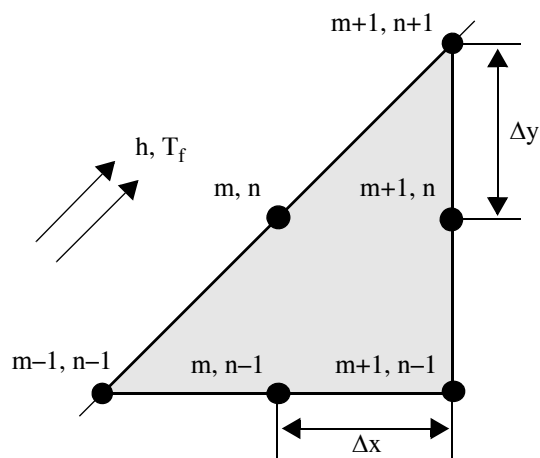
- El contorno superior del rincón exterior está perfectamente aislado y el lateral sometido a un proceso de convección ( $h, T_f$ ).
- Ambos contornos del rincón exterior están perfectamente aislados. ¿Cómo se puede comparar este caso con el de convección en ambos contornos?



7. Aplicar la formula general de la ecuación en diferencias finitas para un nodo cerca de una superficie curva o temperatura no uniforme, a los nudos 0 y 4 de la configuración que sigue:



8. Obtener las ecuaciones en diferencias finitas para las configuraciones siguientes:



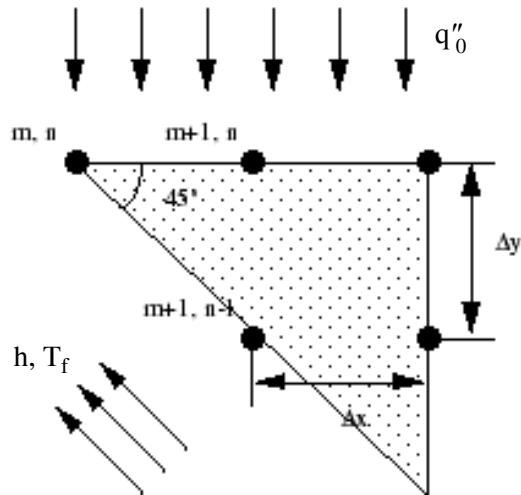
- Nudo con un contorno diagonal, como se muestra en la figura, sujeto a convección con un fluido a  $T_f$  y un coeficiente de transferencia de calor  $h$ . Tomar  $\Delta x = \Delta y$
- Nudo en el extremo de una herramienta de corte con una superficie superior expuesta a un flujo constante  $q''_0$ , y la superficie diagonal expuesta a un proceso de enfriamiento convectivo con un fluido a  $T_f$  y

---

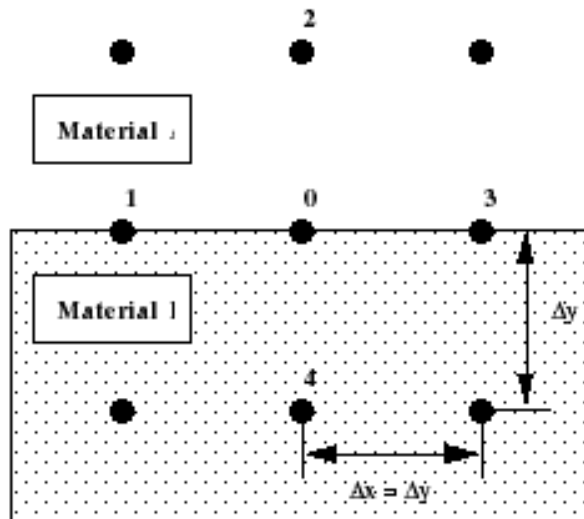
**Problemas**

---

un coeficiente de calor  $h$ . Tomar  $\Delta x = \Delta y$ .



9. Considerar el punto nodal O situado en la frontera entre los materiales de conductividad térmica  $\lambda_A$  (material A) y  $\lambda_B$  (material B) como se muestra en la figura siguiente:



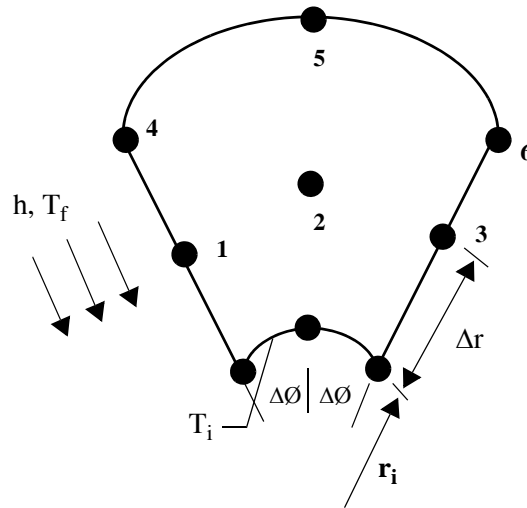
Obtener la ecuación en diferencias finitas en situación estacionaria suponiendo que no hay generación interna.

---

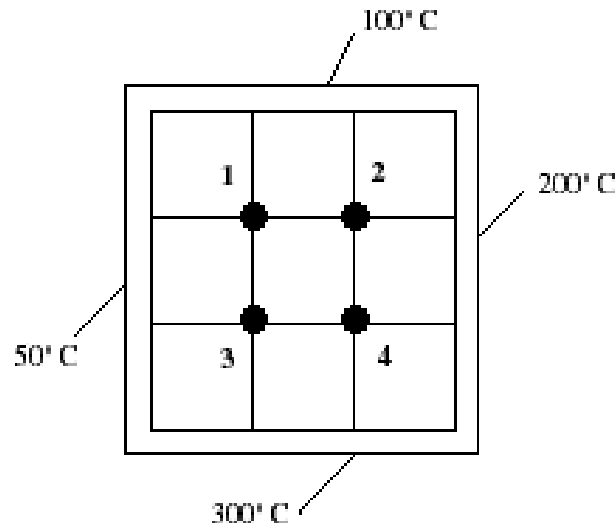
**Problemas**

---

10. En la configuración cilíndrica bidimensional de la figura, los espacios angulares,  $\Delta\theta$ , y radiales,  $\Delta r$ , son uniformes. El contorno en  $r = r_i$  se encuentra a temperatura  $T_i$ . Los contornos en la dirección radial son adiabático y convectivo. Obtener las ecuaciones en diferencias finitas para los nudos 1, 2 y 3.



11. Suponiendo conducción unidimensional estacionaria, determinar la temperatura en los nudos 1, 2, 3 y 4 en la geometría cuadrada de la figura, sujeta a las condiciones de temperatura uniforme que muestra la figura.



12. Una barra conductora de sección rectangular ( $20\text{ mm} \times 30\text{ mm}$ ) y conductividad térmica  $\lambda = 20\text{ W/m K}$  experimenta una generación de calor uni-

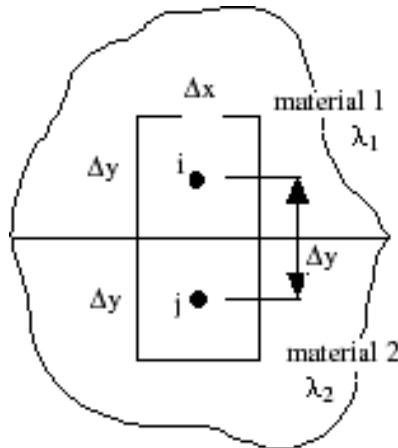
---

**Problemas**

---

forme a un ritmo de  $q''' = 5 \times 10^7 \text{ W/m}^3$ , manteniéndose sus superficies a  $27^\circ\text{C}$ . Utilizando un método en diferencias finitas con un espaciado de 5 mm, determinar la distribución de temperatura en la barra.

- 13.** Un horno industrial está apoyado en una columna larga de ladrillo refractario, de sección  $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ . Durante un funcionamiento estacionario, 3 de las paredes de la columna se encuentran a  $500\text{ K}$ , mientras que la cara restante está expuesta a una corriente de aire a  $T_f = 300\text{ K}$  y  $h = 10\text{ W/m}^2\text{ K}$ . Usando el método de la inversión matricial y el iterativo de Gauss–Seidel, con un mallado  $\Delta x = \Delta y = 0.25\text{ m}$ , determinar la distribución bidimensional de temperaturas en la columna y el rango de transmisión de calor a la corriente de aire por unidad de longitud de la columna.
- 14.** En la discretización de diferencias finitas cerca de la entrecara de dos materiales de diferente conductividad térmica y en perfecto contacto térmico se colocan volúmenes de control y nodos como muestra la figura. Al escribir el balance de energía de cualquiera de los dos volúmenes de control, ¿cuál de las dos fórmulas que se indican es la más apropiada? Explicar razones.



$$(1) \quad q_{i \rightarrow j} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \Delta x \frac{T_i - T_j}{\Delta y}$$

---

**Problemas**

---

$$(2) \quad q_{i \rightarrow j} = \frac{T_i - T_j}{\frac{\Delta y/2}{\Delta x \cdot \lambda_1} + \frac{\Delta y/2}{\Delta x \cdot \lambda_2}}$$

---

## CAPÍTULO 5

# Conducción transitoria

---

Hay problemas de conducción en los que es necesario conocer el comportamiento transitorio del sistema. Un cambio de la distribución de temperaturas en uno de estos problemas puede ser debido a:

Cambio en las **condiciones de contorno**.

Cambio en el **interior** ( $\Delta q''' \neq 0$ ).

Entre estos problemas, hay algunos sencillos, particularmente desde la perspectiva espacial (dimensión espacial cero o uno), que se pueden resolver analíticamente. En otros casos más complejos se utilizan métodos **aproximados**, especialmente los **numéricos**.

Se empieza, como es habitual, por la situación más sencilla, en este caso, los problemas de **dimensión espacial cero**, también llamados **sistemas de capacidad**.

### Sistemas de capacidad

---

Son aquellos en los cuales la temperatura no depende de las coordenadas espaciales, es decir, es **uniforme** (prácticamente) en todo el sistema y sólo cambia con el tiempo.

---

### Conducción transitoria

---

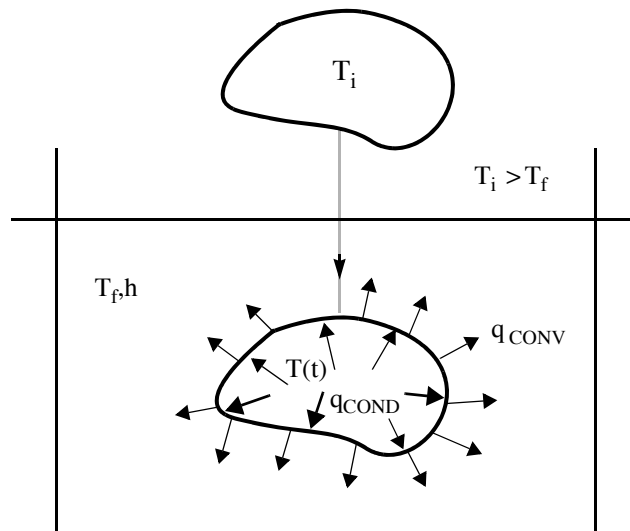
Un caso característico es el de **metales** sometidos a un tratamiento térmico brusco (cambio brusco de su temperatura). En estos casos la transferencia de calor es:

- Por conducción en el interior del sólido.
- Por convección de la superficie del sólido hacia el fluido en el que se sumerge.

Dado que los gradientes son inversamente proporcionales a  $\lambda$  en el sólido y a  $h$  entre el sólido y el fluido, y que  $\lambda$  es muy grande en los metales el  $|\nabla T|$  es pequeño en su interior, y en el límite es nulo.

---

**FIGURA 5.1** Transmisión de calor en un sólido sometido a un proceso transitorio por inmersión en un fluido a distinta temperatura.



En este caso la temperatura sólo depende de tiempo y el sólido se dice que es un sistema de capacidad.

El análisis de estos sistemas es particularmente simple. No se puede utilizar la Ecuación de Difusión del Calor, ya que se está considerando que  $\lambda = \infty$  y  $\nabla T = 0$ , luego  $\lambda \nabla T$  está indeterminado. No obstante la situación es más sencilla de estudiar, ya que en lugar de hacer un balance de energía puntual como establece dicha ecuación, basta con hacer un sencillo balance de energía global a todo el sistema.

---

**Sistemas de capacidad**

---

$$-\dot{E}_{\text{sale}} = \dot{E}_{\text{almacenada}} \quad (\text{Se considera } q''' = 0)$$

$$-hA(T - T_f) = \rho Vc \frac{dT}{dt}$$

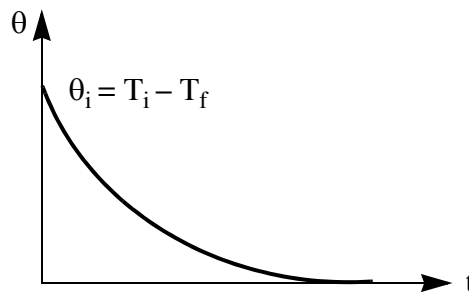
Cambiando de variable:  $\theta \equiv T - T_f$

$$\frac{\rho Vc}{hA} \frac{d\theta}{dt} = -\theta \Rightarrow \theta = \theta_i \exp\left(-\frac{hA}{\rho Vc} t\right) \quad (5.1)$$

La representación gráfica de la ecuación (5.1) se muestra en la figura 5.2.

---

**FIGURA 5.2** Evolución temporal de la temperatura en un sistema de capacidad. Ec. (5.1).



### Interpretación

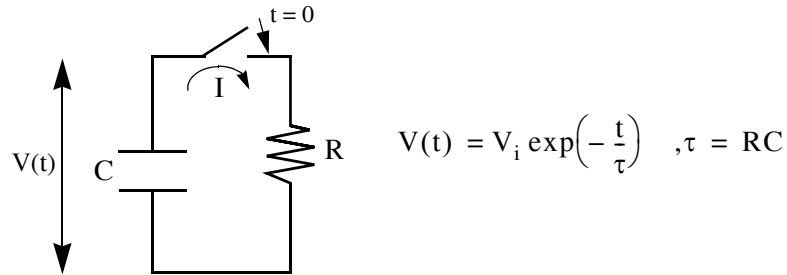
En las diversas disciplinas científico-técnicas existen muchos fenómenos que siguen la anterior ley de decaimiento exponencial. Uno particularmente conocido es el de la descarga de un condensador a través de una resistencia, representado en la figura 5.3.

El fenómeno térmico estudiado es formalmente idéntico a este otro eléctrico, siendo para el caso térmico

$$\tau = \frac{\rho Vc}{hA} = \left(\frac{1}{hA}\right) (\rho Vc) = R_t C_t$$

*Esta interpretación da lugar a un **método de analogía eléctrica** para problemas transitorios.*

**FIGURA 5.3** Descarga de un condensador a través de una resistencia.



### Cálculo del valor evacuado del sólido

Se obtiene por un balance global de energía, integrado en el tiempo

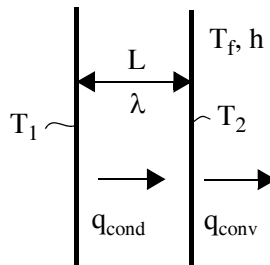
$$Q = -\Delta E_{almac} = -\rho V c (T - T_i) = -\rho V c (\theta - \theta_i) = \rho V c \theta_i \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (5.3)$$

### Validez del método

Aunque cualitativamente parezca claro para qué casos se puede utilizar este método, es preciso poder cuantificar mediante algún(os) criterio(s) objetivo(s) en qué situaciones es válido el método y en cuáles no.

Para alcanzar ese **criterio**, empecemos razonando con un caso estacionario, en particular una pared plana con una superficie a temperatura fija,  $T_1$ , y la otra sometida a condiciones convectivas ( $T_f, h$ ). (Figura 5.4).

**FIGURA 5.4** Pared en situación estacionaria con una superficie isoterma y la otra convectiva.



---

**Sistemas de capacidad**

---

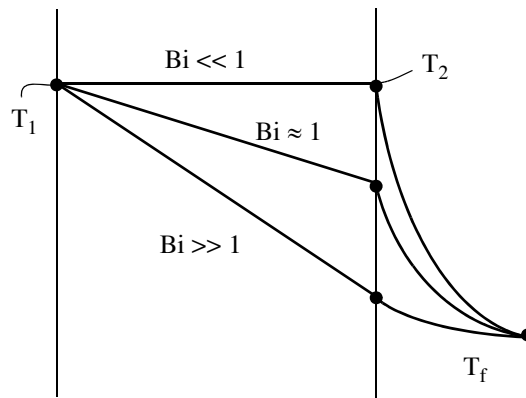
De cara al objetivo perseguido interesa conocer el perfil de temperaturas (su gradiente) en el interior de la pared y entre ella y el fluido.

Un sencillo balance de energía responde la cuestión

$$q''_{\text{Cond}} = q''_{\text{Conv}} \Rightarrow \frac{\lambda}{L}(T_1 - T_2) = h(T_2 - T_f) \Rightarrow \frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_f} = \frac{hL}{\lambda} \equiv \text{Bi}$$

---

**FIGURA 5.5** Perfiles de temperatura en la pared de la figura 5.4 según el valor del número de Biot.



En la expresión anterior se ve que los perfiles de temperatura dependen del llamado número de Biot, Bi.

El paso a la situación transitoria es sencillo. Supóngase ahora una pared simétrica, que cambia su temperatura en el tiempo por convección hacia un fluido en ambas superficies.

En consonancia con los perfiles anteriores, los gradientes térmicos en el interior del sólido (la pared) son según se indica en la figura 5.6.

*El criterio, pues, para poder considerar a un sistema de capacidad, a efectos de conducción transitoria, es*

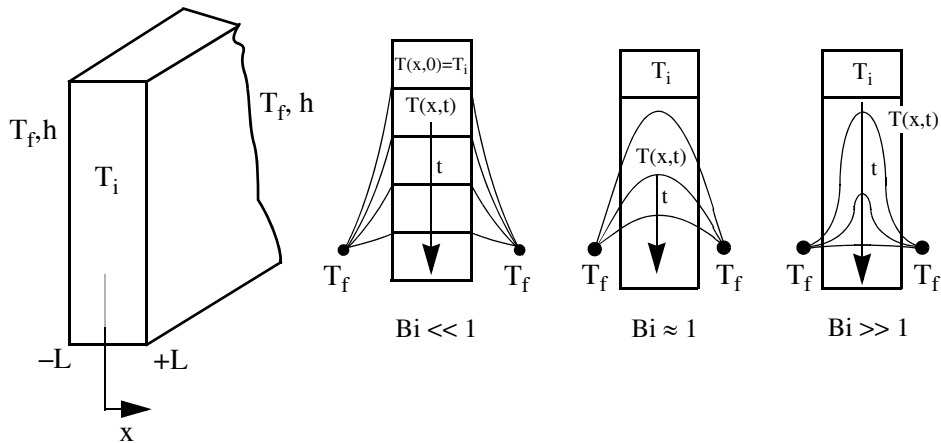
$$\boxed{\text{Bi} \ll 1}$$

A efectos prácticos se toma

$$\text{Bi} \equiv \frac{hL_c}{\lambda} \leq 0.1 \quad (5.4)$$

donde  $L_c \equiv \frac{V}{A_s}$ . Como ejercicio se recomienda calcularlo para una pared infinita de espesor  $2L$ , para un cilindro infinito de radio  $R$  y para una esfera de radio  $R$ .

FIGURA 5.6 Perfiles de temperatura en una pared transitoria según el número de Biot.



**Corolario:** Ahora la ecuación de variación exponencial  $\theta(t)$  se puede expresar:

$$\theta = \theta_i \exp(-\text{Bi} \cdot \text{Fo}) \quad (5.5)$$

donde  $\text{Fo} \equiv \frac{a \cdot t}{L_c^2}$  es un **tiempo adimensional**.

## Sistemas unidimensionales clásicos

---

La expresión adimensional (5.5) sirve como punto de partida para buscar una solución relativamente simple en un caso en el que haya variación espacial [1].

Efectivamente, sea un problema transitorio en una pared plana, y sin generación interna. La ecuación diferencial es  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$  y las condiciones de contorno, para una pared simétrica con contornos convectivos ( $x = 0$  en el plano central de la pared) son

$$T(x, t=0) = T_i ; \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 , \quad -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h[T(L, t) - T_f]$$

por tanto la temperatura depende funcionalmente de dos variables y de seis parámetros, como se muestra en la expresión (5.6)

$$T = T(x, t; T_i, T_f; L; \lambda, a; h) \quad (5.6)$$

Adimensionalizando las ecuaciones, mediante el uso de las siguientes variables **adimensionales**

$$\theta^* \equiv \frac{\theta}{\theta_i} \equiv \frac{T - T_f}{T_i - T_f} ; \quad x^* \equiv \frac{x}{L} ; \quad t^* \equiv \frac{at}{L^2} \equiv Fo$$

la ecuación diferencial queda  $\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial \theta^*}{\partial Fo}$ , y las condiciones de contorno:

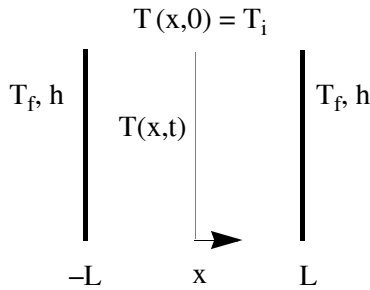
$$\theta^*(x^*, Fo=0) = 1 ; \left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=0} = 0 , \quad \left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=1} = -Bi \theta^*(1, Fo)$$

cuya solución es de la forma

$$\theta^* = \theta^*(x^*, Bi, Fo) \quad (5.7)$$

mucho más simple.

La solución particular de las geometrías más habituales se ha obtenido [2] por el método de factorización de la solución y se presenta a continuación.

**Pared plana infinita**


$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\zeta_n^2 Fo) \cos(\zeta_n x^*)$$

$$C_n = \frac{4 \operatorname{sen} \zeta_n}{2 \zeta_n + \operatorname{sen}(2 \zeta_n)}$$

y  $\zeta_n$  son las soluciones positivas de la ecuación trascendente  $\zeta_n \operatorname{tg}(\zeta_n) = \operatorname{Bi}$ , siendo  $Fo \equiv \frac{at}{L^2}$  y  $\operatorname{Bi} \equiv \frac{hL}{\lambda}$ .

- Para  $Fo \geq 0.2$ , la serie converge fuertemente y se puede utilizar la siguiente aproximación sencilla

$$\theta^* \approx C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \cos(\zeta_1 x^*) = \theta_0^* \cos(\zeta_1 x^*) \quad (5.8)$$

$$\text{donde } \theta_0^* \equiv \theta^*(x^* = 0, Fo) = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \quad (5.9)$$

es la evolución temporal de la temperatura del plano central de la pared.

Debe resaltarse que la dependencia espacio-temporal aparece factorizada en la expresión (5.8).

- El calor total evacuado (o absorbido) por la pared desde el inicio del proceso hasta un cierto instante se calcula también adimensionalmente.

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{V} \int_V (1 - \theta^*) dV = 1 - \frac{\operatorname{sen} \zeta_1}{\zeta_1} \theta_0^* = \frac{Q}{Q_0} \quad (5.10)$$

$$\text{con } Q = E_{\text{salida}} = - \int \rho c [T(x, t) - T_i] A dx$$

$$\text{y } Q_0 = \rho c V (T_i - T_f), \text{ calor máximo a intercambiar.}$$

### Cilindro infinito

Con el mismo procedimiento se obtienen las soluciones siguientes:

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\zeta_n^2 Fo) J_0(\zeta_n r^*) \cong \theta_0^* J_0(\zeta_1 r^*) \quad (5.11)$$

$\uparrow$   
 $Fo \geq 0.2$

siendo  $\theta_0^* \equiv \theta(r^* = 0, Fo) = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo)$  (5.12)

la evolución temporal de la temperatura del eje del cilindro y donde:  $r^* = \frac{r}{r_0}$ ,  $r_0$  es el radio del cilindro,  $Fo \equiv \frac{at}{r_0^2}$ ,  $C_n = \frac{2}{\zeta_n} \frac{J_1(\zeta_n)}{J_0^2(\zeta_n) + J_1^2(\zeta_n)}$  y  $\zeta_n$  las soluciones positivas de  $\zeta \frac{J_1(\zeta)}{J_0(\zeta)} = Bi$ .  $J_0$  y  $J_1$  son las funciones de Bessel de primera clase y orden cero y uno respectivamente, y  $Bi \equiv h r_0 / \lambda$ .

El calor intercambiado por el cilindro viene dado por la fórmula (5.13)

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2\theta_0^*}{\zeta_1} J_1(\zeta_1) \quad (5.13)$$

### Esfera

De forma semejante

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\zeta_n^2 Fo) \frac{\text{sen}(\zeta_n r^*)}{(\zeta_n r^*)} \cong \theta_0^* \frac{\text{sen}(\zeta_1 r^*)}{\zeta_1 r^*} \quad (5.14)$$

$\uparrow$   
 $Fo \geq 0.2$

siendo  $\theta_0^* \equiv \theta(r^* = 0, Fo) = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo)$  (5.15)

la evolución temporal de la temperatura del centro de la esfera y con  $r^* = \frac{r}{r_0}$ ,  $r_0$ : radio de la esfera,  $Fo \equiv \frac{at}{r_0^2}$  y  $C_n = \frac{4[\text{sen}(\zeta_n) - \zeta_n \cos(\zeta_n)]}{2\zeta_n - \text{sen}(2\zeta_n)}$  donde  $\zeta_n$  son las soluciones positivas de  $1 - \zeta \cotg(\zeta) = Bi$ , y  $Bi \equiv h r_0 / \lambda$ .

---

**Conducción transitoria**


---

El calor total intercambiado por la esfera desde el inicio hasta un cierto instante de tiempo lo da la ecuación (5.16)

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{3\theta_0^*}{\zeta_1^3} [\text{sen}(\zeta_1) - \zeta_1 \cos(\zeta_1)] \quad (5.16)$$

Para poder utilizar las fórmulas anteriores, hay que conocer la primera raíz de las ecuaciones trascendentes respectivas,  $\zeta_1$ , y la primera constante  $C_1$ . Ambas dependen de Bi, que se define de forma algo diferente al de los sistemas de capacidad (ver nota de la tabla siguiente), y su valor se presenta [3] en la tabla 5.1.

**TABLA 5.1** Coeficientes utilizados en la aproximación con el primer término de las soluciones con series de la conducción transitoria unidimensional.

Bi <sup>a</sup>	Pared plana		Cilindro infinito		Esfera	
	$\zeta_1$ (rad)	C <sub>1</sub>	$\zeta_1$ (rad)	C <sub>1</sub>	$\zeta_1$ (rad)	C <sub>1</sub>
0.01	0.0998	1.0017	0.1412	1.0025	0.1730	1.0030
0.02	0.1410	1.0033	0.1995	1.0050	0.2445	1.0060
0.03	0.1732	1.0049	0.2439	1.0075	0.2989	1.0090
0.04	0.1987	1.0066	0.2814	1.0099	0.3450	1.0120
0.05	0.2217	1.0082	0.3142	1.0124	0.3852	1.0149
0.06	0.2425	1.0098	0.3438	1.0148	0.4217	1.0179
0.07	0.2615	1.0114	0.3708	1.0173	0.4550	1.0209
0.08	0.2791	1.0130	0.3960	1.0197	0.4860	1.0239
0.09	0.2956	1.0145	0.4195	1.0222	0.5150	1.0268
0.10	0.3111	1.0160	0.4417	1.0246	0.5423	1.0298
0.15	0.3779	1.0237	0.5376	1.0365	0.6608	1.0445
0.20	0.4328	1.0311	0.6170	1.0483	0.7593	1.0592
0.25	0.4801	1.0382	0.6856	1.0598	0.8448	1.9737
0.30	0.5218	1.0450	0.7465	1.0712	0.9208	1.0880
0.40	0.5932	1.0580	0.8516	1.0932	1.0528	1.1164
0.50	0.6533	1.0701	0.9408	1.1143	1.1656	1.1441
0.60	0.7051	1.0814	1.0185	1.1346	1.2644	1.1713
0.70	0.7506	1.0919	1.0873	1.1539	1.3525	1.1978
0.80	0.7910	1.1016	1.1490	1.1725	1.4320	1.2236
0.90	0.8274	1.1107	1.2048	1.1902	1.5044	1.2488
1.00	0.8603	1.1191	1.2558	1.2071	1.5708	1.2732
2.00	1.0769	1.1795	1.5995	1.3384	2.0288	1.4793
3.00	1.1925	1.2102	1.7887	1.4191	2.2889	1.6227
4.00	1.2646	1.2287	1.9081	1.4698	2.4556	1.7201
5.00	1.3138	1.2402	1.9898	1.5029	2.5704	1.7870
6.00	1.3496	1.2479	2.0490	1.5253	2.6537	1.8338
7.00	1.3766	1.2532	2.0937	1.5411	2.7165	1.8674
8.00	1.3978	1.2570	2.1286	1.5526	2.7654	1.8921
9.00	1.4149	1.2598	2.1566	1.5611	2.8044	1.9106
10.00	1.4289	1.2620	2.1795	1.5677	2.8363	1.9249
20.00	1.4961	1.2699	2.2881	1.5919	2.9857	1.9781
30.00	1.5202	1.2717	2.3261	1.5973	3.0372	1.9898
40.00	1.5325	1.2723	2.3455	1.5993	3.0632	1.9942
50.00	1.5400	1.2727	2.3572	1.6002	3.0788	1.9962
100.0	1.5552	1.2731	2.3809	1.6015	3.1102	1.9990

<sup>a</sup>Bi = hL/λ para la pared plana y hr<sub>0</sub>/λ para el cilindro y la esfera.

---

## El sólido semiinfinito

---

**Reflexión:** ¿Este procedimiento desarrollado bajo condiciones convectivas, ¿sirve con otras condiciones de contorno? Por ejemplo, ¿vale cuando la condición de contorno es de temperatura superficial fija?

## El sólido semiinfinito

---

Es otra geometría unidimensional sencilla para la que se pueden obtener soluciones analíticas. Como cualquiera de las otras geometrías anteriores, es una representación aproximada de ciertos casos reales, entre los que destacan:

- La superficie de la Tierra.
- Una plancha gruesa, en la parte inicial del proceso transitorio al sufrir un cambio en una de sus superficies hasta que la perturbación térmica alcanza la otra.

### Análisis

Es usual tomar para la posición espacial la coordenada cartesiana  $x$ , con lo que, en ausencia de generación interna, la ecuación diferencial a resolver es  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$

y las condiciones de contorno son:

- Inicial,  $T(x, t = 0) = T_i$ .
- Espaciales.
  - En el infinito (suficientemente lejos de la superficie),  $T(x = \infty, t) = T_i$ .
  - En la superficie, una de las tres siguientes
    - i)  $T(x = 0, t) = T_s$ ,
    - ii)  $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q''_s$ ,
    - iii)  $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h [T_f - T(0, t)]$ .



Las soluciones son, lógicamente, diferentes para cada condición de contorno superficial.

**1º) Temperatura superficial fija**

El análisis se puede hacer por diversos procedimientos. Uno de ellos es la Transformada de Laplace, que es la empleada aquí.

Por ese procedimiento [4], la ecuación se transforma en

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{s}{a} \theta \quad \text{con} \quad \theta = T - T_i$$

y las condiciones de contorno espaciales en  $\theta(x=0,s) = \frac{\theta_s}{s}$ ,  $\theta(x \rightarrow \infty, s) = 0$ .

La solución de la ecuación es bien conocida (**oscilador armónico**) y al imponer las condiciones de contorno resulta

$$\theta(x, s) = \frac{\theta_s}{s} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a}} x\right)$$

Aplicando la antitransformación de Laplace, la solución en el campo de tiempos es

$$\theta(x, t) = \theta_s \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \quad (5.17)$$

con  $\operatorname{erfc}(w) \equiv 1 - \operatorname{erf}(w)$  la función error complementaria y

$\operatorname{erf}(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^w e^{-v^2} dv$  la función error de Gauss, cuyos valores aparecen en el apéndice E.

**NOTA:** Observar como aparecen ligadas las variables espacial y temporal en el argumento  $\xi \equiv x/(2\sqrt{at})$ . Los problemas de **convección** 2-D presentarán en muchas ocasiones una ecuación diferencial formalmente idéntica a la de la **conducción transitoria**, pero con las variables espaciales  $x$  e  $y$ . Éstas aparecerán, por tanto, ligadas en un argumento semejante.

Resulta interesante calcular como evoluciona en el tiempo el flujo de calor transferido desde la superficie. Para ello no hay más que aplicar la ley de Fourier

---

**El sólido semiinfinito**


---

$$q''_s = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\lambda}{\sqrt{a}} \frac{T_s - T_i}{\sqrt{\pi t}} \quad (5.18)$$

$q''_s$  disminuye en el tiempo con  $\sqrt{t}$  y es proporcional a una interesante propiedad térmica de los cuerpos llamada *coeficiente de penetración*,  $b$ :

$$b \equiv \frac{\lambda}{\sqrt{a}} = \sqrt{\lambda \rho c_p} \quad \left( \frac{\text{W} \cdot \text{s}^{1/2}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right)$$

que explica fenómenos transitorios como:

Distinta velocidad a la que se derrite la nieve sobre distintos materiales:	Acero (cierto tipo)	$b = 13.5 \frac{\text{kW} \cdot \text{s}^{1/2}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$
	Asfalto,	$b = 0.35 \frac{\text{kW} \cdot \text{s}^{1/2}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$
Distinta velocidad de condensación en un frigorífico al colocar bandejas de distintos materiales	Vidrio,	$b = 1.6 \frac{\text{kW} \cdot \text{s}^{1/2}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$
	Plástico,	$b = 0.04 \frac{\text{kW} \cdot \text{s}^{1/2}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$

## 2º) Flujo de calor superficial fijo

En este caso la solución se obtiene de la del caso anterior [5], derivando ambos miembros de la ecuación diferencial respecto a  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 q''}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial q''}{\partial t}$$

resultando matemáticamente la misma ecuación que la anterior para la temperatura  $T$ .

Como las condiciones de contorno:

- Inicial:  $q''(x, t = 0) = 0$ , y
- Espaciales:  $q''(x = 0, t) = q''_s$  y  $q''(x = \infty, t) = 0$ ,

son idénticas a las de la variable  $\theta$  en el caso anterior, la solución matemática es la misma que la de  $\theta(x, t)$  en dicho caso.

$$q''(x, t) = q''_s \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

Para obtener la distribución de temperatura hay que integrar la ley de Fourier

$$-\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{q''(x, t)}{\lambda} \quad \text{con} \quad T(x = \infty, t) = T_i$$

resultando

$$T(x, t) - T_i = \int_x^{\infty} \frac{q''(x, t)}{\lambda} dx = \frac{2q''_s \sqrt{t}}{b} \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2) - \xi \operatorname{erfc}(\xi) \right] \quad (5.19)$$

### 3º) Superficie convectiva

Por procedimientos semejantes, aunque algo más complicados de cálculo se obtiene

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_f - T_i} = \operatorname{erfc}(\xi) - \left\{ \exp\left[ \operatorname{Bi} \left( 1 + \frac{\operatorname{Bi}}{4\xi^2} \right) \right] \right\} \left\{ \operatorname{erfc}\left( \xi + \frac{\operatorname{Bi}}{2\xi} \right) \right\} \quad (5.20)$$

Para el sólido semiinfinito se define el número de Biot como  $\operatorname{Bi} \equiv hx/\lambda$ .

Otros métodos de solución se pueden ver en las refs. [6] y [7].

---

## Sistemas multidimensionales producto

---

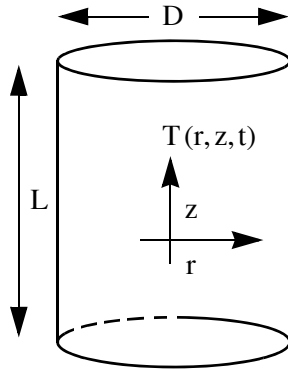
Cuando el problema transitorio presenta más de una dirección espacial, pero la geometría del sistema se puede construir con la **intersección** de dos o más de las **geometrías unidimensionales** (pared plana infinita, cilindro infinito, sólido semiinfinito) la solución se puede obtener fácilmente a partir de las soluciones de los casos unidimensionales [7].

---

**Sistemas multidimensionales producto**

---

Sea por ejemplo el caso de un cilindro finito ( $D \sim L$ ) que sufre un proceso transitorio de cambio de temperatura, sin generación interna.



La ecuación de difusión del calor para este caso es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Con condiciones de contorno idénticas a los problemas 1-D (convectivas, o en el límite  $h = \infty$  temperatura superficial fija) se demuestra matemáticamente que la temperatura adimensional  $\theta^*(r^*, z^*, Fo)$  solución es el producto de las temperaturas adimensionales de los casos 1-D

cuya intersección genera la geometría problema, en este caso cilindro infinito y la pared plana infinita.

$$\theta^* \equiv \frac{T(r, z, t) - T_f}{T_i - T_f} = \frac{T(z, t) - T_f}{T_i - T_f} \Big|_{\text{Pared plana}} \cdot \frac{T(r, t) - T_f}{T_i - T_f} \Big|_{\text{Cilindro infinito}}$$

$$\equiv \theta^*_{\text{Pared plana}} \cdot \theta^*_{\text{Cilindro infinito}}$$

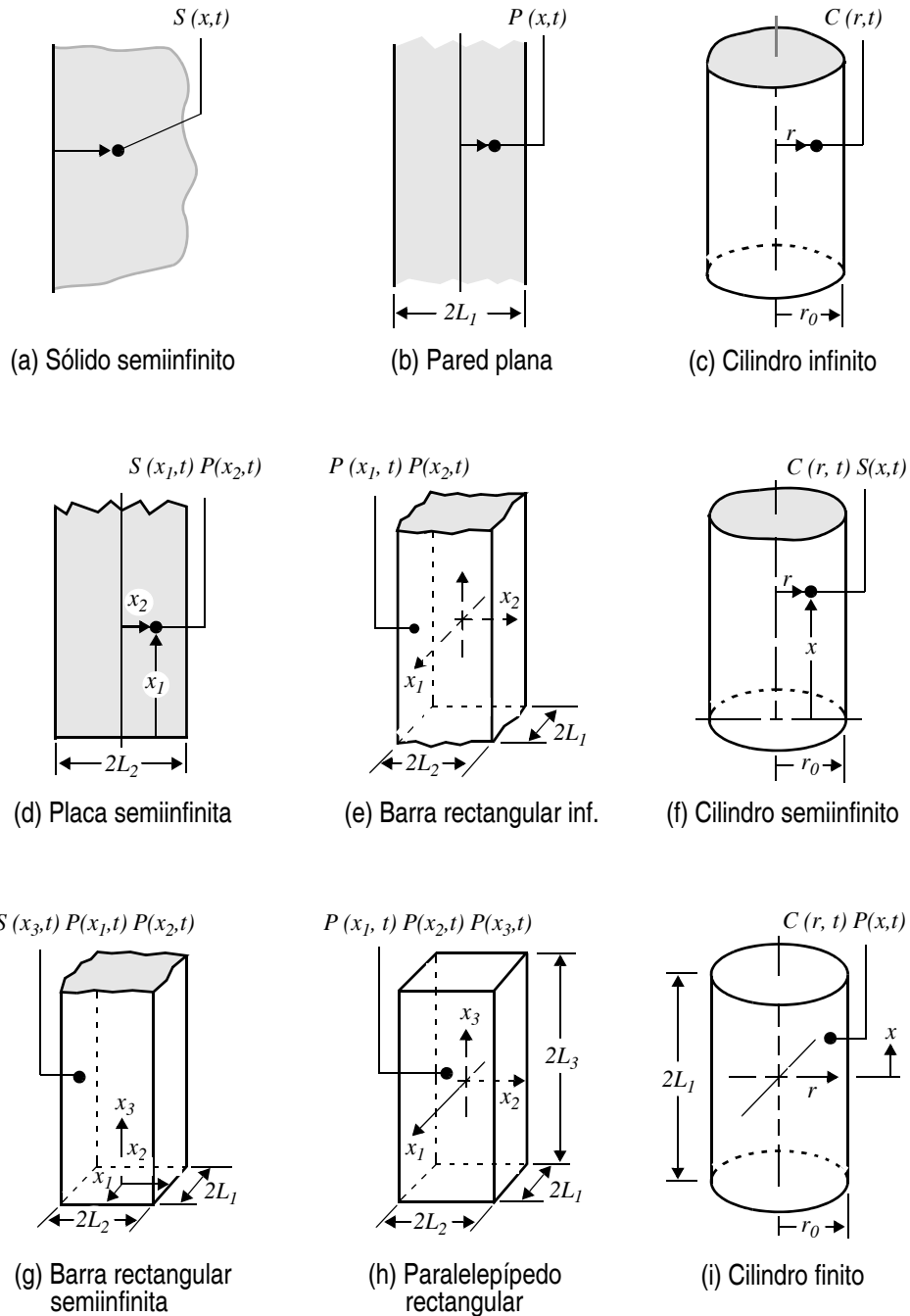
Por tanto se pueden utilizar las soluciones de los casos unidimensionales anteriores en la solución de estos problemas.

De forma semejante se opera con otros casos similares. Denominado, por simplificar la notación,

$$S(x, t) \equiv \frac{T(x, t) - T_f}{T_i - T_f} \quad P(x, t) \equiv \frac{T(x, t) - T_f}{T_i - T_f} \quad C(r, t) \equiv \frac{T(r, t) - T_f}{T_i - T_f}$$

a las distribuciones de temperatura adimensionales del sólido semiinfinito, pared plana infinita y cilindro infinito respectivamente, se construyen las soluciones producto de la figura 5.7 [3].

**FIGURA 5.7** Soluciones de los sistemas multidimensionales expresadas como productos de los resultados de los sistemas unidimensionales.



## Método de diferencias finitas

---

Las soluciones analíticas para problemas transitorios están restringidas a geometrías y condiciones de contorno sencillas, como las consideradas en las secciones anteriores. En muchos casos la geometría y/o las condiciones de contorno imposibilitan la obtención de soluciones analíticas y hay que recurrir a métodos numéricos.

En esta sección se vuelve a abordar el método de las diferencias finitas ya empleado en la resolución de problemas estacionarios, en dos versiones diferentes, la explícita y la implícita, de las que luego se hablará.

Lo que hay que hacer en primer lugar es extender la discretización del espacio al tiempo. Los índices  $m$  y  $n$  son utilizados para designar las coordenadas  $x$  e  $y$  de localización de los nudos de la retícula en el caso bidimensional, y sólo  $m$  si es unidimensional. La extensión del método de las diferencias finitas del caso estacionario al transitorio exige incluir un nuevo índice para discretizar el tiempo. El número entero  $p$  se introduce para este propósito, donde  $t = p \Delta t$ .

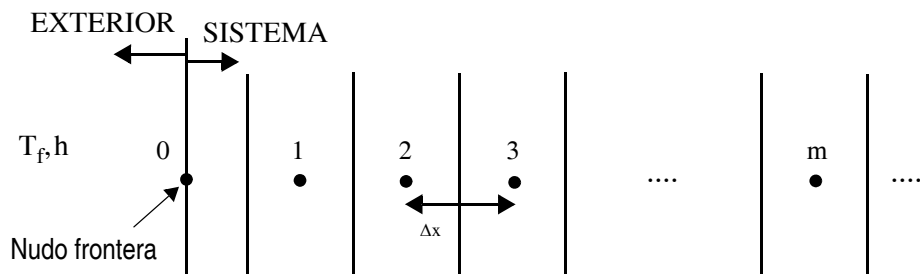
El cálculo incremental del término transitorio sigue la misma pauta que los términos espaciales, es decir, calcular la variación de energía acumulada en cada cédula de dimensiones  $(\Delta x \cdot \Delta y \cdot l)$ , donde  $l$  es una profundidad arbitraria, al pasar el sistema del instante de tiempo  $p$  al  $p+1$ . Un sencillo cómputo conduce a

$$\frac{\Delta E_{alm}}{\Delta t} = \rho c_p (\Delta x \cdot \Delta y \cdot l) \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t}$$

para el caso bidimensional. Si como muestra la figura 5.8, se tratara de un caso unidimensional se sustituiría el doble índice espacial  $(m, n)$  por un único índice  $m$

---

**FIGURA 5.8** Discretización de un sistema unidimensional para el MDF.



---

## Conducción transitoria

---

Para obtener la ecuación en diferencias finitas de un nudo interior cualquiera de este problema unidimensional basta con colocar los términos discretizados en el balance de energía

$$\frac{\Delta E_{alm}}{\Delta t} = \sum_{i, \text{vecinos}} q_{i \rightarrow m} + q''' \Delta V$$

resultando

$$\rho c_p (\Delta x \cdot A) \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t} = \lambda A \left( \frac{T_{m+1}^p - T_m^p}{\Delta x} + \frac{T_{m-1}^p - T_m^p}{\Delta x} \right) + q''' (\Delta x \cdot A)$$

donde A es un área arbitrariamente elegida en el plano YZ.

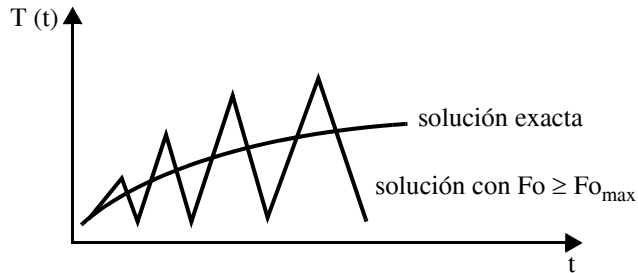
Un aspecto fundamental a remarcar, por la gran trascendencia que tiene, es que la derivada temporal de la temperatura se ha sustituido por un cociente incremental efectuado hacia adelante, es decir, desde el instante p hasta el instante siguiente p+1. Esta es la esencia del llamado **esquema explícito**, cuyas consecuencias se verán inmediatamente.

Por comodidad, y sin pérdida de generalidad conceptual, se considera que no existe generación térmica ( $q''' = 0$ ). Simplificando y reagrupando términos en la ecuación anterior se llega a  $T_m^{p+1} = Fo(T_{m+1}^p + T_{m-1}^p) + (1 - 2Fo)T_m^p$ , donde se ha generado el número adimensional de Fourier,  $Fo \equiv \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2}$ , en términos incrementales.

Inmediatamente se puede observar la gran ventaja del método explícito. Al conocerse las temperaturas de todos los nodos en el instante inicial (condición temporal de contorno obligatoria), se puede calcular directamente la temperatura de cualquier nodo en cualquier instante a partir de los valores de las temperaturas del propio nodo y de los nodos vecinos en el instante anterior, sin tener que resolver ningún sistema de ecuaciones. El precio que se paga por ello es que, para que la solución no oscile como muestra la figura 5.9, [8], debe cumplirse que el coeficiente que acompaña a  $T_m^p$  no sea negativo, es decir,  $Fo \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{(\Delta x)^2}{a}$ , lo

cual, en algunos problemas, puede limitar fuertemente el incremento temporal permitido y obligar a un número de pasos temporales excesivamente alto.

**FIGURA 5.9** Oscilación en la solución de un problema transitorio resuelto con un MDF explícito.



En el **esquema implícito**, la derivada temporal se realiza hacia atrás, llegando a la ecuación  $(1 + 2Fo)T_m^p - Fo(T_{m+1}^p + T_{m-1}^p) = T_m^{p-1}$ , donde al depender la temperatura de cada nodo de las de los nodos vecinos en el mismo instante, deben obtenerse a la vez, obligando en cada instante del tiempo a la resolución de un sistema de ecuaciones semejante al del caso estacionario. A cambio, el método numérico es estable y permite elegir el salto de tiempo  $\Delta t$  que se desee. Este es el método normalmente utilizado en las aplicaciones reales.

Existen métodos híbridos entre el explícito y el implícito.

La ampliación a más dimensiones o a nudos exteriores es inmediata. Por ejemplo, para el nudo exterior de la figura 5.8 es fácil deducir que su ecuación en diferencias finitas viene dada por

$$T_0^{p+1} = 2Fo(T_1^p + BiT_f) + [1 - 2Fo(1 + Bi)] T_0^p$$

para el esquema explícito, lo que implica que su condición de estabilidad es  $Fo \leq \frac{1}{2(1 + Bi)}$ , y  $[1 + 2Fo(1 + Bi)] T_0^p - 2FoT_1^p = T_0^{p-1} + 2FoBiT_f$ , para el esquema implícito.

De la misma manera, se puede demostrar fácilmente que el criterio de estabilidad en un problema bidimensional para un nudo interno en el método explícito es  $Fo \leq \frac{1}{4}$

y para el nudo exterior de la esquina de la figura 4.5, vale  $Fo \leq \frac{3}{4(3 + Bi)}$ .

## Referencias

---

1. V. Isachenko, V. Osipova y A. Sukomel  
*Transmisión del calor*  
Ed. Marcombo, 1977
2. P. J. Schneider  
*Conduction Heat Transfer*  
Addison–Wesley, Reading, Ma, 1955.
3. F. Incropera and D. de Witt  
*Fundamentals of Heat and Mass Transfer*  
Wiley, 1990.
4. Tyn Myint–U  
*Partial Differential Equations of Mathematical Physics*  
Elsevier, New York, 1973.
5. H. S. Carslaw, and J. C. Jaeger  
*Conduction of Heat in Solids*  
Clarendon Press, Oxford, 1984.
6. U. Grigull and H. Sandner  
*Heat Conduction*  
Hemisphere Publishing Corporation, 1984, Washington.
7. W. Hanna  
*Engineering Heat Transfer*  
PWS Publishers, Boston, 1986.
8. M. N. Özisik  
*Boundary Value Problems of Heat Conduction*  
Dover, New York, 1968.

---

## Síntesis del capítulo

---

- Los cuerpos sometidos a conducción transitoria cuya temperatura apenas varía en el espacio por ser muy buenos conductores del calor se denominan **sistemas de capacidad** (o de dimensión espacial cero). Su comportamiento es análogo al de un condensador eléctrico, de ahí su nombre, y por tanto su temperatura se acerca exponencialmente a la del fluido exterior.
- Los problemas unidireccionales correspondientes a las geometrías habituales (pared plana, cilindro infinito, esfera y sólido semiinfinito), así como los multidimensionales resultado de intersecciones entre las anteriores tienen solución analítica si sus condiciones de contorno son convectivas o de temperatura superficial fija (Schneider). Estas soluciones antes se ofrecían, y todavía se ofrecen en muchos textos, gráficamente en las llamadas gráficas de Heisler (temperatura) y Gröber (calor intercambiado con el exterior).
- Los problemas que no se pueden resolver por los procedimientos anteriores, se resuelven normalmente mediante el MDF que opera con el mismo principio que en conducción estacionaria. La diferencia estriba en que se añade el **término transitorio (de acumulación de la energía térmica)**; la forma de calcular este término da lugar a diversos esquemas numéricos, cuyos casos extremos se denominan **explícito e implícito**.

---

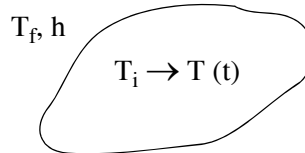
## Cuestiones

---

1. ¿Cuál es el criterio cuantitativo que indica si un sistema es de capacidad?
2. ¿Cuál de las siguientes definiciones del número de Fourier es la correcta?

a)  $\frac{a t^2}{L^2}$       b)  $\frac{a t}{L^2}$       c)  $\frac{a^2 t}{L^2}$       d)  $\frac{a t}{L}$

3. Demostrar que en la conducción transitoria de un sistema de capacidad, la evolución de su temperatura viene dada por  $\theta = \theta_i \exp(-B_i \cdot F_0)$ , con  $\theta = T - T_f$



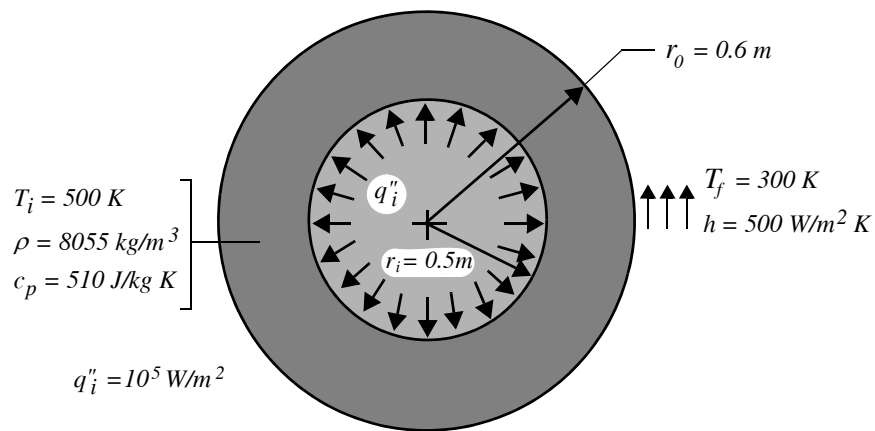
4. A través de un intercambiador de calor de lecho fluidizado circula arena caliente a  $1000^\circ\text{C}$  compuesta por granos de diámetro medio  $d = 600 \mu\text{m}$ , enfriándose con el aire del lecho que se encuentra a una temperatura constante de  $500^\circ\text{C}$  y con un coeficiente de convección de unos  $300 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Si las propiedades termofísicas de los granos de arena son  $\rho = 2600 \text{ kg/m}^3$  y  $c_p = 800 \text{ J/kg K}$ , y considerando que se comportan como sistemas de capacidad, calcular el tiempo que les cuesta alcanzar la temperatura de  $550^\circ\text{C}$ .
5. Se calienta un pastel de manzana en un horno microondas de forma que a partir de una temperatura inicial de  $20^\circ\text{C}$ , se alcanzan los  $60^\circ\text{C}$  transcurridos cinco minutos. El aire del interior del horno se mantiene a  $20^\circ\text{C}$  con un coeficiente de convección natural del orden de  $2 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Estimar la potencia calorífica aportada por unidad de volumen (supuesta constante y uniforme) a que equivale la acción de las microondas. Propiedades del pastel:  $\rho = 720 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_p = 3500 \text{ J/kg K}$ ,  $\lambda = 0.323 \text{ W/m K}$ . El pastel tiene forma de disco de  $10 \text{ cm}$  de diámetro y  $2 \text{ cm}$  de espesor.

---

**Cuestiones**

---

6. ¿Se pueden utilizar las gráficas de Heisler con condiciones de contorno distintas de las convectivas? ¿Cómo?
7. En el interior de un recipiente esférico se almacenan unas sustancias químicas en reacción que producen un flujo de calor uniforme  $q''_i$  sobre su superficie interior. El recipiente se sumerge bruscamente en un baño líquido cuya temperatura  $T_f$  es menor que  $T_i$ , donde  $T_i$  es la temperatura inicial de la pared del recipiente.



Suponiendo que no existen gradientes térmicos en las paredes del recipiente y con los datos de la figura, calcular:

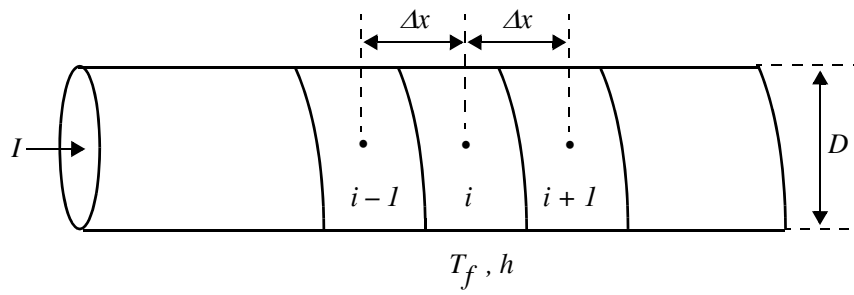
- a) La variación inicial de temperatura de la pared por unidad de tiempo.
- b) La temperatura estacionaria de la pared.
8. Obtener la ecuación en diferencias finitas (método explícito) de un Nudo Interior en un sistema unidimensional, transitorio y sin generación interna. Indicar cuál es el valor máximo del salto temporal,  $\Delta t$ , que puede utilizarse y por qué.
9. En el cable circular de la figura, por el que circula una corriente eléctrica de intensidad  $I$ , y que cambia calor por convección con un fluido exterior, determinar la ecuación en diferencias finitas de un nudo genérico  $i$  para una situación transitoria. Poner la ecuación en función de todas las prop-

---

**Cuestiones**

---

iedades del material, variables y parámetros ( $I$ ,  $T_f$ ,  $h$ , etc.) que sean necesarios. No hace falta despejar la temperatura del nudo ni hacer ninguna simplificación.



---

# Problemas

---

1. Un dispositivo electrónico, por ejemplo un transistor de potencia montado sobre un disipador con aletas, puede modelizarse como un cuerpo isotermo con generación de calor interna y una resistencia de convección externa.

- a) Considérese un sistema como el descrito, de masa  $M$ , calor específico  $c$  y superficie  $A_s$  que se encuentra en equilibrio con el ambiente a  $T_f$ . De repente, el dispositivo electrónico se pone en funcionamiento apareciendo una generación de calor constante  $E_g$  (W). Demostrar que la respuesta térmica del sistema es

$$\theta = \theta_i \exp(-t/RC)$$

donde  $\theta = (T - T(\infty))$  y  $T(\infty)$  es la temperatura en estado estacionario correspondiente a  $t \rightarrow \infty$ ;  $\theta_i = (T_i - T(\infty))$ ;  $T_i$  = temperatura inicial del dispositivo;  $R = 1/hA_s$ , resistencia térmica y  $C = Mc$ , capacidad térmica.

- b) Un dispositivo electrónico de 60 W va montado sobre un disipador de aluminio de 0.31 kg de peso y alcanza una temperatura de 100 °C en estado estacionario cuando la temperatura del aire es 20 °C. Si el dispositivo se encuentra a 20 °C en el instante inicial ¿que temperatura habrá alcanzado cinco minutos después de ponerse en funcionamiento?

2. Se calienta un pastel de manzana de un horno microondas de forma que a partir de una temperatura inicial de 20 °C, se alcanzan los 60 °C transcurridos 5 minutos. El aire del interior del horno se mantiene a 20 °C con un coeficiente de convección natural del orden de 2 W/m<sup>2</sup>K. Estimar la potencia calorífica aportada por unidad de volumen (supuesta constante y uniforme) a que equivale la acción de las microondas. Propiedades del pastel:  $\rho = 720$  kg/m<sup>3</sup>,  $c_p = 3500$  J/kg K,  $\lambda = 0.323$  W/m·K. Dimensiones del pastel: 10 cm de diámetro y 2 cm de espesor.

---

**Problemas**

---

3. Una placa grande de aluminio (alloy 2024) de 0.15 m de espesor que se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 300 K se introduce en un horno a 800 K con un coeficiente de convección de  $500 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ .
- Determinar el tiempo necesario para que el plano central de la placa alcance los 700 K.
  - ¿Cuál es la temperatura superficial en ese momento?
  - Repetir el problema suponiendo que la placa es de acero inoxidable (tipo 304).
4. Estimar el tiempo necesario para cocer una salchicha de Frankfurt en agua hirviendo. Suponer que la salchicha está inicialmente a  $6 \text{ }^\circ\text{C}$ , que alcanza una temperatura final de  $80 \text{ }^\circ\text{C}$  en su eje central y que el coeficiente de transferencia de calor por convección es de  $100 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Considerar la salchicha como un cilindro largo de 20 mm de diámetro con las siguientes propiedades:  $c_p = 3350 \text{ J/kg K}$ ,  $\rho = 880 \text{ kg/m}^3$ , y  $\lambda = 0.52 \text{ W/mK}$ .
5. En una nube alta se forma un trozo de granizo esférico de 5 mm de diámetro a una temperatura de  $-30 \text{ }^\circ\text{C}$ . Si la piedra empieza a caer a través de aire a  $5 \text{ }^\circ\text{C}$ , ¿cuánto tiempo pasará hasta que la superficie empiece a fundirse? ¿cuál es la temperatura del centro de la piedra y cuánta energía (J) ha absorbido hasta ese momento? Suponer un coeficiente de convección de  $250 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  y que las propiedades del trozo de granizo son las del hielo.
6. Un pavimento de asfalto se encuentra a una temperatura de  $50 \text{ }^\circ\text{C}$  en un día muy caluroso de verano. De repente, una tormenta hace que la temperatura de la superficie disminuya hasta  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Calcular la cantidad total de energía ( $\text{J/m}^2$ ) transferida por el asfalto durante los 30 minutos que dura la tormenta, suponiendo que durante este tiempo la superficie del mismo se mantiene a  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Propiedades del asfalto:  $\lambda = 0.062 \text{ W/m K}$ ,  $\rho = 2115 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_p = 920 \text{ J/kg K}$ .
7. Al planificar el tendido de líneas subterráneas de suministro de agua es preciso considerar la posibilidad de que se produzca congelación durante el

---

**Problemas**

---

invierno. El problema de predecir la temperatura del suelo en función del tiempo es complicado, pues las condiciones en la superficie son cambiantes. Sin embargo, pueden obtenerse estimaciones razonables suponiendo una temperatura superficial constante durante períodos prolongados de tiempo invernal ¿Qué profundidad mínima  $x_m$  recomendarías para enterrar los conductos y evitar que se congelen bajo unas condiciones en las que el suelo, inicialmente a una temperatura uniforme de 20 °C, se somete a una temperatura superficial de -15 °C durante 60 días?

8. Un cristal liquido termocrómico (es decir, que cambian de color con la temperatura) está adherido a una placa de metacrilato ( $\rho = 1180 \text{ kg/m}^3$ ,  $c = 1440 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ ,  $\lambda = 0.184 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ ) de espesor  $L = 1.5 \text{ cm}$  que se calienta mediante una corriente fluida a 40 °C aplicada sobre una de sus superficies:

- a) Demostrar que hasta  $t = 100 \text{ s}$  se comporta como un medio semiinfinito.
- b) Demostrar que el coeficiente de convección cumple la siguiente fórmula, siendo  $t_{35}$  y  $t_{36}$  el tiempo que cuesta a la superficie convectiva llegar a los 35 y 36 °C respectivamente (temperaturas del cambio de color del cristal termocrómico que se polariza en la superficie convectiva).

$$\frac{4}{5} = \frac{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{h}{\lambda} \sqrt{at_{36}}\right)}{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{h}{\lambda} \sqrt{at_{35}}\right)} \exp\left[\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 a(t_{36} - t_{35})\right] \quad a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

9. Durante un proceso de fabricación, un cilindro de acero inoxidable (AISI 304), inicialmente a 600 K, se temple por inmersión en un baño de aceite a 300 K con  $h = 500 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ . El cilindro mide  $2L = 60 \text{ mm}$  de largo y 80 mm de diámetro. Transcurrido un tiempo  $t = 3 \text{ minutos}$ , determinar las temperaturas del centro del cilindro, del centro de una de las caras y del punto medio de la superficie lateral.

---

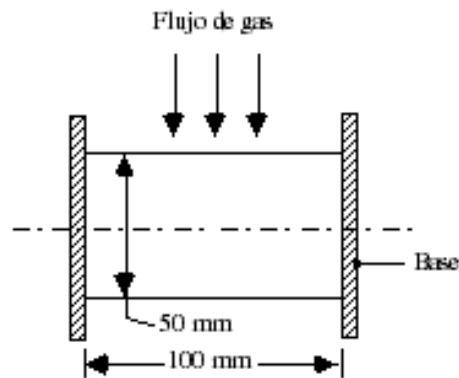
**Problemas**

---

**10.** Despreciando el calor evacuado por los cables, la unión sensible de un termopar es una esfera de diámetro 0.7 mm. Sus propiedades supuestas constantes son:  $\lambda = 20 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ ,  $c_p = 400 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ ,  $\rho = 8500 \text{ kg/m}^3$ . El sensor se usa para medir la temperatura de una corriente de gases con los que intercambia calor con un coeficiente de convección aproximadamente constante de  $h = 400 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Se pide:

- Demostrar que el termopar tiene un tiempo de respuesta de aproximadamente 1 segundo frente a cambios en la temperatura de los gases.
- Si la unión se encuentra a  $25 \text{ }^\circ\text{C}$  y se sitúa en una corriente de gas a  $200 \text{ }^\circ\text{C}$  ¿Cuánto tiempo pasará hasta la temperatura de la unión sea  $199 \text{ }^\circ\text{C}$ ?

**11.** Un perno cilíndrico de cobre de 100 mm de longitud y 50 mm de diámetro se encuentra inicialmente a temperatura uniforme de  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Sus bases se someten repentinamente a un fuerte calentamiento que hace que alcancen una temperatura de  $500 \text{ }^\circ\text{C}$ . Al mismo tiempo, la superficie cilíndrica se calienta por convección, utilizando para ello una corriente de gas a una temperatura de  $500 \text{ }^\circ\text{C}$  y un coeficiente de convección de  $100 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ .



- Determinar la temperatura en el centro del cilindro 8 segundos después de aplicar el calentamiento.
- Considerando los parámetros que regulan la distribución de temperaturas en conducción transitoria, ¿puede utilizarse alguna simplificación en la resolución de este problema?

**12.** Se quiere evaluar un nuevo proceso de tratamiento térmico de un material especial. El material, bajo la forma de una esfera de radio  $r_0 = 5 \text{ mm}$ , se encuentra inicialmente en equilibrio a  $400 \text{ }^\circ\text{C}$  en el interior de un horno. Sú-

---

**Problemas**

---

bitamente se extrae y se somete a un proceso de enfriamiento en dos etapas:

Paso 1: refrigeración con aire a  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  durante un tiempo  $t_a$ , hasta que la temperatura del centro de la esfera alcanza  $335\text{ }^{\circ}\text{C}$ . El coeficiente de convección vale  $10\text{ W/m}^2\text{ K}$ .

Paso 2: refrigeración con agua a  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $h = 6000\text{ W/m}^2\text{ K}$ ).

Las propiedades del material son  $\rho = 3000\text{ kg/m}^3$ ,  $\lambda = 20\text{ W/m K}$ ,  $c_p = 1000\text{ J/kg K}$  y  $a = 6.66 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ . Calcular:

- El tiempo total requerido para que el centro de la esfera se enfríe hasta  $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ .
- La temperatura de la superficie de la esfera tras el paso 1 y tras el paso 2.
- La energía cedida en el proceso por la esfera

- 13.** Un oleoducto de acero AISI 1010 ( $\lambda = 63.9\text{ W/m K}$ ,  $c_p = 434\text{ J/kg K}$ ,  $\rho = 7823\text{ kg/m}^3$ ) tiene 1 m de diámetro, 40 mm de espesor de pared y está muy bien aislado en su superficie exterior. Inicialmente se encuentra a una temperatura uniforme de  $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . El flujo de aceite a  $60\text{ }^{\circ}\text{C}$  crea de repente una convección de  $500\text{ W/m}^2\text{ K}$  en la superficie interior. Se desea saber, cuando han transcurrido ocho minutos desde el instante inicial:

- temperatura en la superficie exterior del oleoducto.
- flujo de calor en la superficie interior y
- energía transferida por metro de tubo.

- 14.** En cierto proceso de fabricación se debe enfriar una pieza cilíndrica de 40 cm de largo por 5 cm de diámetro de  $45\text{ }^{\circ}\text{C}$  (salida del proceso de elaboración), a  $5\text{ }^{\circ}\text{C}$  en el centro de la pieza (entrada para almacenamiento). Para realizar el enfriamiento se introduce la pieza en una cámara en el interior de la cual circula una corriente de aire que produce un coeficiente de convección sobre la pieza de  $35\text{ W/m}^2\text{ K}$ .

- Si dicha transformación se quiere realizar en una hora ¿A qué temperatura deberá estar el aire de la cámara? ¿Qué cantidad de calor se habrá

---

**Problemas**

---

desprendido? Comparar los resultados obtenidos considerando cilindro finito en infinito.

- b) En el caso de cilindro infinito ¿Qué calor se ha disipado a los 15 minutos de someter la pieza al proceso de convección? ¿A qué temperatura se encuentra el centro de la pieza en dicho instante?

DATOS: Conductividad de la pieza  $\lambda = 0.29 \text{ W/m K}$ .

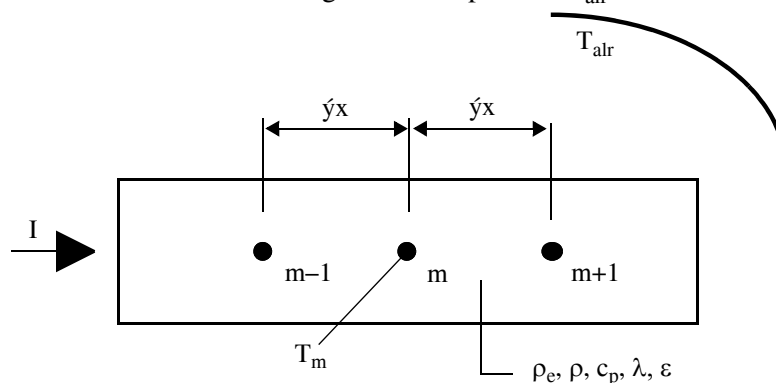
Difusividad térmica de la pieza  $= 2.8 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ .

15. Un cilindro de radio  $r_0 = 2.5 \text{ cm}$  y longitud  $2L = 5 \text{ cm}$  se enfría desde una temperatura inicial  $T_i = 45 \text{ }^\circ\text{C}$  en un ambiente a  $T_a = 5 \text{ }^\circ\text{C}$  y  $h = 35 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Las propiedades del material son  $\lambda = 0.29 \text{ W/m K}$  y  $a = 2.8 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ . Calcular la energía transferida  $Q$  hasta que han transcurrido 15 minutos.

(Nota: *no es cierto* que  $Q/Q_0$  pueda descomponerse en el producto de las soluciones unidimensionales para un cilindro y una placa plana indefinidamente extensos. Sin embargo, existe una relación sencilla; encontrarla.)

16. Un ladrillo de arcilla cocida de dimensiones  $0.06 \text{ m} \times 0.09 \text{ m} \times 0.20 \text{ m}$  se extrae de un horno a  $1600 \text{ K}$  y se enfría en aire a  $40 \text{ }^\circ\text{C}$  con  $h = 50 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . ¿Cuál es la temperatura en el centro y esquinas del ladrillo después de 50 minutos de enfriamiento?

17. Un cable fino de diámetro  $D$  se encuentra inicialmente en equilibrio con sus alrededores en un recinto vacío grande a temperatura  $T_{\text{alr}}$ .



---

**Problemas**

---

De repente, una corriente eléctrica  $I$  (A) pasa a través del cable, que posee una resistividad eléctrica  $\rho_e$  y una emisividad  $\varepsilon$ . Otras propiedades pertinentes se marcan en la figura. Deducir la ecuación transitoria en diferencias finitas para el nudo  $m$ .

- 18.** Una pared de 0.12 m de espesor con una difusividad térmica de  $1.5 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de  $85 \text{ }^\circ\text{C}$ . Súbitamente en una cara se disminuye la temperatura a  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  y la otra cara se mantiene aislada. Utilizando un método numérico con incrementos espaciales de 30 mm y temporales de 300 s determinar la distribución de temperaturas en la pared después de 45 minutos.
- 19.** Una pieza grande de plástico de difusividad térmica  $6 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$  se extrae de su molde a una temperatura uniforme de  $150 \text{ }^\circ\text{C}$  y se expone a una corriente de aire a alta velocidad experimentando un cambio súbito de temperatura a  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Suponiendo que la pieza se aproxima a un medio semi-infinito y utilizando un método de diferencias finitas con un incremento espacial de 6 mm, estimar la temperatura a una distancia de 18 mm de la superficie después de tres minutos. Comparar el resultado con una solución analítica.
- 20.** Una pared plana de 100 mm de espesor con una generación volumétrica de  $q''' = 1.5 \times 10^6 \text{ W/m}^3$  se expone a condiciones convectivas, con  $T_f = 30 \text{ }^\circ\text{C}$  y  $h = 1000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  en ambas superficies. La pared se mantiene bajo condiciones estacionarias cuando de repente la generación de calor se reduce a cero. La difusividad y conductividad térmica del material de la pared son  $1.6 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$  y  $75 \text{ W/m K}$  respectivamente. Se sugiere un incremento espacial de 10 mm para el MDF.
- Estimar la temperatura en el plano central de la pared tres minutos después de eliminar la generación interna de la pared.
  - Dibujar en unos ejes  $T-x$  la distribución de temperaturas obtenidas en el apartado anterior. Señalar también la distribución de temperatura inicial.

---

**Problemas**

---

---

## CAPÍTULO 6

# Fundamentos de Convección del Calor

---

En el caso en que el soporte material sobre el que se produce la transmisión del calor es un fluido, además de la conducción aparece otro mecanismo de transporte debido al movimiento del fluido (campo de velocidades no nulo) denominado advección.

La *convección*\* es la transmisión global de calor por *conducción* y *advección*

Históricamente (s. XIX) a la convección se la denominaba mecanismo de contacto [1] para distinguirla del transporte de calor en el vacío (radiación).

*¿Qué interesa en los problemas de convección?*

En la práctica, más que un conocimiento detallado del flujo de calor en cada punto del fluido, interesa conocer el **intercambio de calor** entre el **fluido** y las **superficies sólidas** en **contacto** con él. (Como ya se dijo en el capítulo 1, este planteamiento arranca de Newton, a comienzos del s. XVIII).

*¿Cómo se determina este calor?*

Se pueden agrupar los diversos procedimientos existentes en dos grandes enfoques. El primero intenta resolver la ecuación de transporte de calor, de forma similar a la

---

\*. Frecuentemente el término convección no se usa como el global de ambos mecanismos sino como equivalente a advección.

conducción. El segundo, que proviene del primer planteamiento de Newton, intenta exclusivamente determinar, habitualmente de forma experimental, un coeficiente de intercambio de calor por convección,  $h$ , entre un fluido y una superficie en contacto con él. Obviamente existen conexiones entre ambos enfoques, que se pondrán de manifiesto en lo sucesivo, donde se desarrollan los dos planteamientos.

## Planteamiento matemático

---

Consiste en obtener una ecuación diferencial, llamada ecuación de la energía térmica, que determina, junto con las condiciones de contorno necesarias, la distribución de temperaturas en el seno del fluido y de ahí el calor intercambiado con el sólido.

La dificultad aumenta drásticamente respecto de la conducción por dos motivos:

1. La ecuación de la energía tiene más términos.
2. Para resolverla, hay que resolver (antes o simultáneamente) otras ecuaciones que determinan el movimiento del fluido (campo de velocidades).

### Ecuación de la energía térmica de un fluido

En un fluido se obtiene la ecuación de la energía térmica restando a la ecuación de la energía total la de la energía mecánica [2]

$$\begin{aligned} \text{ecuación energía térmica} &= \text{ecuación energía total} - \text{ecuación energía mecánica, y} \\ \text{ecuación energía mecánica} &= \text{velocidad} \cdot \text{ecuación momento} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{producto escalar} \end{aligned}$$

resultando para la energía térmica la ecuación (6.1)

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\text{div}(\vec{q}''') - p\text{div}\vec{V} + \tilde{\tau} : \left( \begin{array}{c} \text{producto diádico de dos vectores} \\ \downarrow \\ \vec{V} \vec{W} = \begin{bmatrix} V_1 W_1 & V_1 W_2 & V_1 W_3 \\ V_2 W_1 & V_2 W_2 & V_2 W_3 \\ V_3 W_1 & V_3 W_2 & V_3 W_3 \end{bmatrix} \end{array} \right) + q'''' \quad (6.1)$$

$$\uparrow$$

$$\text{producto escalar de tensores} \left( \tilde{\tau} : \tilde{\sigma} = \sum_i \sum_j \tau_{ij} \sigma_{ji} \right)$$

---

### Planteamiento matemático

---

donde:

$\rho \frac{Du}{Dt}$  Variación de energía interna (en el tiempo y por unidad de volumen) de un elemento diferencial de fluido que se mueve a la velocidad del campo fluido.

$-\rho \text{div} \vec{V}$  Aumento **reversible** de energía (id) debido a la **compresión**.

$+\tilde{\tau}:(\vec{\nabla} \vec{V})$  Aumento **irreversible** de energía (id) debido a la **disipación viscosa**.  
 $\tau$  es el tensor de esfuerzos viscosos.

$q'''$  Generación interna (podría incluir calor radiante).

Para obtener una ecuación explícita en la temperatura hay que usar la ecuación de estado de la energía, que para una sustancia de composición química constante es

$$du = \left[ -p + T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{v}} \right] d\hat{v} + c_v dT$$

donde  $\hat{v}$  es el volumen específico, y la ley de Fourier.

Sustituyendo y operando queda la siguiente **ecuación general** para la **temperatura**

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{v}} \text{div} \hat{V} + \text{div}(\lambda \vec{\nabla} T) + \tilde{\tau}:(\vec{\nabla} \vec{V}) + q''' \quad (6.2)$$

### Casos particulares

#### 1. Fluido newtoniano

En este caso las componentes del tensor de **esfuerzos** viscosos vienen dados por la expresión

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \mu (\text{div} \vec{V}) \delta_{ij}$$

donde  $v_i$  y  $v_j$  representan las componentes genéricas  $i$  y  $j$  de la velocidad del fluido y  $x_i$  y  $x_j$  las coordenadas cartesianas  $i$  y  $j$ . La ecuación (6.2) en este caso toma la forma de la expresión (6.3)

$$\rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \text{div}(\lambda \vec{\nabla} T) - T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{v}} (\text{div} \vec{V}) + \mu \phi + q''' \quad (6.3)$$

siendo  $\phi$  la función de **disipación viscosa**, dada por la ecuación (6.4)

$$\phi = 2 \left[ \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 \right] + \sum_{i \neq j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{3} \left[ \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) \right]^2 \quad (6.4)$$

**2. Fluido incompresible** ( $\rho = \text{cte} \Rightarrow c_p = c_v$  y  $\text{div } \vec{V} = 0$ )

Si además de ser newtoniano el fluido es incompresible (caso aproximado de los líquidos), la ecuación (6.3) se reduce a la expresión (6.5)

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \text{div}(\lambda \vec{\nabla} T) + \mu \phi + q''' \quad (6.5)$$

cuyos términos tienen el siguiente significado físico

$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$	término transitorio
$\rho c_p \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T$	término de advección
$\text{div}(\lambda \vec{\nabla} T)$	término de conducción
$\mu \phi$	disipación viscosa
$q'''$	generación térmica

**3. Gas ideal**  $\left( \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\vec{v}} = \frac{p}{T} \right)$

En éste la ecuación (6.3) toma la forma siguiente

$$\rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \text{div}(\lambda \vec{\nabla} T) - p \text{div} \vec{V} + \mu \phi + q''' \quad (6.6)$$

la cual se reduce a la (6.5) si la presión se mantiene constante, caso habitual en los procesos de intercambio de calor. Por ello en muchos textos, la Ec. (6.5) se toma como la ecuación diferencial de partida para obtener la distribución de temperaturas en los problemas de convección con fluidos newtonianos.

### Otras ecuaciones necesarias para resolver un problema de convección

Es necesario conocer el campo de velocidades,  $\vec{V}$ , y la presión,  $p$ , en el seno del fluido, lo que exige resolver las siguientes ecuaciones

— **Continuidad**

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0} \quad (6.7)$$

— **Momento** (o cantidad de movimiento)

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \text{div}(\tilde{\tau}) + \rho \vec{g} \quad (6.8)$$

Se supone que no actúan más fuerzas de volumen que la gravedad.

Si el fluido es **newtoniano** y su viscosidad  $\mu$  constante, se obtiene la ecuación de Navier–Stokes (que realmente son tres)

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho \vec{g}} \quad (6.9)$$

Estas ecuaciones hay que resolverlas antes (convección forzada) de la de la energía térmica, o simultáneamente (convección natural) con la de la energía térmica, para obtener la velocidad y la presión y poder usarlas en la ecuación de la energía térmica.

### Ecuación de las especies químicas

Cuando un fluido no está compuesto por una sustancia pura, sino por una mezcla de diversas sustancias que pueden difundir entre sí o reaccionar químicamente aparece un conjunto de nuevas ecuaciones (una por especie química) que corresponden a la variación de cada especie química presente.

Estas ecuaciones son semejantes a la de conservación de la masa (continuidad) pero teniendo en cuenta que la masa de cada especie no se conserva en el mismo sentido que en la ecuación (6.7), sino que varía debido a la difusión y a la reacción química, que son los términos que aparecen en el miembro derecho de la ecuación (6.10).

Así para la especie química A en una **mezcla binaria A–B**, teniendo en cuenta que la difusión de las especies químicas viene dada por la ley de Fick ( $\vec{G}_A = -D_{AB}\rho\vec{\nabla}\omega_A$ ), se tiene [2]

$$\boxed{\frac{\partial\rho_A}{\partial t} + \text{div}(\rho_A\vec{v}) = \text{div}(\rho D_{AB}\vec{\nabla}\omega_A) + r_A} \quad (6.10a)$$

donde:

$\vec{G}_A$  flujo másico de la especie A (kg A/s·m<sup>2</sup>)

$\rho_A$  concentración de la especie A (kg A/m<sup>3</sup>).

$D_{AB}$  coeficiente de difusión binario (propiedad de transporte) (m<sup>2</sup>/s).

$\omega_A$  fracción másica de A;  $\omega_A \equiv \rho_A/\rho$ .

$r_A$  generación química de A (kg A/s·m<sup>3</sup>).

También se le puede dar la misma forma que las ecuaciones de la energía y del momento, con la derivada sustancial

$$\boxed{\frac{D\rho_A}{Dt} = -\rho_A\text{div}\vec{V} + \text{div}(\rho D_{AB}\vec{\nabla}\omega_A) + r_A} \quad (6.10b)$$

---

## Resolución de las ecuaciones de la convección

---

Las ecuaciones anteriores son manifiestamente complejas e imposibles de resolver de forma general, por lo que se van resolviendo en cada caso imponiendo una serie de simplificaciones. Antes de comentar cuales son las simplificaciones usadas habitualmente es importante hacer una primera consideración sobre el régimen de circulación del fluido.

Es sabida la distinción entre régimen laminar y turbulento, cuya diferencia principal estriba en que en el régimen laminar el fluido circula ordenadamente, existen las líneas de corriente a lo largo de las cuales se mueven las partículas fluidas y el campo de velocidades o es constante o varía en el tiempo de forma moderada.

Por contra en el flujo turbulento, el fluido circula desordenadamente con cambios erráticos en el valor y sentido de las variables ( $\vec{V}$ , p, T,...) de manera que cualquiera de ellas tiene dos componentes

---

## Resolución de las ecuaciones de la convección

---

$$\vec{V} = \vec{V}_{\text{med}} + \vec{V}' \quad ; \quad T = T_{\text{med}} + T' \quad ; \quad p = p_{\text{med}} + p'$$

un valor medio temporal (constante o moderadamente variable) y una fluctuación aleatoria muy difícil de determinar. Estos términos hacen imposible por el momento resolver analíticamente las ecuaciones en régimen turbulento y solamente existen algunas **soluciones numéricas** para **modelos turbulentos**, donde se le asignan supuestas dependencias a los términos aleatorios. La experimentación posterior indicará si las funciones asignadas a estos términos son adecuadas o no.

*En régimen turbulento no existe nunca una situación estacionaria en sentido estricto*

Hay que añadir que en el régimen turbulento existe una mayor mezcla del fluido con lo que los perfiles son más uniformes en el seno del fluido y los gradientes mayores cerca de las superficies sólidas, aumentando los intercambios de calor y de las otras magnitudes (momento, masa,...), como se verá más adelante.

Recordar también que el régimen al que se encuentra sometido un fluido depende del número de Reynolds,  $Re_x \equiv ux/v$ , donde  $u$  y  $x$  son una velocidad y distancia características del problema y que en cada caso existe un valor crítico de este número,  $Re_c$ , que marca la transición de un régimen a otro (frecuentemente difícil de determinar con precisión).

### Simplificaciones habituales

Incluso en el caso más simple de régimen laminar, las ecuaciones son tan complejas que para poder resolverlas hace falta introducir una serie de aproximaciones.

Las más habituales son:

- Proceso estacionario.
- Propiedades termofísicas ( $\rho$ ,  $c_p$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $D_{AB}$ , ...) constantes. El caso de  $\mu$  se discute luego. Los cambios de fase exigen trato especial.
- Ausencia de fuerzas de volumen, salvo la gravedad para convección natural.
- Frecuentemente en los problemas no existe término de generación o fuente ( $q'''$ ,  $r_A$ , ... = 0).
- También habitualmente, salvo que se trate de fluidos muy viscosos, se suele despreciar la disipación viscosa en la ecuación de la energía ( $\mu\phi \approx 0$ ).

## Capa límite. Concepto

Una herramienta fundamental que permite simplificar la resolución de problemas de intercambio (calor, momento, masa,...) entre fluidos y superficies generalmente sólidas (existen excepciones, como se verá) es el concepto de capa límite (C.L.).

Este concepto fue introducido [3] por Prandtl en 1904 y desarrollado posteriormente por otros: Blasius (1907), Pohlhausen (1921), Schlichting (1979) para la resolución de problemas particulares (Blasius y Pohlhausen) como

- Flujo laminar forzado sobre una placa plana
- Flujo laminar natural sobre una placa plana vertical

o para una mayor elaboración (Schlichting).

El gran descubrimiento de Prandtl consistió en [4] reconocer que la zona donde se aprecia la influencia de la viscosidad y de las otras interacciones (calor, masa,...) queda, en la mayoría de los casos, confinada a una región muy delgada del fluido adyacente al sólido, pudiéndose tratar el resto del fluido como no viscoso, es decir, según los métodos del flujo potencial.

Esta región muy delgada se conoce como capa límite, y es su delgadez, respecto de las dimensiones de la superficie, la que introduce importantes simplificaciones en las ecuaciones de variación.

Según el aspecto que se considere se habla de:

### *Capa límite de velocidad (o hidrodinámica)*

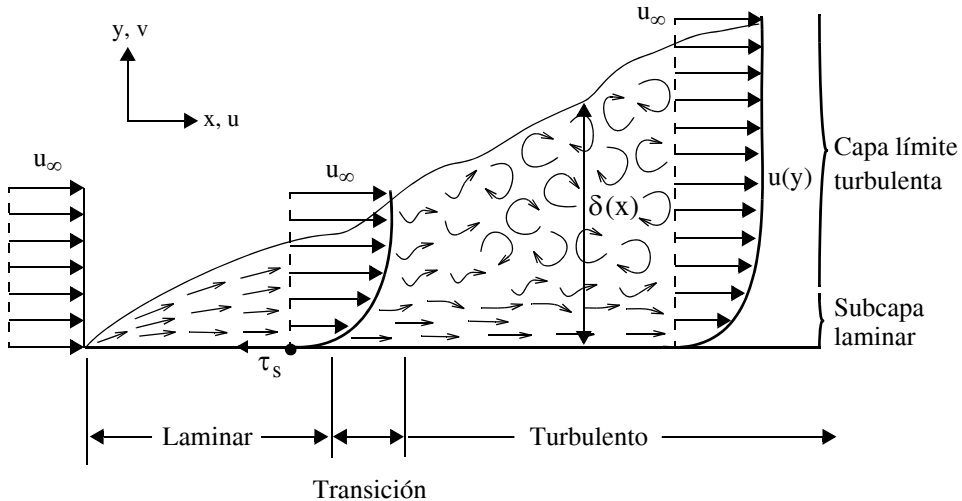
Es la zona adyacente a la superficie que sufre los efectos de la viscosidad y donde la velocidad del fluido cambia de un valor **nulo** (condición de **no deslizamiento**) en la zona de contacto con la superficie hasta el valor del fluido libre (suficientemente lejos de la superficie, de manera que la **interacción sólido-fluido no se nota**),  $u_\infty$ .

En la figura 6.1 se muestra la capa límite de velocidad para un fluido que tiene una velocidad libre  $u_\infty$  y que desliza sobre una placa plana.

Se observa como la capa límite se va desarrollando (penetrando en el interior del fluido) y va aumentando su espesor  $\delta(x)$ . Resulta muy útil el constatar que **el crecimiento de la C.L. es semejante a la propagación del calor en conducción**

transitoria en un sólido semiinfinito y ello ha facilitado la búsqueda de la solución de ciertos problemas de convección, como se verá en el capítulo siguiente.

FIGURA 6.1 Desarrollo de la capa límite de velocidad sobre una placa plana.



Interesa **principalmente** el esfuerzo cortante en la superficie,  $\tau_s$ , y su expresión adimensional llamado coeficiente (o factor) de fricción (superficial).

$$\tau_s = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \sim \mu \frac{u_\infty}{\delta} \quad (6.11a)$$

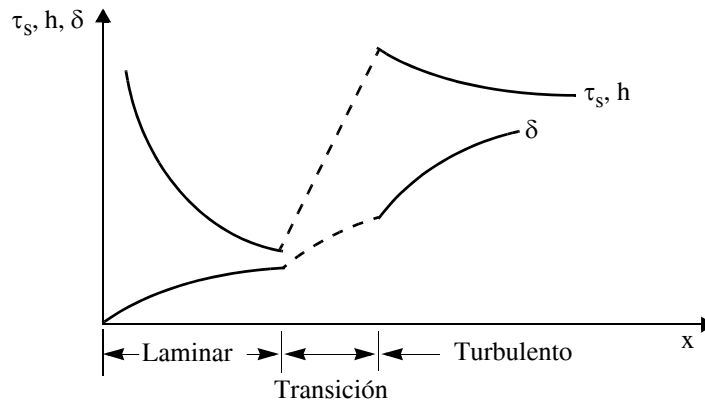
$$C_f \equiv \frac{\tau_s}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} \quad (6.11b)$$

así como el espesor  $\delta$  de la capa límite hidráulica definido por

$$\delta \text{ (tal que) } u(y = \delta) = 0.99 u_\infty$$

En la figura 6.2 se observa la evolución del esfuerzo cortante (o coeficiente de intercambio de momento),  $\tau_s$ , del coeficiente de intercambio de calor,  $h$ , y del espesor  $\delta$  para ambos regímenes y se ve como aumentan bruscamente en el cambio de régimen, debido a los perfiles más abruptos cerca de la superficie en el régimen turbulento.

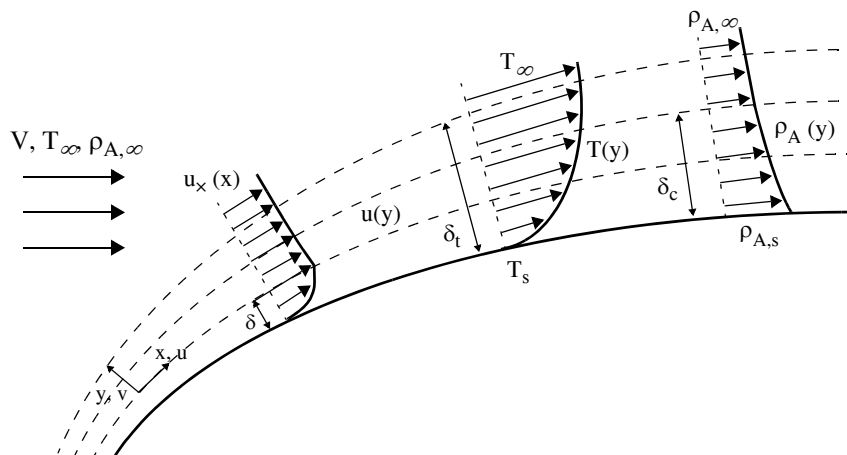
**FIGURA 6.2** Variación del espesor de la capa límite de velocidad y de los coeficientes de intercambio de momento,  $\tau_s$ , y de calor,  $h$ , en el flujo sobre una placa plana.



*Capas límites de temperatura (o térmica) y de concentraciones*

Análogamente, si existe una diferencia de temperaturas entre el fluido libre,  $T_\infty$ , y la superficie,  $T_s$ , o de concentraciones,  $\rho_{A,\infty}$  y  $\rho_{A,s}$ , se establecen unas capas límite térmica o de concentración, donde se localiza el efecto de la interacción. Esta situación se muestra en la figura 6.3, donde debe observarse como la velocidad de acercamiento del fluido  $V$  es distinta de la velocidad fuera de la capa límite hidrodinámica  $u_x(x)$  que no es constante si la superficie es curva.

**FIGURA 6.3** Desarrollo de las capas límite de velocidad, temperatura y concentración sobre una superficie arbitraria.



---

**Resolución de las ecuaciones de la convección**

---

En el caso de la capa límite térmica se tiene

1. El espesor  $\delta_t$  se define como la distancia desde la superficie hasta el punto del fluido donde  $(T - T_s)/(T_\infty - T_s) = 0.99$ .
2. Es interesante y útil conectar todo este desarrollo con el planteamiento histórico que se comentará más adelante.

Para ello basta observar que el fluido que toca a la superficie está quieto ( $\vec{V} = 0$ ) por la condición de no deslizamiento. Allí por tanto el calor se intercambia por **conducción**, con lo que viene dado por

$$q''_s = -\lambda_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (6.12)$$

donde  $\lambda_f$  es la conductividad térmica del **fluido** en la zona de contacto.

Por otro lado, en el planteamiento convencional (histórico), que se ve un poco más adelante, se postula que existe una relación entre el flujo de calor en la superficie,  $q''_s$ , y la diferencia de temperaturas de la superficie,  $T_s$ , y del fluido,  $T_f$  en general y  $T_\infty$  para una capa límite. Esta relación se manifiesta en la expresión (6.19) que no es más que la definición del llamado coeficiente de convección  $h$ .

Igualando el flujo de calor de la ecuación (6.12) con el de la definición (6.19) resulta

$$h = \frac{-\lambda_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{T_s - T_\infty} \quad (6.13)$$

**Análogamente a  $\tau_s$ ,  $h$  depende del perfil de  $T$  cerca de la superficie.**

En el caso de la capa límite de concentraciones, el desarrollo es semejante al anterior, llegando a

$$h_m = \frac{-D_{AB} \left. \frac{\partial \rho_A}{\partial y} \right|_{y=0}}{\rho_{A,s} - \rho_{A,\infty}} \quad (6.14)$$

siendo  $G_A = -D_{AB} \left. \frac{\partial \rho_A}{\partial y} \right|_{y=0}$  el **flujo de masa** de la especie A ( $\text{kg/s}\cdot\text{m}^2$ ) transferido desde la superficie según la **Ley de Fick**.

### Aproximaciones de capa límite

El concepto de capa límite permite introducir **aproximaciones adicionales** que facilitan la resolución de las ecuaciones diferenciales. Estas simplificaciones, derivadas de la **delgadez** de la **capa límite**, se resumen en:

$$v \ll u$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} \ll \frac{\partial M}{\partial y} \quad M = u, T, \rho_A$$

donde

x es la dirección de desarrollo de la capa límite.

y es la dirección perpendicular a la superficie sobre la que se desarrolla la capa límite.

u es la componente de velocidad en la dirección x

v es la componente de velocidad en la dirección y.

Es decir, las variaciones de los campos (velocidad, temperatura, concentración,...) son importantes en la delgada zona de la capa límite desde el fluido libre hasta la superficie sólida y mucho menores en la dirección de avance del fluido.

### Ecuaciones simplificadas en dos dimensiones

Aplicando todas las simplificaciones anteriores, las ecuaciones a resolver en régimen laminar para una situación bidimensional (frecuente) son:

#### Continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.15)$$

---

## Resolución de las ecuaciones de la convección

---

### Momento

$$\text{Eje x: } \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{Advección del momento}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_m}{\partial x}}_{\text{Gradiente de presión}} + \underbrace{v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{Fricción (difusión del momento)}} + \underbrace{g \frac{(\rho_\infty - \rho)}{\rho}}_{\text{Flotación}} \quad (6.16a)^\dagger$$

$$\text{Eje y: } \frac{\partial p}{\partial y} \cong 0 \Rightarrow p = p(x) \quad (6.16b)$$

### Energía térmica

$$\underbrace{u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}}_{\text{Advección del calor}} = \underbrace{a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}_{\text{Conducción (difusión) del calor}} \quad (6.17)$$

### Especies químicas

Especie A (en una mezcla binaria AB):

$$\underbrace{u \frac{\partial \rho_A}{\partial x} + v \frac{\partial \rho_A}{\partial y}}_{\text{Advección de A}} = \underbrace{D_{AB} \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial y^2}}_{\text{Difusión de A}} \quad (6.18)$$

---

†. La presión se ha descompuesto en dos términos:

- Hidrostático para el fluido en reposo,  $p_h$ , tal que  $\vec{\nabla} p_h = \rho_\infty \vec{g}$
- El debido al movimiento del fluido,  $p_m$ .

Por otro lado se ha tomado el eje X en dirección vertical ascendente.

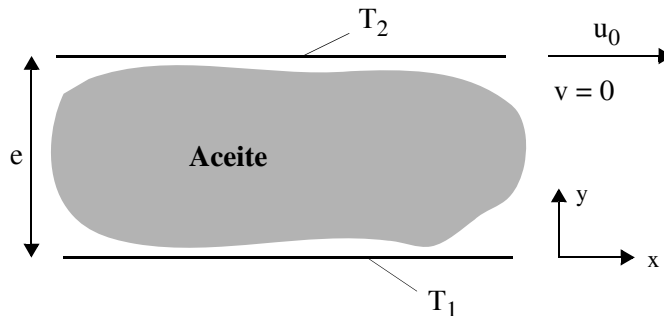
### Ejercicio

Como ejercicio sencillo para entender que las ecuaciones anteriores (6.15) a (6.18) implican un conjunto de simplificaciones que no siempre se pueden aplicar, considérese un flujo de Couette y aplíquese al estudio del comportamiento térmico del aceite contenido en un rodamiento.

El pequeño espesor de la capa de aceite permite considerar a las partes móviles como dos placas planas infinitas que se mueven en paralelo con una velocidad relativa  $u_0$ . (Figura 6.4).

---

**FIGURA 6.4** Representación simplificada de un rodamiento



Esta situación es una de las que se pueden estudiar de forma sencilla en Mecánica de Fluidos. Se denomina **flujo de Couette**, y la solución del campo de velocidades es

$$u = u_0 \frac{y}{e}$$

Aquí se trata de estudiar el aspecto térmico y determinar tanto

- El perfil de temperaturas del aceite (degradación), como
- El calor intercambiado en cada placa (necesidades de refrigeración).

Para ello deben obtenerse ambas variables aplicando en primer lugar la Ec. (6.17) y después incluyendo el término de disipación viscosa debido a la alta viscosidad de los aceites. Para poder comparar numéricamente, tómesese el aceite de motor y considérese que  $u_0 = 12$  m/s,  $e = 2.5$  mm,  $T_1 = 20$  °C y  $T_2 = 40$  °C.

La solución a un problema semejante puede encontrarse en la referencia 5 (p. 337).

## Planteamiento histórico [3], [6]

---

- A principios del S. XVIII, Isaac Newton estudia la velocidad a la que se enfría un cuerpo caliente expuesto al aire ambiente.

Aunque utiliza la palabra “calor”, el significado que para él tiene esta palabra es el de temperatura. No obstante, Newton deduce que la *pérdida de temperatura (en términos actuales) por unidad de tiempo de un objeto caliente es proporcional a la diferencia de temperaturas entre el objeto y el ambiente.*

Este es el primer planteamiento del problema de la Convección.

- Hay que esperar un poco, hasta mediados del S. XVIII para que Joseph Black establezca la **distinción** entre **calor** y **temperatura**, aspecto esencial para el avance de las Ciencias Térmicas.
- Posteriormente debe pasar otro medio siglo hasta principios del S. XIX para que Joseph Fourier dé otro paso de gigante estableciendo el concepto de **flujo de calor**, concepto rechazado durante más de una década por los mayores físicos del momento (Laplace, Biot, Poisson, ...).

Él mismo define el **coeficiente de convección**  $h$  (para él conductividad exterior) entre una superficie sólida a una temperatura  $T_s$  y un fluido exterior a otra temperatura  $T_f$  como

$$h \equiv \frac{q''}{T_s - T_f} \quad (6.19)$$

e indica que  $h$  debe determinarse por observación (experimentalmente).

Este planteamiento, simple y profundo a la vez, se ha mantenido y sigue vigente hoy día junto a otros procedimientos, para manejar los problemas de convección.

Lo que se hace es centrar los esfuerzos en la búsqueda del coeficiente  $h$  que resume la complejidad de la convección (recuérdense las ecuaciones diferenciales); pero  $h$  puede determinarse experimentalmente tal y como decía Fourier, siendo ésta la principal vía de obtención de valores de  $h$  hasta la fecha, aunque en los últimos años en competencia con los métodos numéricos.

No obstante, la determinación experimental exige también ciertas simplificaciones, que se realizan principalmente a través del Análisis Dimensional.

## Análisis dimensional

---

Dado que la Convección es un fenómeno complejo (como se aprecia en las ecuaciones diferenciales que la gobiernan) la determinación experimental directa de  $h$  es costosa porque depende de muchas variables:

- Régimen del flujo
- Geometría de la superficie
- Propiedades del fluido:  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $D_{AB}$
- Velocidad del fluido
- Condiciones de contorno
- etc.

Afortunadamente la complejidad se reduce apreciablemente mediante la aplicación de un método llamado **Análisis Dimensional** [7].

En esencia, este procedimiento dice que si un fenómeno depende de  $n$  variables dimensionales, por el análisis dimensional la dependencia se reduce a  $n-k$  variables adimensionales, donde  $k$  es el número de dimensiones independientes (primarias:  $M$ ,  $L$ ,  $t$  y  $T$  en el caso de fenómenos térmicos).

Esquemáticamente:

$$\left. \begin{array}{l} n \text{ Variables dimensionales} \\ k \text{ Dimensiones independientes} \end{array} \right\} (n - k) \text{ Variables adimensionales}$$

Existen varias técnicas para aplicar este procedimiento, entre las cuales destacan las derivadas del **teorema**  $\Pi$  de **Buckingham**. Sin embargo aquí se va a utilizar otra.

### Adimensionalización de las Ecuaciones Diferenciales de Variación

Si al conjunto de ecuaciones diferenciales simplificadas (6.15) a (6.18), en dos dimensiones (suficiente para el objetivo propuesto), se le aplica la siguiente adimensionalización de variables

---

**Análisis dimensional**

---

$$x^* \equiv \frac{x}{L} \quad ; \quad y^* \equiv \frac{y}{L} \quad ; \quad L: \text{dimensión geométrica característica}$$

$$u^* \equiv \frac{u}{u_\infty} \quad ; \quad v^* \equiv \frac{v}{u_\infty} \quad ; \quad p^* \equiv \frac{p}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2}$$

$$T^* \equiv \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s}$$

$$\rho_A^* \equiv \frac{\rho_A - \rho_{A,s}}{\rho_{A,\infty} - \rho_{A,s}}$$

se obtienen las siguientes ecuaciones adimensionales

- Continuidad

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (6.20)$$

- Momento en el eje X

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{dp_m^*}{dx^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{Gr}{Re^2} T^* \quad (6.21)$$

- Energía térmica

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re \cdot Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (6.22)$$

- Especies químicas: Especie A en la mezcla binaria AB

$$\frac{u^* \partial \rho_A^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \rho_A^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re \cdot Sc} \frac{\partial^2 \rho_A^*}{\partial y^{*2}} \quad (6.23)$$

apareciendo cuatro grupos o **números adimensionales**

$$\text{N}^\circ \text{ de Reynolds: } Re \equiv \frac{u_\infty L}{\nu}$$

$$\text{N}^\circ \text{ de Prandtl: } Pr \equiv \frac{\nu}{a} \equiv \frac{\mu c_p}{\lambda}$$

$$\text{N}^\circ \text{ de Schmidt: } Sc \equiv \frac{\nu}{D_{AB}}$$

$$\text{N}^\circ \text{ de Grashof: } Gr \equiv \frac{g L^3 (\rho_\infty - \rho_s) / \rho_s}{\nu^2} = \frac{g \beta (T_s - T_\infty) L^3}{\nu^2}$$

siendo:  $\beta \equiv -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$  el coeficiente de dilatación isobara. El significado físico

de estos y de otros números adimensionales se indica en una tabla más amplia que aparece más adelante (p. 146).

### Forma funcional de las soluciones

Las dependencias que presentan funciones y variables vienen dadas por las variables y parámetros que aparecen en las ecuaciones anteriores e indican que los campos tienen las siguientes relaciones funcionales

$$u^* = f_1 \left( x^*, y^*, \frac{dp_m^*}{dx^*}, Re, Pr, Gr \right) \quad (6.24)$$

$$T^* = f_2 \left( x^*, y^*, \frac{dp_m^*}{dx^*}, Re, Pr, Gr \right) \quad (6.25)$$

$$\rho_A^* = f_3 \left( x^*, y^*, \frac{dp_m^*}{dx^*}, Re, Pr, Gr, Sc \right) \quad (6.26)$$

Los coeficientes de intercambio superficie–fluido, según esto, dependen de

- Momento: Coeficiente de fricción

$$C_f = \frac{2}{Re} \left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = f_4 \left( x^*, \frac{dp_m^*}{dx^*}, Re, Pr, Gr \right) \quad (6.27)$$

- Calor: Coeficiente de convección

$$h = \frac{\lambda_f}{L} \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \quad (6.28)$$

La naturaleza de  $h$  y  $C_f$  son distintas ya que el primero tiene dimensiones y el segundo no. Siguiendo el objetivo del análisis dimensional de relacionar variables adimensionales, se busca expresar  $h$  de forma adimensional, lo que se obtiene fácilmente reorganizando la relación (6.28)

$$\text{Nu} \equiv \frac{hL}{\lambda_f} = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \quad (6.29)^\ddagger$$

apareciendo el **número de Nusselt** que es **el más importante en convección del calor**. De la dependencia funcional de  $T^*$  se deduce la de  $\text{Nu}$

$$\text{Nu} = f_5 \left( x^*, \frac{dp_m^*}{dx^*}, \text{Re}, \text{Gr}, \text{Pr} \right) \quad (6.30)$$

**Interpretación adicional de Nu.** Indica en cierto modo la relación *convección/conducción* en el transporte de calor en el seno del fluido, es decir, cuanto se mejora la transmisión de calor en un fluido por el hecho de moverse.

- Especies químicas: Coeficiente de convección másico

$$h_m = \frac{D_{AB}}{L} \left. \frac{\partial p_A^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \quad (6.31)$$

de donde surge, análogamente al transporte del calor, el número de Sherwood

$$\text{Sh} = f_6 \left( x^*, \frac{dp_m^*}{dx^*}, \text{Re}, \text{Gr}, \text{Pr}, \text{Sc} \right) \quad (6.32)$$

Las dependencias siguen pareciendo complicadas por aparecer muchas variables independientes, sin embargo en la práctica se reducen por los siguientes motivos:

1. Como  $p_m^*$  no depende de  $y^*$ , el valor de  $\frac{dp_m^*}{dx^*}$  se obtiene fuera de la capa límite, en condiciones donde el flujo es más simple (potencial) y dependiendo de la geometría, con lo cual **fijada la geometría**, éste término paramétrico **pasa a ser constante** y no hay que considerarlo.

---

‡. En lo sucesivo, cuando aparezca la relación entre el número de Nusselt,  $\text{Nu}$ , y el coeficiente de convección,  $h$ , se omitirá el subíndice  $f$  de la conductividad térmica, sobreentendiéndose que se refiere al fluido.

2. El número de Reynolds está ligado a la existencia de movimiento forzado en el fluido libre (convección forzada),  $u_\infty \neq 0$ . El número de Grashof, Gr, está ligado a la existencia de corrientes de flotación en la capa límite (convección natural).

En muchas ocasiones, uno de los dos fenómenos es despreciable, y su correspondiente número adimensional desaparece de las ecuaciones.

Según se aprecia en la Ec. (6.21) de la velocidad, el valor relativo lo indica el cociente  $Gr/Re^2$ , resultando [8] la siguiente clasificación:

- $\frac{Gr}{Re^2} \gg 1$  (en general  $\geq 10^4$ ): **Convección natural** (pura).

$$Nu = f_5(x^*, Gr, Pr) \text{ para cada geometría.} \quad (6.33)$$

$$Sh = f_6(x^*, Gr, Pr, Sc) \text{ para cada geometría.} \quad (6.34)$$

$C_f$  no está definido ( $u_\infty = 0$ ) y no suele considerarse (no hay equipo de impulsión a calcular).

- $\frac{Gr}{Re^2} \ll 1$  (en general  $\leq 10^{-2}$ ): **Convección forzada** (pura).

$$C_f = f_4(x^*, Re) \text{ para cada geometría.} \quad (6.35)$$

$$Nu = f_5(x^*, Re, Pr) \text{ para cada geometría.} \quad (6.36)$$

$$Sh = f_6(x^*, Re, Sc) \text{ para cada geometría.} \quad (6.37)$$

- $\frac{Gr}{Re^2} \cong 1$ : **Convección mixta** (o **combinada**).

Relaciones generales (6.27), (6.30) y (6.32) para  $C_f$ , Nu y Sh.

En la práctica, se puede operar de otro modo más simple como se verá en la lección de Convección Natural, donde se hará una breve consideración sobre este tipo de convección.

3. En muchas ocasiones no interesa el valor **local** (en cada punto x) de los coefi-

cientes de intercambio, sino exclusivamente, el valor **global** o **promedio** del coeficiente de intercambio (indicado por una barra horizontal encima del mismo) entre la superficie y el fluido.

En este caso, las relaciones buscadas son:

- **Convección natural**

$$\overline{Nu} = f_8(Gr, Pr) \quad (6.38)$$

$$\overline{Sh} = f_9(Gr, Pr, Sc) \quad (6.39)$$

- **Convección forzada**

$$\overline{C}_f = f_7(Re) \quad (6.40)$$

$$\overline{Nu} = f_8(Re, Pr) \quad (6.41)$$

$$\overline{Sh} = f_9(Re, Sc) \quad (6.42)$$

Estas relaciones son mucho más simples, porque abarcan a un número mucho menor de variables y permiten sobre todo hacer experimentos a un costo no muy alto; aunque, por el amplio uso que se ha hecho de ellas y por utilizar una misma herramienta conceptual se utilizan también en los desarrollos puramente teóricos.

Normalmente arrastran **errores apreciables** (del 5 al 10%) y en algunos casos hasta de un 20 ó 25%.

## Fundamentos de Convección del Calor

**TABLA 6.1** Relación de los grupos adimensionales más importantes en transferencia de calor y masa.

Grupo	Definición	Aplicación	Interpretación
Número de Biot; Bi	$\frac{hL}{\lambda_s}$	conducción transitoria	Cociente entre las resistencias a la conducción en el interior de un sólido y a la convección con un fluido exterior
Número de Bond, Bo	$\frac{g(\rho_l - \rho_v)L^2}{\sigma}$	ebullición	Cociente entre las fuerzas gravitacionales y de tensión superficial
Coefficiente de fricción (superficial), $C_f$	$\frac{\tau_s}{\rho V^2/2}$	flujo de fluidos	Esfuerzo cortante superficial adimensional
Número de Eckert, Ec	$\frac{V^2}{c_p(T_s - T_\infty)}$	convección en fluidos muy viscosos	Cociente entre la energía cinética del flujo y la diferencia de entalpías entre la superficie y el fluido
Número de Fourier, Fo	$\frac{at}{L^2}$	conducción transitoria	Tiempo adimensional
Factor de fricción (en conductos), f	$\left  \frac{dp}{dx} \right  D / \frac{1}{2} \rho u_m^2$	flujo interno de fluidos	Caída de presión adimensional
Número de Grashof, Gr	$\frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu^2}$	convección natural	Cociente entre las fuerzas de flotación y las viscosas
Factor de Colburn, $j_H$	$St \cdot Pr^{2/3}$	convección de calor	Coefficiente adimensional de transferencia de calor por convección
Factor de Colburn, $j_m$	$St_m \cdot Sc^{2/3}$	convección de materia	Coefficiente adimensional de transferencia de masa por convección
Número de Jakob, Ja	$\frac{c_p(T_s - T_{sat})}{h_{lg}}$	cambio de fase líquido-vapor	Cociente entre el calor sensible y el calor latente absorbido durante un cambio de fase líquido-gas
Número de Lewis, Le	$\frac{a}{D_{AB}}$	transporte conjunto de masa y energía	Cociente entre las difusividades térmica y de masa
Número de Nusselt, Nu	$\frac{hL}{\lambda_f}$	convección de calor	Expresión adimensional de a
Número de Peclet, Pe	$Re \cdot Pr \equiv \frac{VL}{a}$	convección en fluidos de Pr bajo	Relación entre el calor transmitido por advección y por conducción
Número de Prandtl, Pr	$\frac{\nu}{a} \equiv \frac{\mu c_p}{\lambda}$	convección	Cociente entre las difusividades de momento y térmica
Número de Reynolds, Re	$\frac{VL}{\nu}$	flujo forzado de fluidos	Cociente entre las fuerzas de inercia y las viscosas
Número de Rayleigh, Ra	$Gr \cdot Pr$	convección natural	Relación entre el calor transmitido por la advección debida a la flotación y por conducción
Número de Schmidt, Sc	$\frac{\nu}{D_{AB}}$	convección de materia	Cociente entre las difusividades de momento y masa
Número de Sherwood, Sh	$\frac{h_m \cdot L}{D_{AB}}$	convección de materia	Expresión adimensional de $a_m$
Número de Stanton, St	$\frac{Nu}{Re \cdot Pr} \equiv \frac{h}{\rho V c_p}$	convección de calor	Cociente entre los coeficientes de transporte de calor por convección y advección
Número de Stanton para el transporte de masa, $St_m$	$\frac{Sh}{Re \cdot Sc} \equiv \frac{h_m}{V}$	convección de materia	Cociente entre los coeficientes de transporte de masa por convección y advección

## Tratamiento de las propiedades del fluido

---

Se ha indicado anteriormente que una manera de simplificar la resolución de las ecuaciones diferenciales es suponer que las propiedades termofísicas del fluido son constantes.

Sin embargo realmente dependen de la temperatura  $T$  y de la presión  $p$ , fundamentalmente de la temperatura, y como en un problema de transmisión de calor ésta varía, las propiedades también lo hacen. Afortunadamente algunas dependen débilmente de  $T$  ( $c_p$  en general si  $T$  no varía mucho,  $\rho$  en líquidos,  $\lambda$  en muchos casos) y no se comete un error importante al considerarlas constantes.

El caso de la viscosidad es muy distinto, ya que su dependencia con  $T$  es fuerte, y en general hay que tenerla en cuenta.

Por tanto expresiones del tipo

$$\overline{Nu} = f(Re, Pr) \quad \text{Convección forzada}$$

son **estrictamente válidas** para el llamado **flujo isotermo**, en el cual los saltos de temperatura,  $\Delta T = T_s - T_\infty$ , no son grandes. En este caso, las propiedades se calculan en algún valor medio representativo de la temperatura  $T_r = T_\infty + J(T_s - T_\infty)$ , siendo  $J$  un parámetro a determinar por el experimentador.

Es frecuente el uso de la llamada temperatura de película

$$T_p = \frac{T_s + T_\infty}{2} \quad \text{donde } J = \frac{1}{2}$$

Esta fue una práctica muy utilizada hasta la década de los 60. Posteriormente y habida cuenta de la importancia de la dependencia  $\mu(T)$ , se prefirió buscar las propiedades del fluido a  $T_\infty$ , —o a la temperatura media  $T_m$  para flujos confinados, que se definirá en la lección de Convección Interior—, y añadir un término corrector para dar cuenta de la dependencia  $\mu(T)$  en particular, o, más en general, de la dependencia de todas las propiedades con  $T$ .

Se puede demostrar [9] fácilmente que un desarrollo en serie de Taylor sobre el término  $\text{div}(\tau)$  de la ecuación del momento cortado en el primer término, conduce a la aparición del término corrector  $(\mu_r/\mu_s)$ , siendo  $\mu_r$ : viscosidad a  $T_r$ , y  $\mu_s$ : viscosidad a  $T_s$ .

Así pues la correlación (experimental en general) buscada es ahora del tipo

$$\boxed{\overline{Nu} = f\left(Re, Pr, \frac{\mu_r}{\mu_s}\right)} \quad (6.43)$$

El término corrector ( $\mu_r/\mu_s$ ) se usa **preferentemente con líquidos**.

En otros casos se usa el término corrector  $((Pr)_r/(Pr)_s)$ , ya que Pr engloba  $\mu$ ,  $\lambda$  y  $c_p$ , o directamente  $(T_r/T_s)$ .

El término corrector  $(T_r/T_s)$  se usa **preferentemente con gases**.

En cualquier caso, siempre **es necesario saber** en cada fórmula utilizada, **en qué valor de la temperatura deben calcularse las propiedades**.

Esto lo indica el experimentador, o, si la fórmula se ha obtenido teóricamente, se deduce de las condiciones matemáticas de su obtención.

## Condiciones de contorno

---

Otro aspecto del que se ha hablado poco hasta el momento, pero que no se puede olvidar en la resolución de ninguna ecuación diferencial, son las condiciones de contorno.

En este aspecto hay que distinguir entre los problemas de convección con Régimen Laminar y los de Régimen Turbulento.

Las situaciones de Régimen Laminar son de circulación ordenada del fluido con líneas de flujo perfectamente definidas, y a las que corresponden unas **condiciones matemáticas precisas** dadas por las ecuaciones diferenciales presentadas, que exigen para su resolución unas condiciones de contorno perfectamente definidas.

*En Régimen Laminar las condiciones de contorno influyen decisivamente en el resultado y deben ser establecidas y tenidas en cuenta, tanto en expresiones teóricas como experimentales.*

Por contra en Régimen Turbulento, lo que determina principalmente los fenómenos de transporte e intercambio superficie–fluido son procesos de mezcla y turbulencia mucho menos influidos por las condiciones en el contorno. Por ello

---

## Analogías entre los fenómenos de transporte

---

*En Régimen Turbulento, frecuentemente no se indica nada sobre las condiciones de contorno utilizadas en la obtención de las fórmulas.*

La única excepción la constituyen los fluidos de bajo valor del Pr (líquidos metálicos), en los cuales el perfil de temperaturas (en Régimen Turbulento) no es casi plano en su seno y de caída abrupta cerca de la superficie sólida, como pasa en fluidos de Pr superior (gases, líquidos no metálicos, aceites,...), sino más redondeado como en el Régimen Laminar. Por ello

Para líquidos metálicos, y en general fluidos de bajo valor de Pr, también en Régimen Turbulento es importante la condición térmica de contorno y debe ser indicada en cada expresión a utilizar.

## Analogías entre los fenómenos de transporte

---

Para un ingeniero, el interés de la capa límite se centra en la determinación de los parámetros adimensionales  $C_f$ , Nu y Sh, que le permiten conocer el esfuerzo cortante en la pared,  $\tau_s$ , y los coeficientes convectivos de transferencia de calor, h, y transferencia de masa,  $h_m$ . Por ello, son muy útiles las expresiones que ligan a  $C_f$ , Nu y Sh. Estas expresiones se pueden deducir de un estudio comparativo de las ecuaciones en la capa límite y reciben el nombre de *analogías de capa límite*. Se consideran dos.

### Primera: Analogía transferencia de calor – transferencia de masa

En el caso de la Convección Natural o Mixta, no existe analogía formal total entre el transporte de calor y de materia debido al **acoplamiento** de las ecuaciones de la velocidad y la temperatura, y no de las especies químicas (en realidad también existe, aunque al ser mucho más débil en general no se suele considerar en la mayor parte de los problemas ordinarios).

Sin embargo en Convección Forzada, al desaparecer el término  $\frac{Gr}{Re^2}T^*$  de la ecuación del momento, las Ecs. (6.22) y (6.23) de la temperatura y las especies químicas son **formalmente idénticas** ( $\rho_A^*$  juega el papel de  $T^*$  y Sc el de Pr). Por ello las funciones  $f_5$  y  $f_6$  de las expresiones (6.36) y (6.37) son idénticas y del mismo modo son iguales las funciones  $f_8$  y  $f_9$  de las expresiones (6.41) y (6.42).

De esta analogía formal se puede obtener una relación funcional entre h y  $h_m$

Se verá posteriormente que en general  $Nu$  y  $Sh$  son proporcionales a  $Pr^n$  y  $Sc^n$ , donde  $n$  está cercano a  $1/3$ . Por tanto los números  $Nu$  y  $Sh$  toman una forma factorizada que establece una sencilla relación entre ellos.

$$\left. \begin{aligned} Nu &= g(x^*, Re)Pr^n \\ Sh &= g(x^*, Re)Sc^n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{Nu}{Sh} = \left(\frac{Pr}{Sc}\right)^n = Le^{-n} \quad (6.44)$$

donde  $Le$  es el número de Lewis, típico de los problemas de transferencia conjunta de masa y energía, definido por

$$Le \equiv \frac{Sc}{Pr} = \frac{a}{D_{AB}}$$

Sustituyendo es fácil ver que

$$\boxed{\frac{h}{h_m} = \frac{\lambda}{D_{AB}L_e^n} = \rho c_p L_e^{1-n}} \quad (6.45)$$

Esta relación entre ambos coeficientes permite determinar uno a partir del otro.

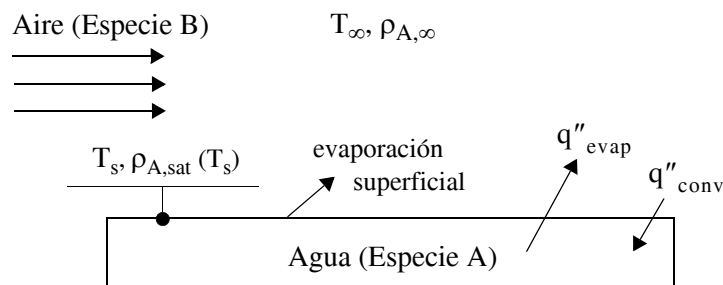
### Aplicación de la analogía anterior. El enfriamiento evaporativo (problema del botijo)

Uno de los procedimientos más antiguos para enfriar un ambiente es a través de la evaporación de un líquido, normalmente agua. Este procedimiento se ha revitalizado últimamente y es cada vez más utilizado en climatización.

Vamos a verlo con un ejemplo que permite utilizar la relación (6.45).

---

**FIGURA 6.5** Representación del fenómeno de la refrigeración evaporativa.



---

### Analogías entre los fenómenos de transporte

---

Sea una masa de agua (especie química A), sobre la que circula una corriente de aire (especie química B) capaz de provocar una evaporación superficial del agua, según se indica en la figura 6.5. En situación estacionaria, los dos mecanismos de transporte de calor existentes, evaporación y convección, deben transferir el mismo calor

$$q''_{\text{evap}} = q''_{\text{conv}}$$

$$h_m \left[ \rho_{A, \text{sat}}(T_s) - \rho_{A, \infty} \right] h_{lg} = h(T_\infty - T_s)$$



Hipótesis habitual de que el vapor adyacente a la superficie está saturado a  $T_s$  (equilibrio termodinámico)

Operando e incluyendo la relación entre  $h$  y  $h_m$  dada por la expresión (6.45), resulta

$$T_\infty - T_s = \frac{h_m}{h} \frac{\tilde{M}_A}{R} \left[ \frac{p_{A, \text{sat}}(T_s)}{T_s} - \frac{p_{A, \infty}}{T_\infty} \right] h_{lg} =$$

La mezcla AB se considera de gases ideales

$$= \frac{h_{lg} \tilde{M}_A}{\bar{R} \rho c_p L_e^{2/3}} \left[ \frac{p_{A, \text{sat}}(T_s)}{T_s} - \frac{p_{A, \infty}}{T_\infty} \right] = T_\infty - T_s \quad (6.46)$$

Efecto refrigerante

Las propiedades del gas (especie B):  $\rho$ ,  $c_p$  y  $L_e$  se evalúan a la media aritmética de la temperatura en la capa límite  $\frac{T_s + T_\infty}{2}$ . Las variables nuevas introducidas son:  $\tilde{M}_A$ , la masa molar de la especie A y  $\bar{R}$ , la constante universal de los gases.

## Segunda: Analogía de Reynolds

Relaciona los coeficientes de intercambio de momento (fricción), calor y materia (especies químicas) y **se aplica** solamente **a la convección forzada**.

Si los gradientes de presión son pequeños,  $\frac{dp^*}{dx^*} \cong 0$ , y  $Pr = Sc = 1$ , las ecuaciones adimensionales (6.21) a (6.23) son formalmente idénticas, luego

$$\left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \left. \frac{\partial \rho_A^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0}$$

de donde 
$$\boxed{C_f \frac{Re}{2} = Nu = Sh} \quad (6.47)$$

Se definen unos nuevos números adimensionales, llamados de Stanton

$$St \equiv \frac{Nu}{Re \cdot Pr} \quad , \quad St_m \equiv \frac{Sh}{Re \cdot Sc}$$

resultando 
$$\boxed{\frac{C_f}{2} = St = St_m} \quad (6.48)$$

Esta relación es la llamada **analogía de Reynolds**.

### Ampliación de la Analogía de Reynolds

La analogía de Reynolds es muy interesante (permite ahorrar muchas determinaciones experimentales), pero se aplica en condiciones muy restrictivas.

Para poder usarla cuando  $Pr, Sc \neq 1$ , hay que corregirla de la forma siguiente

$$\boxed{\frac{C_f}{2} = St \cdot Pr^{2/3} \equiv j_H} \quad (6.49a)$$

$$\boxed{\frac{C_f}{2} = St_m \cdot Sc^{2/3} \equiv j_m} \quad (6.49b)$$

donde  $j_H$  y  $j_m$  son los llamados factores de Colburn.

---

## Referencias

---

A estas relaciones se le llaman **analogía modificada de Reynolds** o **analogía de Chilton–Colburn**, que también es aproximadamente válida en flujo turbulento

aunque  $\frac{dp_m^*}{dx^*} \neq 0$ .

En los capítulos siguientes se verá como se utiliza para obtener expresiones que den el coeficiente de convección adimensional Nu a partir de correlaciones empíricas para  $C_f$ .

## Referencias

---

1. R. Mariño  
*Producción y transmisión industrial del calor*  
Saeta, 1941, Madrid.
2. R. B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lighfoot  
*Fenómenos de transporte*  
Reverté, Barcelona, 1978.
3. E. T. Layton, Jr and J. H. Lienhard (Ed's)  
*History of Heat Transfer*  
ASME, 1988, New York.
4. W. M. Kays  
*Convective Heat and Mass Transfer*  
Tata McGraw–Hill, New Delhi, 1979.
5. F. Incropera and D. de Witt  
*Fundamentals of Heat and Mass Transfer*  
Wiley, 1990.
6. E. F. Adiutori  
*A New Look at the Origin of the Heat Transfer Coefficient Concept*  
Ventuno Press, 1988.
7. J. A. de Andrés y Rodríguez Pomatta, S. Aroca  
*Calor y Frío Industrial - I*  
UNED, Madrid, 1984.
8. B. Gebhart  
*External Natural Convection Flows*  
Applied Mechanics Reviews, vol. 22, p. 691, 1969.
9. S. Whitaker  
AIChE Journal, Vol. 18, p. 361, 1972.

---

## Síntesis del capítulo

---

- La transmisión de calor por convección se puede considerar como una extensión de la conducción a los medios fluidos en los que el desplazamiento de los bloques macroscópicos transporta la energía térmica de un sitio a otro (advección).

El caso más importante es el de los fluidos convencionales, principalmente líquidos y gases, aunque también existen los llamados fluidos reológicos como pastas o plásticos fundidos. La ampliación de la ecuación de difusión del calor (ver el capítulo 2, Fundamentos de conducción) al caso de los fluidos se conoce como **ecuación de la energía térmica**, que se diferencia de la primera por la incorporación de los términos debidos al movimiento, principalmente el de advección y el de disipación viscosa (éste sólo importante para fluidos muy viscosos como los aceites y productos petrolíferos pesados).

- La resolución de un problema completo de convección exige resolver, además de la ecuación de la energía térmica, las ecuaciones que determinan el movimiento del fluido: la de continuidad y las del momento (una por cada dirección espacial del problema. Estas ecuaciones se resuelven antes (convección forzada) o simultáneamente (convección natural) que la ecuación de la energía térmica.
- El transporte de materia sigue **ecuaciones análogas** a las del transporte de calor (o energía térmica), pudiéndose intercambiar sus resultados. También hay analogía entre estos dos fenómenos y el transporte de momento, utilizándose la gran abundancia de información sobre mecánica de fluidos para obtener expresiones de convección.
- La complejidad matemática de las ecuaciones de la convección obligan a introducir multitud de simplificaciones para su posible resolución. Entre ellas, destaca el concepto de **capa límite**, que reduce la interacción del fluido con las superficies sólidas a una delgada película adyacente a la superficie.

---

## Síntesis del capítulo

---

- **Otro enfoque** de la convección del calor, que tiene un origen histórico distinto, es de tipo más experimental. En este enfoque se pretende **determinar** empíricamente **un coeficiente, h**, donde se resume toda la complejidad del fenómeno de la convección.

Ambos enfoques acaban, lógicamente, convergiendo y se puede formular la relación matemática entre ambos.

- El uso de **números adimensionales** simplifica mucho tanto los planteamientos teóricos como los experimentales.
- La distinción entre convección natural, forzada y mixta (ambas son importantes) se hace a través del cociente  $Gr/Re^2$ .
- En un problema de convección hay que **tener presente siempre**
  1. El régimen del flujo: laminar o turbulento.
  2. Las condiciones térmicas de contorno; muy influyentes en régimen laminar y muy poco en régimen turbulento.
  3. La temperatura a la que hay que calcular las propiedades del fluido.

---

# Cuestiones

---

1. Añadir los términos que faltan en la ecuación de difusión del calor

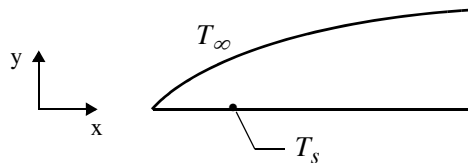
$$\operatorname{div}(\lambda \vec{\nabla} T) + q''' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

para obtener la ecuación de la energía térmica en convección.

Indicar el significado físico de todos los términos que aparecen en esta ecuación.

2. ¿Dónde son más fáciles de resolver las ecuaciones del transporte (continuidad, momento y energía), en convección natural o forzada? ¿Por qué?
3. ¿Cuáles son las aproximaciones de capa límite?
4. ¿Cómo se introduce en convección la dependencia de las propiedades del fluido con la temperatura?
5. Analizando la capa límite entre un fluido a  $T_\infty$  y una placa plana a  $T_s$ , deducir que el coeficiente local de convección  $h$  viene dado por la expresión

$$h = \frac{-\lambda_f \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}}{T_s - T_\infty}, \text{ donde } \lambda_f \text{ es la conductividad térmica del fluido}$$

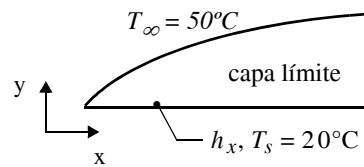


---

**Cuestiones**

---

6. Calcular el valor del coeficiente de convección local,  $h_x$ , entre una corriente de aire ( $\lambda = 0.02 \text{ W/m K}$ ) y un punto de una superficie sólida donde la capa límite presenta la siguiente distribución de temperaturas:



$$T(y) = 20 + 3 \cdot 10^5 y + 8 \cdot 10^{10} y^2 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

7. En un fluido que circula sobre una superficie, los perfiles de velocidad y temperatura tienen la forma siguiente:

$$u(y) = A + By + Cy^2 \quad y \quad T(y) = D + Ey + Fy^2$$

donde los coeficientes A hasta F son constantes. Obtener las expresiones para el coeficiente de fricción  $C_f$  y el coeficiente de convección  $h$  en función de  $u_\infty$ ,  $T_\infty$ , las propiedades del fluido y los coeficientes que correspondan.

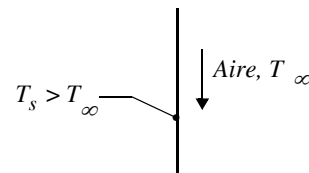
8. Una corriente de agua a  $15^\circ\text{C}$  circula sobre una de las caras de una pared de acero al carbono ( $\lambda = 64 \text{ W/m K}$ ) cuya temperatura es  $T_1 = 30^\circ\text{C}$ , mientras que la otra cara se encuentra a  $T_2 = 80^\circ\text{C}$ . La pared tiene un espesor de  $0.30 \text{ m}$  y la situación es estacionaria.

¿Cuál es el coeficiente de convección,  $h$ , entre el agua y la pared de acero?

9. Un chorro circular de gas a  $T_\infty$  se dirige perpendicularmente sobre una placa circular a temperatura uniforme  $T_s$  y de radio  $R$ . Como el fenómeno tiene simetría axial, el coeficiente local de convección tiene una dependencia radial de la forma  $h(r) = A + Br^n$ , donde A, B y n son constantes.

Establecer la expresión que da el calor intercambiado entre el gas y la placa, en función de las variables  $T_\infty$ ,  $T_s$ ,  $R$ , A, B y n.

10. Sobre una placa plana vertical, más caliente que el aire circundante, se hace circular forzadamente el aire en dirección descendente. Dado que existen tres posibilidades que son:



---

**Cuestiones**

---

- *Convección Natural despreciable.*
- *Convección Forzada despreciable.*
- *Convección Natural y Forzada del mismo orden de magnitud.*

¿Cuál es el criterio que permite establecer en qué caso se está? (escribirlo junto a cada caso).

- 11.** *Medidas experimentales han mostrado que, para una corriente de aire a  $T_\infty = 20^\circ\text{C}$  y  $V_1 = 80\text{ m/s}$ , el calor transferido desde un álabe de turbina de dimensión característica  $L_1 = 0.20\text{ m}$  y temperatura superficial constante  $T_{s,1} = 280^\circ\text{C}$  es  $q_1 = 1350\text{ W}$ .*

¿Cuál será el calor transferido,  $q_2$ , desde otro álabe de turbina semejante, de dimensión característica  $L_2 = 0.4\text{ m}$  y temperatura superficial  $T_{s,2} = 370^\circ\text{C}$ , con una corriente de aire a  $T_\infty = 20^\circ\text{C}$  y  $V_2 = 40\text{ m/s}$ ? Considérese que la superficie del álabe es directamente proporcional a su dimensión característica y que las propiedades del aire son constantes.

- 12.** *En un proceso industrial interviene la evaporación de una capa de agua sobre una cierta superficie, en la cual se ha determinado experimentalmente la correlación  $\overline{Nu} = 0.4Re^{0.5}Pr^{0.4}$ .*

Calcular el valor del coeficiente de convección para la evaporación del agua (transporte de masa),  $\bar{h}_m$ , sabiendo que se hace pasar sobre el agua una corriente de aire a una velocidad  $V = 10\text{ m/s}$ , que la longitud característica vale  $L = 1\text{ m}$ , y que las propiedades de la mezcla aire-vapor de agua valen  $Pr \approx Sc \approx Le \approx 1$ ,  $\nu = 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$  y el coeficiente de difusión binaria  $D_{AB} = 2 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ .

- 13.** *Una corriente de aire circula en paralelo ( $u_\infty = 15\text{ m/s}$ ,  $T_\infty = 15^\circ\text{C}$ ) sobre la superficie de un calentador plano cuadrado de lado  $L = 1\text{ m}$ , manteniéndose dicha superficie a una temperatura  $T_s = 120^\circ\text{C}$ . La corriente de aire produce una fuerza de arrastre sobre la placa de  $1\text{ N}$ .*

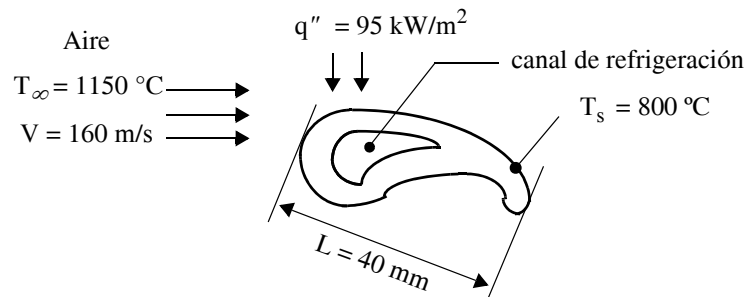
¿Cuál es la potencia eléctrica del calentador necesaria para mantener estacionaria la temperatura de su superficie?

Las propiedades del aire valen:  $\rho = 1\text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 21 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ ,  $Pr = 0.7$ ,  $\lambda = 0.03\text{ W/mK}$ .

## Problemas

---

1. Un objeto de forma irregular tiene una longitud característica  $L = 1$  m y su superficie se mantiene a una temperatura uniforme  $T_s = 400$  K. Cuando se coloca en aire a  $T_\infty = 300$  K y  $u_\infty = 100$  m/s, el flujo de calor promedio de la superficie hacia el aire vale  $20$  kW/m<sup>2</sup>. Si un segundo objeto de la misma forma pero de  $L = 5$  m se mantiene a una temperatura superficial de  $T_s = 400$  K en una corriente de aire a  $T_\infty = 300$  K y  $V = 20$  m/s ¿cuál será el valor del coeficiente de convección promedio en este segundo caso?
2. Pruebas experimentales realizadas en el álabe de una turbina muestran que el flujo de calor absorbido por dicho álabe es  $q'' = 95000$  W/m<sup>2</sup>. Para mantener una temperatura superficial constante de  $800$  °C el flujo de calor absorbido por el álabe se transfiere a un fluido refrigerante que circula por su interior.



- a) Determinar el flujo de calor absorbido si la temperatura superficial del álabe se reduce hasta  $700$  °C aumentando la refrigeración.
- b) Determinar el flujo de calor en un álabe de la misma forma y de longitud característica  $L = 80$  mm con temperatura superficial  $T_s = 800$  °C, siendo las condiciones exteriores aire a  $T_\infty = 1150$  °C y  $V = 80$  m/s.

---

**Problemas**

---

3. Para un flujo bidimensional incompresible a baja velocidad, escribir para régimen laminar estacionario las ecuaciones de capa límite hidrodinámica y térmica e interpretar sus términos ¿De qué orden de magnitud son los espesores de las capas límite? Si la longitud característica es  $L = 1$  m y la velocidad de la corriente libre es  $V = 0.1$  m/s, ¿cuál de estos dos fluidos desarrollará una capa límite térmica más gruesa: sodio a 977 K ( $\alpha = 6.12 \times 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s,  $Pr = 0.0037$ ,  $\nu = 2.285 \times 10^{-7}$  m<sup>2</sup>/s) o agua a 300 K ( $\alpha = 1.47 \times 10^{-7}$  m<sup>2</sup>/s,  $Pr = 5.83$ ,  $\nu = 8.576 \times 10^{-7}$  m<sup>2</sup>/s)?

---

## CAPÍTULO 7

# Convección forzada exterior

---

Además de las clasificaciones habituales en convección, ya mencionadas en la introducción del curso, existe otra separación frecuente entre los casos en que la superficie sólida esté en contacto o sumergida en una gran masa de fluido (convección exterior) y el de que por contra sea el fluido el que esté confinado dentro de un recinto sólido (convección interior).

La separación se justifica por las peculiaridades que los diferencian, empezándose por la Convección Exterior por ser la que mejor conecta con los conceptos y desarrollos de la lección anterior.

- La **característica principal** del flujo **externo** es el libre desarrollo de la capa límite sobre la superficie sin limitaciones impuestas por otras superficies, y el mantenimiento de una zona fuera de dicha capa donde las condiciones reinantes son las del fluido libre ( $u_\infty, T_\infty, \dots$ ).
- Los casos a estudiar en esta lección son los monofásicos, a baja velocidad (es decir los habituales a nivel industrial, excluyendo situaciones especiales como chorros a muy alta velocidad,  $Ma \rightarrow 1$ ), y en las geometrías más habituales (placa plana, cilindro y esfera).
- **Objetivo:** Establecer el valor de  $h$  (y  $h_m$ ) para cada geometría. En la mayor parte de los casos se usarán **correlaciones experimentales**; en casos excepcionales, se deducen teóricamente.

## Flujo paralelo a una placa plana isoterma. Régimen laminar

---

Esta es una de las pocas situaciones que tiene solución analítica.

La geometría aparece en muchas situaciones de la ingeniería de forma directa (paredes planas) o aproximada (hojas de turbina, superficies de sustentación). El criterio por el que una superficie es plana es algo relativo, en el que lo que importa es que  $\delta \ll R$ , donde  $\delta$  es el espesor de la capa límite y  $R$  el radio de curvatura de la superficie.

Para que la superficie sea realmente plana, necesita además cumplir que no tiene rugosidad. Como esto tampoco lo cumplen las superficies reales, hace falta de nuevo un criterio relativo que aquí es  $\frac{\kappa v^*}{\nu} < 4$ , donde  $\kappa$  es la altura de la rugosidad y

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} \text{ es la velocidad de fricción.}$$

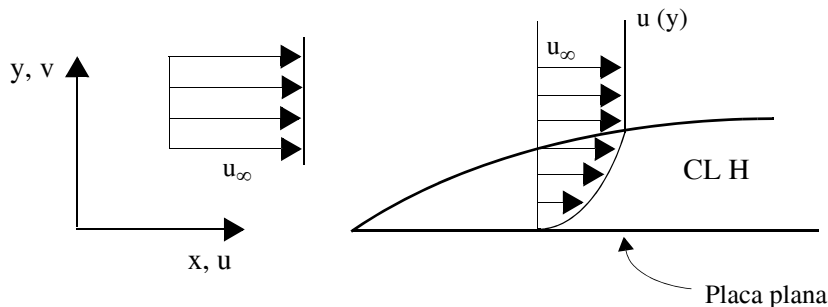
Una vez hechas estas salvedades, se pasa a desarrollar el cálculo analítico que conduce a la solución. Éste se basa en un procedimiento de  **semejanza**  de los  **perfiles**  a lo largo de las capas límite y toma como referencia para la definición de nuevas variables el procedimiento empleado en la solución de la conducción transitoria en un sólido semiinfinito.

### Desarrollo matemático

El desarrollo que sigue [1] se debe a Blasius (1908), que resolvió el problema hidráulico estudiando la capa límite de velocidad o hidrodinámica (CLH).

---

**FIGURA 7.1** Desarrollo de la capa límite sobre una placa plana.



---

**Flujo paralelo a una placa plana isoterma. Régimen laminar**

---

Las ecuaciones del movimiento son

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7.2)$$

y las condiciones de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0; \quad u = v = 0 \\ y = \infty; \quad u = u_\infty \\ x = 0; \quad u = u_\infty \end{array} \right. \quad (7.3)$$

Comparando la penetración de la perturbación térmica en un sólido semiinfinito sometido a un cambio brusco de su temperatura superficial, dada por el argumento

$$\frac{x}{\sqrt{at}}$$

con el desarrollo y penetración de la capa límite en el seno del fluido, se define la variable adimensional

$$\eta \equiv \frac{y}{\sqrt{\nu \left( \frac{x}{u_\infty} \right)}} \quad (7.4)$$

Por otro lado, como es habitual en problemas bidimensionales de fluidos se elimina la ecuación de continuidad mediante el uso de la función de corriente  $\psi$  tal que

$$u \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Se adimensionaliza

$$f(\eta) \equiv \frac{\psi}{u_\infty \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}} \quad (7.5)$$

---

**Convección forzada exterior**

---

y las dos ecuaciones en derivadas parciales (7.1) y (7.2) se transforman en una ecuación diferencial ordinaria

$$2 \frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \quad (7.6)$$

con las siguientes condiciones de contorno

$$\begin{cases} \eta = 0; & f = 0; & \frac{df}{d\eta} = 0 \\ \eta = \infty; & \frac{df}{d\eta} = 1 \end{cases} \quad (7.7)$$

La solución analítica de esta ecuación es difícil, por lo que en 1938 Howarth [2] obtiene una solución numérica para  $f$  y sus primeras derivadas, suficientes para obtener el valor de las magnitudes principales.

En la Tabla 7.1 hay un extracto de dichas soluciones.

---

**TABLA 7.1** Solución numérica de Howarth para la placa plana.

$\eta = y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}$	$f$	$\frac{df}{d\eta} = \frac{u}{u_\infty}$	$\frac{d^2 f}{d\eta^2}$
0.0	0.000	0.000	0.332
0.4	0.027	0.133	0.331
0.8	0.106	0.265	0.327
1.2	0.238	0.394	0.317
1.6	0.420	0.517	0.297
2.0	0.650	0.630	0.267
2.4	0.922	0.729	0.228
2.8	1.231	0.812	0.184
3.2	1.569	0.876	0.139
3.6	1.930	0.923	0.098
4.0	2.306	0.956	0.064
4.4	2.692	0.976	0.039
4.8	3.085	0.988	0.022
5.2	3.482	0.994	0.011
5.6	3.880	0.997	0.005
6.0	4.280	0.999	0.002
6.4	4.679	1.000	0.001
6.8	5.079	1.000	0.000

Es fácil ver que

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{df}{d\eta} \quad , \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu u_\infty}{x}} \left( \eta \frac{df}{d\eta} - f \right)$$

de donde por ejemplo se puede calcular inmediatamente  $\delta$  recordando que corresponde a  $\frac{u}{u_\infty} = 0.99$ . Para ese valor,  $\eta = 5$  según la tabla 7.1, de donde

$$\delta = \frac{5}{\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}} = \frac{5x}{\sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}}} = 5x \operatorname{Re}_x^{-\frac{1}{2}} \quad (7.8)$$

donde  $\operatorname{Re}_x \equiv \frac{u_\infty x}{\nu}$ .

Es decir el crecimiento de la capa límite es proporcional a  $x^{1/2}$ . Se puede comprobar la delgadez de la capa límite, tomando un valor prudente (aquí pequeño) de  $\operatorname{Re}_x$ , por ejemplo:  $10^4$ .

$$\delta(x) = 0.05 x \Rightarrow \frac{\delta(x)}{x} = 0.05 \ll 1$$

Otra magnitud importante es  $\tau_s$

$$\tau_s = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \left. \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} = 0.332 \mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}$$

luego 
$$C_f \equiv \frac{\tau_s}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} = 0.664 \operatorname{Re}_x^{-\frac{1}{2}} \quad (7.9)$$

La fricción superficial disminuye (como debe ser) con  $x^{-\frac{1}{2}}$ .

### Soluciones en la Capa Límite Térmica

La adimensionalización de la ecuación de la Energía Térmica conduce a

$$\frac{d^2 T^*}{d\eta^2} + \frac{\operatorname{Pr}}{2} f \frac{dT^*}{d\eta} = 0 \quad (7.10)$$

---

**Convección forzada exterior**

---

con 
$$T^* \equiv \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} \text{ y } T^*(\eta = 0) = 0, T^*(\eta = \infty) = 1. \quad (7.11)$$

La ecuación (7.10) con sus condiciones de contorno (7.11) ha sido resuelta numéricamente, interesando especialmente obtener una expresión para  $h$  y  $Nu$ :

$$h = \lambda \left. \frac{\partial T^*}{\partial y} \right|_{y=0} = \lambda \left. \frac{dT^*}{d\eta} \right|_{\eta=0} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \lambda \left( \frac{u_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} \left. \frac{dT^*}{d\eta} \right|_{\eta=0}$$

De las soluciones interesa pues la primera derivada de  $T^*$ , que para  $Pr > 0.6$ , viene dada por

$$\left. \frac{dT^*}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0.332 Pr^{1/3}$$

luego 
$$\boxed{Nu \equiv \frac{hx}{\lambda} = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}}, \quad (7.12)$$

típica relación potencial, muy utilizada en la búsqueda de expresiones empíricas.

También interesa  $T^* = 0.99$  para buscar  $\delta_t$  que resulta tal que

$$\frac{\delta}{\delta_t} = Pr^{1/3} \quad (7.13)$$

### Soluciones en la Capa Límite de Concentraciones

Un desarrollo formalmente idéntico al de la temperatura conduce hasta

$$\boxed{Sh \equiv \frac{h_m x}{D_{AB}} = 0.332 Re_x^{1/2} Sc^{1/3}} \quad (7.14)$$

y 
$$\boxed{\frac{\delta}{\delta_c} = Sc^{1/3}}. \quad (7.15)$$

### Observaciones generales

- De los resultados anteriores se observa que los coeficientes de intercambio reales (los **dimensionales**) toman un valor teórico infinito en el borde de ataque de la placa,  $x = 0$  (lo que es estrictamente inopinable porque allí no valen las aproximaciones de capa límite) y después **decrecen** con  $x^{-1/2}$  lo que está **directamente relacionado con el aumento de  $\delta$ ,  $\delta_t$  y  $\delta_c$**  al mismo ritmo. La variación se representa gráficamente en la figura 7.2.
- Los valores **promedio** son fáciles de obtener conocidas las variaciones con  $x$ . Por ejemplo, el **promedio** de 0 hasta  $x$  de  $\tau_s$  da:

$$\bar{\tau}_{s,x} \equiv \frac{1}{x} \int_0^x \tau_s \, dx = 2\tau_s(x) \Rightarrow \bar{C}_{f,x} = 2C_f(x)$$

y análogamente

$$\begin{aligned} \bar{h}_x &= 2h(x) & , & & \bar{Nu}_x &= 2Nu(x) \\ \bar{h}_{m,x} &= 2h_m(x) & , & & \bar{Sh}_x &= 2Sh(x) \end{aligned}$$

**Nota importante.** Aquí se ha efectuado una media aritmética, adecuada porque  $(T_s - T_\infty)$  es constante. Efectivamente

$$\left. \begin{aligned} q &= \int_A q'' \, dA = \int_A h(T_s - T_\infty) \, dA \\ q &= \bar{h}(T_s - T_\infty)A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{h} = \frac{1}{A} \int_A h \, dA = \frac{1}{x} \int_0^x h \, dx$$

Sin embargo, se verá más adelante que en la mayor parte de los problemas de intercambio de calor [3] son adecuadas otras medias, especialmente la logarítmica.

- En la deducción de estas expresiones anteriores, se ha supuesto que las propiedades termofísicas del fluido son constantes, debiéndose calcular a la temperatura de película

$$T_p = \frac{T_s + T_\infty}{2}$$

### Flujo en placa plana con Pr muy pequeño

Existe un tipo particular de fluidos, los líquidos metálicos, que se caracterizan por Números de Prandtl muy pequeños (habitualmente  $0.003 < Pr < 0.05$ ) para los cuales no valen las ecuaciones obtenidas en el desarrollo anterior, y se efectúa otro desarrollo matemático diferente [4] que conduce a la expresión

$$\boxed{Nu = 0.565 Pe^{1/2}} \quad (7.16)$$

ecuación válida para régimen laminar y siendo  $Pe \equiv Re \cdot Pr$  el número de Peclet.

### Flujo paralelo a una placa plana. Régimen turbulento

---

Como es sabido de Mecánica de Fluidos, cuando el número de Reynolds aumenta por encima de un cierto valor crítico,  $Re_c$ , el flujo se inestabiliza y la capa límite pasa a ser turbulenta. En ese momento, las correlaciones teóricas anteriores no valen, y se usan otras obtenidas experimentalmente.

En particular

$$C_f = 0.0592 Re_x^{-1/5} \quad (7.17)$$

$$y \quad \delta = 0.37 x Re_x^{-1/5} \quad (7.18)$$

válidas en principio para  $5 \times 10^5 < Re_x < 10^7$ , pero extrapolable hasta  $Re_x = 10^8$  con un error inferior al 15%.

El valor del  $Re_c$  es variable ( $10^5 < Re_c < 3 \times 10^6$ ) dependiendo de ciertas condiciones

(rugosidad, turbulencia exterior,  $\vec{\nabla} p, \dots$ ). Un criterio habitual es utilizar

$$Re_c \equiv \frac{u_\infty x_c}{\nu} = 5 \times 10^5$$

Utilizando las analogías de capa límite se pueden obtener los coeficientes de intercambio de calor y masa. De la analogía de Chilton–Colburn resultan las expresiones (7.19) y (7.20)

---

**Flujo paralelo a una placa plana. Régimen turbulento**

---

$$\text{Nu} = 0.0296\text{Re}_x^{4/5}\text{Pr}^{1/3} \quad (7.19)$$

$$\text{Sh} = 0.0296\text{Re}_x^{4/5}\text{Sc}^{1/3} \quad (7.20)$$

válidas para  $0.6 < \text{Pr} < 60$  y  $0.6 < \text{Sc} < 3000$ . Propiedades a  $T_p$ .

Por otro lado, el crecimiento de las capas límite en régimen turbulento deja de estar dominado por el mecanismo de difusión, y por tanto por  $\text{Pr}$  o  $\text{Sc}$ , y queda bajo los efectos de los procesos de mezcla caóticos propios de este régimen, semejantes para todos los fenómenos de transporte (momento, calor y masa) de manera que

$$\delta \cong \delta_t \cong \delta_c \quad (7.21)$$

**Observaciones:**

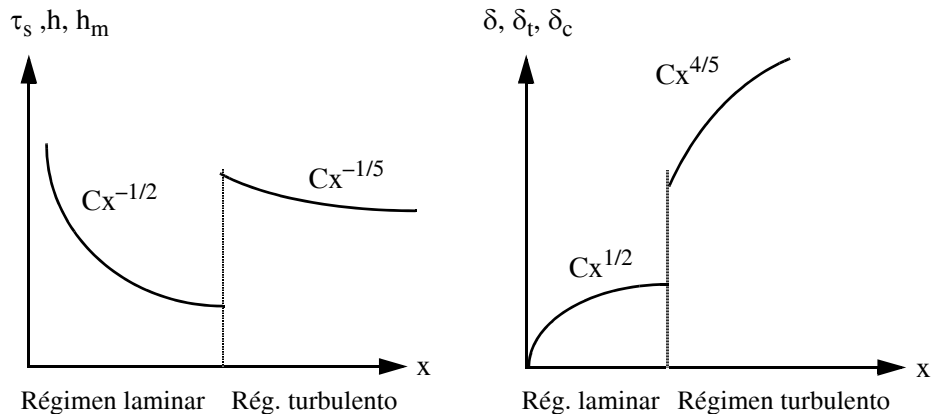
Comparando los resultados anteriores con los del régimen laminar, se observa:

1. Los espesores de la capa límite son mayores y crecen más rápidamente.
2. Los coeficientes de intercambio son mayores y decrecen más lentamente.

Estas tendencias son las que se habían anticipado cualitativamente en el capítulo anterior.

En la figura 7.2 se representa gráficamente la comparación.

---

**FIGURA 7.2** Evolución de los coeficientes de transporte y de los espesores de la capa límite en el flujo paralelo a una placa plana.

### Condiciones mixtas

Para una placa de longitud  $L$ , si  $Re_L > Re_c$ , en la capa límite existen ambos regímenes, y al promediar deben ser considerados los dos. Así, del promedio

$$\bar{h} = \frac{1}{2} \left( \int_0^{x_c} h_{lam} dx + \int_{x_c}^L h_{turb} dx \right)$$

y de las expresiones (7.12) y (7.19) resulta la ecuación (7.22)

$$\boxed{\bar{Nu} = (0.037 Re_L^{4/5} - 871) Pr^{1/3}} \quad (7.22)$$

cuyas propiedades se calculan a  $T_p$ .

Otra correlación para esta situación es la de Whitaker [5]

$$\bar{Nu} = \left[ 0.036(Re_L^{0.8} Pr^{0.43} - 17400) + 297 Pr^{1/3} \right] \left( \frac{\mu}{\mu_s} \right)^{1/4} \quad (7.23)$$

calculándose las propiedades a  $T_\infty$  salvo  $\mu_s$  y habiendo tomado  $Re_c = 2 \times 10^5$ .

### Flujo paralelo a una placa plana isoflujo

---

Las expresiones obtenidas anteriormente se referían al caso de que la placa fuera isoterma. En muchas ocasiones, la condición de contorno sobre la superficie es más cercana a flujo de calor uniforme que a temperatura uniforme. Para este caso, las expresiones son diferentes y se presentan a continuación [4]

$$Nu_x = 0.453 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (7.24)$$

para régimen laminar y

$$Nu_x = 0.0308 Re_x^{4/5} Pr^{1/3} \quad (7.25)$$

para régimen turbulento.

---

## El cilindro en flujo cruzado

---

Es importante observar que el número de Nusselt, y por tanto el coeficiente de convección, es mayor que para la placa isoterma en ambos regímenes, pero mientras que para el laminar la diferencia es del 36% para el turbulento es sólo del 4%. Esto concuerda con lo afirmado en el capítulo 6 de Fundamentos de la Convección de que las condiciones de contorno afectan fuertemente los resultados en régimen laminar pero prácticamente no influyen en régimen turbulento.

La temperatura en cualquier punto de la placa valdrá, obviamente,

$$T_s(x) = T_\infty + \frac{q''_s}{h_x}$$

Otra correlación recomendada [6] para flujo laminar y todos los valores del número de Prandtl es

$$Nu_x = \frac{0.4637 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}}{[1 + (0.0205/Pr)^{2/3}]^{1/4}} \quad (7.26)$$

válida para  $Pe_x > 100$ .

**Nota.** Es importante tener presente que todas las correlaciones mencionadas para la placa plana no dan valores exactos, ya que éstos dependen de aspectos no considerados como la turbulencia de la corriente libre o la rugosidad de la superficie.

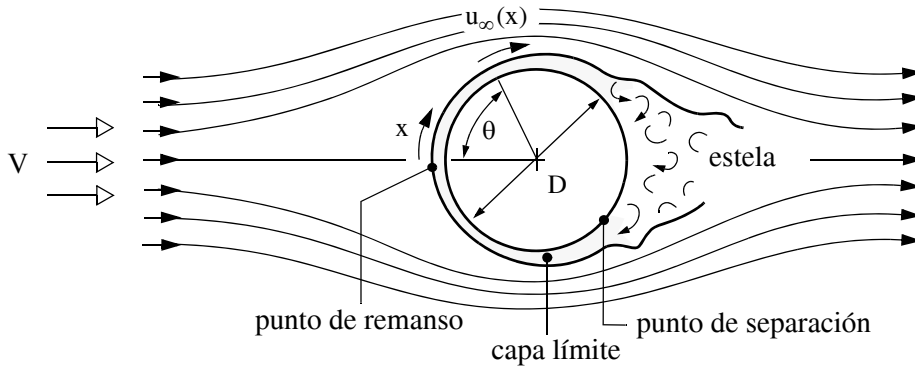
---

## El cilindro en flujo cruzado

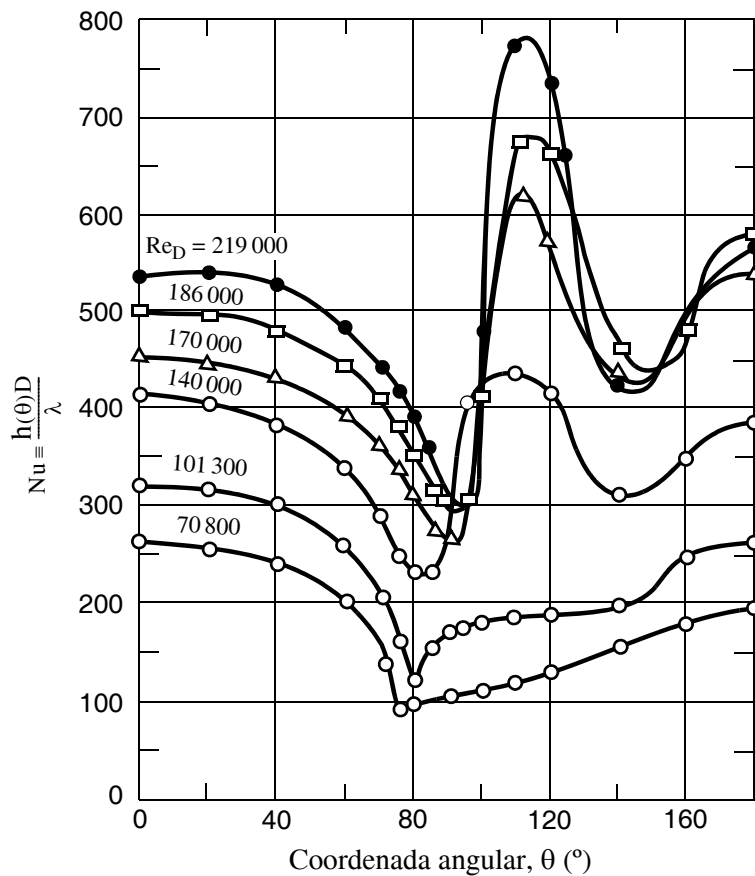
---

Es otra geometría frecuente, en la que los fenómenos del movimiento de los fluidos sobre su superficie son mucho más complicados que en una placa plana, como se muestra en el conjunto de figuras que siguen. Esquemáticamente los aspectos principales de la interacción superficie–fluido que determina los valores de los coeficientes de intercambio son (ver figura 7.3) el comienzo de la capa límite a partir del punto de remanso, el posterior desarrollo de aquélla y finalmente su separación de la superficie. Ello determina un valor del Nu bastante oscilante con el ángulo  $\theta$ , según se ve en la figura 7.4.

**FIGURA 7.3** Formación y separación de la capa límite sobre un cilindro en flujo cruzado.



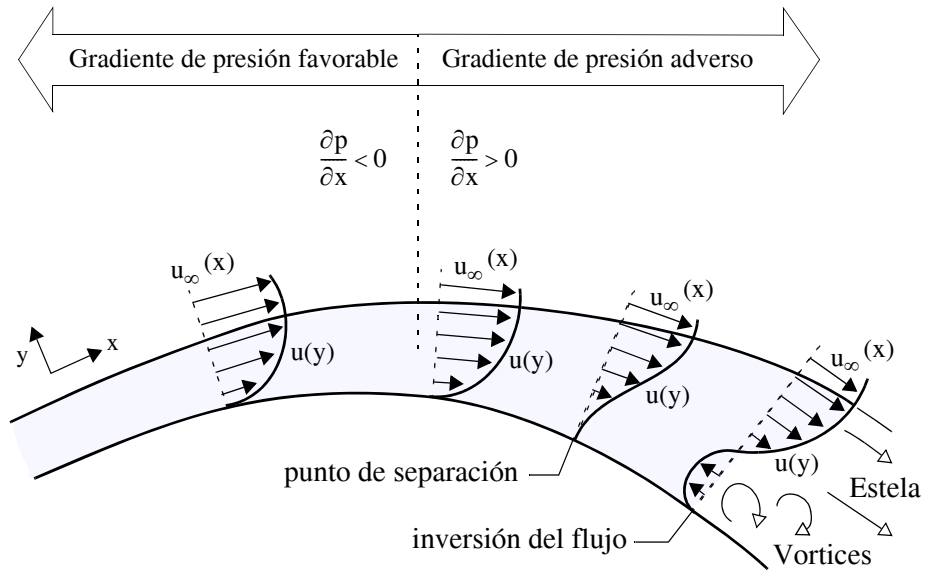
**FIGURA 7.4** Número de Nusselt local obtenido experimentalmente [7] para un flujo de aire normal a un cilindro.



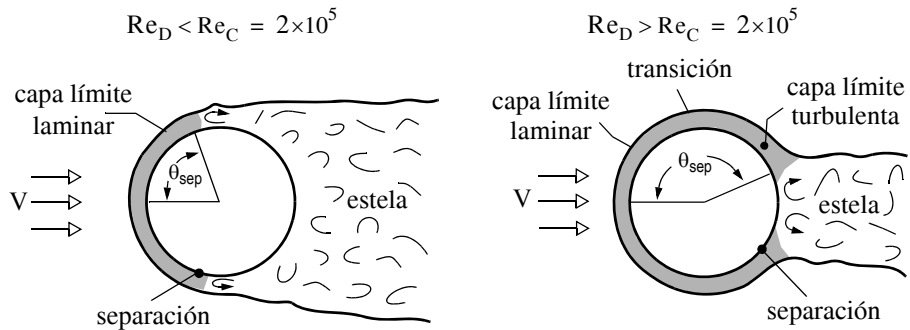
## El cilindro en flujo cruzado

La separación de la capa límite se debe a la aparición de un gradiente adverso de presión que se opone a su normal desarrollo (figura 7.5). El ángulo al que se produce la separación se retrasa para capa límite turbulenta debido a que su mayor inercia resiste mejor el efecto contrario de la presión (figura 7.6); se considera que la capa límite se vuelve turbulenta para valores del número de Reynolds superiores a  $2 \times 10^5$ , siendo  $Re_D \equiv VD/\nu$  con  $V$  la velocidad de acercamiento del fluido al cilindro y  $D$  el diámetro de éste.

**FIGURA 7.5** Perfil de velocidades asociado a la separación sobre un cilindro en flujo cruzado.



**FIGURA 7.6** Efecto de la turbulencia en la separación de la capa límite sobre un cilindro en flujo cruzado.



## Expresiones globales

Aunque sea interesante conocer el comportamiento local de la superficie, lo realmente útil en ingeniería es el manejo de expresiones globales.

1. La primera conocida para esta superficie es la de Hilpert [8], que presenta la sencilla forma de

$$\overline{Nu} = C Re_D^m Pr^{1/3} \quad (7.27)$$

con

$$\overline{Nu} \equiv \frac{\bar{h}D}{\lambda}.$$

Los valores de los coeficientes  $C$  y  $m$  se presentan en la tabla 7.2, y las propiedades se calculan a  $T_p$ . Lo más interesante de esta correlación es que se puede utilizar para gases en circulación perpendicular a barras **no circulares**, con las constantes de la Tabla 7.3, obtenidos a partir de experimentos del propio Hilpert o de Reiher [3].

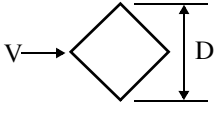
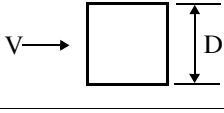
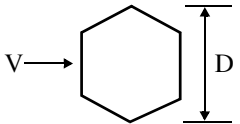
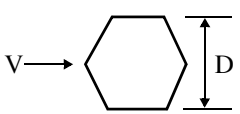
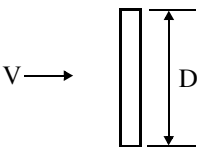

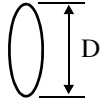
Según Eckert y Drake [21], el error es grande para  $Re < 500$ .

---

**TABLA 7.2** Constantes de la correlación de Hilpert, ec. (7.27), para cilindros.

$Re_D$	$C$	$m$
0.4–4	0.989	0.330
4–40	0.911	0.385
40–4000	0.683	0.466
4000–40 000	0.193	0.618
40 000–400 000	0.027	0.805

**TABLA 7.3** Constantes de la correlación (7.27) para flujo cruzado sobre cuerpos no circulares [3].

Geometría	Rango de validez de Re	C	m
<p>Cuadrado</p>  	<p>2500 – 7500 5000 – 10<sup>5</sup></p>	<p>0.261 0.222</p>	<p>0.624 0.588</p>
<p>Hexágono</p>  	<p>5000 – 19500 19500 – 10<sup>5</sup></p> <p>5000 – 10<sup>5</sup></p>	<p>0.144 0.035</p> <p>0.138</p>	<p>0.638 0.782</p> <p>0.638</p>
<p>Placa vertical</p> 	<p>4000 – 15000</p>	<p>0.205</p>	<p>0.731</p>
<p>Superficie ovalada</p>  	<p>2500 – 15000 3000 – 15000</p>	<p>0.224 0.085</p>	<p>0.612 0.804</p>

2. Más reciente es la correlación de Zhukauskas [9] que obedece a la otra manera de considerar la variación de las propiedades con la temperatura.

$$\overline{Nu} = C Re_D^m Pr^n \left( \frac{Pr_\infty}{Pr_s} \right)^{1/4} \quad (7.28)$$

---

**Convección forzada exterior**

---

con las propiedades evaluadas en  $T_\infty$ , salvo  $Pr_s$ , y las constantes listadas en las tablas 7.4 y 7.5

**Validez:**  $0.7 < Pr < 500$ ;  $1 < Re_D < 10^6$ .

---

**TABLA 7.4** Constantes de la correlación de Zhukauskas para cilindros en flujo cruzado, ec. (7.28).

$Re_D$	<b>C</b>	<b>m</b>
1 – 40	0.75	0.4
40 – 1000	0.51	0.5
$10^3 - 2 \times 10^5$	0.26	0.6
$2 \times 10^5 - 10^6$	0.076	0.7

---

**TABLA 7.5** Valores de  $n$  en la ecuación (7.28).

<b>Pr</b>	<b>n</b>
< 10	0.37
> 10	0.36

3. Una expresión muy interesante, por su amplio rango de validez,  $Re_D Pr > 0.2$ , es la de Churchill y Bernstein [10]

$$\overline{Nu} = 0.3 + \frac{0.62 Re_D^{1/2} Pr^{1/3}}{[1 + (0.4/Pr)^{2/3}]^{1/4}} \left[ 1 + \left( \frac{Re_D}{282000} \right)^{5/8} \right]^{4/5} \quad (7.29)$$

Propiedades en  $T_p$ .

---

## La esfera

---

Los fenómenos que suceden en la capa límite para un flujo sobre una esfera son parecidos a los de cilindro, con los procesos de transición (de un régimen a otro) y de separación jugando un papel preponderante.

En cuanto a expresiones para  $Nu$ , sólo se mencionarán dos correlaciones globales.

---

## Los bancos de tubos

---

### 1. Whitaker [5]

$$\overline{Nu} = 2 + (0.4 Re_D^{1/2} + 0.06 Re_D^{2/3}) Pr^{0.4} \left( \frac{\mu}{\mu_s} \right)^{1/4} \quad (7.30)$$

**Validez:**  $0.71 < Pr < 380$  ;  $3.5 < Re_D < 7.6 \times 10^4$  ;  $1.0 < (\mu/\mu_s) < 3.2$ .

**Propiedades en**  $T_\infty$ , salvo  $\mu_s$ .

### 2. Un caso especial es el de gotas de líquido que caen libremente.

Para él, está obtenida la ecuación de Ranz y Marshall modificada [11]

$$\overline{Nu} = 2 + 0.6 Re_D^{1/2} Pr^{1/3} \left[ 25 \left( \frac{x}{D} \right)^{-0.7} \right] \quad (7.31)$$

Distorsión

donde  $x$  es la distancia recorrida por la gota desde el reposo.

Propiedades a  $T_\infty$ .

---

## Los bancos de tubos

---

Es una geometría muy importante en los intercambiadores de calor. Un esquema muy sencillo de esta configuración se presenta en la figura 7.7.

La **circulación** es muy **variada** y se puede agrupar en: Perpendicular (o de flujo cruzado), Paralela–contracorriente y Mixta. La disposición de los tubos también es variada, distinguiéndose principalmente: Disposición alineada (Fig. 7.8a) y Disposición alternada o al tresbolillo (Fig. 7.8b).

Normalmente la velocidad que interesa es la del paso del fluido entre los tubos,  $V_{\max}$ , que es mayor que la velocidad  $V$  de aproximación al banco de tubos. En el caso de tubos alineados, considerando el flujo incompresible (situación habitual) se tiene

$$V_{\max} = \frac{S_T}{S_T - D} V. \quad (7.32)$$

FIGURA 7.7 Esquema en un banco de tubos en flujo cruzado.

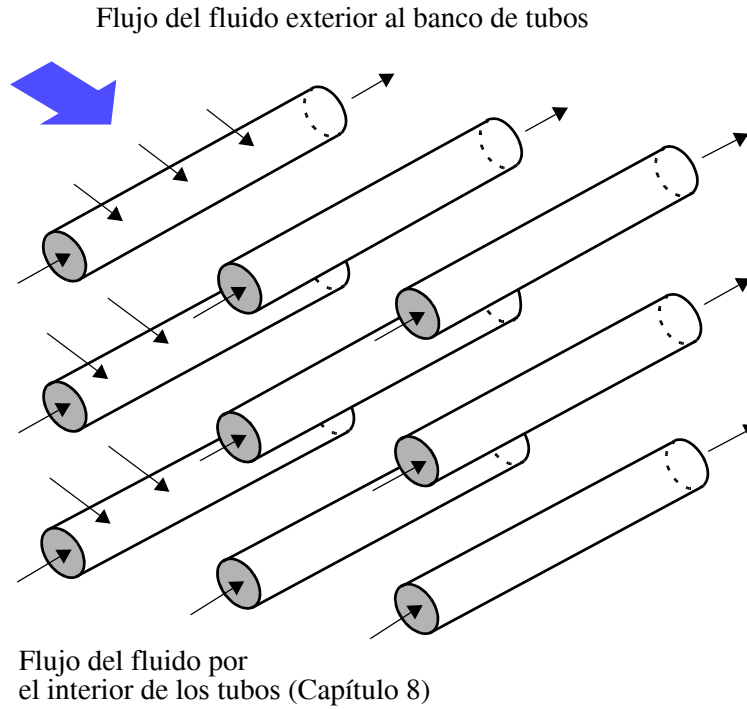
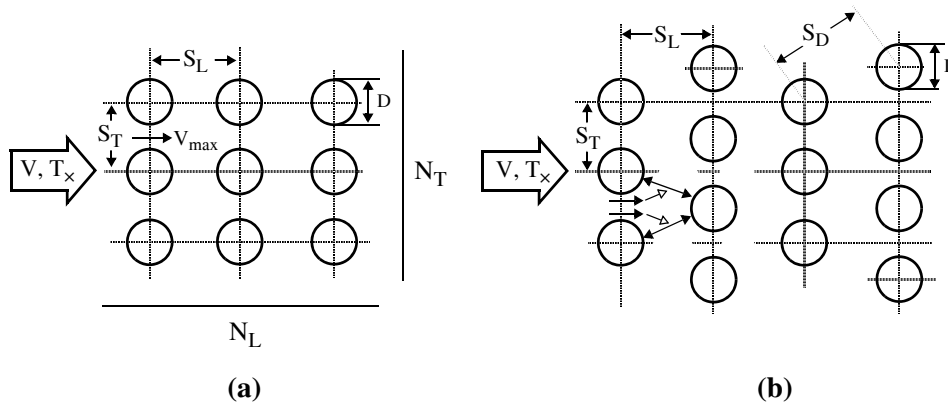


FIGURA 7.8 Disposiciones de los tubos en un banco. a) Alineada. b) Alternada.



---

## Los bancos de tubos

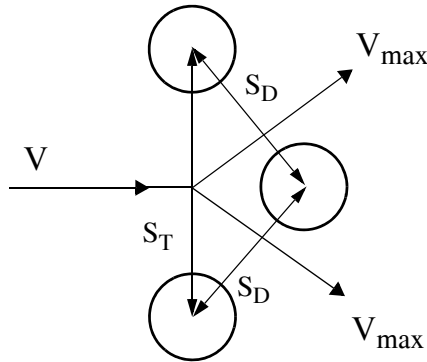
---

Si los tubos están alternados, la máxima velocidad se da en la sección transversal si se cumple  $(S_T - D) < 2(S_D - D)$  y  $V_{\max}$  se calcula con la misma expresión (7.32) que para tubos alineados. Si en un banco de tubos alternados se cumple que (ver figura 7.9)  $2(S_D - D) < (S_T - D)$ , entonces la máxima velocidad se da en los pasos diagonales y viene dada por la fórmula (7.33)

$$V_{\max} = \frac{S_T}{2(S_D - D)} V \quad (7.33)$$

---

**FIGURA 7.9** Máxima velocidad en bancos de tubos alternados con  $2(S_D - D) < (S_T - D)$ .

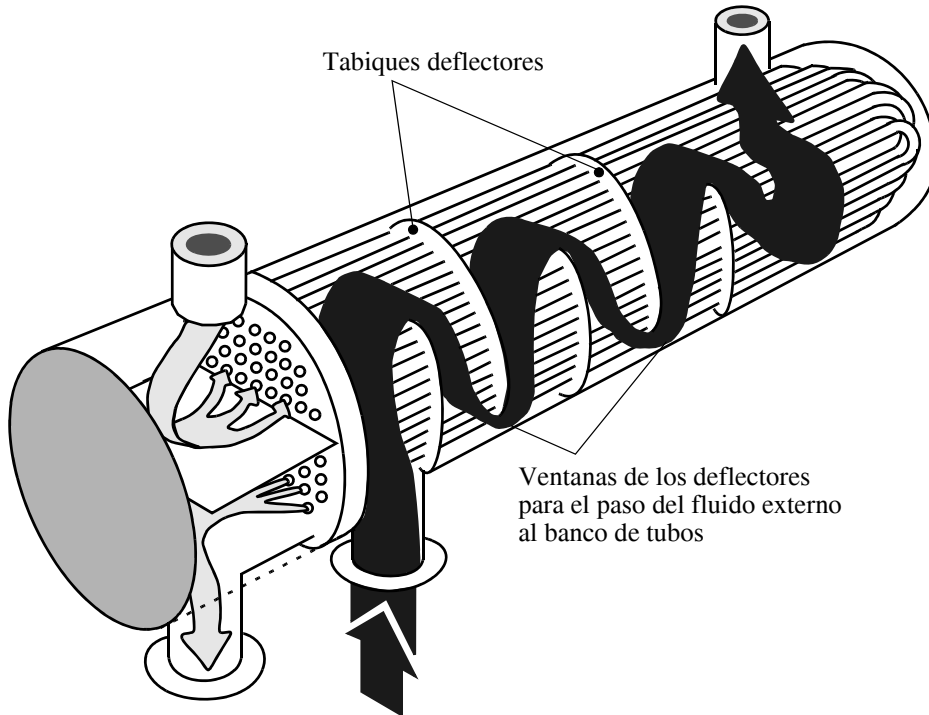


Con esta velocidad  $V_{\max}$  se calcula el número de Reynolds en la mayoría de correlaciones. Para indicarlo se denota  $Re_{D, \max} \equiv \frac{V_{\max} D}{\nu}$ .

## Intercambio de calor

Dado que los bancos (o haces) de tubos suelen formar parte de los intercambiadores de calor, equipos destinados al intercambio de calor entre fluidos que se estudian en el capítulo 11, donde el fluido que circula por el exterior de los tubos (ver figura 7.10) está confinado, éste al circular en cantidad limitada y recibir una importante cantidad de calor, varía su temperatura apreciablemente con lo que ya no debe hablarse de  $T_{\infty}$ , sino de la temperatura media del fluido en cada zona del banco,  $T_m$  (se desarrolla este concepto en el capítulo 8 de Convección Interior) distinta a la entrada,  $T_{m,ent}$ , que a la salida,  $T_{m,sal}$ .

**FIGURA 7.10** Circulación externa al banco de tubos (banda oscura) de un intercambiador de carcasa y tubos con tabiques deflectores de segmentos circulares.



En este caso, el salto de temperaturas entre la superficie exterior de los tubos y el fluido  $\Delta T = T_s - T_m$ , es variable y se verá más adelante que el valor medio más adecuado para todo el banco es

$$\Delta T_{lm} = \frac{(T_s - T_{m,ent}) - (T_s - T_{m,sal})}{\ln\left(\frac{T_s - T_{m,ent}}{T_s - T_{m,sal}}\right)} \quad (7.34)$$

es decir  $q = \bar{h}(N\pi DL)\Delta T_{lm}$  (7.35)

donde  $N$  es el número total de tubos del banco,  $N_T$  el número de filas y  $N_L$  el de columnas.

---

## Los bancos de tubos

---

Con estas dos ecuaciones (7.34) y (7.35) se puede demostrar que dada una temperatura de entrada del fluido, la de salida viene dada por la ecuación (7.36)

$$\boxed{\frac{T_s - T_{m, \text{sal}}}{T_s - T_{m, \text{ent}}} = \exp\left(-\frac{\pi DN \bar{h}}{\rho V N_T S_T c_p}\right)} \quad (7.36)$$

## Correlaciones para calcular $\bar{h}$

El valor de coeficiente de convección para cada tubo depende de su posición en el haz, siendo  $h \approx h_{\text{cilindro}}$  para las de la primera columna, y aumentando hacia el interior por la perturbación creada por las columnas precedentes hasta estabilizarse a partir de la cuarta o quinta columna.

Existen una serie de correlaciones experimentales para cada **circulación del fluido** donde se da el valor de  $\bar{Nu}$  para el banco completo, listándose seguidamente una selección de ellas. Si no se indica lo contrario, la longitud característica para la definición de los números de Reynolds y de Nusselt es el diámetro exterior de los tubos, o sea,  $\bar{Nu} \equiv \bar{h} D/\lambda$ .

## Flujo perpendicular a un banco de tubos lisos

### 1. Correlación de Grimison [12]

$$\boxed{\bar{Nu} = 1.13 C_1 Re_{D, \text{max}}^m Pr^{1/3}} \quad (7.37)$$

$C_1$  y  $m$  se presentan en la tabla 7.6.

**Validez:**  $2000 < Re_{D, \text{max}} < 40000$  ;  $0.7 < Pr$  ;  $10 < N_L$

**Propiedades:** a  $T_p$

Si el banco tiene menos de diez columnas,  $N_L < 10$ , (ver figura 7.8a) se puede usar la correlación (7.37), utilizando el factor de corrección [13] que figura en la Tabla 7.7

$$\bar{Nu}|_{N_L < 10} = C_2 \bar{Nu}|_{N_L \geq 10} \quad (7.38)$$

**Convección forzada exterior**

**TABLA 7.6** Constantes de la correlación de Grimison [12], ec. (7.37).

$S_T/D$								
	1.25		1.5		2.0		3.0	
$S_L/D$	$C_1$	m	$C_1$	m	$C_1$	m	$C_1$	m
<b>Tubos alineados</b>								
1.25	0.348	0.592	0.275	0.608	0.100	0.704	0.0633	0.752
1.50	0.367	0.586	0.250	0.620	0.101	0.702	0.0678	0.744
2.00	0.418	0.570	0.299	0.602	0.229	0.632	0.198	0.648
3.00	0.290	0.601	0.357	0.584	0.374	0.581	0.286	0.608
<b>Tubos alternados</b>								
0.600	—	—	—	—	—	—	0.213	0.636
0.900	—	—	—	—	0.446	0.571	0.401	0.581
1.000	—	—	0.497	0.558	—	—	—	—
1.125	—	—	—	—	0.478	0.565	0.518	0.560
1.250	0.518	0.556	0.505	0.554	0.519	0.556	0.522	0.562
1.500	0.451	0.568	0.460	0.562	0.452	0.568	0.488	0.568
2.000	0.404	0.572	0.416	0.568	0.482	0.556	0.449	0.570
3.000	0.310	0.592	0.356	0.580	0.440	0.562	0.428	0.574

**TABLA 7.7** Factor de corrección  $C_2$ , para  $N_L < 10$ , en la ecuación (7.38).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Alineada	0.64	0.80	0.87	0.90	0.92	0.94	0.96	0.98	0.99
Alternada	0.68	0.75	0.83	0.89	0.92	0.95	0.97	0.98	0.99

**2. Correlación de Zhukauskas [9]**

$$\bar{Nu} = C_1 Re_{D,\max}^m Pr^{0.36} \left( \frac{Pr}{Pr_s} \right)^{1/4} \quad (7.39)$$

C y m aparecen en la tabla 7.8.

**Validez:**  $0.7 < Pr < 500$  ;  $10 < Re_{D,\max} < 2 \times 10^6$ ;  $N_L > 20$ .

**Propiedades:** En  $T_\infty$  si el fluido está libre o en  $\bar{T}_m = \frac{T_{m,ent} + T_{m,sal}}{2}$  si está confinado, excepto  $Pr_s$  que se calcula a la temperatura de la superficie de los tubos,  $T_s$ .

---

**Los bancos de tubos**

---

**TABLA 7.8** Constantes de la correlación de Zhukauskas para un banco de tubos en flujo cruzado, ec. (7.39)

Configuración	$Re_{D,max}$	$C_1$	$m$
Alineada	10–100	0.80	0.40
Alternada	10–100	0.90	0.40
Ambas	$10^2 - 10^3$	aproximar por cilindro aislado	
Alineada	$10^3 - 2 \times 10^5$	0.27	0.63
Alternada ( $S_T/S_L < 2$ )	$10^3 - 2 \times 10^5$	$0.35 (S_T/S_L)^{1/5}$	0.60
Alternada ( $S_T/S_L > 2$ )	$10^3 - 2 \times 10^5$	0.40	0.60
Alineada	$2 \times 10^5 - 2 \times 10^6$	0.021	0.84
Alternada	$2 \times 10^5 - 2 \times 10^6$	0.022	0.84

Si el número de columnas,  $N_L$ , es menor que 20, se debe introducir un factor corrector  $C_2$  tal que

$$\overline{Nu}|_{N_L < 20} = C_2 \overline{Nu}|_{N_L \geq 20}. \quad (7.40)$$

Este factor se muestra en la tabla 7.9.

**TABLA 7.9** Factor de corrección  $C_2$  de la correlación de Zhukauskas, ec. (7.40).

$N_L$	1	2	3	4	5	7	10	13	16
Alineada	0.70	0.80	0.86	0.90	0.92	0.95	0.97	0.98	0.99
Alternada	0.64	0.76	0.84	0.89	0.92	0.95	0.97	0.98	0.99

**3. Correlaciones de Whitaker [5], sólo para disposición alternada**

**3.1.**  $Re_D > 100$ ,  $0.7 < Pr < 30$ ,  $\varepsilon$  (fracción vacía)  $\equiv \frac{\text{Volumen vacío}}{\text{Volumen total}} < 0.65$ ,  $N_L > 10$

$$\overline{Nu} = (0.50 Re_D^{1/2} + 0.2 Re_D^{2/3}) Pr^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14} \quad (7.41)$$

**Propiedades en:**  $T_\infty$  si el fluido está **libre** o  $\bar{T}_m = \frac{T_{m,ent} + T_{m,sal}}{2}$ ,

si está **confinado**, salvo  $\mu_s$ , con  $Re_D \equiv \frac{3}{2} \frac{DV}{\nu} \frac{1}{1-\varepsilon}$  y  $\overline{Nu} \equiv \frac{3}{2} \frac{\bar{h}D}{\lambda} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ .

### 3.2. $Re_D < 100$

$$\overline{Nu} = 2Re_D^{1/3} Pr^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14} \quad (7.42)$$

## Flujo perpendicular a un banco de tubos con aletas

El valor de  $h$  varía a lo largo de la aleta, siendo en general 2 ó 3 veces mayor en su punta que en su base debido a que la capa límite es más gruesa en la base de la aleta.

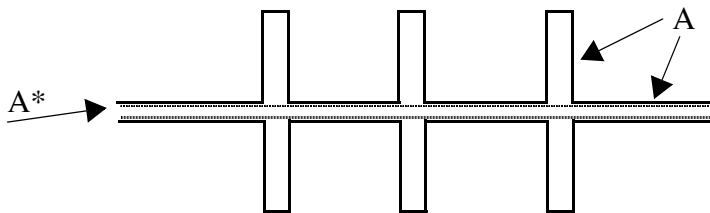
Para el valor promedio, Schmidt obtuvo la siguiente correlación experimental a partir de datos de ocho experimentadores [14]

$$\overline{Nu} = C Re_{D,max}^{0.625} \left( \frac{A}{A^*} \right)^{-0.375} Pr^{1/3} \quad (7.43)$$

C: 0.30 para disposición en línea  
0.45 para disposición alternada

A : área total,  $A = A_{pared\ tubos\ sin\ aleta} + A_{aletas}$

A\* : área exterior de los tubos, quitando las aletas



**Propiedades:** En la temperatura media de película

$$\bar{T}_p = \frac{\bar{T}_m + T_s}{2} = \frac{\frac{T_{m,ent} + T_{m,sal}}{2} + T_s}{2}$$

## Los bancos de tubos

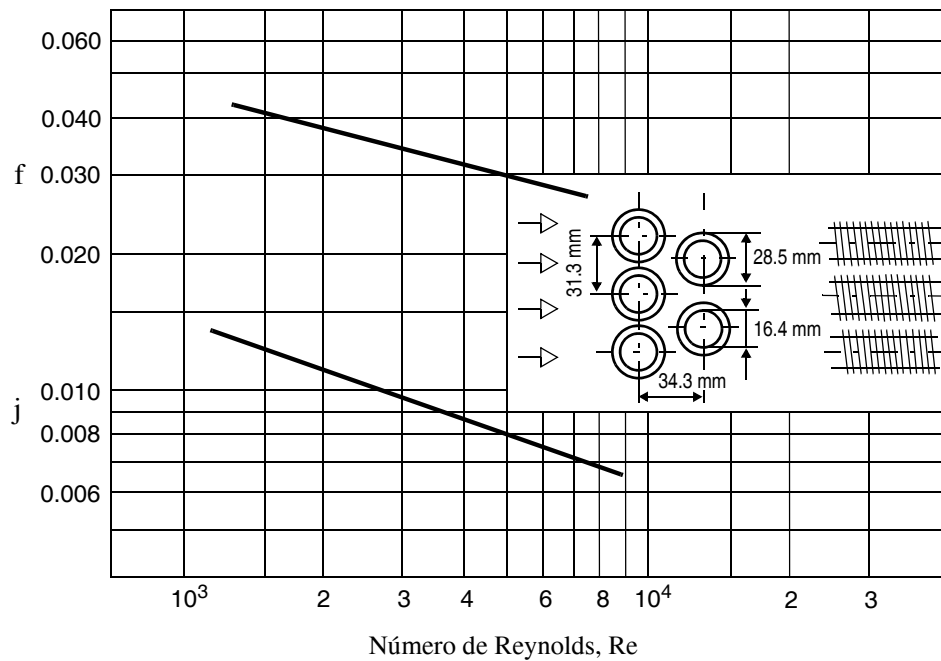
Estas geometrías son típicas de los intercambiadores de calor compactos (ver capítulo 11), donde es habitual presentar el coeficiente de convección exterior en términos de  $j$ , a la vez que el factor  $f$  de pérdida de carga, en gráficas como la 7.11 y la 7.12 [17]. En ellas el número de Reynolds se calcula sobre el diámetro hidráulico del banco y con la velocidad máxima del fluido en el mismo, es decir,

$$Re \equiv \frac{V_{\max} D_h}{\nu} \quad \text{con} \quad V_{\max} = \frac{\dot{m}}{\rho A_{\text{libre}}} = \frac{\dot{m}}{\rho \sigma A_{\text{frontal}}}$$

que pasa a través del banco. Asimismo el número de Nusselt se define con el diámetro hidráulico,  $Nu \equiv hD_h/\lambda$ .

En la referencia [15] se incluyen una gran cantidad de este tipo de intercambiadores, de los cuales se muestran dos en las figuras 7.11 y 7.12.

**FIGURA 7.11** Factores de pérdida de presión y de transmisión de calor de un intercambiador compacto de tubos y aletas circulares [16].



Las dimensiones del intercambiador de la figura 7.11 son:

Número de aletas = 275 por metro.

Diámetro hidráulico de paso del banco,  $D_h = 6.68$  mm

---

**Convección forzada exterior**

---

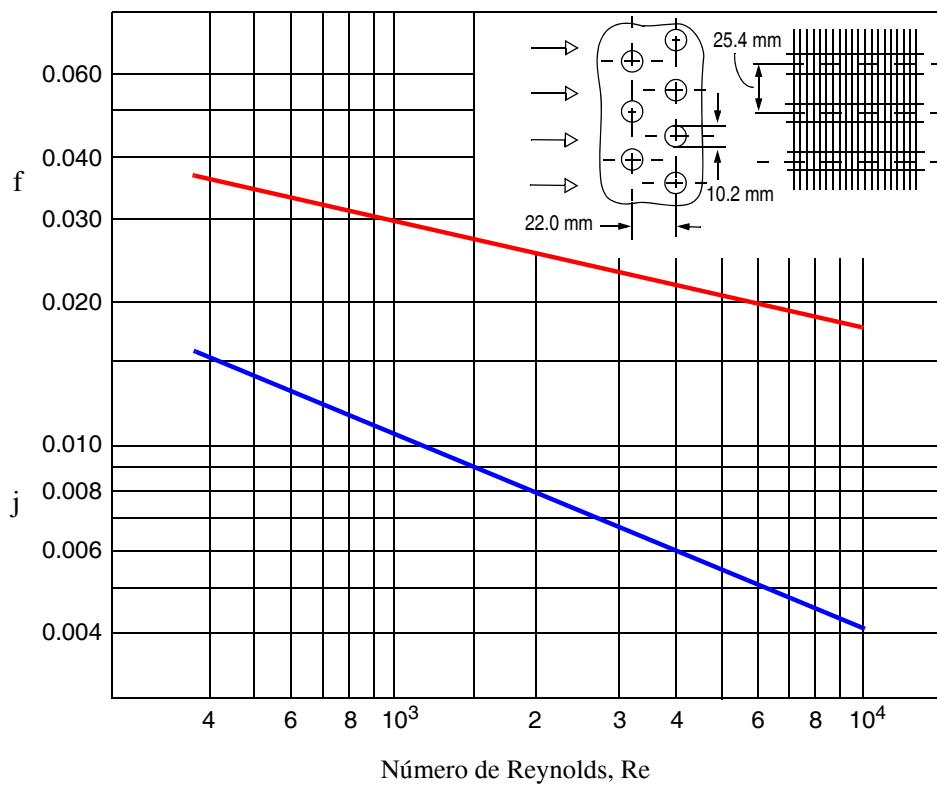
Espesor de las aletas,  $t = 0.254 \text{ mm}$

Cociente  $\frac{\text{Área libre de paso}}{\text{Área frontal del banco}}, \sigma = 0.449.$

$$\frac{\text{Área aletas}}{\text{Área exterior}}, \frac{A_a}{A} = 0.830.$$

---

**FIGURA 7.12** Factores de pérdida de presión y de transmisión de calor de un intercambiador compacto de tubos y aletas continuas [16].



Las dimensiones del intercambiador de la figura 7.12 son:

Número de aletas = 315 por metro.

Diámetro hidráulico de paso del banco,  $D_h = 3.63 \text{ mm}$

Espesor de las aletas,  $t = 0.330 \text{ mm}$

---

**Los bancos de tubos**

---

Cociente  $\frac{\text{Área libre de paso}}{\text{Área frontal del banco}}$ ,  $\sigma = 0.534$ .

$\frac{\text{Área aletas}}{\text{Área exterior}}$ ,  $\frac{A_a}{A} = 0.913$ .

**Intercambiadores de carcasa y tubos. Flujo mixto**

Estos intercambiadores de calor, que se estudian con más detalle en el capítulo 11, tienen la peculiaridad de que el fluido que circula por el exterior del banco de tubos (ver la cinta negra de la figura 7.10) se mueve sucesivamente perpendicularmente y en paralelo a los tubos. A continuación se presentan dos correlaciones.

**1. Expresión de Donohue [17]**

$$\overline{Nu} = 0.25 Re^{0.6} Pr^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14} \quad (7.44)$$

con  $Re \equiv \frac{DV}{\nu}$ ,  $V = \sqrt{V_{seg} \cdot V_{carc}}$ ; siendo  $V_{seg}$  la velocidad del fluido al pasar por la ventana de los tabiques deflectores (ver figura 7.10) y  $V_{carc}$  la velocidad del fluido en la sección diametral libre del centro de la carcasa, según se define para la expresión siguiente de Kern

**Validez:**  $10 < Re < 5000$ ;  $1 < Pr$

**Propiedades:** en  $\bar{T}_m$  salvo  $\mu_s$ .

**2. Expresión del Kern [18]**

$$\overline{Nu} = 0.36 Re^{0.55} Pr^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14} \quad (7.45)$$

donde  $\overline{Nu} \equiv \bar{h}D/\lambda$ ,  $Re \equiv \frac{D_h V}{\nu}$  y  $V$  se toma en la sección igual a la distancia entre deflectores por el diámetro interno libre de la carcasa, siendo el diámetro

---

## Convección forzada exterior

---

interno libre igual al diámetro de la carcasa menos el número de tubos en el centro de la carcasa por su diámetro.  $D_h$  es el diámetro hidráulico calculado como

$$D_h \equiv \frac{4 \left( \sqrt{3} S_T^2 / 4 - \pi D^2 / 8 \right)}{\pi D}$$

para disposición triangular (alternada) equilátera ( $S_T = S_D$ ) y

$$D_h \equiv 4 \frac{S_L S_T - \pi D^2 / 4}{\pi D} \quad \text{para disposición alineada.}$$

**Validez:**  $2000 < Re < 10^6$ ;  $0.7 < Pr$ .

**Propiedades:** en  $\bar{T}_m$ , salvo  $\mu_s$ .

## Flujo en paralelo a los tubos

La correlación (7.46) aparece en un artículo de Donohue [17]

$$\boxed{\bar{Nu} = 1.16 D_{eq}^{0.6} Re^{0.6} Pr^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14}} \quad (7.46)$$

con  $D_{eq} = 4 \frac{\text{Área sección transversal}}{\text{Perímetro húmedo}} = 4 \frac{S_L S_T - \pi D^2 / 4}{\pi D}$ ,  $S_L$  y  $S_T$  se indican en

la figura 7.8;  $Re \equiv \frac{DV}{\nu}$ , tomando  $V$  en la sección libre de la carcasa (igual al área de la sección de la carcasa menos el área de la sección de tubos) y  $\bar{Nu} \equiv \bar{h}D/\lambda$ .

**Propiedades:** En  $\bar{T}_m$ , salvo  $\mu_s$ .

## Chorros normales a superficies

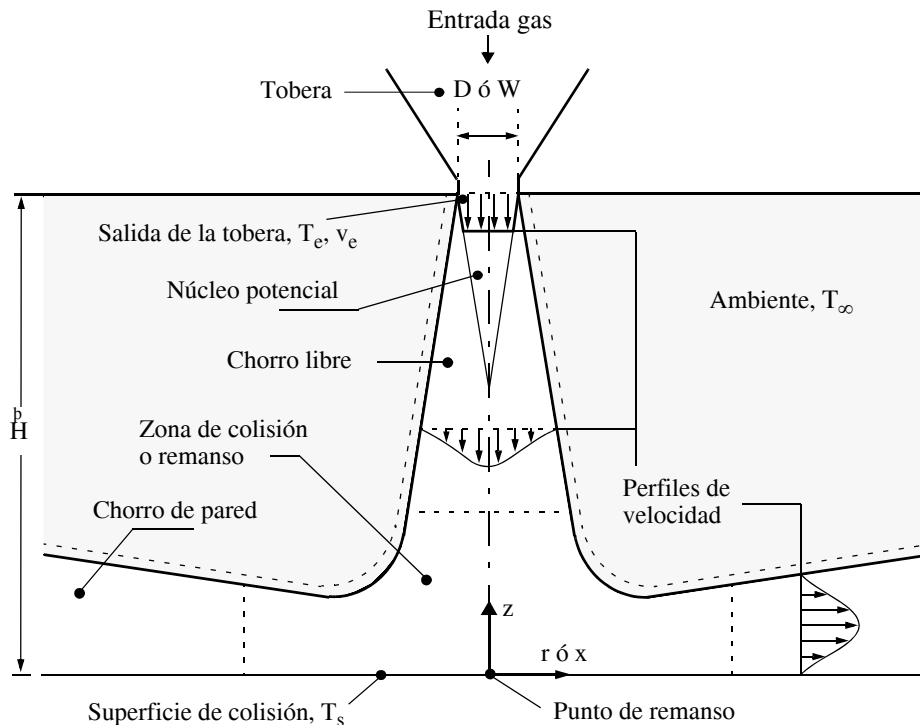
---

Un procedimiento de conseguir altos coeficientes de transferencia es lanzar chorros de gas perpendicularmente a la superficie que se quiere calentar o enfriar rápidamente. Ejemplos de esta técnica se encuentran en: soplado del vidrio, enfriamiento rápido en la industria cerámica, recocido de metales, enfriamiento de componentes calientes en turbinas de gas, refrigeración electrónica...

### Consideraciones hidrodinámicas y geométricas

Según se ve en la figura 7.13, el chorro se suele descargar a alta velocidad (turbulentamente), en un ambiente en reposo desde una tobera, normalmente de sección circular (diámetro  $D$ ) o alargada (anchura  $W$ ). El chorro a la salida tiene un perfil de velocidades uniforme (aproximadamente) y conforme avanza se vuelve no uniforme y se desacelera.

**FIGURA 7.13** Choque contra una superficie de un único chorro de gas, redondo o alargado.



Se distinguen tres zonas:

- **Chorro libre**, zona donde no hay influencia de la colisión chorro-pared.
- **Zona de colisión** o de **remanso**, caracterizada por una fuerte desaceleración en dirección perpendicular a la superficie y por una fuerte aceleración en dirección paralela a ella.
- **Chorro de pared**, donde se desacelera por fricción con la superficie y el ambiente en reposo.

---

**Convección forzada exterior**

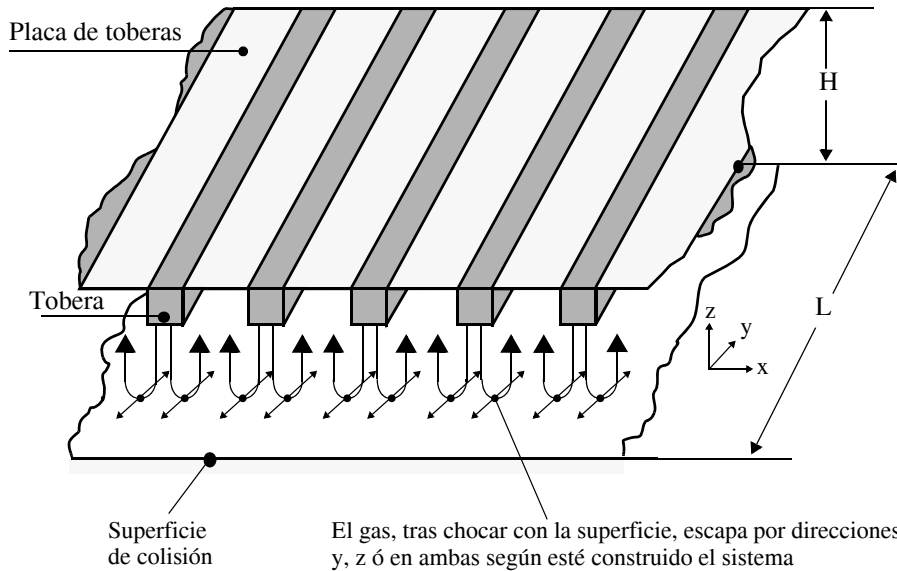
---

Así pues la velocidad del chorro en contacto con la pared pasa de un valor nulo a un máximo y disminuyendo posteriormente, con las implicaciones consecuentes en  $h$ . Muchas instalaciones tienen conjuntos de chorros, como se ilustra en la figura 7.14.

Estas configuraciones presentan además zonas de remanso secundarias, y tiene importancia en ellas la forma en que se elimina el gas ya utilizado (dirección  $\pm y$  o dirección  $\pm z$ , (figura 7.14).

---

**FIGURA 7.14** Colisión superficial de un conjunto de chorros alargados.



Todos estos efectos dependen de la velocidad de descarga del gas y de las dimensiones relativas y por ello el número de Nusselt tiene la dependencia funcional dada por la ecuación (7.47)

$$\overline{Nu} = f\left(\text{Re}, \text{Pr}, \frac{r(\text{ó } x)}{D_h}, \frac{H}{D_h}\right) \quad (7.47)$$

con  $\text{Re} = \frac{V_e D_h}{\nu}$ ,  $\overline{Nu} = \frac{\bar{h} D_h}{\lambda}$  y  $D_h$ :  $D$  para tobera circular y  $2W$  para tobera alargada (rendija).

---

### Chorros normales a superficies

---

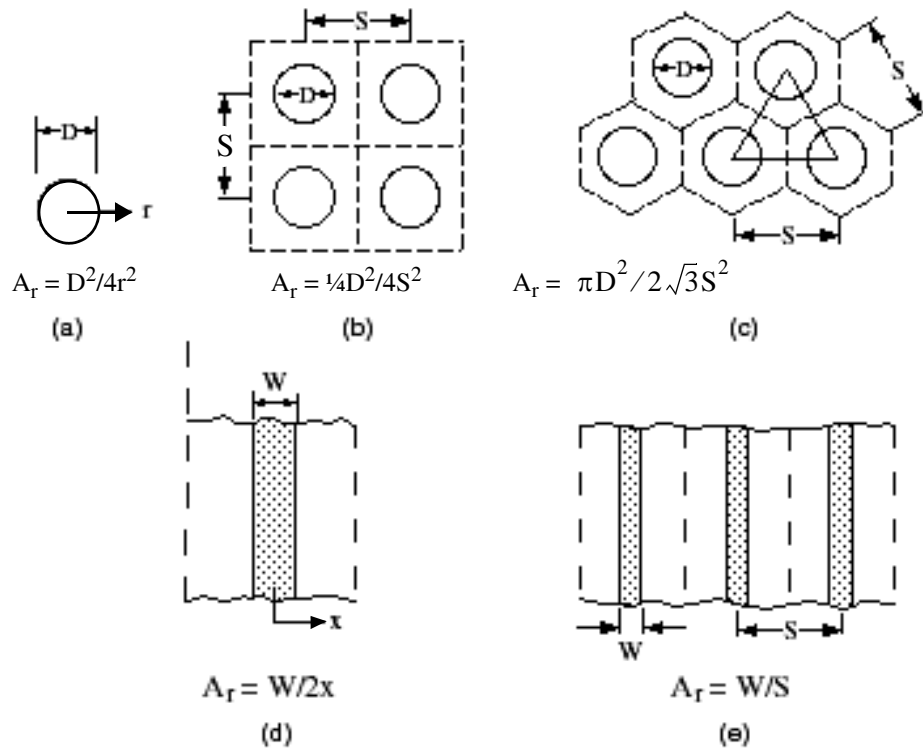
El flujo de calor intercambiado entre el chorro y la pared golpeada por él viene dado por la expresión (7.48), bajo la hipótesis de que  $T_e = T_\infty$ .

$$q'' = h(T_s - T_e) \quad (7.48)$$

Los subíndices s y e se refieren respectivamente a las condiciones en la superficie y a la salida de la tobera (ver figura 7.13).

---

**FIGURA 7.15** Sección de los aspectos geométricos pertinentes de (a) chorro redondo único, (b) disposición alineada de chorros redondos, (c) disposición alternada de chorros redondos, (d) chorro alargado único, (e) conjunto de chorros alargados.



### Correlaciones experimentales

El mejor conjunto de correlaciones lo ofrece H. Martin [19] en un artículo de 1977, tomando  $T_e = T_\infty$ . Sobre el significado de las magnitudes geométricas, ver las figuras 7.14 y 7.15.

- Tobera redonda aislada

$$\overline{Nu} = F_1(Re)G\left(\frac{r}{D}, \frac{H}{D}\right) Pr^{0.42}, \quad (7.49a)$$

$$\text{con } F_1 = 2 Re^{1/2}(1 + 0.005 Re^{0.55})^{1/2} \quad (7.49b)$$

$$\text{y } G = \frac{D}{r} \frac{1 - 1.1 \frac{D}{r}}{1 + 0.1 \left(\frac{H}{D} - 6\right) \frac{D}{r}} \quad (7.49c)$$

En este caso  $\overline{Nu}$  es el valor promedio del número de Nusselt en un círculo de la superficie impactada por el chorro de radio  $r$  (figura 7.15a) y de centro el punto de remanso (ver fig. 7.13).

**Validez:**  $2000 < Re < 400000$ ;  $2 < H/D < 12$ ;  $2.5 < r/D < 7.5$

- Tobera de rendija aislada

$$\overline{Nu} = \frac{3.06}{x/W + H/W + 2.78} Re^m Pr^{0.42} \quad (7.50a)$$

$$\text{con } m = 0.695 - \left[ \frac{x}{2W} + \left( \frac{H}{2W} \right)^{1.33} + 3.06 \right]^{-1} \quad (7.50b)$$

**Validez:**  $3000 < Re < 90000$ ;  $2 < H/W < 10$ ;  $4 < x/W < 20$

Como primera aproximación se puede utilizar para  $x < 4W$

En este caso  $\overline{Nu}$  es el valor promedio desde el punto de impacto del chorro (zona de remanso) hasta un punto  $x$  (figura 7.15d).

- Grupo de toberas redondas

$$\overline{Nu} = F_2(Re)G\left(\frac{H}{D}, A_r\right) K\left(A_r, \frac{H}{D}\right) Pr^{0.42} \quad (7.51a)$$

$$\text{con } F_2 = 0.5 Re^{2/3} \quad (7.51b)$$

$$G = 2A_r^{1/2} \frac{1 - 2.20 A_r^{1/2}}{1 + 0.20 \left( \frac{H}{D} - 6 \right) A_r^{1/2}} \quad (7.51c)$$

$$K = \left[ 1 + \left( \frac{H/D}{0.6/A_r^{1/2}} \right)^6 \right]^{-0.05} \quad (7.51d)$$

$A_r$  según figura 7.15 (b y c).

**Validez:**  $2000 < Re < 10^5$  ;  $2 < H/D < 12$  ;  $0.004 < A_r < 0.04$ .

- Grupo de toberas alargadas (de rendija)

$$\overline{Nu} = \frac{2}{3} A_{r,0}^{3/4} \left( \frac{2Re}{\frac{A_r}{A_{r,0}} + \frac{A_{r,0}}{A_r}} \right)^{2/3} Pr^{0.42} \quad (7.52a)$$

donde 
$$A_{r,0} = \left[ 60 + 4 \left( \frac{H}{2W} - 2 \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (7.52b)$$

**Validez:**  $1500 < Re < 4000$ ;  $2 < H/W < 80$ ;  $SH/WL > 1$ ;  $0.008 < A_r < 2.5$   
 $A_{r,0}$ . (La definición de  $A_r$  aparece en la figura 7.15e).

- Una disposición óptima de las toberas será tal que haga  $\overline{Nu}$  máximo. Para valores fijos de H, Martin indica que los valores óptimos de la boca de la tobera,  $D_{h,}$  y la separación entre ellas, S, viene dada por:

$$D_{h, \text{opt}} \cong 0.2 H \quad (7.53a)$$

$$S_{\text{opt}} \cong 1.40 H \quad (7.53b)$$

- Es importante tener presente la restricción del uso de las expresiones anteriores a las condiciones en que han sido obtenidas.

Por ejemplo, no se pueden aplicar a orificios de terminación abrupta en lugar de tener la terminación acampanada típica de las toberas.

---

## Convección forzada exterior

---

Tampoco se pueden aplicar si  $T_e \neq T_\infty$ , ya que entonces  $T_e$  **no** es una temperatura **adecuada** para representar las condiciones en el **fluido**.

## Lechos empaquetados

---

La circulación de gases a través de lechos de partículas sólidas es importante en muchas aplicaciones entre las que se encuentran: almacenamiento de energía térmica, secado, reacciones catalíticas heterogéneas (combustión, ...).

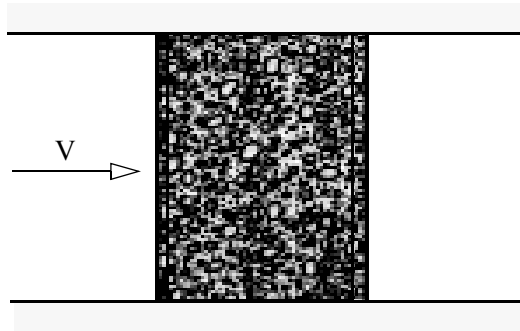
Existen básicamente dos tipos de lechos:

- **Empaquetados.** La posición de las partículas es fija.
- **Fluidos.** Las partículas se mueven en el seno del fluido.

En un lecho empaquetado (figura 7.16) existe una **gran área de intercambio** (de calor o masa) en un **pequeño volumen**, y el flujo irregular que hay en los huecos del lecho aumenta el transporte mediante la mezcla turbulenta.

---

**FIGURA 7.16** Lecho empaquetado.



## Correlaciones

1. La correlación de Whitaker [5] es válida para lechos caóticamente empaquetados de esferas, cilindros y otras geometrías

$$\overline{Nu} = \left( 0.5Re^{1/2} + 0.2Re^{2/3} \right) Pr^{1/3} \quad (7.54)$$

---

## Superficies giratorias

---

siendo  $\varepsilon \equiv \frac{\text{Volumen vacío}}{\text{Volumen lecho}}$  la porosidad,  $Re \equiv \frac{D_p V}{\nu(1-\varepsilon)}$ ;  $\overline{Nu} = \frac{\bar{h}D_p}{\lambda} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$

$$D_p \equiv 6 \frac{\text{Volumen partícula}}{\text{Área partícula}}.$$

**Validez:**  $22 < Re < 8000$ ;  $Pr \approx 0.7$  (gases);  $\varepsilon < 0.74$

**Propiedades:** en  $\bar{T}_p = \frac{\frac{T_{m,ent} + T_{m,sal}}{2} + T_s}{2}$

2. Para lechos de esferas, cilindros ( $L/D = 1$ ) y cubos

$$\boxed{\overline{Nu} = 2.06 Re^{0.425} Pr^{1/3} \frac{1}{\varepsilon} C} \quad (7.55)$$

con  $Re \equiv \frac{VD_p}{\nu}$  y  $\overline{Nu} \equiv \frac{\bar{h}D_p}{\lambda}$

$$C = \begin{cases} 1, & \text{para esferas} \\ 0.79, & \text{para cilindros} \\ 0.71, & \text{para cubos} \end{cases}$$

**Validez:**  $90 < Re < 4000$ ;  $Pr \approx 0.7$

## Superficies giratorias

---

Otra situación industrial de gran importancia en la que es necesaria una adecuada transmisión de calor es la refrigeración de equipos giratorios (motores, rodamientos, turbinas,...). Dado que los casos son muy diversos, en general habrá que recurrir a la bibliografía para encontrar la correlación o las correlaciones convenientes para cada uno de ellos [20]. A modo de ejemplo se presentan los tres que aparecen en la figura 7.17.

Para el caso del disco (a) el número de Reynolds se define como  $Re_r \equiv \frac{\dot{\omega} r^2}{\nu}$ , siendo  $\dot{\omega}$  la velocidad angular de giro del disco. El valor de transición de régimen laminar

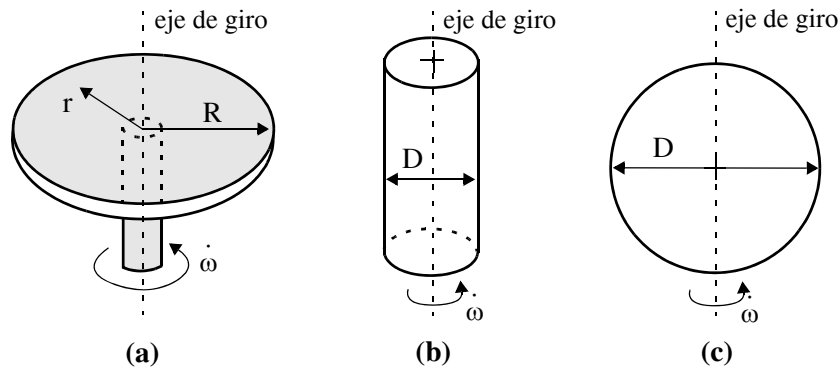
a turbulento vale  $Re_c > 2.4 \times 10^5$  y las correlaciones en ambos regímenes para el coeficiente local de convección,  $Nu_r \equiv \frac{h(r) \cdot r}{\lambda}$ , son:

$$Nu_r = \frac{0.585 Re_r^{1/2}}{0.6/Pr + 0.95} \quad \text{Régimen laminar} \quad (7.56)$$

$$Nu_r = 0.021 Re_r^{0.8} Pr^{1/3} \quad \text{Régimen turbulento} \quad (7.57)$$

---

**FIGURA 7.17** Esquema de un disco, un cilindro y una esfera giratorios.



En los otros dos casos de la figura 7.17, cilindro (b) y esfera giratorios (c), en la bibliografía sólo aparecen correlaciones para el coeficiente global,  $\overline{Nu}_D = \frac{\bar{h}D}{\lambda}$ , y definiéndose  $Re_D \equiv \frac{\dot{\omega}D^2}{\nu}$ .

**Esfera:**

$$\overline{Nu}_D = 0.43 Re_D^{0.5} Pr^{.4} ; 10^2 < Re_D < 5 \times 10^5 , Pr > 0.7 \quad (7.58)$$

$$\overline{Nu}_D = 0.06 Re_D^{0.67} Pr^{0.4} ; 5 \times 10^5 < Re_D < 7 \times 10^6 , Pr > 0.7 \quad (7.59)$$

**Cilindro:**

$$\overline{Nu}_D = 0.133 Re_D^{2/3} Pr^{1/3} ; Re_D < 4.3 \times 10^5 , 0.7 < Pr < 670 \quad (7.60)$$

## Referencias

---

1. H. Schlichting  
*Boundary Layer Theory*  
McGraw-Hill, New York, 1979.
2. L. Howarth  
*On the Solution of the Laminar Boundary Layer Equations*  
Proc. Roy. Soc. London, A164, p. 547–579, 1938.
3. M. Jakob  
*Heat Transfer, vol. I*  
Wiley, New York, 1967.
4. W. M. Kays, and M. E. Crawford  
*Convective Heat and Mass Transfer*  
McGraw-Hill, Singapore, 1993.
5. S. Whitaker  
AIChE Journal, Vol. 18, p. 361, 1972.
6. S. W. Churchill, and H. Ozoe  
Journal Heat Transfer, vol. 95, p. 78, 1973.
7. W. H. Giedt  
Transactions of ASME, vol. 71, p. 375, 1949.
8. R. Hilpert  
Forschung Geb. Ingenieurwes, vol. 4, p. 215, 1933.
9. A. Zhukauskas  
*Heat Transfer from Tubes in Cross Flow*  
Advances in Heat Transfer, vol. 8, p. 93–160, Academic Press, NY, 1972.
10. S. W. Churchill, and Bernstein, M.  
Journal of Heat Transfer, vol. 99, p. 300, 1977.
11. S. C. Yao, and V. E. Schrock  
ASME Publication 75-WA/HT-37, Houston, 1975.
12. E. D. Grimison  
Transactions of ASME, Process Industries, Pro-59-8, p. 583, 1937.
13. W. M. Kays, and R. K. Lo  
Standard Univ. of California, Technical Report no. 15, NR-035-104, 1952.
14. H. Hausen  
*Heat Transfer in Parallel, Counterflow and Crossflow*  
McGraw-Hill, New York, 1983.

---

**Convección forzada exterior**

---

15. W. H. Kays, and A. L. London  
*Heat Transfer and Flow-Friction Characteristics of Some Compact Heat-Exchanger Surfaces*  
Transactions of the ASME, vol. 72, p. 1075, 1950.
16. W. M. Kays, A. L. London  
*Compact Heat Exchangers*  
McGraw-Hill, New York, 1984.
17. D. A. Donohue  
Industrial and Engineering Chemistry, vol. 41, p. 2499, 1949.
18. D. Kern  
*Procesos de transferencia de calor*  
CECSA, México, 1965.
19. H. Martin  
*Advances in Heat Transfer, vol. 13, p. 1-60*  
Academic Press, New York, 1977.
20. A. F. Mills  
*Transferencia de calor*  
Irwin, Madrid, 1995.
21. E. R. G. Eckert and R. M. Drake, jr.  
*Analysis of Heat and Mass Transfer*  
Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1987.

---

## Síntesis del capítulo<sup>\*</sup>

---

- La **característica principal** de la convección exterior, tanto forzada como natural, es el **libre desarrollo de la capa límite**. Es el objeto sólido el que está sumergido en un gran volumen de fluido (infinito en el límite).
- Sólo es asequible de estudiar analíticamente el flujo de un fluido paralelo a una superficie plana y lisa, en régimen laminar.
- El resto son fórmulas obtenidas empíricamente, es decir, el resultado de ajustar matemáticamente puntos obtenidos por medida experimental.
- En el uso de cualquier expresión hay que tener en cuenta
  - a) Su rango de validez, es decir, para qué valores de las variables independientes ( $Re$ ,  $Pr$ , dimensiones, etc) es válida la fórmula.
  - b) Temperatura a la que deben calcularse las propiedades del fluido.

---

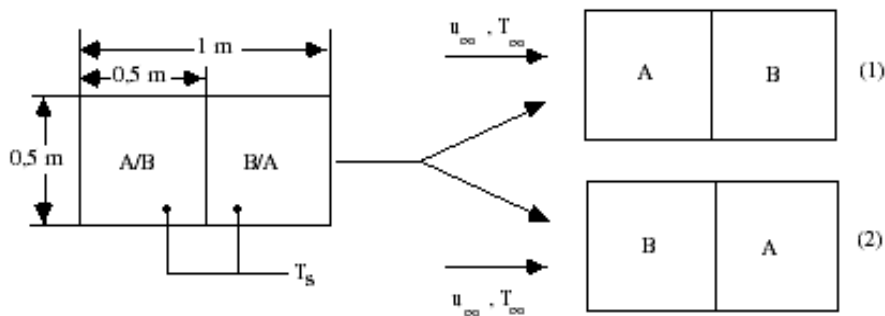
\*. Las cuestiones del presente capítulo se han incluido en las del siguiente.

---

# Problemas

---

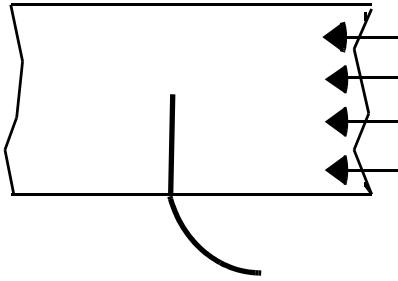
1. Un alambre fino de diámetro  $D$  se coloca en una corriente de gas para medir su velocidad en función de la transferencia de calor. Se hace circular una corriente eléctrica por el alambre, con lo cual este se calienta, disipándose el calor al fluido por convección. Se conocen la resistencia del alambre y su temperatura cuando el sistema se ha estabilizado. Se pide:
  - a) Escribir una expresión para determinar la velocidad del fluido en función de la diferencia de temperatura entre alambre y el fluido ( $T_s - T_\infty$ ) y el número del Prandtl del fluido.
  - b) ¿Cuál es la velocidad de una corriente de aire a 1 atm y 25 °C, si un alambre de 0.5 mm alcanza una temperatura de 40 °C disipando 35 W/m?
  
2. La tapa de un compartimento en el que se va a instalar un dispositivo de calefacción está formada por dos losas, una de ellas de superficie lisa (A) y otra ligeramente rugosa (B), expuestas a una corriente de aire atmosférico. Si se desea minimizar las pérdidas de calor ¿que orientación (1 ó 2) de las mostradas en la figura es preferible? Si las condiciones ambientales y de trabajo son  $T_s = 100$  °C,  $T_\infty = 20$  °C y  $u_\infty = 20$  m/s ¿cuál es el coeficiente de transferencia de calor por convección para toda la superficie dispuesta en la orientación óptima?

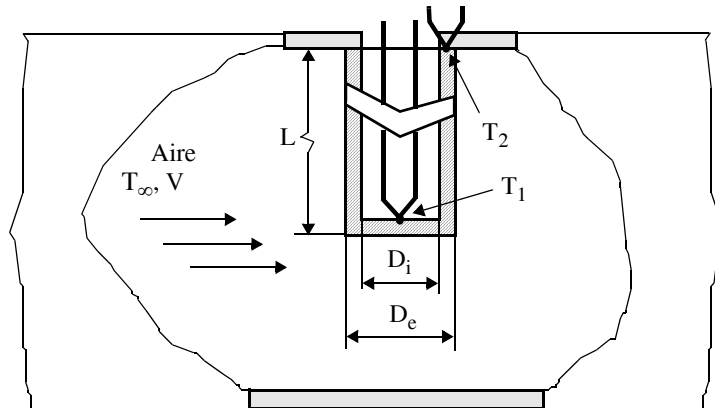


---

**Problemas**

---

3. Una caña para medida de temperatura de 25 mm de diámetro y 1 m de longitud de inserción se utiliza (como se muestra en la figura) dentro de un conducto de gran sección de paso por donde fluye aire a 150 m/s y 230 °C. Debido a la pérdida de calor en el recorrido externo de las conexiones, hay un error de medida que se quiere estimar. Para ello es preciso contar primero con un valor del coeficiente de convección  $\bar{h}$  entre el gas y la pértiga. Estudia en qué orden de magnitud podrá estar  $\bar{h}$ , partiendo de que el error será inferior a 5 °C en cualquier caso.
- 
4. Se han llevado a cabo experimentos con un cilindro metálico de 12.7 mm de diámetro y 94 mm de longitud. El cilindro se calienta haciendo pasar una corriente eléctrica por su interior y se refrigera con aire en flujo cruzado dentro de un túnel de viento de baja velocidad. Bajo determinadas condiciones de funcionamiento, la velocidad y temperatura aguas arriba del aire son  $V = 10$  m/s y  $T_\infty = 26.2^\circ\text{C}$ . La potencia eléctrica disipada vale  $P = 46$  W y la temperatura media del cilindro es  $T_s = 128.4^\circ\text{C}$ . Se estima que un 15% del calor se pierde por radiación y conducción en los extremos. Determinar el coeficiente de convección a partir de las medidas experimentales. Comparar este resultado con las estimaciones realizadas utilizando las correlaciones adimensionales apropiadas.
5. Se utiliza un termopar para medir la temperatura del aire caliente dentro de un conducto. La unión sensible ( $T_1$ ) está soldada al extremo de una caña de acero de longitud  $L = 0.15$  m y diámetros interior  $D_i = 5$  mm y exterior  $D_o = 10$  mm. Un segundo termopar ( $T_2$ ) mide la temperatura de la pared del conducto. Debido a la transferencia de calor, la medida  $T_1$  es diferente de la temperatura  $T_\infty$  que se quiere conocer. En unas condiciones tales que la velocidad del aire es  $V = 3$  m/s y los sensores registran unos valores  $T_1 = 450$  K y  $T_2 = 375$  K, determinar la temperatura del aire  $T_\infty$ .



Tanto el intercambio por radiación térmica como el calor evacuado por los cables pueden despreciarse. El cálculo es lo suficientemente aproximado si se toman todas las propiedades termofísicas constantes, siendo los valores medios  $\rho = 0.774 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu = 25 \times 10^{-6} \text{ Pa}\cdot\text{s}$   $\lambda = 0.0373 \text{ W/m K}$ ;  $\text{Pr} = 0.686$  para el aire y  $\lambda = 35 \text{ W/m K}$  para el acero.

6. Sobre una bombilla incandescente de 50 W circula aire atmosférico a 25 °C y una velocidad de 0.5 m/s, encontrándose la superficie de la bombilla a 140 °C. ¿Cuál es el ritmo de pérdidas de calor al aire por convección, si se aproxima la bombilla a una esfera de 50 mm de diámetro?
  
7. Se diseña un precalentador aire–vapor como un banco de tubos por el interior de los cuales circula vapor condensante a 100 °C con el que ha de calentarse una corriente de aire en flujo cruzado sobre los tubos. El aire entra a 1 atm 25 °C y con una velocidad de 5 m/s. Cada tubo mide 1 m de largo y tiene un diámetro exterior de 10 mm. El banco consta de 196 tubos colocados en disposición alineada formando un cuadrado, siendo  $S_T = S_L = 15 \text{ mm}$  ¿Cual es la potencia total transferida al aire? ¿Cuál es la pérdida de carga en el lado aire?
  
8. Un sistema de calefacción habitual, tanto en edificios como en procesos industriales, consiste en calentar el aire en un banco de tubos por el interior

---

**Problemas**

---

de los cuales circula agua a presión a altas temperaturas, mientras que el aire pasa en flujo cruzado a través de los mismos. Supóngase un banco de tubos de diámetro exterior de 16.4 mm, dispuestos al tresbolillo con distancia transversal  $S_T = 31.3$  mm y longitudinal  $S_L = 34.3$  mm. El banco consta de siete filas de tubos en la dirección del flujo de aire y ocho tubos por fila. En condiciones habituales de operación, la temperatura superficial de los tubos es  $70$  °C, mientras que las características del flujo de aire son  $T_\infty = 15$  °C y  $u_\infty = 6$  m/s. Determinar el coeficiente de convección en el lado aire y la potencia transferida por el banco ¿Cuál es la caída de presión en el lado aire?

9. Se utiliza un flujo de aire ( $\rho = 1.1614$  kg/m<sup>3</sup>;  $\mu = 184.6 \times 10^{-7}$  Pa·s;  $\lambda = 0.0263$  W/m K;  $Pr = 0.707$ ) a  $27$  °C y con una velocidad de 10 m/s para refrigerar componentes electrónicos montados sobre una tarjeta de circuito impreso. Cada componente, que mide  $4 \times 4$  mm disipa unos 40 mW a evacuar desde la superficie de la placa. En el extremo que enfrenta el aire existe una irregularidad que induce turbulencia en toda la capa límite. Estimar la temperatura de un componente situado a una distancia de 15 mm del extremo.
10. Durante cierto proceso se desea enfriar esferas macizas de bronce (90% Cu, 10% Al) de 20 mm de diámetro arrojándolas en un tanque de agua mantenido a una temperatura de 280 K. Puede suponerse que las esferas alcanzan la velocidad terminal inmediatamente después del impacto y que caen libremente hasta el fondo del tanque ¿Qué altura debe tener el tanque de agua para que las esferas, cuya temperatura inicial es 360 K lleguen al fondo con una temperatura en el centro de 320 K?

AYUDA: La velocidad terminal de caída es aquella a la que se igualan las fuerzas gravitatorias (y de flotación) y la fuerza de arrastre. Puesto que deja de haber aceleración, la velocidad permanece constante durante la caída.

11. La utilización de lechos empaquetados compuestos por piedras como método de almacenamiento de energía térmica es bastante común en el aprovechamiento de la energía solar, así como en ciertos procesos industriales. Para un cierto sistema se dispone de un contenedor cilíndrico de 2 m de largo por 1 m de diámetro, en el cual se empaquetan piedras casi esféricas.

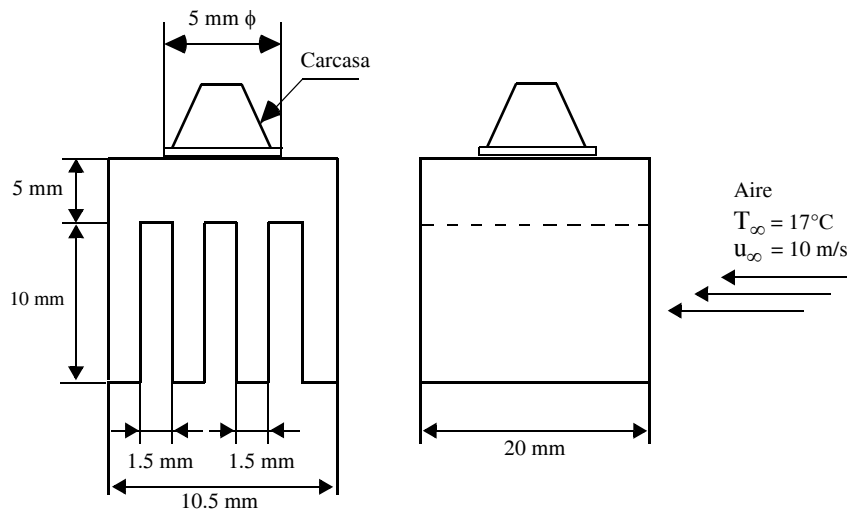
---

**Problemas**

---

cas de 0.03 m de diámetro. El lecho tiene una porosidad de  $\varepsilon = 0.42$ , y la densidad y calor específico de las piedras valen  $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$  y  $c_p = 879 \text{ J/kg K}$  respectivamente. Un caudal de aire  $\dot{m} = 1 \text{ kg/s}$  a presión atmosférica y temperatura  $90 \text{ }^\circ\text{C}$  atraviesa el lecho en dirección axial y en estado estacionario. Si las piedras están a una temperatura de  $25 \text{ }^\circ\text{C}$  ¿cuál es la potencia total transferida por la corriente de aire al lecho?

12. En la figura se muestra un disipador de aluminio (alloy 2024) que se utiliza para refrigerar un diodo de potencia que disipa 5 W. La resistencia interna entre el diodo y su carcasa es de  $0.8 \text{ K/W}$ , mientras que la resistencia de contacto entre la carcasa y el disipador vale  $10^{-5} \text{ m}^2 \text{ K/W}$ . Para mejorar la transferencia de calor, se hace circular un flujo de aire a  $17 \text{ }^\circ\text{C}$  con una velocidad  $u_\infty = 10 \text{ m/s}$ . Suponiendo que toda la potencia se disipa a través de las aletas, estimar la temperatura de trabajo del diodo.



13. Se desea efectuar un tratamiento térmico superficial a las caras de una placa grande de aluminio (Alloy 2024-T6) de espesor 40 mm, inicialmente a 543 K. Para el tratamiento se debe conseguir una temperatura de 523 K en el plano interior situado a 20 mm de la superficie. Para ello se hace circular con una velocidad de 2 m/seg agua saturada a  $184 \text{ }^\circ\text{C}$  a lo largo de ambas caras, de forma que la fuerza media por  $\text{m}^2$  de la misma, que hay que efectuar para evitar el arrastre de la placa, es de  $\bar{\tau} = 6.8 \text{ N}$ . Se desea saber:

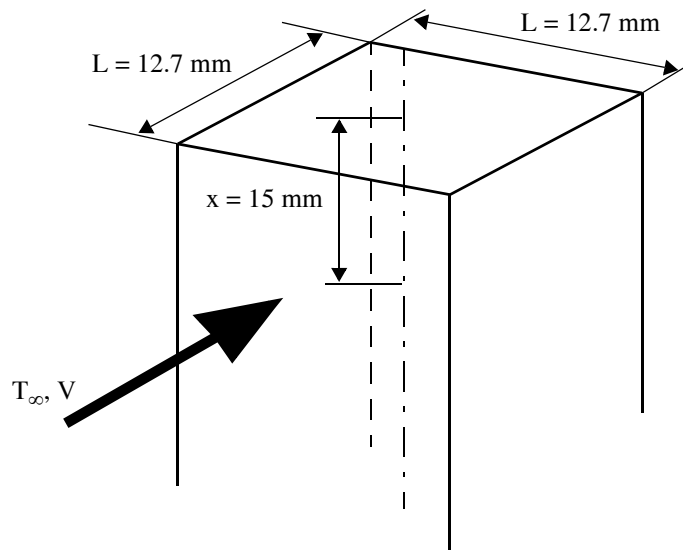
---

**Problemas**

---

- a) Determinar el coeficiente de convección promedio  $\bar{h}$  entre el aluminio y el agua.
- b) Calcular la cantidad de calor cedido por la placa desde el instante inicial hasta que se alcanzan los 523 K a 20 mm de la superficie.
- c) Si la placa fuese de acero inoxidable (tipo 304) el tiempo de calentamiento sería mayor o menor que en el caso de la placa de aluminio ¿Qué le ocurrirá a la temperatura superficial? Razonar las respuestas.

- 14.** Una barra larga de acero inoxidable AISI 304, de sección cuadrada (lado  $L = 12.7$  mm), se encuentra inicialmente a  $T_i = 425$  K. En un momento  $t_0 = 0$  se ve afectada por una corriente de aire a  $T_\infty = 275$  K en dirección perpendicular a una de sus caras laterales ( $V = 10$  m/s). Encontrar las temperaturas a que se encontrará un punto del eje de la barra, situado a una distancia de 15 mm de su superficie superior,  $t = 3$  minutos después de la aparición del flujo.



---

**Problemas**

---

---

## CAPÍTULO 8

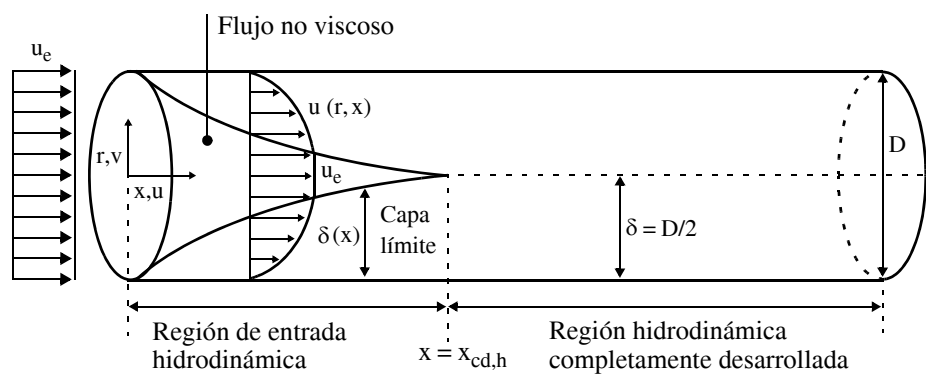
# Convección forzada interior

---

Existen multitud de casos en los que los fluidos circulan por el interior de conducciones (principalmente circulares, pero no exclusivamente). Esta situación tiene peculiaridades respecto del flujo por el exterior de superficies —tanto en la variación espacial de las propiedades del fluido (particularmente su temperatura) como en las condiciones de intercambio con la superficie— que exigen un tratamiento diferenciado.

---

**FIGURA 8.1** Desarrollo de la capa límite hidrodinámica laminar en un tubo circular.



Los dos aspectos principales que la diferencian son:

---

## Convección forzada interior

---

- El balance de energía, ya que el confinamiento del fluido hace que ya no se comporte como un foco térmico y que no se pueda hablar de  $T_\infty$  sino que deba introducirse el concepto de temperatura media del fluido que se define más adelante.
- Las capas límite se ven impedidas de desarrollarse indefinidamente, apareciendo dos zonas de comportamiento distinto (figura 8.1).
  - Región de entrada (R.E.), donde la capa límite experimenta un desarrollo libre semejante al de un flujo exterior.
  - Región completamente desarrollada (R.C.D.), donde la capa límite alcanza su espesor máximo igual al radio del conducto y cuya constancia tiene como consecuencia importante que los coeficientes de intercambio (fricción, Nusselt, etc) tienden a ser también constantes.

En particular, la longitud de entrada de la capa límite hidrodinámica,  $x_{cd,h}$  viene dada por:

$$x_{cd,h} \approx 0.056 \text{ Re } D \quad (8.1)$$

para régimen laminar [1], y

$$x_{cd,h} \approx (6.19 \ln \text{Re} - 46) D \quad (8.2)$$

para régimen turbulento [2].

**Nota.** Recuérdese que en un conducto el número de Reynolds se define como  $\text{Re} \equiv u_m D / \nu$ , con  $u_m$ : velocidad media del fluido;  $D$ , diámetro si el tubo es circular, diámetro hidráulico,  $D_h$ , si el tubo es no circular. Asimismo el valor crítico del número de Reynolds universalmente aceptado que marca el final del régimen laminar es  $\text{Re}_c \cong 2300$ .

## Aspectos térmicos

---

Si las temperaturas de la pared del tubo,  $T_s$ , y del fluido,  $T_m$  (definida a continuación) son diferentes, aparece la *capa límite térmica* cuyo desarrollo delimita una *región de entrada térmica* y una *región completamente desarrollada térmica*.

Respecto del desarrollo relativo de las capas límite térmica e hidrodinámica aparecen tres situaciones:

1. La capa límite térmica se desarrolla bajo un perfil de velocidades completamente desarrollado bien porque la entrada del conducto es adiabática (fig. 8.2a) o bien porque se trata de un fluido muy viscoso como los aceites. En

**Aspectos térmicos**

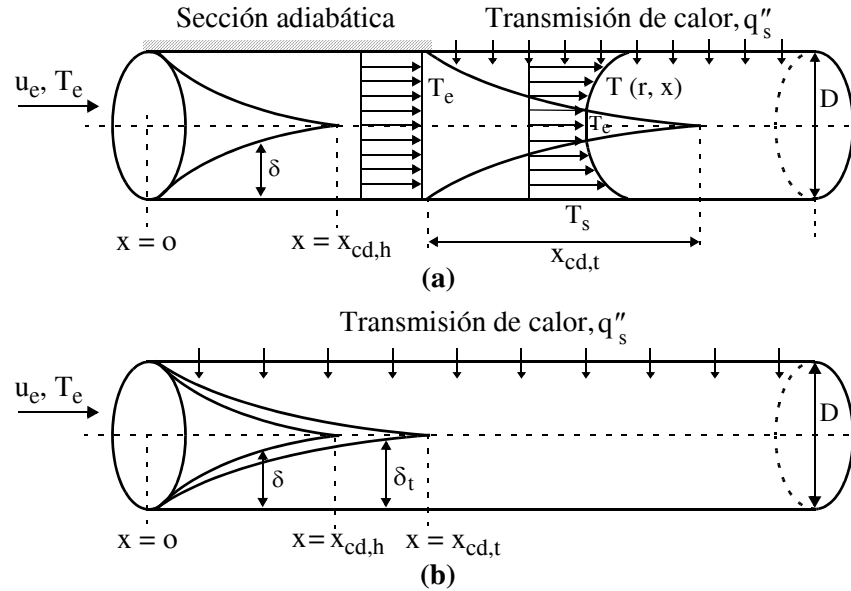
cuyo caso se habla de región de *entrada puramente térmica* y se tiene que la longitud de la entrada térmica,  $x_{cd,t}$ , vale

$$x_{cd,t} = 0.033\text{RePr}D \text{ para } T_s = \text{cte, en régimen laminar [1]} \quad (8.3a)$$

$$x_{cd,t} = 0.043\text{RePr}D \text{ para } q''_s = \text{cte, en régimen laminar [1]} \quad (8.3b)$$

$$5D \leq x_{cd,t} \leq 10D \text{ en régimen turbulento [2]. Se puede tomar } x_{cd,t} < 10D \quad (8.4)$$

**FIGURA 8.2** Longitudes de entrada hidrodinámica y térmica: a) la transferencia de calor empieza después de una sección adiabática.; b) la transferencia de calor comienza a la entrada del conducto.



2. Las capas límite térmica e hidrodinámica se desarrollan simultáneamente (Fig. 8.2b). Se habla de *región de entrada combinada*. En este caso

En régimen laminar [1]		$T_s = \text{cte}$	$q''_s = \text{cte}$	(8.5)
$\frac{x_{cd,t}}{\text{RePr}D}$ vale	$\text{Pr} \rightarrow 0$	0.028	0.042	
	$\text{Pr} = 0.7$	0.037	0.053	
	$\text{Pr} \rightarrow \infty$	0.033	0.043	

En régimen turbulento [2]	$x_{cd,t} \approx 10D$	(8.6)
---------------------------	------------------------	-------

3. El perfil térmico completamente desarrollado se alcanza mucho más rápida-

---

## Convección forzada interior

---

mente que el de velocidades, por lo que éste se toma uniforme al comienzo del tubo. Sucede en fluidos con números de Prandtl muy pequeños, como los líquidos metálicos.

### Temperatura media

De la misma manera que en cada sección del tubo hay un perfil de velocidades, del que interesa conocer su valor medio,  $u_m$ , si hay intercambio de calor entre el fluido y la superficie, aparece un perfil de temperaturas, del que interesa principalmente su valor medio,  $T_m$  (en inglés *mean* o *bulk*).  $T_m$  se define como “la temperatura uniforme en una sección con la que se transportaría la misma energía térmica que la que realmente se transporta por el fluido.”

$$T_m \equiv \frac{\int_{A_c} \rho u c_v T dA_c}{\dot{m} c_v}$$

donde  $A_c$  es el área de la sección recta.

### Ley cinética para convección interior

---

Toma la forma  $q'' = h(T_s - T_m)$  (8.7)

jugando  $T_m$  el papel de  $T_\infty$  en flujo exterior.

### Condiciones de pleno desarrollo

---

La región completamente desarrollada hidrodinámica se caracteriza por  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , es

decir el perfil  $u(r)$  es invariante con  $x$ .

En la R.C.D. térmica no puede pasar exactamente lo mismo porque si hay transferencia de calor, cambia  $T_m$  y por tanto el perfil  $T(r)$  con  $x$ . En este caso lo que sucede es que el perfil relativo o temperatura adimensional se mantiene invariante [3]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{T_s(x) - T(r, x)}{T_s(x) - T_m(x)} \right]_{R.C.D.} = 0$$

---

### Balance de energía

---

De esta condición se deduce una consecuencia muy importante. Efectivamente, la expresión entre corchetes no depende de  $x$ , luego:

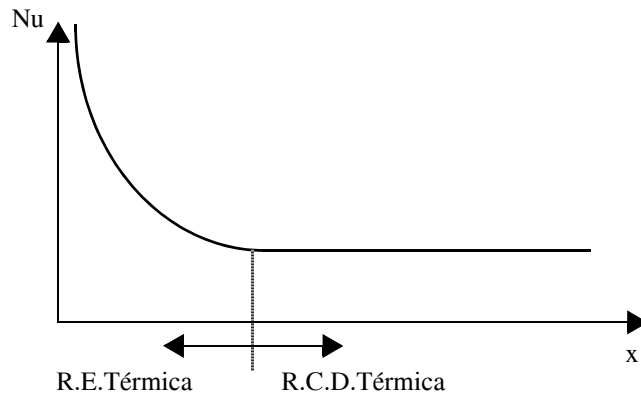
$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{T_s - T}{T_s - T_m} \right) \right|_{r=r_0} = \frac{-\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0}}{T_s - T_m} = \boxed{\frac{h}{\lambda} \neq f(x)} \quad (8.8)$$

Para un tubo  $Nu \equiv hD/\lambda$ , luego el número de Nusselt va a ser constante en la región completamente desarrollada.

Como al comienzo del tubo  $\delta_t \rightarrow 0$ , los gradientes son muy grandes y  $h \rightarrow \infty$ . Luego la variación del coeficiente de convección a lo largo del conducto es de la forma mostrada en la figura 8.3.

---

**FIGURA 8.3** Evolución del número de Nusselt a lo largo de un conducto.



---

### Balance de energía

---

El confinamiento del fluido que limita y determina una cantidad circulante (**caudal**) finita permite hacer un balance de energía que va a determinar la evolución de  $T_m$ ,  $T_m(x)$ .

El balance, como indica la figura 8.4, se realiza sobre un filete fluido de espesor  $dx$  y perímetro  $P$ .

El balance de energía sobre el volumen de control, si la situación es estacionaria y se desprecian las variaciones de energía cinética y potencial y el calor por con-

---

### Convección forzada interior

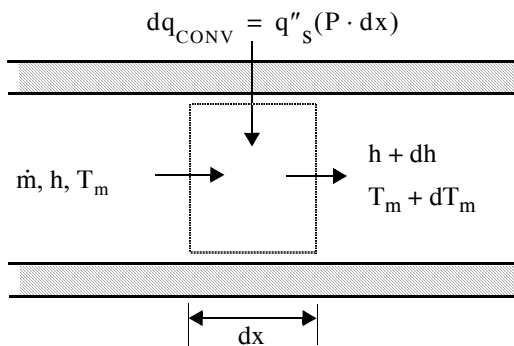
---

ducción en la dirección axial (como es habitual), conduce a  $dq_{\text{conv}} = \dot{m} dh$ , donde  $h$  aquí representa la entalpía específica del fluido.

Si la pérdida de carga es pequeña, o se trata de un gas ideal o un fluido incompresible, la variación de entalpía viene dada por  $dh = c_p dT_m$ , con lo que el calor recibido por el fluido vale  $dq = \dot{m} c_p dT_m$ , habiéndose eliminado el subíndice conv de  $dq$  por comodidad.

---

**FIGURA 8.4** Balance de energía en un fluido confinado.



Por otro lado,  $dq = q''_s P dx = h (T_s - T_m) P dx$ , de donde

$$\boxed{\frac{dT_m}{dx} = \frac{hP}{\dot{m}c_p}(T_s - T_m)} \quad (8.9)$$

**Corolario.**— De la ecuación (8.9) se deduce el resultado lógico de que si  $T_s > T_m \Rightarrow \frac{dT_m}{dx} > 0$ ,  $T_s < T_m \Rightarrow \frac{dT_m}{dx} < 0$ .

### Variación de $T_m$ y $T_s$ en las dos condiciones de contorno habituales

En muchas aplicaciones se dan una de las dos condiciones superficiales más manejadas:

- Flujo de calor constante,  $q''_s = \text{cte}$  (calentamiento eléctrico de la pared del tubo, irradiación uniforme,...)
- Temperatura superficial constante,  $T_s = \text{cte}$  (fluido cambiando de fase al otro lado de la pared).

---

**Balance de energía**

---

De la tercera condición, la convectiva, se hablará en el capítulo 11 de Intercambiadores de Calor en detalle y aquí sólo se dará un avance.

Es fácil y útil, con las expresiones anteriores, determinar  $T_m(x)$  y  $T_s(x)$  en ambos casos

**1.**  $q''_s = \text{cte}$  (tubo isoflujo)

De las expresiones (8.7) y (8.9) resulta  $\frac{dT_m}{dx} = \frac{q''_s P}{\dot{m}c_p}$ , que por integración, considerando  $P$  y  $c_p$  constantes da

$$\boxed{T_m = T_{m, \text{ent}} + \frac{q''_s P}{\dot{m}c_p} x} \quad (8.10)$$

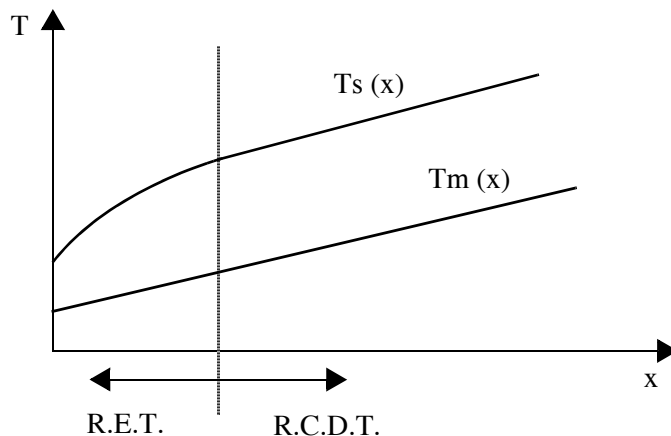
Por otro lado si se toma la conductividad térmica del fluido  $\lambda$  constante, de la relación (8.8) resulta

$$\frac{q''_s}{h} = (T_s - T_m) \neq f(x) \Rightarrow \frac{dT_s}{dx} = \frac{dT_m}{dx} \quad \text{en la R.C.D.}$$

mientras que en la R.E. como  $h$  disminuye con  $x$  resulta que  $(T_s - T_m)$  aumenta con  $x$ , lo que se muestra en la figura 8.5.

---

**FIGURA 8.5** Evolución de las temperaturas de la pared del tubo,  $T_s$ , y del fluido,  $T_m$ , en un conducto con flujo de calor uniforme.



---

**Convección forzada interior**

---

**2.**  $T_s = \text{cte.}$  (tubo isoterma)

Definiendo  $\Delta T = T_s - T_m$  en la ecuación (8.9), resulta

$$-\frac{d(\Delta T)}{dx} = \frac{Ph}{\dot{m}c_p} \Delta T$$

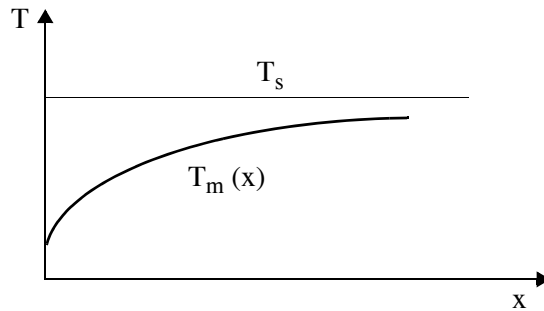
que integrada a partir de la entrada del tubo y usando  $\bar{h} = \frac{1}{x} \int_0^x h \, dx$  da

$$\boxed{\Delta T(x) = \Delta T_{\text{ent}} \exp\left(-\frac{P\bar{h}}{\dot{m}c_p} x\right)} \quad (8.11)$$

es decir, el salto térmico decrece de forma aproximadamente exponencial (sólo será estrictamente exponencial donde  $h$  sea constante), lo cual se representa en la figura 8.6.

---

**FIGURA 8.6** Evolución de las temperaturas de la pared del tubo,  $T_s$ , y del fluido,  $T_m$ , en un conducto isoterma.



Aplicando la ecuación (8.11) a todo un tubo entero de longitud  $L$ , se tiene

$$\frac{\Delta T_{\text{sal}}}{\Delta T_{\text{ent}}} = \exp\left(-\frac{P\bar{h}}{\dot{m}c_p} L\right) \Rightarrow \dot{m}c_p = \frac{PL\bar{h}}{\ln\left(\frac{\Delta T_{\text{ent}}}{\Delta T_{\text{sal}}}\right)} = \frac{A_s\bar{h}}{\ln\left(\frac{\Delta T_{\text{ent}}}{\Delta T_{\text{sal}}}\right)}$$

y como

$$q = \dot{m}c_p(T_{m,\text{sal}} - T_{m,\text{ent}}) = \dot{m}c_p(\Delta T_{\text{ent}} - \Delta T_{\text{sal}}) \Rightarrow \dot{m}c_p = \frac{q}{\Delta T_{\text{ent}} - \Delta T_{\text{sal}}}$$

Igualando ambas expresiones

$$\boxed{q = \bar{h} A_s \Delta T_{lm}} \quad (8.12)$$

donde  $\Delta T_{lm} \equiv \frac{\Delta T_{sal} - \Delta T_{ent}}{\ln \left( \frac{\Delta T_{sal}}{\Delta T_{ent}} \right)}$  es la media logarítmica del salto de temperatura,

es decir, dada la naturaleza exponencial de la variación de  $\Delta T$  no es adecuada una media aritmética para la expresión global de la convección.

- 3.** Condición convectiva. En esta situación, tratada a fondo en el capítulo 11 de Intercambiadores de Calor, se obtiene una expresión para el intercambio de calor,  $q$ , entre el fluido interior y el exterior al conducto, semejante a la (8.12) cambiando:

$\bar{h}$  por  $\bar{U}$  (coeficiente global de intercambio de calor).

$T_s$  por la temperatura del fluido exterior.

## Correlaciones para el coeficiente de convección en tubos circulares

---

### Régimen laminar. Región completamente desarrollada

Este caso se puede resolver teóricamente [3]. Aplicando las simplificaciones habituales (propiedades constantes, situación estacionaria,  $\mu \phi \approx 0$ , aproximaciones de capa límite,...) la ecuación de la energía térmica resulta

$$\left. \begin{array}{l} \underbrace{u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r}}_{\text{Advección}} = \underbrace{\frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)}_{\text{Conducción}} \\ \text{En la R.C.D} \\ v = 0 \quad \text{y} \quad u = 2u_m \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \end{array} \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{2u_m}{a} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial x} \quad (8.13)$$

Teniendo presente que el objetivo es conocer la distribución radial de temperaturas en una sección,  $\partial T/\partial r$ , para obtener finalmente el coeficiente de convección, para seguir operando es preciso conocer la distribución axial de temperaturas, por lo que hay que introducir una condición térmica superficial.

**1.  $q''_s = \text{cte}$**

En este caso se ha visto que

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dT_s}{dx} = \frac{dT_m}{dx} = \text{cte} \\
 \text{y como en la R.C.D. Térmica} \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{T_s - T}{T_s - T_m} \right] = 0
 \end{aligned} \right\} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_m}{dx} = \text{cte} = \frac{q''_s P}{\dot{m}c_p} \quad (8.14)$$

por lo que la ecuación diferencial (8.13) queda

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{2u_m}{a} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \frac{q''_s P}{\dot{m}c_p}$$

con las Condiciones de Contorno

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \quad \text{y} \quad T(r_0) = T_s(x)
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{La solución se obtiene} \\ \text{por integración doble} \\ \text{directa.} \end{array}$$

$$T(r, x) = T_s(x) - \frac{2u_m r_0^2}{a} \frac{q''_s P}{\dot{m}c_p} \left[ \frac{3}{16} + \frac{1}{16} \left( \frac{r}{r_0} \right)^4 - \frac{1}{4} \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \quad (8.15)$$

Aplicando la definición de temperatura media al caso del tubo circular (tomando  $c_v = \text{cte}$ )

$$T_m = \frac{2}{u_m r_0^2} \int_0^{r_0} u T r \, dr$$

resultando de la distribución  $T(r, x)$  dada por la ecuación (8.15)

$$T_m = T_s - \frac{11}{48} \left( \frac{u_m r_0^2}{a} \right) \left( \frac{q_s'' P}{\dot{m} c_p} \right) = T_s - \frac{11 q_s'' D}{48 \lambda} \Rightarrow h = \frac{48 \lambda}{11 D}$$

por tanto

$$Nu \equiv \frac{hD}{\lambda} = \frac{48}{11} = \boxed{4.36 = Nu} \quad \text{valor local} \quad (8.16)$$

## 2. $T_s = \text{cte}$

De razonamientos matemáticos semejantes, que no vale la pena desarrollar\*, se obtiene

$$\boxed{Nu = 3.66} \quad \text{valor local} \quad (8.17)$$

Para obtener el valor de  $h$  (local) no hay más que usar la definición de  $Nu$  con la conductividad térmica del fluido calculada en  $T_m$ .

## Régimen laminar. Región de entrada

Aquí la solución a la ecuación de la energía térmica es mucho más difícil de obtener porque tanto la velocidad como la temperatura dependen de  $r$  y  $x$ ,  $v \neq 0$ , etc. No obstante existen soluciones numéricas y empíricas presentadas en las publicaciones científicas, de los cuales se muestran los resultados para los dos primeros tipos de regiones de entrada; el tercero ha entrado dentro de los intereses de las aplicaciones más tardíamente y corresponde a un campo de aplicaciones bastante restringido.

### Región de entrada puramente térmica

#### 1. $q_s'' = \text{cte}$ .

Kays [7] presenta la siguiente correlación, procedente del ajuste de valores

---

\*. El que tenga interés en el desarrollo puede consultar la bibliografía especializada, como las referencias 4 y 5.

---

**Convección forzada interior**

---

numéricos

$$\text{Nu} = 4.36 + \frac{0.023 \text{Gz}_x}{1 + 0.0012 \text{Gz}_x} \quad (8.18)$$

siendo  $\text{Gz}_x \equiv \frac{\text{Re} \cdot \text{Pr}}{x/D}$  el número adimensional de Graetz, típico de las situaciones correspondientes a las regiones de entrada. Al ser local la correlación, las propiedades se calculan en  $T_m(x)$ .

**2.**  $T_s = \text{cte.}$

La correlación de Hausen [8], es

$$\overline{\text{Nu}} = 3.66 + \frac{0.0668 \text{Gz}_L}{1 + 0.04 \text{Gz}_L^{2/3}} \quad (8.19)$$

Al ser una correlación global, las propiedades se calculan en

$\bar{T}_m = \frac{T_{m,\text{ent}} + T_{m,\text{sal}}}{2}$ , y siendo  $\text{Gz}_L \equiv \frac{\text{Re} \cdot \text{Pr}}{L/D}$  con L la longitud de tubo considerada.

**Región de entrada combinada**

**1.**  $q''_s = \text{cte}$

Kays presenta [7] la correlación numérica local siguiente

$$\text{Nu} = 4.36 + \frac{0.036 \text{Gz}_x}{1 + 0.0011 \text{Gz}_x} \quad (8.20)$$

Las propiedades se calculan en  $T_m(x)$ .

**2.**  $T_s = \text{cte}$

Ecuación de Sieder–Tate [9]

$$\overline{\text{Nu}} = 1.86 \text{Gz}_L^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14} \quad (8.21)$$

las propiedades se calculan en  $\bar{T}_m$ , salvo  $\mu_s$ , y es válida para

$$Gz_L^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14} > 2$$

Ecuación de Kays [7]

$$\bar{Nu} = 3.66 + \frac{0.104 Gz_L}{1 + 0.016 Gz_L^{0.8}} \quad (8.22)$$

las propiedades se calculan en  $\bar{T}_m$ .

### Régimen de transición

Cuando el número de Reynolds supera su valor crítico, 2300, el flujo deja de ser laminar, pero no es plenamente turbulento hasta  $Re \approx 10^4$ . En medio, queda un régimen y un comportamiento mal estudiado hasta hace poco.

- En 1990, R. Hedrick publica una breve nota técnica [10] con una larga correlación ajustada precisamente para este régimen, que llamaremos de transición ( $2300 < Re < 10000$ ).

$$\bar{Nu} = \left( -3.08 + 3.075 \times 10^{-3} Re + 0.32567 \times 10^{-6} Re^2 - 0.02185 \times 10^{-9} Re^3 \right) \left( 120 \frac{D}{L} \right)^{\left[ 1 - 10^{-4} Re \right]^{0.256}} Pr^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14} \quad (8.23)$$

donde D es el diámetro interno del tubo y L su longitud. Está validada para

$$2 \leq \frac{L}{D} \leq 50.$$

- Una correlación mucho más útil, simple y de muy amplio rango de validez (ver más abajo) se debe a Gnielinski [11]

$$\bar{Nu} = \frac{(f/8)(Re - 1000)Pr}{1 + 12.7(f/8)^{1/2}(Pr^{2/3} - 1)} \left[ 1 + \left( \frac{D}{L} \right)^{2/3} \right] K \quad (8.24a)$$

---

**Convección forzada interior**

---

donde  $f$  es el factor de fricción del diagrama de Moody y  $K$  el factor de corrección debido a la influencia de la temperatura sobre las propiedades del fluido, tomando la expresión  $(Pr/Pr_s)^{0.11}$  para líquidos y  $(T/T_s)^{0.45}$  para gases. El término entre corchetes da cuenta del efecto de la entrada,

**Validez:**  $0.6 < Pr < 10^5$ ;  $2300 < Re < 10^6$ ,  $0.05 < (Pr/Pr_s) < 20$ ;  
 $0.5 < T/T_s < 1.5$ ;  $T_s = \text{cte}$  o  $q''_s = \text{cte}$ . Tubos lisos y rugosos.

**Propiedades:** en  $\bar{T}_m$ .

Para el rango de aplicación habitual del número de Prandtl y en el caso de **tubos lisos** se pueden utilizar otras variantes más cómodas de la ecuación (8.24). En particular para  $0.6 < Pr < 1.5$  (principalmente gases), es igualmente precisa la expresión

$$\bar{Nu} = 0.0214(Re^{0.8} - 100)Pr^{0.4} \left[ 1 + \left( \frac{D}{L} \right)^{2/3} \right] \left( \frac{T}{T_s} \right)^{0.45} \quad (8.24b)$$

y para  $1.5 < Pr < 500$  (principalmente líquidos) vale la ecuación

$$\bar{Nu} = 0.012(Re^{0.87} - 280)Pr^{0.4} \left[ 1 + \left( \frac{D}{L} \right)^{2/3} \right] \left( \frac{Pr}{Pr_s} \right)^{0.11} \quad (8.24c)$$

### Régimen plenamente turbulento. Región completamente desarrollada

En este régimen, muy importante industrialmente ya que el valor de  $h$  es apreciablemente mayor que en régimen laminar, las dificultades del estudio teórico hacen que exista un amplio número de correlaciones experimentales. Comentaremos las más interesantes.

- **Ecuación de Colburn (1933)**

Esta ecuación se obtiene a partir de correlaciones experimentales para el factor de fricción en tubos,  $f$  y de la analogía de Chilton–Colburn (momento–calor), ec. (6.49).

En concreto para tubos lisos se tiene,  $f = 0.184 Re^{-1/5}$  para  $Re > 2 \times 10^4$ .

Como se cumple  $C_f = f/4$  (comprobación interesante de realizar), al aplicar la A. Chilton–Colburn [12] resulta

$$\boxed{\text{Nu} = 0.023 \text{Re}^{4/5} \text{Pr}^{1/3}} \quad (8.25)$$

**Propiedades:** en  $(T_m + T_s)/2$

**Validez:** Aunque la correlación de  $f$  vale desde  $\text{Re} = 2 \times 10^4$ , se confirma experimentalmente que la correlación para  $\text{Nu}$  va bien desde  $\text{Re} = 10^4$ ; además debe limitarse a los rangos siguientes:  $0.7 < \text{Pr} < 160$ ;  $x > 10D$ ,  $(T_s - T_m)$  moderado (no mayor de  $20^\circ\text{C}$ ).

- **Ecuación de Dittus–Boelter (1930)**

Otra ecuación anterior en el tiempo a la de Colburn, pero que luego se acopló a ésta, es la obtenida empíricamente por Dittus y Boelter [13]

$$\boxed{\text{Nu} = 0.023 \text{Re}^{4/5} \text{Pr}^n} \quad (8.26)$$

$n$ : 0.4 para calentamiento del fluido ( $T_s > T_m$ ); 0.3 para enfriamiento del fluido ( $T_s < T_m$ ). La separación en dos curvas (calentamiento y enfriamiento) es debido a la dependencia  $\mu(T)$  que afecta al campo de velocidades y de ahí a los intercambios superficie–fluido.

Esta ecuación, muy popular hace años y todavía en la actualidad, introduce errores muy grandes en la determinación del coeficiente de convección (hasta del 40%) y, aunque se menciona por motivos históricos, es mejor evitar su uso.

**Propiedades:** en  $T_m$ .

**Validez:** idéntica a la ecuación de Colburn.

- **Ecuación de Sieder–Tate (1936)**

Las dos correlaciones anteriores al no incorporar un término corrector no tienen en cuenta de forma adecuada la dependencia  $\mu(T)$  y por ello sólo valen para valores moderados del salto térmico ( $T_s - T_m \leq 20\text{K}$ , aproximadamente).

Cuando es mayor es mejor utilizar otras ecuaciones con término corrector como la de Sieder–Tate [9]

$$\boxed{\text{Nu} = 0.027 \text{Re}^{4/5} \text{Pr}^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_s}\right)^{0.14}} \quad (8.27)$$

**Propiedades:** en  $T_m$ , salvo  $\mu_s$  (a  $T_s$ ).

**Validez:**  $0.7 < \text{Pr} < 16700$ ;  $\text{Re} > 10^4$ ;  $x > 10 D$ .

• **Ecuación de Whitaker (1972)**

Otra ecuación similar es [14]

$$\boxed{\text{Nu} = 0.015 \text{Re}^{0.83} \text{Pr}^{0.42} \left(\frac{\mu}{\mu_s}\right)^{0.14}} \quad (8.28)$$

**Propiedades:** en  $T_m$  salvo  $\mu_s$  (a  $T_s$ ).

**Validez:**  $4000 < \text{Re} < 10^5$ , aunque se puede usar hasta  $\text{Re}_c = 2300$  con un cierto aumento de la incertidumbre;  $0.48 < \text{Pr} < 592$ ;  $0.44 < \mu/\mu_s < 2.5$ .

### Consideraciones generales sobre las correlaciones del régimen turbulento

1. Tal y como se indicó en el capítulo 6 de Fundamentos de la Convección, las correlaciones para el régimen turbulento valen para **cualquier condición térmica de contorno**.
2. Las correlaciones (8.25) a (8.28) son locales, y valen exclusivamente en la región completamente desarrollada, aunque en algunos textos, si el tubo es suficientemente largo, se utilizan para calcular  $\overline{\text{Nu}}$ . No obstante, para calcular el valor promedio  $\overline{\text{Nu}}$  es más recomendable, salvo contraindicación por algún motivo, utilizar las correlaciones de Grielski, ecuaciones (8.24b) o (8.24c) si los tubos son lisos y (8.24a) si el tubo es rugoso. En ese caso, las propiedades del fluido deben calcularse a la temperatura media en el tubo.

$$\bar{T}_m \equiv \frac{T_{m, \text{ent}} + T_{m, \text{sal}}}{2}$$

---

### Correlaciones para el coeficiente de convección en tubos no circulares

---

El comportamiento convectivo al principio de un tubo en régimen turbulento se estudia en la referencia [1].

3. Las correlaciones anteriores (8.25) a (8.28) valen para tubos **lisos**. Para tubos rugosos se puede utilizar la ecuación de Gnielinski, (8.24a), determinando  $f$  del diagrama de Moody o de las expresiones correspondientes a cada situación.

### Líquidos metálicos o fluidos de número de Prandtl muy bajo

Como ya se ha comentado, el interés por estos fluidos es posterior al de los demás, por lo que muchas correlaciones no valen para ellos. A continuación se presentan dos correlaciones [3] para esos fluidos.

- **Correlación de Skupinski y col. (1965)**

$$\boxed{\text{Nu} = 4.82 + 0.0185 \text{Pe}^{0.827}} \quad (8.29)$$

**Propiedades:** en  $T_m$ .

**Validez:**  $3.6 \times 10^3 < \text{Re} < 9.05 \times 10^5$ ;  $10^2 < \text{Pe} < 10^4$ ;  $x > 10D$ ;  $q''_s = \text{cte}$ ; tubos lisos.

- **Correlación de Seban y Shimazaki (1951)**

$$\boxed{\text{Nu} = 5.0 + 0.025 \text{Pe}^{0.8}} \quad (8.30)$$

**Propiedades:** en  $T_m$ .

**Validez:**  $\text{Pe} > 100$ ;  $x > 60D$ ;  $T_s = \text{cte}$ .

### Correlaciones para el coeficiente de convección en tubos no circulares

---

Existen muchas aplicaciones de ingeniería en las que están involucrados tubos de sección no circular.

---

### Convección forzada interior

---





- Para régimen turbulento, al menos como primera aproximación, se pueden utilizar las correlaciones de tubos circulares, utilizando el diámetro hidráulico  $D_h \equiv 4A_c/P$ , con:  $A_c$ , sección recta y  $P$ , perímetro húmedo. El resultado así obtenido da un promedio aproximado de  $h$  sobre la periferia; aunque realmente  $h$  varía a lo largo de la periferia, acercándose a cero en las esquinas.
- Para régimen laminar, el uso de las correlaciones de los tubos circulares es más imprecisa, sobre todo si las secciones rectas tienen esquinas agudas. En este régimen deben utilizarse los valores de la tabla 8.1, válidos para la región completamente desarrollada.

En el valor del coeficiente de convección influye mucho la condición térmica de contorno. En la tabla 8.1 se dan valores para tres condiciones:

- cc1) Flujo de calor constante en la dirección axial y temperatura constante en el perímetro de cada sección.
- cc2) Flujo de calor constante en la dirección axial y a lo largo del perímetro.
- cc3) Superficie isoterma.

---

**TABLA 8.1** Números de Nusselt para flujo laminar completamente desarrollado en tubos de diferente sección recta [15], [16].



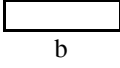
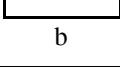

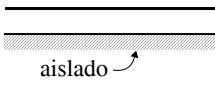


Sección recta	$\frac{b}{a}$	$Nu_D \equiv hD_h/\lambda$		
		CC1	CC2	CC3
		4.364	4.364	3.667
	1.11	5.099	4.35 <sup>a</sup>	3.66
	1.0	3.608	3.091	2.976
	1.43	3.73		3.08

---

**Correlaciones para el coeficiente de convección en tubos anulares**

---

**TABLA 8.1** Números de Nusselt para flujo laminar completamente desarrollado en tubos de diferente sección recta [15], [16].

Sección recta	$\frac{b}{a}$	$Nu_D \equiv hD_h/\lambda$		
		CC1	CC2	CC3
a  b	2.0	4.123	3.017	3.391
a  b	3.0	4.79		3.96
a  b	4.0	5.331	2.930	4.439
a  b	8.0	6.490	2.904	5.597
	$\infty$	8.235	8.235	7.541
	$\infty$	5.385		4.861
		3.111	1.892	2.47
		4.002	3.862	3.34 <sup>a</sup>

a. Valores interpolados.

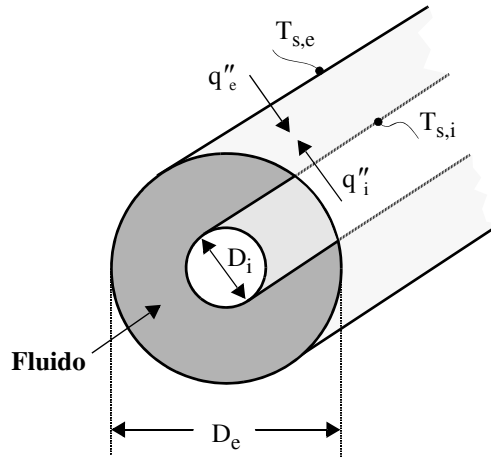
**Correlaciones para el coeficiente de convección en tubos anulares**

---

En muchos casos prácticos aparece esta geometría, particularmente en intercambiadores de calor.

Se trata de considerar los dos coeficientes de convección [17] que determinan el intercambio de calor entre el fluido y las dos paredes cilíndricas que lo confinan

**FIGURA 8.7** Intercambio de calor entre un fluido que circula por un tubo anular y las dos paredes que lo confinan.



Se definen por ello un coeficiente de convección interior,  $h_i$

$$h_i \equiv \frac{q''_i}{(T_{s,i} - T_m)} \quad (8.31a)$$

$$Nu_i \equiv \frac{h_i D_h}{\lambda} \quad (8.31b)$$

y otro exterior,  $h_e$

$$h_e \equiv \frac{q''_e}{(T_{s,e} - T_m)} \quad (8.32a)$$

$$Nu_e \equiv \frac{h_e D_h}{\lambda} \quad (8.32b)$$

En este caso  $D_h = D_e - D_i$ .

### Régimen laminar. Región completamente desarrollada

1. Una superficie aislada y la otra a temperatura constante.

En este caso, lógicamente, sólo interesa el coeficiente de convección de la superficie isoterma. Éste puede obtenerse de la Tabla 8.2.

---

**Correlaciones para el coeficiente de convección en tubos anulares**

---

**TABLA 8.2** Coeficientes de convección en la superficie isoterma de un tubo anular con la otra superficie adiabáticamente aislada y para régimen laminar [18].

$D_i/D_e$	$Nu_i$	$Nu_e$
0	—	3.66
0.05	17.46	4.06
0.10	11.56	4.11
0.25	7.37	4.23
0.50	5.74	4.43
1.00	4.86	4.86

**2.** Flujo de calor uniforme en ambas superficies.

Los números de Nusselt se calculan de las expresiones siguientes [18]

$$Nu_i = \frac{Nu_{ii}}{1 - \left(\frac{q''_e}{q''_i}\right) \theta_i^*} \quad (8.33)$$

$$Nu_e = \frac{Nu_{ee}}{1 - \left(\frac{q''_i}{q''_e}\right) \theta_e^*} \quad (8.34)$$

donde los parámetros toman los valores de la tabla 8.3.

Obsérvese que  $q''_i$  y  $q''_e$  pueden ser positivos o negativos, y también  $h_i$  y  $h_e$ , lo que indica el valor relativo de los términos  $(T_{s,i} - T_m)$  y  $(T_{s,e} - T_m)$ .

---

**Convección forzada interior**

---

**TABLA 8.3** Coeficientes de influencia para flujo laminar completamente desarrollado en un tubo circular anular, con flujo de calor uniforme mantenido en ambas superficies [18].

$D_i/D_e$	$Nu_{ii}$	$Nu_{ee}$	$\theta_i^*$	$\theta_e^*$
0.00	—	4.364	$\infty$	0.0000
0.05	17.81	4.792	2.180	0.0294
0.10	11.91	4.834	1.383	0.0562
0.20	8.499	4.883	0.905	0.1041
0.40	6.583	4.979	0.603	0.1823
0.60	5.912	5.099	0.473	0.2455
0.80	5.580	5.240	0.401	0.299
1.00	5.385	5.385	0.346	0.346

**Régimen turbulento. Región completamente desarrollada**

Aunque en la bibliografía no se encuentran fórmulas claras a aplicar en esta situación, hay un acuerdo bastante generalizado sobre el uso de las expresiones del tubo circular para el coeficiente de convección exterior  $h_e$  tomando como diámetro el diámetro hidráulico  $D_h$ , y aumentar el valor del coeficiente de convección interior  $h_i$ , según la expresión [19]

$$h_i = h_e \left( \frac{D_e}{D_i} \right)^{1/2} \quad (8.35)$$

## Referencias

---

1. S. Kakaç, R. K. Shah, and W. Aung (editors)  
*Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer, chap. 3*  
Wiley Interscience, New York, 1987.
2. S. Kakaç, R. K. Shah, and W. Aung (editors)  
*Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer, chap. 4*  
Wiley Interscience, New York, 1987.
3. F. Incropera and D. de Witt  
*Fundamentals of Heat and Mass Transfer*  
Wiley, 1990.
4. R. W. Fahien  
*Fundamentals of Transport Phenomena*  
McGraw-Hill, New York, 1983.
5. K. Cornwell  
*Transferencia de calor*  
Limusa, México, 1981.
6. H. L. Langhaar  
*Steady Flow in the Transition Length of a Straight Tube*  
Journal of Applied Mechanics, vol. 64, p. A-55, 1942.
7. W. M. Kays  
*Numerical Solutions for Laminar-Flow Heat Transfer in Circular Tubes*  
Transactions of the ASME, vol. 77, p. 1265, 1955.
8. E. R. G. Eckert  
*Introduction to the Transfer of Heat and Mass*  
McGraw-Hill, New York, 1950.
9. E. N. Sieder, and G. E. Tate  
*Heat Transfer and Pressure Drop of Liquids in Tubes*  
Industrial and Engineering Chemistry, vol. 28, p. 1429, 1936.
10. R. H. Hedrick  
Chemical Engineering, p. 147, June 1990.
11. V. Gnielinski  
*New Equations for Heat and Mass Transfer in Turbulent Pipe and Channel Flow*  
International Chemical Engineering, vo. 16, p. 359, 1976.
12. A. P. Colburn  
Transactions of AIChE, vol. 29, p. 174-210, 1933.
13. F. W. Dittus, and L. M. K. Boetter  
*Heat Transfer in Automobile Radiators of the Tubular Type*  
University of California publications in engineering, vol. 2, pp. 443, 1930.

---

**Convección forzada interior**

---

14. S. Whitaker  
AIChE Journal, Vol. 18, p. 361, 1972.
15. R. K. Shah, and A. L. London  
*Thermal Boundary Conditions and Some Solutions for Laminar Duct Flow Forced Convection*  
Journal of Heat Transfer, vol. 96, p. 159, 1974.
16. W. M. Kays, and M. E. Crawford  
*Convective Heat and Mass Transfer*  
McGraw-Hill, Singapore, 1993.
17. W. M. Kays, and H. C. Perkins  
*Handbook of Heat Transfer (edited by W. M. Rohsenow and J. P. Hartnett), sec. 7*  
McGraw-Hill, New York, 1973.
18. R. E. Lundberg, P. A. McCuen, and W. C. Reynolds  
International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 6, p. 495, 1963.
19. M. Jakob  
*Heat Transfer, vol. I*  
Wiley, New York, 1967.

---

## Síntesis del capítulo

---

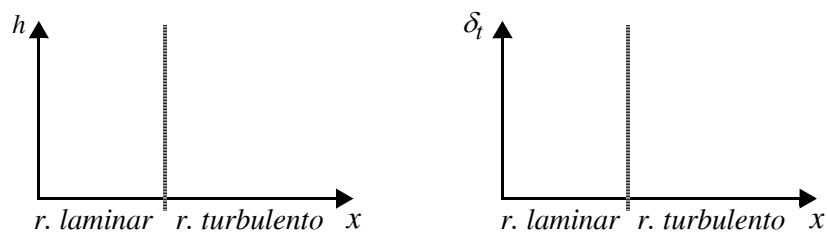
- Las diferencias principales entre la convección externa y la interna provienen del confinamiento del fluido en el segundo caso y son dos:
  1. En la segunda la capa límite no se puede desarrollar libremente, apareciendo dos regiones: la primera, al comienzo del tubo, llamada región de entrada; y la otra, posterior, llamada región completamente desarrollada.

El coeficiente de convección toma valores mayores en la región de entrada que en la de desarrollo completo.
  2. La cantidad de fluido en contacto con la superficie del conducto está limitada (es finita) por lo que, al intercambiar calor, el fluido sufre un cambio en su entalpía que modifica su temperatura (o su estado de agregación, si cambia de fase. Este caso se aborda en el capítulo 10).

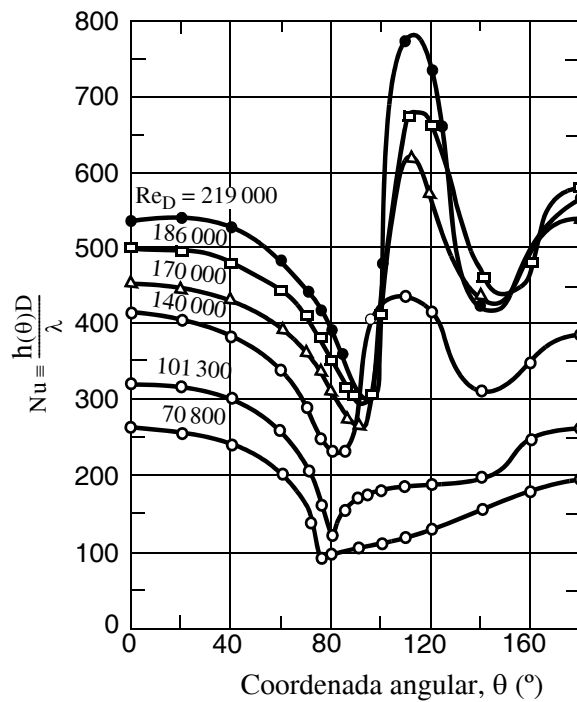
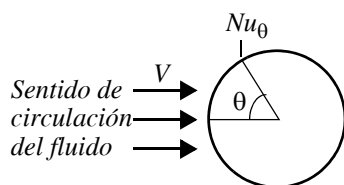
A su vez aparece el concepto de **temperatura media** del fluido en cada sección del conducto, similar a su velocidad media.
- Solo se resuelve analíticamente (por análisis matemático) la ecuación de la energía térmica en la región completamente desarrollada del tubo circular liso en régimen laminar. Las soluciones de la región de entrada de un tubo circular liso en régimen laminar y de la región completamente desarrollada de tubos no circulares en régimen laminar se han obtenido por método numéricos. Las expresiones para el régimen turbulento son empíricas (Dittus–Boelter, Sieder–Tate, Whitaker) o se basan en la analogía entre el transporte de calor y de momento (Colburn y Gnielinski).
- Cuando se usa una correlación en conv. interior hay que **tener presente**
  1. El régimen del flujo.
  2. La zona del tubo (entrada, completamente desarrollada o ambas) en que se desarrolla el problema.
  3. El rango de validez de las variables independientes.
  4. La temperatura de cálculo de las propiedades del fluido. Habitualmente, si la correlación es local se calculan a  $T_m$  y si es global (o promedio) a  $\bar{T}_m$ .

# Cuestiones\*

1. Dibujar cualitativamente la forma que tienen las curvas  $h$  y  $\delta_t$  en la capa límite de la convección forzada sobre una placa plana



2. Como es sabido, esta figura representa la variación del número de Nusselt local,  $Nu_\theta$ , con el ángulo para un fluido que circula perpendicularmente sobre una superficie cilíndrica. En ella aparecen dos familias de curvas, separadas aproximadamente por el valor  $10^5$  del número de Reynolds,  $Re_D$ .



\*. Se incluyen las cuestiones de Convección Forzada Exterior (capítulo 7) junto con las del presente capítulo.

---

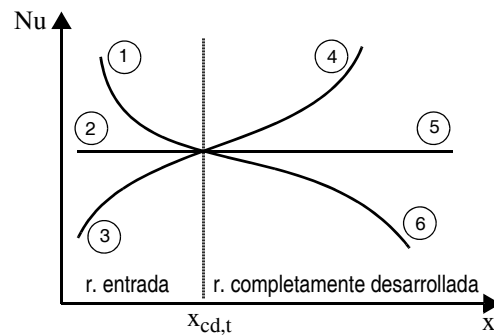
## Cuestiones

---

Explicar escuetamente a qué fenómenos físicos obedece la forma que tiene cada una de las familias de curvas.

3. Cuando un fluido atraviesa perpendicularmente un banco de tubos, el coeficiente de convección muestra una variación apreciable en las primeras columnas al pasar de una columna a otra ¿En qué sentido se produce la variación, en el de aumento o disminución de  $h$ ? ¿por qué?

4. Indicar, justificándolo, qué par de curvas de entre las seis mostradas en la figura representan la variación del número de Nusselt,  $Nu$ , para un fluido que circula por el interior de un tubo.



5. ¿Cuál de las siguientes es la definición correcta de temperatura media,  $T_m$ , de un fluido que circula por un conducto en una sección  $A_c$  donde el campo de velocidades es  $u$  y el de temperaturas  $T$ ?

$$a) T_m \equiv \frac{\int_{A_c} \rho u T dA_c}{\dot{m}}$$

$$b) T_m \equiv \frac{\int_{A_c} u c_v T dA_c}{c_v}$$

$$c) T_m \equiv \frac{\int_{A_c} \rho u c_v T dA_c}{\dot{m} c_v}$$

$$d) T_m \equiv \frac{\int_{A_c} u c_v T dA_c}{\dot{m} c_v}$$

---

**Cuestiones**

---

6. En un tubo circular de circunferencia  $P = 2$  cm, entra un fluido de calor específico  $c_p = 2$  kJ/kg·K con un caudal  $\dot{m} = 360$  kg/h. Si la variación de temperatura del fluido a lo largo del tubo es  $T_m = 5x$  y de la superficie interna del tubo es  $T_s = 20 + 5x$ , con  $T$  en Kelvin y  $x$  en metros, calcular el valor del coeficiente de convección  $h$ .
7. Un cierto caudal,  $\dot{m}$ , de agua circula por el interior de un tubo recibiendo un aporte de calor por unidad de longitud del tubo  $q'$  (W/m) =  $ax$ , siendo  $x$  la distancia axial desde la entrada del tubo. La temperatura del agua a la entrada en el tubo es  $T_{entr}$ .
- Obtener la expresión analítica que da la variación de la temperatura media del agua a lo largo del tubo,  $T_m(x)$ .
8. Calcular el coeficiente de convección,  $h$ , en la región completamente desarrollada de una corriente de agua ( $\lambda = 0.6$  W/m·K) que circula laminarmente por el interior de un tubo circular de diámetro  $D = 2$  cm y recibe un flujo de calor constante desde la superficie del tubo.

---

# Problemas

---

1. El aceite de un motor circula a través de un tubo de 3 mm de diámetro y 3 m de longitud, con un caudal de 0.02 kg/s. La temperatura de entrada del aceite son 60 °C y la pared del tubo se mantiene a 100 °C mediante un vapor que condensa en su superficie exterior.
  - a) Estimar el coeficiente de transferencia de calor promedio para el flujo interno de aceite.
  - b) Determinar la temperatura de salida del aceite.
  - c) Realizar el mismo estudio con una longitud de tubo de 30 m.
  
2. Por un tubo metálico de pared delgada, longitud  $L = 1$  m y diámetro  $D = 3$  mm, circula un caudal de agua  $\dot{m} = 0.015$  kg/s, que entra a una temperatura media  $T_{m,e} = 97$  °C. Calcular la temperatura de salida del agua en cada uno de los siguientes casos:
  - a) La superficie del tubo se mantiene a una temperatura constante de 27 °C.
  - b) Se recubre el tubo con una capa de aislante de 0.05 mm. de espesor y conductividad térmica  $\lambda = 0.05$  W/mK y la superficie exterior sigue siendo mantenida a 27 °C.
  - c) La superficie exterior no se mantiene a temperatura constante, sino que intercambia calor con aire a 27 °C, con un coeficiente de convección natural  $\bar{h}_{ext} = 5$  W/m<sup>2</sup>K.
  
3. El problema de las pérdidas de calor de un fluido que circula por el interior de una tubería enterrada se ha estudiado exhaustivamente para aplicaciones prácticas que incluyen, por ejemplo, los oleoductos de Alaska y los conductos de distribución de agua y vapor en centrales térmicas. Considérese una tubería de acero de diámetro  $D$  utilizada para transportar crudos con un caudal  $\dot{m}_c$  a través de una región fría. La tubería está recubierta con un aislante de espesor  $e$  y conductividad térmica  $\lambda_a$  y está enterrada a una profun-

---

**Problemas**

---

didad  $z$  (distancia desde el suelo hasta el eje de la tubería). Cada sección de la tubería tiene una longitud  $L$  que conecta dos estaciones de bombeo en las cuales se calienta el crudo para asegurar baja viscosidad  $\nu$ , por tanto, baja potencia de bombeo. Se conocen las temperaturas del fluido a la entrada de la tubería desde la estación de bombeo y la temperatura del suelo por encima de la tubería,  $T_{m,e}$  y  $T_s$  respectivamente.

Las propiedades del crudo valen  $\rho_c = 900 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_{p,c} = 2000 \text{ J/kg K}$ ,  $\nu_c = 8.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\lambda_c = 0.14 \text{ W/m K}$  y  $Pr_c = 10^4$ , el caudal  $\dot{m}_c = 500 \text{ kg/s}$  y el diámetro de la tubería  $D = 1.2 \text{ m}$ .

- a) Estimar la temperatura del crudo  $T_{m,s}$  a la salida del tramo de tubería en función de  $D$ ,  $L$ ,  $z$ ,  $t$ ,  $\dot{m}_c$ ,  $T_{m,i}$ ,  $T_s$  y de las propiedades del crudo (c), el aislante (a) y suelo (s).
  - b) Si  $T_s = -40 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_{m,e} = 120 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $e = 0.15 \text{ m}$ ,  $\lambda_a = 0.05 \text{ W/mK}$ ,  $\lambda_s = 0.5 \text{ W/mK}$ ,  $z = 3 \text{ m}$  y  $L = 100 \text{ km}$  ¿Cuánto vale la temperatura media del crudo a la salida de un tramo de tubería,  $T_{m,s}$ ? ¿Cuánto vale la potencia total transferida por tramo de tubería?
4. Por un conducto triangular de 20 mm de lado y 2 m de largo circula un caudal de aire  $\dot{m} = 4 \times 10^{-4} \text{ kg/s}$  a una temperatura de  $27 \text{ }^\circ\text{C}$ . La superficie del conducto se mantiene a  $100 \text{ }^\circ\text{C}$  y se suponen condiciones del flujo completamente desarrollado. Determinar la temperatura de salida del aire y la potencia transferida al mismo a lo largo del tubo.
5. Considerar un tubo anular con diámetros interior y exterior  $D_i = 25 \text{ mm}$  y  $D_e = 50 \text{ mm}$ ., por el cual circula un caudal de agua de  $0.04 \text{ kg/s}$ . La temperatura del agua a la entrada del conducto son  $25 \text{ }^\circ\text{C}$ . La superficie interior absorbe un flujo de calor constante suministrado por una resistencia que disipa  $q' = 4000 \text{ W/m}$  mientras que la superficie exterior está aislada ¿Qué longitud ha de tener el tubo para que la temperatura de salida del agua sean  $85 \text{ }^\circ\text{C}$ ? ¿Cuál es la temperatura de la superficie interior a la salida, donde pueden suponerse condiciones de flujo completamente desarrollado?
6.  $0.05 \text{ kg/s}$  de aire caliente fluyen a través de un tubo metálico de paredes muy delgadas de  $0.15 \text{ m}$  de diámetro y sin aislar. El aire entra a  $103 \text{ }^\circ\text{C}$  y tras  $6 \text{ m}$  de recorrido se ha enfriado hasta  $77 \text{ }^\circ\text{C}$ . En el exterior del tubo las

---

**Problemas**

---

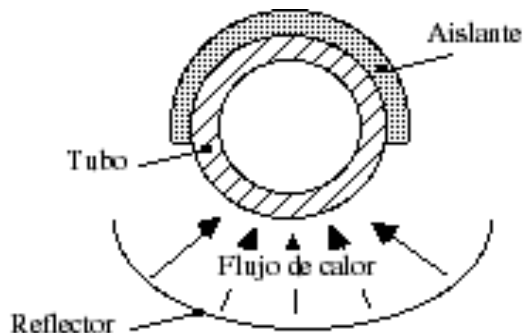
condiciones pueden suponerse constantes y dadas por  $T_\infty = 0\text{ }^\circ\text{C}$  y  $\bar{h}_\infty = 6\text{ W/m}^2\text{K}$ . Estimar:

- a) Para los 6 m de longitud: pérdida total de calor en W y coeficiente medio de convección en el interior del tubo.
- b) En la sección de salida: coeficiente local de convección interior, temperatura del metal y flujo de calor.

7. En un tubo de 0.15 m de diámetro calentado uniformemente entran 0.05 kg/s de aire a una temperatura  $T_{m,ent} = 50\text{ }^\circ\text{C}$ . Seis metros más allá, la temperatura media del aire es  $T_{m,o} = 100\text{ }^\circ\text{C}$ . Se acepta que sus propiedades ( $\rho = 0.995\text{ kg/m}^3$ ,  $c_p = 1.01\text{ kJ/kg K}$ ,  $\mu = 208.2 \times 10^{-7}\text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $\lambda = 30 \times 10^{-3}\text{ W/m K}$ ,  $Pr = 0.7$ ) no cambian con la temperatura. Estímese, en caso de que sea posible, los valores de  $h(x)$ ,  $T_m(x)$  y  $T_s(x)$  para  $x = 0, 1, 3$  y 6 m y  $\bar{h}$  para todo el tubo.

8. Los humos de un horno se descargan a través de una chimenea metálica de pared delgada, altura  $L = 6\text{ m}$  y diámetro  $D = 0.5\text{ m}$ . El caudal es  $\dot{m} = 0.5\text{ kg/s}$  y la temperatura de entrada  $T_{m,e} = 600\text{ }^\circ\text{C}$ . En el exterior hay una temperatura  $T_{ext} = 4\text{ }^\circ\text{C}$  y un viento que produce un coeficiente convectivo  $\bar{h}_{ext} = 13\text{ W/m}^2\text{K}$ . Para los estudios de dispersión de contaminantes y condensación de componentes ácidos, se desea estimar la temperatura de salida de los gases  $T_{m,s}$  y la temperatura del metal en el extremo de la chimenea  $T_{s,s}$ . Suponer flujo plenamente desarrollado y aproximar las propiedades del gas por las del aire a presión atmosférica.

9. Un concepto usado para el aprovechamiento de la energía solar consiste en colocar un tubo en el foco de un reflector parabólico y hacer circular un flui-



---

**Problemas**

---

do a través del tubo. El efecto neto de esta disposición puede aproximarse por un flujo de calor absorbido  $q''_s$  uniforme en toda la superficie del tubo. Considérese un dispositivo análogo al descrito con un diámetro de tubo  $D = 60$  mm en un día soleado para el que  $q''_s = 2000$  W/m<sup>2</sup>. Si el agua circula a razón de  $\dot{m} = 0.01$  kg/s y entra a  $T_{m,ent} = 20$  °C ¿qué longitud  $L$  se necesita para obtener una temperatura de salida  $T_{m,sal} = 80$  °C? ¿Cuánto vale la temperatura de la superficie del tubo a la salida?

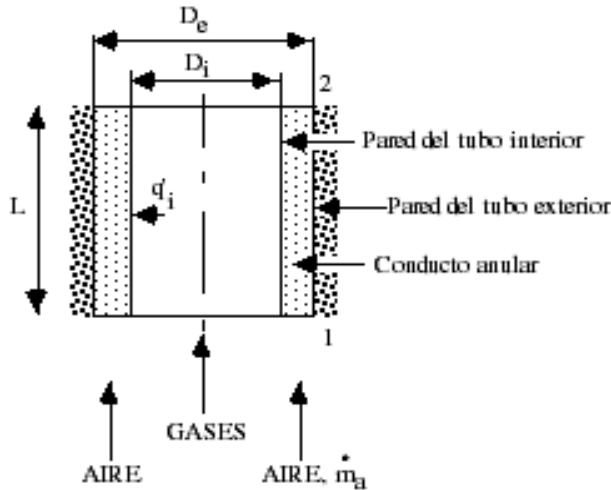
- 10.** Una tubería delgada de 50 mm de diámetro cubierta con una capa de aislante ( $\lambda = 0.085$  W/m·K) de 25 mm de espesor, que transporta vapor sobrecalentado a presión atmosférica está suspendida del techo de una nave. La temperatura del vapor que entra a la tubería es 120 °C y la del aire exterior 20 °C, siendo  $\bar{h}_{ext} = 10$  W/m<sup>2</sup>K el coeficiente de convección en el exterior. Si la velocidad del vapor es 10 m/s, ¿En que punto de la tubería empezará a condensar el vapor? ¿a qué distancia alcanzará una temperatura media de 100 °C? (no considerar el cambio de fase para los cálculos de convección).
- 11.** Una tubería de acero inoxidable (AISI 316) de paredes gruesas y diámetros interno y externo  $D_i = 20$  mm y  $D_e = 40$  mm respectivamente, se calienta eléctricamente para suministrar una generación de calor uniforme de 1 MW/m<sup>3</sup>. La superficie exterior está aislada, y por dentro circula agua con un caudal másico de 0.1 kg/s. Determinar:
- Si el agua entra a  $T_{m,ent} = 20$  °C y se desea que salga a  $T_{m,sal} = 40$  °C, ¿cúal es la longitud de tubería necesaria?.
  - ¿Cúal es el punto de máxima temperatura en la tubería y cúal el valor de dicha temperatura?
- 12.** Una práctica común para recuperar calor de deshecho de calderas de gas o de fuel consiste en utilizar los humos de la combustión para precalentar el aire. La figura muestra un montaje utilizado con tal fin; se trata de un doble tubo a través del cual fluyen los gases (conducto interior) y el aire (conduc-

---

**Problemas**


---

to anular). Considérense unas condiciones tales que el flujo de calor que recibe el aire es constante


**DATOS**

$$q'_i = 1.25 \times 10^5 \text{ W/m}$$

$$\dot{m}_a = 2.1 \text{ kg/s}$$

$$D_i = 2 \text{ m}$$

$$D_e = 2.05 \text{ m}$$

$$L = 7 \text{ m}$$

- Si el aire entra a una temperatura  $T_{a,1} = 300 \text{ K}$  ¿Cuál es la temperatura de salida  $T_{a,2}$ ?
- Si se supone que el flujo en el espacio anular está plenamente desarrollado, calcular las temperaturas de la pared del tubo interior a la entrada y a la salida ¿Cuál es la temperatura del tubo exterior a la entrada?

Las propiedades del aire se consideran constantes con la temperatura y valen:  $c_p = 1.030 \text{ kJ/kg K}$ ,  $\mu = 270 \times 10^{-7} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $\lambda = 41 \times 10^{-3} \text{ W/m K}$ ,  $Pr = 0.68$ .

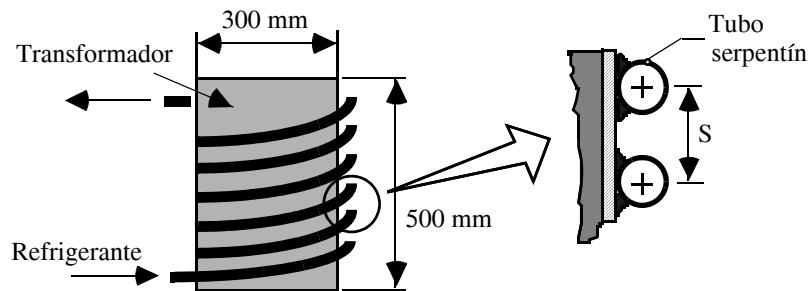
- 13.** Hay que transportar  $2.5 \text{ kg/s}$  de aire a presión atmosférica y  $80^\circ\text{C}$  una distancia de  $30 \text{ m}$  por un tubo delgado de  $0.5 \text{ m}$  de diámetro. El ambiente exterior está a  $0^\circ\text{C}$  y se pierde calor por convección natural con  $\bar{h}_{ext} = 15 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Para el buen funcionamiento de la instalación, la máxima disminución de temperatura del aire permitida son  $5^\circ\text{C}$ , por lo cual se decide recubrir la tubería con un aislante cuya conductividad térmica vale  $0.05 \text{ W/m K}$ . Determinar el espesor de aislante necesario.

---

**Problemas**

---

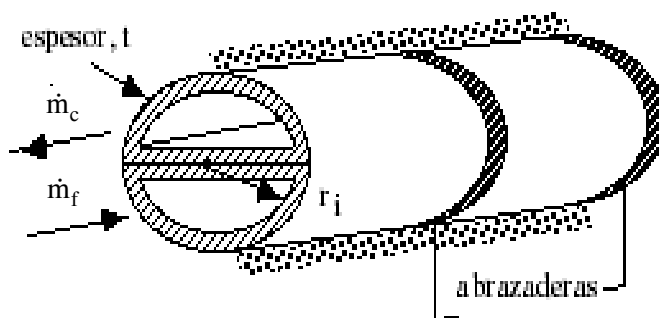
14. Cierta transformador eléctrico que disipa 1000 W de calor tiene la forma aproximada de un cilindro de 300 mm de diámetro y 500 mm de altura. Se desea mantener la temperatura de su superficie a 47 °C. Ello debe conseguirse mediante un serpentín de tubo de 20 mm de diámetro y pared delgada soldado sobre la superficie lateral. Por el tubo circulará glicerina a una temperatura de entrada de 24 °C. Todo el conjunto se aislará a la perfección.



Suponiendo que el refrigerante no debe calentarse más de 6 °C, calcular su caudal, la longitud total del tubo y el paso S de las espiras del serpentín.

**NOTA:** Las espiras de la hélice pueden aproximarse a círculos. La resistencia de contacto entre el tubo y la superficie del transformador es despreciable.

15. El montaje de la figura se utiliza para transferir calor entre dos líquidos que fluyen a través de tubos de cobre semicirculares. Cada tubo tiene un espesor  $t = 3$  mm y un radio interior  $r_i = 20$  mm. Unas abrazaderas fuertemente ajustadas aseguran un buen contacto térmico entre las superficies planas. La superficie exterior del conjunto está perfectamente aislada.



Si por los tubos fluyen  $\dot{m}_c = \dot{m}_f = 0.2$  kg/s de agua caliente y fría a temperaturas (promedio en una sección)  $T_{c,m} = 330$  K y  $T_{f,m} = 290$  K, ¿cuál es la

---

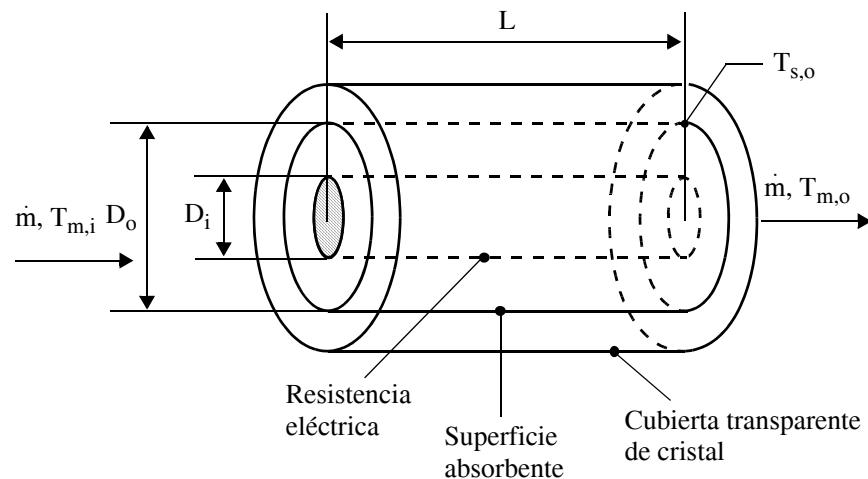
**Problemas**

---

potencia transferida por unidad de longitud? La resistencia de contacto de la pared es  $10^{-5} \text{ m}^2 \text{ K/W}$ . Las propiedades del agua pueden aproximarse tanto para el flujo caliente como para el frío por  $\mu = 800 \times 10^{-6} \text{ kg/m s}$ ;  $\lambda = 0.625 \text{ W/m K}$ ;  $\text{Pr} = 5.35$ .

*Ayuda:* La transferencia se intensifica debido a la conducción de calor a través de la parte semicircular de las paredes de los tubos. Para cada medio tubo, esta parte puede tratarse dividiéndola en dos aletas rectas con su extremo aislado.

16. Se diseña un proceso para obtener agua caliente doméstica aprovechando la radiación solar que consiste en hacer circular el fluido por una tubería rodeada por un tubo transparente de cristal, según se muestra en la figura. En el espacio entre el tubo de cristal y la superficie absorbente se ha hecho el vacío. Cuando hace sol, los reflectores instalados consiguen que sobre la superficie exterior del tubo anular incida un flujo de calor constante, cuyo valor depende de la irradiación solar. Para asegurar el suministro de agua caliente durante la noche y los días nublados, se instala en el interior de la tubería una resistencia eléctrica en forma de cilindro, de tal forma que el agua circula por el espacio que queda entre la resistencia y la tubería.



El sistema procesa un caudal de agua variable, comprendido entre 0.05 y 0.2 kg/s. El agua entra al sistema a una temperatura  $T_{m,ent}$  que es función

---

## Problemas

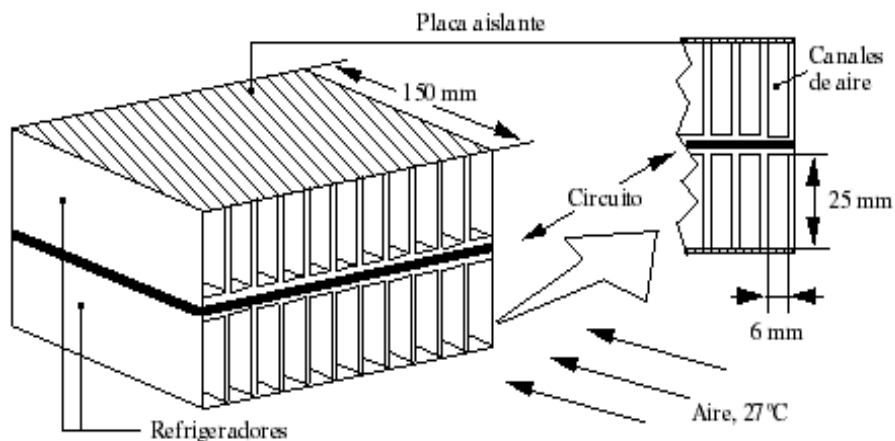
---

de las condiciones ambientales y debe salir a una temperatura media de 50 °C. Como medida adicional indicativa del flujo solar absorbido, se toma la temperatura de la superficie exterior a la salida de la tubería,  $T_{s,sal}$ . Se considera flujo completamente desarrollado, estado estacionario y propiedades del agua constantes en toda la tubería a una temperatura media de 37 °C. Datos:  $D_i = 120$  mm,  $D_e = 200$  mm,  $L = 35$  m.

Se pide:

- Calcular la potencia que deberá suministrar la resistencia en función de  $T_{m,ent}$ ,  $T_{m,sal}$  y  $\dot{m}$ .
  - Verificar la hipótesis de pleno desarrollo y discutir si la aproximación que se propone es correcta o no.
- 17.** A un circuito electrónico que disipa 50 W se le colocan dos dispositivos de refrigeración compuestos por varios canales, tal como se muestra en la figura. El conjunto tiene una longitud de 150 mm y los dispositivos de refrigeración constan de 12 canales rectangulares cada uno. Los canales son de 6 mm de ancho por 25 mm de alto. Las paredes de los canales son de espesor despreciable. Un ventilador impulsa un caudal de aire de 0.06 m<sup>3</sup>/s a 27 °C a través de los canales.

Para asegurar un buen funcionamiento del circuito, no es aconsejable que la temperatura del mismo supere los 40 °C ¿Se cumple esta condición?



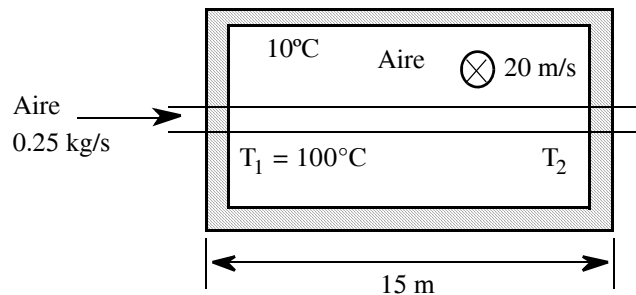
---

**Problemas**

---

*Ayuda:* La conductividad térmica del refrigerador es lo suficientemente grande y el contacto térmico entre el circuito y el refrigerador es lo suficientemente bueno como para poder considerar que la temperatura del refrigerador es la misma que la del circuito.

18. Una tubería de cobre con diámetro interior  $D_i = 0.10226$  m y diámetro exterior  $D_e = 0.1143$  m, atraviesa transversalmente una galería muy grande por lo que circula aire a  $10^\circ\text{C}$  a  $20$  m/s. Por la tubería circulan  $0.25$  kg/s también de aire, a  $100^\circ\text{C}$  en el punto en el que la tubería entra a la galería, que tiene  $15$  m de ancho, ver figura



Calcular:

El calor que pierde el aire de la tubería en el tramo de  $15$  m que atraviesa la galería.

**Nota:** Para evaluar las propiedades tomar  $T_s = 100^\circ\text{C}$ . Razonar esta suposición teniendo en cuenta los resultados obtenidos.

19. En un desecador, el aire se calienta de  $20^\circ\text{C}$  a  $50^\circ\text{C}$  al atravesar tubos de cobre de pared gruesa, longitud  $L = 1$  m y diámetro interior  $D = 0.05$  m. El caudal es  $10^{-3}$  kg/s por cada tubo. Una manta calefactora eléctrica adherida a la superficie exterior del tubo proporciona un flujo de calor uniforme. Sin embargo, el espesor de la pared y la conductividad térmica del cobre son lo suficientemente grandes como para que se pueda suponer una temperatura uniforme en la superficie interior. Cada tubo está perfectamente aislado del entorno. Usando las siguientes propiedades del aire como constantes:  $c_p = 1.007$  kJ/kg K;  $\mu = 188 \times 10^{-7}$  kg/m s;  $\lambda = 0.0269$  W/m K y  $Pr = 0.71$ , calcular la temperatura interior de la pared.

---

**Problemas**

---

---

## CAPÍTULO 9

# Convección natural

---

En ausencia de movimiento forzado en un fluido (debido a un agente impulsor como una bomba o un compresor) puede aparecer un movimiento espontáneo en su seno — y por tanto fenómenos convectivos— si existen gradientes de densidad y fuerzas de masa en su interior. Se dice que hay convección natural (o libre).

Esto puede suceder en varias circunstancias, pero la más habitual es aquella en la cual:

- Los gradientes de densidad son debidos a diferencias de temperatura y
- La fuerza másica es la gravedad.

Esta situación es la que se va a estudiar.

En convección natural, la velocidad de los fluidos es bastante menor que en convección forzada, por lo que en consecuencia  $h$  es también mucho menor y, por tanto, las resistencias térmicas que presenta ( $1/h$ ) son altas y en muchas aplicaciones suponen el mecanismo de transferencia de calor controlante.

***Ejemplo:** Estas consideraciones le deben llevar a uno a pensar que es incorrecto pretender regular el funcionamiento de un radiador ( $q$ ) a través de la válvula de paso del agua, salvo que ésta esté especialmente diseñada.*

Efectivamente, en un radiador corriente de agua caliente, el calor se cede desde el agua (a unos 80 °C aprox.) hasta el medio ambiente (a unos 20 °C). Para ello debe superar tres resistencias térmicas:

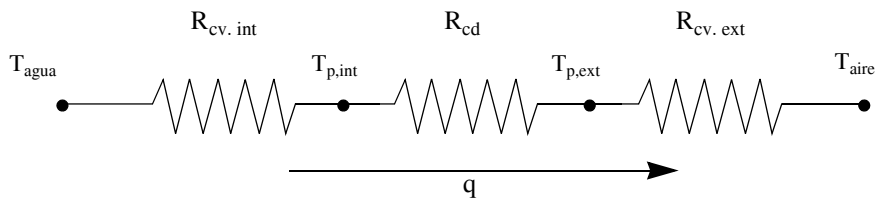
---

**Convección natural**

---

- **Convección interior**, del agua a las paredes internas del radiador,  $R_{cv, int}$ .
- **Conducción**, a través de las paredes metálicas del radiador,  $R_{cd}$ .
- **Convección exterior**, de la superficie exterior del radiador hacia el aire ambiente,  $R_{cv, ext}$ .

---

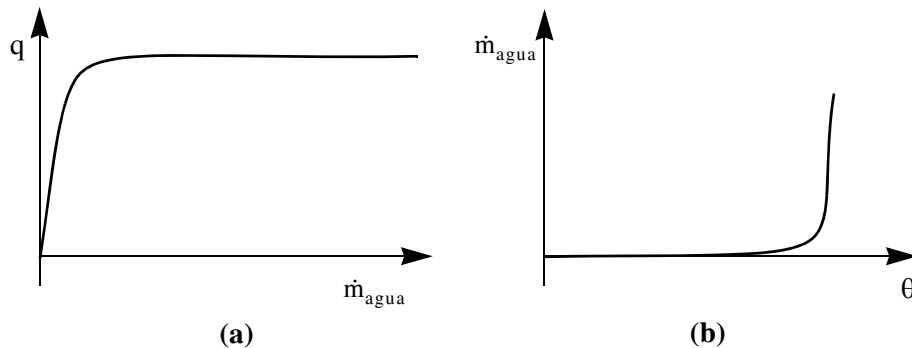
**FIGURA 9.1** Representación resistiva de la transmisión de calor en un radiador.

De las tres resistencias la mayor, con diferencia, es la de la convección exterior. Como al abrir o cerrar la válvula se modifica la velocidad de paso del agua y por tanto  $R_{cv, int}$  que tiene un efecto pequeño en el calor cedido  $q$ , resulta

$$q = \frac{T_{\text{agua}} - T_{\text{aire}}}{R_{\text{total}}} \cong \text{Cte}$$

ya que  $R_{\text{total}} = R_{cv, int} + R_{cd} + R_{cv, ext} \approx R_{cv, ext} = \text{Cte}$ . Por ello la curva de regulación es muy mala (ver figura 9.2a), salvo que se corrija con una válvula de característica (caudal – ángulo de apertura de la válvula) inversa (figura 9.2ab)

---

**FIGURA 9.2** (a) Curva calor–caudal de agua en un radiador de calefacción convencional. (b) Curva caudal de agua–ángulo de apertura en una válvula correctora de la curva de la figura (a).

## Aplicaciones de la convección natural

Hay muchas, siendo las principales las siguientes

- Pérdidas de calor en tuberías.
- Refrigeración de dispositivos eléctricos y electrónicos.
- Calefacción.
- Producción de frío doméstico e industrial.
- Movimientos naturales: Atmósfera, mares y océanos,...

## Fenomenología y ecuaciones físicas

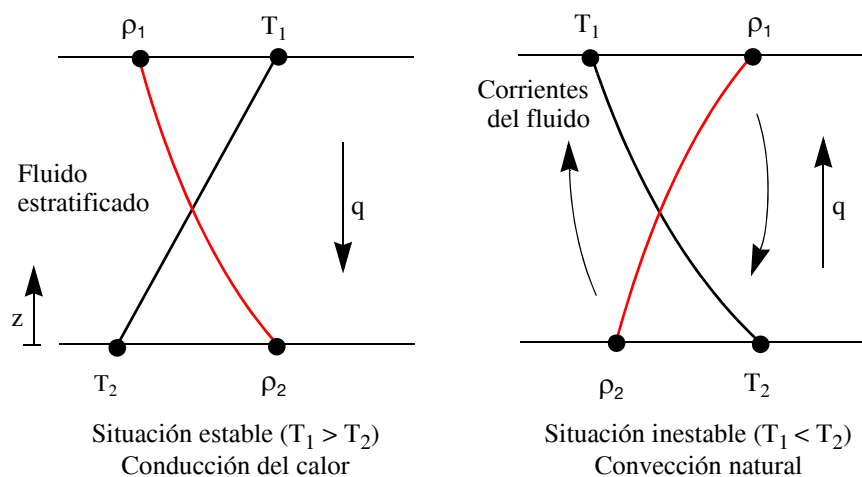
---

Aunque se ha indicado que la convección natural es causada por la presencia de una fuerza másica (gravedad, centrífuga, Coriolis,...) en el seno de un fluido con diferencias de densidad, ésto no asegura la aparición de corrientes convectivas.

A pesar de existir estudios matemáticos rigurosos que determinan las condiciones en que aparece la convección natural, nos limitaremos a una explicación cualitativa. Sea un fluido encerrado por dos placas horizontales muy grandes a distinta temperatura, según se muestra en la figura 9.3.

---

**FIGURA 9.3** Aparición del movimiento en un fluido encerrado entre dos placas horizontales a distinta temperatura.



---

## Convección natural

---

Estrictamente no basta que  $dT/dz < 0$ , sino que debe superarse un cierto valor umbral para que aparezcan movimientos convectivos, aunque, por ejemplo para el aire, el umbral es muy pequeño ( $\approx -0.01$  K/m).

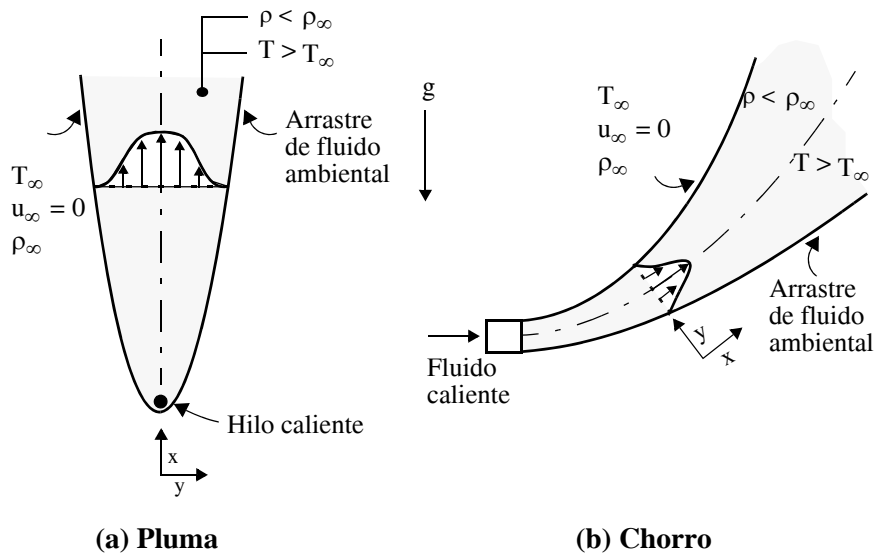
Un estudio detallado de la estabilidad en el seno de un fluido puede encontrarse en las referencias [1] y [2].

Las geometrías en las que se pueden presentar estos fenómenos son muchas.

Desde situaciones de **flujos de contornos libres**, como la pluma, Fig. (9.4a), o el chorro flotante, Fig. (9.4b), causados por un cable caliente (9.4a) o la inyección del fluido caliente (9.4b) en el seno del fluido frío inmóvil, hasta los casos en que los flujos se producen en contacto con alguna superficie confinante, como el de la figura 9.5, y donde se va a centrar el estudio por ser los habituales en las aplicaciones de intercambio de calor.

---

**FIGURA 9.4** Convección natural con contornos libres.



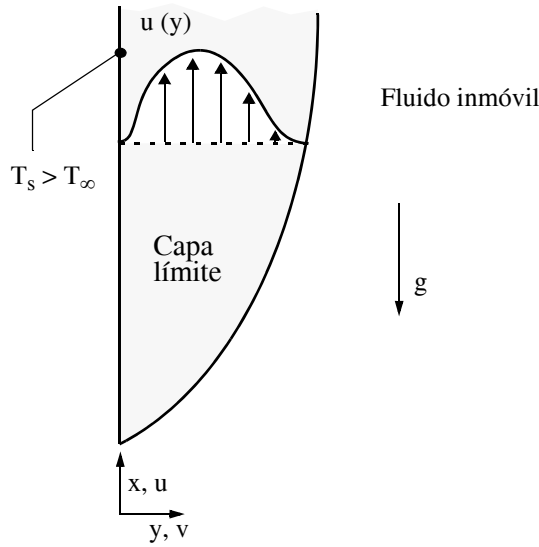
Para establecer las ecuaciones aplicables y los números adimensionales importantes, se toma el caso arquetípico muy estudiado de la placa plana vertical (figura 9.5), que se supone inmersa en un fluido inmóvil y a una temperatura distinta de la del fluido.

- Si  $T_s > T_\infty$ , el fluido adyacente a la placa es menos denso que el resto, y sube arrastrando fluido de la región en reposo (la CL es hacia arriba).

- Si  $T_s < T_\infty$ , la capa límite se desarrolla hacia abajo.

El razonamiento en cualquiera de las dos situaciones se puede llevar íntegro a la otra sin más que modificar la dirección del eje X (creciente para arriba en el primer caso y para abajo en el segundo).

FIGURA 9.5 Convección natural adyacente a una superficie.



Se elige, como es clásico, el primer caso para razonar.

Esta situación, bidimensional, es justamente la que se consideró en el capítulo de aspectos básicos de la convección (revisar el capítulo 6), llegando a que las ecuaciones diferenciales eran las siguientes

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.15)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.16a)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (6.17)$$



(ver capítulo 7), introduciendo una **variable de semejanza**  $\eta \equiv \frac{y}{x} \left( \frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4}$ ,

un número de Grashof **local**,  $Gr_x \equiv \frac{g\beta(T_s - T_\infty)x^3}{\nu^2}$ , una función de corriente

$f(\eta)$  adimensional,  $f(\eta) \equiv \frac{\Psi(x, y)}{\left[ 4\nu \left( \frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4} \right]}$ , una temperatura adimensional

$T^* \equiv \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty}$ , y obteniendo dos ecuaciones **diferenciales ordinarias acopladas**

$$f''' + 3ff'' - 2(f')^2 + T^* = 0 \quad \dagger \quad (9.1)$$

$$T^{*''} + 3PrfT^{*'} = 0 \quad (9.2)$$

y las condiciones de contorno siguientes

$$\eta = 0 \quad : \quad f = f' = 0 \quad , \quad T^* = 1 \quad (9.3)$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad : \quad f' \rightarrow 0 \quad , \quad T^* \rightarrow 0 \quad (9.4)$$

Resolviendo numéricamente, interpolando los resultados y realizando las transformaciones necesarias, llega a

$$Nu_x \equiv \frac{hx}{\lambda} \quad Nu_x = \left( \frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4} \frac{0.75 Pr^{1/2}}{\left( 0.609 + 1.221 Pr^{1/2} + 1.238 Pr \right)^{1/4}} \quad (9.5)$$

que es válido para todo valor del número de Prandtl Pr.

La obtención de un valor promedio para toda la placa es fácil por integración

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h \, dx$$

---

†. Las primas indican derivación con respecto a la variable  $\eta$ .

---

## Convección natural

---

siendo  $L$  su altura y llegándose a

$$\overline{Nu} = \frac{4}{3} Nu_x(x=L) \quad (9.6)$$

---

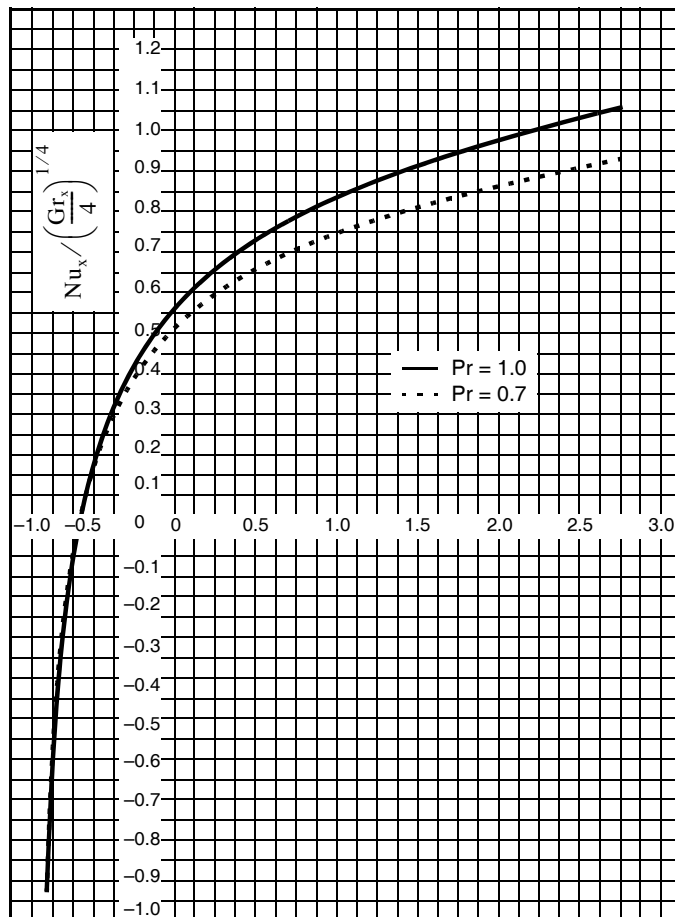
## Convección laminar en una placa vertical no isoterma

---

Unos años después que Ostrach, Sparrow y Gregg [4] se plantean la influencia en el calor intercambiado que tiene la condición de no isothermicidad de la superficie.

---

**FIGURA 9.6** Variación de  $Nu_x/(Gr_x/4)^{1/4}$  con  $n$  para  $Pr = 0.7$  y  $Pr = 1.0$ , en una pared de temperatura  $T_s(x) = T_\infty + Nx^n$ .



---

### Correlaciones empíricas. Generalidades

---

Ensayaron con la variación  $T_s - T_\infty = Nx^n$  ( $N, n$ : parámetros), y obtuvieron numéricamente para  $\frac{Nu_x}{(Gr_x/4)^{1/4}}$  la variación con  $n$  indicada en la figura 9.6, que muestra como la variación respecto del caso isoterma ( $n = 0$ ) es fuerte.

Quisieron obtener también expresiones para el valor promedio del número de Nusselt  $\overline{Nu}$ , pero se encontraron con el problema de definir una adecuada diferencia de temperaturas promedio,  $(T_s(x) - T_\infty)$ .

---

### Correlaciones empíricas. Generalidades

---

En las correlaciones experimentales, cuyo fin es principal y generalmente utilitario, interesa normalmente expresiones que determinen el valor promedio de  $Nu$  o  $h$ . A ellas se ha recurrido siempre hasta ahora para régimen turbulento.

Se vio que para convección natural las correlaciones son, genéricamente, de la forma dada por la expresión (6.38),  $\overline{Nu} = f(Gr, Pr)$ , siendo frecuente la existencia de relaciones potenciales similares a las de la convección forzada, pero todavía más simples en muchos casos al aparecer los números  $Gr$  y  $Pr$  elevados al mismo exponente [5], [6]. Por ese motivo se les agrupa en un nuevo número adimensional, llamado de Rayleigh,  $Ra \equiv Gr \cdot Pr$ .

Así pues el tipo de correlaciones más sencillas (en general las más antiguas) que aparecen en este tipo de convección son de la forma

$$\boxed{\overline{Nu} = C Ra^n} \quad (9.7)$$

donde los coeficientes del ajuste,  $C$  y  $n$ , dependen fundamentalmente de la geometría y del intervalo de trabajo (valores del  $Ra$ ) aunque pueden depender de otros factores (como el  $Pr$ ). Deben destacarse tres aspectos.

- Como orden de magnitud *exclusivamente*

$$n \cong \frac{1}{4} \quad \text{para Régimen Laminar}$$

$$n \cong \frac{1}{3} \quad \text{para Régimen Turbulento}$$

- Para el tipo de correlación (9.7) las propiedades se calculan a la temperat-

---

## Convección natural

---

ura de película

$$T_p \equiv \frac{T_s + T_\infty}{2}$$

- Es importante recordar que en la definición del Ra y del  $\overline{Nu}$

$$Ra \equiv \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu\alpha}, \quad \overline{Nu} \equiv \frac{\overline{h}L}{\lambda}$$

entra L, que es la dimensión característica de cada caso, que debe ser correctamente definida.

---

## Correlaciones empíricas para la placa vertical

---

Para esta geometría, muy importante industrialmente, existen muchas determinaciones experimentales obtenidas en períodos de tiempo bastante diferentes. Para **placa isoterma** se tiene

- McAdams [7] agrupa los valores experimentales de Weise y Saunders y obtiene las siguientes correlaciones

$$\overline{Nu} = 0.59 Ra_L^{1/4} \quad 10^4 \leq Ra_L \leq 10^9 \quad (9.8)$$

$$\overline{Nu} = 0.13 Ra_L^{1/3} \quad 10^9 \leq Ra_L \leq 10^{12} \quad (9.9)$$

definiéndose  $\overline{Nu}$  y Ra con la altura L de la placa.

- En 1975, Churchill y Chu [8] obtienen las expresiones que siguen:

$$\overline{Nu} = \left\{ 0.825 + \frac{0.387 Ra_L^{1/6}}{[1 + (0.492/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right\}^2 \quad (9.10)$$

**Validez:**  $0.1 < Ra_L < 10^{12}$ ;  $T_s = \text{cte.}$

---

**Correlaciones empíricas para la placa vertical**

---

$$\overline{Nu} = 0.68 + \frac{0.67 Ra_L^{1/4}}{[1 + (0.49/Pr)^{9/16}]^{4/9}} \quad (9.11)$$

**Validez:**  $0.1 < Ra_L < 10^9$  ;  $T_s = Cte$ .

Como antes, L representa en ambas fórmulas la altura de la placa y las propiedades se calculan a la temperatura de película.

- Correlaciones para **superficie isoflujo**.

Aunque a veces se utilizan las correlaciones anteriores para la situación de  $q''_s = Cte$  a través de alguna modificación, lo adecuado es utilizar correlaciones específicas que usen unos números adimensionales más adecuados a esta condición de contorno. Así, se define un número de Grashof modificado

$$Gr_x^* \equiv Gr_x Nu_x = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)x^3}{\nu^2} \frac{q''_s x}{\lambda(T_s - T_\infty)}$$

$$= \frac{g\beta q''_s x^4}{\lambda \nu^2} \equiv Gr_x^* \quad (9.12)$$

y en consonancia un número de Rayleigh modificado,  $Ra_x^* = Gr_x^* \cdot Pr$ .

Basándose en los experimentos de Vliet y Liu [9] con agua, se establecen las siguientes correlaciones locales para fluidos con números de Prandtl en ese rango ( $3 < Pr < 9$ ).

**Validez**

$Nu_x = 0.6(Ra_x^*)^{1/5}$	$10^5 \leq Ra_x^* \leq 10^{13}$	(9.13)
----------------------------	---------------------------------	--------

$Nu_x = 0.568(Ra_x^*)^{0.22}$	$2 \times 10^{13} \leq Ra_x^* \leq 10^{16}$	(9.14)
-------------------------------	---	--------

La zona entre  $Ra_x^* = 10^{13}$  y  $Ra_x^* = 2 \times 10^{13}$  es la zona de transición y existe una gran dispersión en los datos. Se necesitan otras variables además del  $Ra_x^*$  para obtener correlaciones. Para una estimación se podría tomar un promedio de las ecuaciones (9.13) y (9.14).

---

## Convección natural

---

Para el caso del aire, Vliet y Ross [10] recomiendan las siguientes correlaciones

$$Nu_x = 0.55 Ra_x^{*1/5} \quad (9.15)$$

para régimen laminar ( $10^5 < Ra_x^* < 10^{13}$ ) y

$$Nu_x = 0.17 Ra_x^{*1/4} \quad (9.16)$$

para régimen turbulento ( $10^{13} < Ra_x^* < 10^{16}$ )

**Propiedades:** en la temperatura de película, estimando inicialmente la temperatura de la superficie.

---

## Correlaciones para el cilindro vertical

---

Es frecuente el uso de las correlaciones anteriores de la placa vertical para cilindros verticales. Ésto sólo es correcto si la curvatura del cilindro es suficientemente pequeña, de manera que el espesor de la capa límite es mucho menor que el diámetro ( $\delta \ll D$ ).

En caso contrario la curvatura aumenta apreciablemente la transferencia de calor, presentándose en las figuras 9.7a y 9.7b para cilindros isotermos (según artículos de Sparrow y Gregg [11] y de Cebeci [12]), los cocientes

$$\frac{(Nu_x)_{cilindro}}{(Nu_x)_{p. plana}} \quad \text{y} \quad \frac{(\overline{Nu})_{cilindro}}{(\overline{Nu})_{p. plana}}, \text{ respectivamente}$$

donde  $x$  representa la altura como en la placa plana (ver la figura 9.5).

En ellas se puede apreciar que para poder utilizar para un cilindro vertical las fórmulas de la placa plana vertical debe cumplirse

$$\frac{D}{L} > \frac{40}{Gr_L^{1/4}}. \quad (9.17)$$

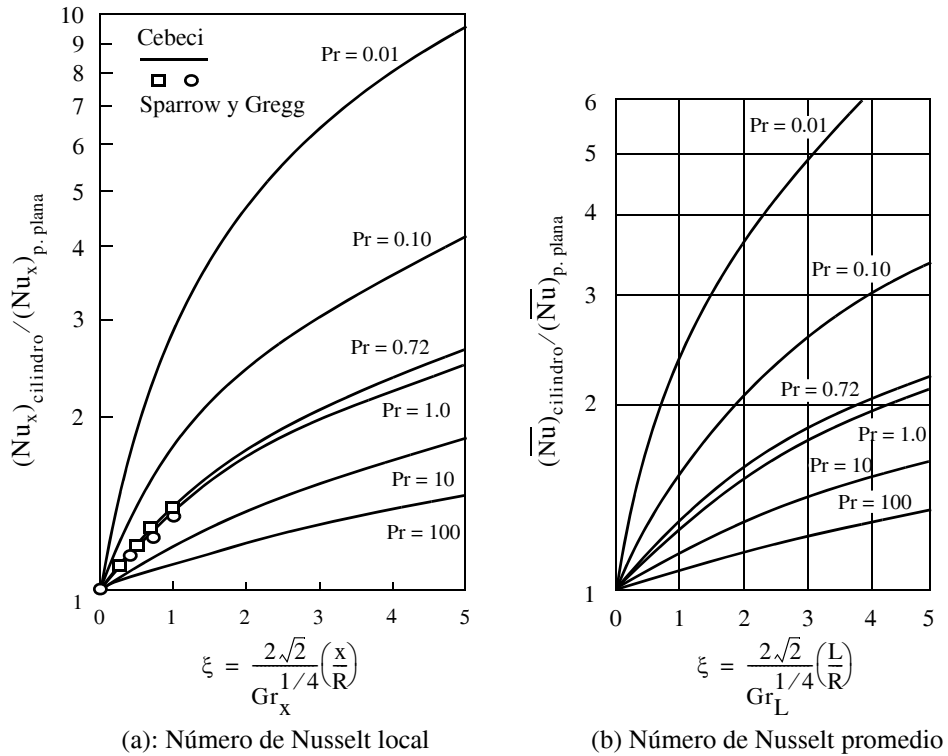
En el caso del régimen laminar, en lugar de las gráficas se puede utilizar la siguiente correlación del año 1956 [30]

$$Nu_L = \frac{4}{3} \left[ \frac{7Ra_L Pr}{5(20 + 21Pr)} \right]^{1/4} + \frac{4(272 + 315Pr)L}{35(64 + 63Pr)D}. \quad (9.18)$$

## Placas horizontales

Una relación de cilindros de diversa altura se presenta en la ref. [13] para el caso de flujo laminar con la condición de contorno de flujo de calor superficial uniforme.

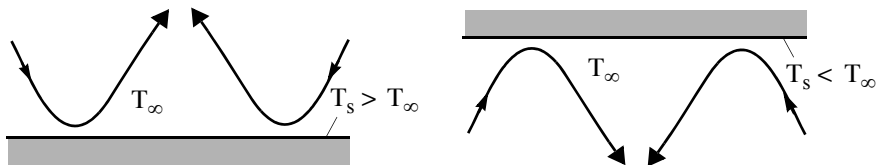
**FIGURA 9.7** Efecto de la curvatura sobre el número de Nusselt en convección natural sobre cilindros verticales isotermos ( $x$  representa la altura) [12].



## Placas horizontales

Además de la temperatura relativa entre la superficie y el fluido es muy importante la posición (hacia arriba o hacia abajo) de la superficie.

**FIGURA 9.8** Posición de una placa horizontal que favorece las corrientes convectivas.



---

**Convección natural**

---

- En la posición de placa caliente mirando hacia arriba o fría hacia abajo, se favorecen las corrientes convectivas (figura 9.8) y las correlaciones experimentales propuestas son:

Superficie isoterma [14],  $T_s = \text{cte}$ .

$$\overline{Nu} = 0.54 Ra_L^{1/4} \quad 10^4 \leq Ra_L \leq 10^7 \quad (9.19)$$

$$\overline{Nu} = 0.15 Ra_L^{1/3} \quad 10^7 \leq Ra_L \leq 10^{11} \quad (9.20)$$

Flujo de calor uniforme sobre la superficie [13],  $q''_s = \text{cte}$

$$\overline{Nu} = 0.61 Ra_L^{*1/5} \quad 5 \times 10^4 \leq Ra_L^* \leq 3 \times 10^8 \quad (9.21)$$

$$\overline{Nu} = 0.24 Ra_L^{*1/4} \quad 3 \times 10^8 < Ra_L^* < 7 \times 10^{13} \quad (9.22)$$

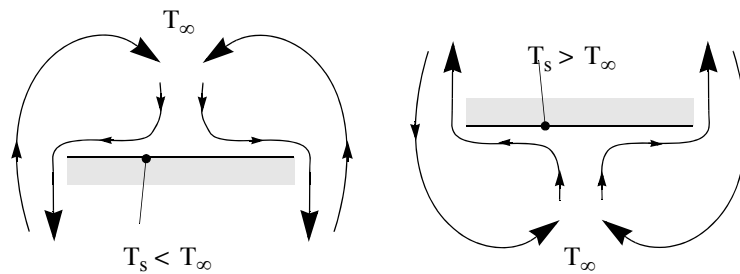
recordando que  $Ra_L^* = Ra_L \cdot \overline{Nu}$  y calculando  $Ra_L$  con el promedio sobre  $L$  de la diferencia de temperaturas ( $T_s - T_\infty$ )

**Propiedades a  $T_p$ :**  $L \equiv \frac{\text{Área de la placa}}{\text{Perímetro de la placa}}$ .

- Si la placa caliente se orienta hacia abajo o la fría hacia arriba, las corrientes de convección son más pobres (figura 9.9) y las correlaciones las (9.23) y (9.24) [15], [13]

---

**FIGURA 9.9** Posición de una placa horizontal que obstaculiza las corrientes convectivas.



$T_s = \text{Cte}$

$$\overline{Nu} = 0.27 Ra_L^{1/4} \quad 10^5 \leq Ra_L \leq 10^{10} \quad (9.23)$$

---

## Placas inclinadas

---

$$q''_s = \text{cte}$$

$$\bar{Nu} = 0.35 Ra_L^{*1/5} \quad 5 \times 10^5 \leq Ra_L^* \leq 10^{12} \quad (9.24)$$

La definición y las propiedades de  $L$  como en la otra orientación.

---

## Placas inclinadas

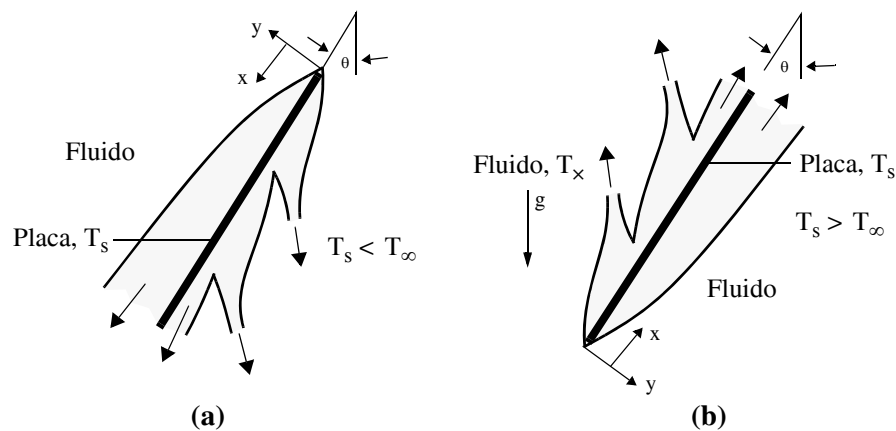
---

Existen dos zonas de comportamiento muy diferenciado en la placa: sus superficies superior e inferior. Esto se puede observar en la figura 9.10.

Cuando la placa está fría ( $T_s < T_\infty$ ) se forma una capa límite descendente desarrollada por la componente paralela a la placa de la aceleración de la gravedad,  $g \cos \theta$ . Esto implica que sobre su superficie superior (figura 9.10a) hay un desarrollo descendente, cualitativamente semejante al de una placa vertical, pero más lento con reducciones en el campo de velocidades y como consecuencia en  $h$ .

---

**FIGURA 9.10** Corrientes convectivas en placas inclinadas.



Por contra en su superficie inferior la componente perpendicular de  $g$  obliga a moverse al fluido hacia abajo, interrumpiendo el desarrollo de la capa límite. Con ello se crea una situación tridimensional más complicada, ya que el fluido frío descolgado de la placa es sustituido por el fluido más caliente del ambiente. Estos efectos, el aumento de circulación del fluido y la ruptura de la capa límite aumentan el valor de  $h$  en esta cara.

Similares argumentos sirven para describir el comportamiento de los lados inferior y superior de una placa caliente ( $T_s > T_\infty$ ) inclinada (Figura 9.10b).

---

## Convección natural

---

Por ello para las caras superior de una placa fría e inferior de una placa caliente se recomienda [13] como primera aproximación utilizar las correlaciones de la placa plana vertical (particularmente las de Churchill y Chu) hasta inclinaciones de unos  $60^\circ$ , es decir,  $0 < \theta < 60^\circ$ .

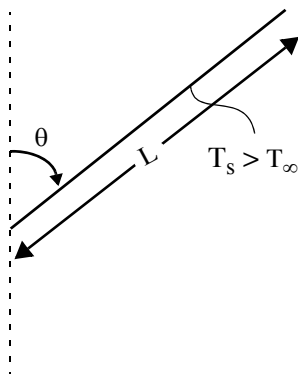
- Cambiando  $g$  por  $(g \cos \theta)$ , para régimen laminar.
- Sin modificar, para régimen turbulento.

Para las caras opuestas es preciso consultar a la literatura científica.

Las expresiones usadas hasta aquí se refieren generalmente a placas isotermas.

### Flujo de calor uniforme en la superficie ( $q''_s = \text{Cte}$ )

Este caso ha sido intensamente estudiado por Fujii e Imura [16] con los siguientes resultados:

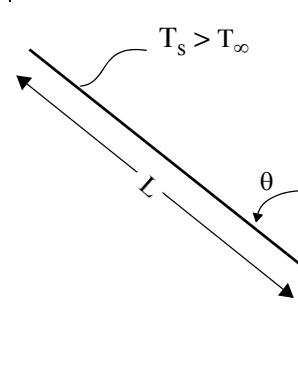


Placa caliente mirando hacia abajo

$$\bar{Nu} = 0.56(Ra_L \cos \theta)^{1/4} \quad (9.24)$$

válido para  $\theta < 88^\circ$  y  $10^5 < Ra_L \cos \theta < 10^{11}$

tomándose la temperatura en mitad de la placa para calcular el valor de  $Ra_L$ .



Placa caliente mirando hacia arriba

$$\bar{Nu} = 0.56(Ra_L \cos \theta)^{1/4} \quad (9.25)$$

válido para  $\theta < 88^\circ$  y  $Ra_L < Ra_{L,c}$

$$\bar{Nu} = 0.145 \left( Ra_L^{1/3} - Ra_{L,c}^{1/3} \right) + 0.56 \left( Ra_{L,c} \cos \theta \right)^{1/4} \quad (9.26)$$

válido para  $Ra_L < 10^{11}$ ;  $Gr_L > Gr_{L,c}$  y  $15^\circ < \theta < 75^\circ$ ,

---

### El cilindro horizontal largo

---

donde se utiliza el valor medio de la temperatura de la placa para calcular  $Ra_L$ .

El valor de  $Gr_{L,c}$  es el que establece el paso del régimen laminar a turbulento y se recoge [31] en la tabla 9.1.

---

**TABLA 9.1** Valores del  $Gr_{L,c}$  para las correlaciones (9.25) y (9.26).

$\theta$ (°)	$Gr_{L,c}$
15	$5 \times 10^9$
30	$10^9$
60	$10^8$
75	$10^6$

**Propiedades:**  $\beta$  en  $\frac{T_s + 3T_\infty}{4}$ , y el resto en  $\frac{3T_s + T_\infty}{4}$ .

### El cilindro horizontal largo

---

Se entiende por cilindro largo, como ya se vió en las lecciones de conducción, aquél cuya longitud es notablemente mayor que su diámetro (por lo menos diez veces). Esta geometría importante se ha estudiado ampliamente, destacando las dos correlaciones siguientes

- Correlación de Morgan [17]

$$\overline{Nu} = C Ra_D^n \quad (9.27)$$

válida para  $T_s = \text{cte}$ , con los parámetros  $C$  y  $n$  mostrados en la tabla 9.2 y definiéndose

$$\overline{Nu} \equiv \frac{\bar{h}D}{\lambda} \quad \text{y} \quad Ra_D \equiv \frac{g\beta(T_s - T_\infty)D^3}{\nu\alpha}$$

---

**Convección natural**

---

**TABLA 9.2** Parámetros de la correlación de Morgan, ec. (9.27).

$Ra_D$	<b>C</b>	<b>n</b>
$10^{-10} - 10^{-2}$	0.675	0.058
$10^{-2} - 10^2$	1.020	0.148
$10^2 - 10^4$	0.850	0.188
$10^4 - 10^7$	0.480	0.250
$10^7 - 10^{12}$	0.125	0.333

- Correlación de Churchill y Chu [18]

$$\overline{Nu} = \left\{ 0.60 + \frac{0.387 Ra_D^{1/6}}{\left[ 1 + (0.559/Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2 \quad (9.28)$$

**Validez:**  $T_s = \text{cte}$ ,  $10^{-5} < Ra_D < 10^{12}$

**Las propiedades** de ambas correlaciones, (9.27) y (9.28), se calculan en la temperatura de película.

---

**La esfera**

---

- Correlación de Yuge [31]

$$\overline{Nu} = 2 + 0.43 Ra_D^{1/4} \quad (9.29)$$

**Validez:**  $1 < Ra_D < 10^5$ ,  $Pr \sim 1$ ,  $T_s = \text{Cte}$ .

- Correlación de Amato y Tien [31]

$$\overline{Nu} = 2 + 0.50 Ra_D^{1/4} \quad (9.30)$$

**Validez:**  $3 \times 10^5 < Ra_D < 8 \times 10^8$ ,  $T_s = \text{Cte}$ ,  $1 < Pr < 10$ .

- Correlación de Churchill [18]

---

### Otros cuerpos sumergidos

---

$$\overline{Nu} = 2 + \frac{0.589Ra_D^{1/4}}{[1 + (0.469/Pr)^{9/16}]^{4/9}} \quad (9.31)$$

**Validez:**  $Ra_D < 10^{11}$ ,  $Pr > 0.7$ .

- **Las propiedades** del fluido en las tres correlaciones se calculan a la temperatura de película.
- Los números adimensionales  $\overline{Nu}$  y  $Ra_D$  toman como dimensión característica la misma que la del cilindro largo, es decir, el diámetro  $D$ .
- Obsérvese como en las tres correlaciones vuelve a aparecer como sumando el valor límite de 2, de la misma manera que en convección forzada.

### Otros cuerpos sumergidos

---

Para otro tipo de objetos menos habituales totalmente en contacto con un fluido exterior se puede recurrir a la fórmula de Lienhard [19]

$$\overline{Nu}_L = 0.52Ra_L^{1/4} \quad (9.32)$$

válida para capa límite laminar, y siendo la longitud característica  $L$  la distancia recorrida por la capa límite. Por ejemplo  $L = \pi D/2$  para un cilindro horizontal.

Yovanovich (1987) ofrece otra fórmula alternativa, tomando como longitud característica la raíz cuadrada de área exterior del objeto sumergido dentro del fluido

$$L = A^{1/2}$$

y válida también en régimen laminar [13] ( $0 < Ra_L < 10^8$ ) y  $Pr > 0.7$

$$\overline{Nu}_L = 3.47 + 0.51Ra_L^{1/4} \quad (9.33)$$

Para régimen turbulento se puede encontrar alguna expresión más compleja en la bibliografía especializada [20].

## Canales

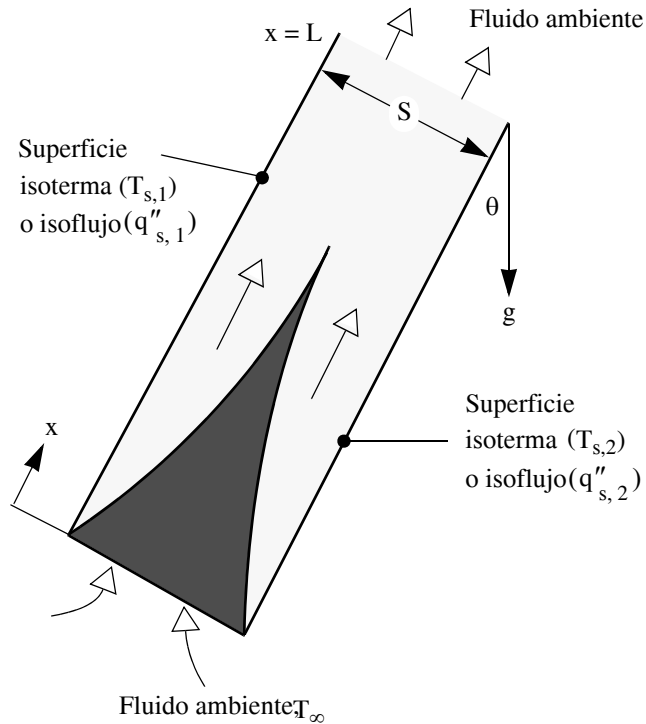
---

Una situación muy frecuente es la del intercambio convectivo en canales estrechos ( $S \ll L$ ) (ver figura 9.11) como sucede en las superficies aleteadas utilizadas para mejorar la pobre transmisión de calor característica de la convección natural.

De la misma manera que en otras geometrías (placas aisladas, recintos cerrados) la inclinación del canal es determinante por intervenir fuerzas gobernadas por la gravedad (flotación). Por ello se distinguen los canales verticales y los inclinados.

---

**FIGURA 9.11** Flujo de convección natural entre placas paralelas calientes formando un canal expuesto a un fluido exterior inmóvil.



### Canales verticales entre placas planas

Partiendo del trabajo pionero de Elenbaas [21], la orientación vertical ( $\theta = 0$ ) ha sido ampliamente estudiada, considerándose aquí las siguientes condiciones de contorno.

**1. Placas isotermas simétricas ( $T_{s,1} = T_{s,2} = \text{Cte} = T_s$ )**Definiendo los **números dimensionales**

$$\overline{Nu} \equiv \frac{\bar{h}S}{\lambda} \quad \text{y} \quad Ra_s \equiv \frac{g\beta(T_s - T_\infty)S^3}{\nu\alpha}$$

Elenbaas obtiene la siguiente expresión

$$\overline{Nu} = \frac{1}{24} Ra_s \frac{S}{L} \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{35}{Ra_s \frac{S}{L}}\right] \right\}^{3/4} \quad (9.34)$$

Se deduce inmediatamente para  $S/L \rightarrow 0$  (límite de desarrollo total, semejante al visto en el capítulo 8).

$$\overline{Nu}_{c.d.} = \frac{Ra_s(S/L)}{24} \quad (9.35)$$

**2. Una placa isoterma ( $T_{s,1} = \text{Cte} = T_s$ ) y la otra adiabática ( $q''_{s,2} = 0$ )**Para desarrollo total ( $S/L \rightarrow 0$ ), Bar-Cohen y Rohsenow [22] obtienen

$$\overline{Nu}_{c.d.} = \frac{Ra_s(S/L)}{12} \quad (9.36)$$

**3. Placas con flujo de calor ( $q''_{s,1} = q''_{s,2} = \text{Cte} = q''_s$ ) constante y simétricas**

Es más adecuado redefinir los números dimensionales

$$Ra_s^* \equiv \frac{g\beta q''_s S^4}{\lambda\alpha\nu} \quad \text{y} \quad Nu_L \equiv \frac{h(\text{en } L)S}{\lambda}$$

teniendo para total desarrollo [22]

$$Nu_{L,c.d.} = 0.144 \left[ Ra_s^* \frac{S}{L} \right]^{1/2} \quad (9.37)$$

---

**Convección natural**

---

4. Una placa con flujo de calor constante ( $q''_{s,1} = \text{cte} = q''_s$ ) y la otra adiabática ( $q''_{s,2} = 0$ ).

Para condiciones de pleno desarrollo [22]

$$\text{Nu}_{L, \text{c.d.}} = 0.204 \left[ \text{Ra}_s^* \frac{S}{L} \right]^{1/2} \quad (9.38)$$

5. Para todo rango de  $S/L$

Combinando los resultados anteriores de **pleno desarrollo** con el límite opuesto de **placa aislada** según el procedimiento indicado por Churchill y Usagi [23], Bar-Cohen y Rohsenow [22] obtuvieron expresiones para cubrir todo el rango de  $S/L$ , resultando

Placas isotermas

$$\overline{\text{Nu}} = \left[ \frac{C_1}{(\text{Ra}_s S/L)^2} + \frac{C_2}{(\text{Ra}_s S/L)^{1/2}} \right]^{-1/2} \quad (9.39)$$

Placas con flujo de calor constante (isoflujo)

$$\text{Nu}_L = \left[ \frac{C_1}{(\text{Ra}_s^* S/L)} + \frac{C_2}{(\text{Ra}_s^* S/L)^{2/5}} \right]^{-1/2} \quad (9.40)$$

Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  aparecen valoradas para cada caso en la Tabla 9.3.

Los límites anteriormente indicados corresponden a los siguientes valores de las variables:

Pleno desarrollo	$\text{Ra}_s$ (o $\text{Ra}_s^*$ ) $S/L < 10$
Placa aislada	$\text{Ra}_s$ (o $\text{Ra}_s^*$ ) $S/L > 100$

**Nota.**— En un reciente artículo, Martin y colaboradores [24] muestran como la ecuación (9.39) predice valores del coeficiente de convección menores de los reales para valores muy bajos del número de Rayleigh ( $\text{Ra}_s \rightarrow 0$ ). Algo semejante ocurrirá con la correlación (9.40).

---

**Canales**


---

**Las propiedades** de las correlaciones anteriores se calculan en

Superficies isothermas:      en  $\frac{T_s + T_\infty}{2}$

Superficies isoflujo:      en  $\frac{T_s(\text{en } L) + T_\infty}{2}$

---

**TABLA 9.3**      Valores de las constantes de las correlaciones (9.39) y (9.40) para placas de espesor despreciable [22].

Condición superficial	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	S <sub>opt</sub>	$\frac{S_{\max}}{S_{\text{opt}}}$
Placas isothermas simétricas (T <sub>s,1</sub> = T <sub>s,2</sub> )	576	2.873	2.714 (Ra <sub>s</sub> /S <sup>3</sup> L) <sup>-1/4</sup>	1.71
Placas isoterma y adiabática (T <sub>s,1</sub> , q'' <sub>s,2</sub> = 0)	144	2.873	2.154 (Ra <sub>s</sub> /S <sup>3</sup> L) <sup>-1/4</sup>	1.71
Placas isoflujo simétricas (q'' <sub>s,1</sub> = q'' <sub>s,2</sub> )	48	2.51	1.472 Ra <sub>s</sub> <sup>*</sup> /(S <sup>4</sup> L) <sup>-1/5</sup>	4.77
Placas isoflujo y adiabática (q'' <sub>s,1</sub> , q'' <sub>s,2</sub> = 0)	24	2.51	1.169 (Ra <sub>s</sub> <sup>*</sup> /S <sup>4</sup> L) <sup>-1/5</sup>	4.77

### Distancia óptima

Otro aspecto importante en estas situaciones es la evaluación de la distancia óptima entre las placas del canal. Esto, en el caso más habitual de las superficies aleteadas, es lo mismo que la determinación del número de aletas a colocar sobre la superficie.

Se ha visto que una disminución de S disminuye  $\bar{h}$ , pero a la vez aumenta el área de intercambio A, de manera que existe un valor, S<sub>opt</sub>, que produce un máximo en  $\bar{h} A$ , es decir, en la transferencia de calor total

Por otro lado la máxima distancia a la que deben separarse las placas, S<sub>máx</sub>, es aquella en la que se produce un máximo en la transferencia de calor individual de cada aleta y por tanto una mínima temperatura superficial para flujo de calor dado, lo que interesa es la refrigeración de dispositivos electrónicos. Esta distancia es aproximadamente 2δ<sub>L</sub>, siendo δ<sub>L</sub> el espesor de la capa límite al final del canal. Valores de S<sub>opt</sub> y S<sub>máx</sub> aparecen en la tabla 9.3.

### Canales verticales de otras secciones

Se han obtenido también expresiones para el caso límite de pleno desarrollo (canal estrecho) en conductos verticales de otras secciones, según se muestra en la Tabla 9.4.

Obsérvese que en esta tabla el número de Nusselt se define sobre la altura del canal,  $L$ , mientras que el número de Rayleigh se define sobre el diámetro hidráulico del conducto.

---

**TABLA 9.4** Números de Nusselt promedio para circulación de chimenea en el límite de pleno desarrollo [13].

Forma de la sección	$\overline{Nu}_L / Ra_{D_h}$
Circular	$\frac{1}{128}$
Cuadrada	$\frac{1}{113.6}$
Triángulo equilátero	$\frac{1}{106.4}$

### Canales inclinados

La correlación presentada procede de Azevedo y Sparrow [15], quienes tras un trabajo experimental determinaron que para inclinaciones de hasta  $45^\circ$  la transmisión de calor esa insensible a la inclinación del canal. Su correlación es

$$\overline{Nu} = 0.645 \left[ Ra_s \left( \frac{S}{L} \right) \right]^{1/4} \quad (9.41)$$

y es válida para placas simétricas isotermas y una placa isoterma con la otra adiabática;  $0 < \theta < 45^\circ$ ;  $200 < Ra_s S/L < 2 \times 10^5$ .

**Propiedades** evaluadas a  $(T_s + T_\infty)/2$ .

### Recintos cerrados

---

Existen numerosas e importantes aplicaciones en ingeniería donde la convección natural se desarrolla en espacios cerrados, como sucede en cavidades en paredes, vidrios con cámara, colectores solares y otros casos.

---

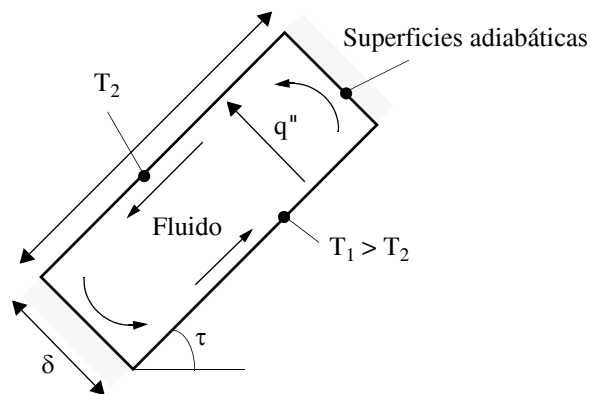
## Recintos cerrados

---

En estas situaciones, aunque se manejan expresiones semejantes a las anteriores para fluido libre, aparecen ciertos cambios en las variables contenidas que conviene conocer de antemano. Para ello se toma como referencia el recinto rectangular de la figura 9.12, donde se observa que el problema que se plantea en estos casos es el de cuál es el calor que intercambian dos superficies a distinta temperatura  $T_1$  y  $T_2$  a través de una película fluida que puede moverse.

---

**FIGURA 9.12** Convección natural en un recinto cerrado.



- La ley cinética se expresa como

$$q'' = h(T_1 - T_2) \quad (9.42)$$

- La dimensión característica es el espesor del fluido,  $\delta$ , que separa las superficies a distinta temperatura. En consecuencia la definición de los números de Nusselt y de Rayleigh es

$$Ra_\delta \equiv \frac{g\beta(T_1 - T_2)\delta^3}{\nu\alpha}, \quad \overline{Nu} \equiv \frac{\bar{h}\delta}{\lambda}$$

- Las propiedades del fluido se calculan habitualmente en  $(T_1 + T_2)/2$  (en caso contrario se indica).

El fenómeno de convección natural en recintos cerrados es complicado por lo que no debe esperarse que las correlaciones sencillas sean muy exactas. No obstante, son útiles para una estimación rápida de la magnitud aproximada de  $h$  y se presentan en primer lugar. Posteriormente se exponen otras correlaciones más sofisticadas para cada geometría interesante.

**Correlaciones empíricas sencillas**

Responden al esquema tipo  $\overline{Nu} = c Ra_{\delta}^n \left(\frac{H}{\delta}\right)^m$ , (9.43)

siendo los coeficientes  $c$ ,  $n$  y  $m$  los que aparecen en la Tabla 9.5 para cada geometría y rango de los parámetros.

- El calor intercambiado entre las placas viene dado por

$$q = \bar{h} A_m (T_1 - T_2) \quad (9.44)$$

siendo  $A_m$  el área media que vale

$$A_m = A_p \quad (9.45)$$

área de cualquiera de las dos superficies iguales, para recinto rectangular

$$A_m = \frac{A_e - A_i}{\ln(A_e/A_i)} \quad (9.46)$$

para anillo cilíndrico, con  $A_e$  área exterior y  $A_i$  área interior.

$$A_m = \sqrt{A_e A_i} \quad (9.47)$$

para anillo esférico, con  $A_e$  área exterior y  $A_i$  área interior.

**Correlaciones empíricas más exactas**

- Recinto rectangular vertical ( $\tau = 90^\circ$ )

a)  $\overline{Nu} = 0.22 \left(\frac{Pr Ra_{\delta}}{0.2 + Pr}\right)^{0.28} \left(\frac{H}{\delta}\right)^{-1/4}$  (Catton, [32]) (9.48)

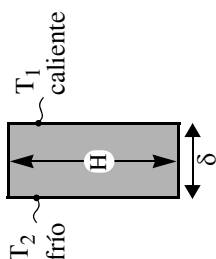
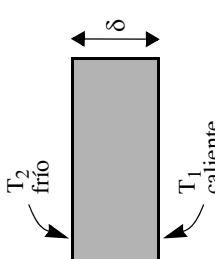
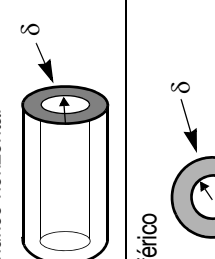
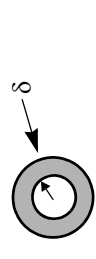
**Validez:**  $2 < H/\delta < 10$ ;  $Pr < 10^5$ ;  $Ra_{\delta} < 10^{10}$

b)  $\overline{Nu} = 0.18 \left(\frac{Pr Ra_{\delta}}{0.2 + Pr}\right)^{0.29}$  (Catton, [32]) (9.49)

**Validez:**  $1 < H/\delta < 2$ ;  $10^{-3} < Pr < 10^5$ ;  $10^3 < \frac{Ra_{\delta} Pr}{0.2 + Pr}$

**Recintos cerrados**

**TABLA 9.5** Coeficientes,  $c$ ,  $n$  y  $m$  de la correlación (9.43). Tomados de la ref. [31].

Geometría	Tipo de calentamiento	Tipo de fluido	Rango de Pr	Rango de $Ra_{\delta}$	$H/\delta$	$c$	$n$	$m$	
Capa vertical o anillo cilíndrico vertical 	Isotermo	Gas	0.5-2	<2000	—	1	0	0	
	Isotermo o isoflujo	Gas	0.5-2	$2 \times 10^3 - 2 \times 10^5$	11-42	0.197	1/4	-1/9	
		Gas	0.5-2	$2 \times 10^5 - 10^7$	11-42	0.073	1/3	-1/9	
Capa horizontal 	Isotermo, placa inferior caliente	Líquido	1-2 x 10 <sup>4</sup>	$10^4 - 10^7$	10-40	0.42 Pr <sup>0.012</sup>	1/4	-0.3	
		Líquido	1-20	$10^6 - 10^9$	1-40	0.046	1/3	0	
		Gas	0.5-2	<1700	—	—	1	0	0
		Gas	0.5-2	$1.7 \times 10^3 - 7 \times 10^3$	—	—	0.059	0.4	0
Anillo cilíndrico horizontal 	Isotermo	Gas	0.5-2	$7 \times 10^3 - 3.2 \times 10^5$	—	0.212	1/4	0	
		Gas	0.5-2	$> 3.2 \times 10^5$	—	0.061	1/3	0	
		Líquido	1-5000	<1700	—	—	1	0	0
		Líquido	1-5000	$1.7 \times 10^3 - 6 \times 10^3$	—	—	0.012	0.6	0
		Líquido	1-20	$6 \times 10^3 - 3.7 \times 10^4$	—	—	0.375	0.2	0
		Líquido	1-20	$3.7 \times 10^4 - 10^8$	—	—	0.13	0.3	0
Anillo esférico 	Isotermo	Gas o líquido	1-5000	$6 \times 10^3 - 10^6$	—	0.11	0.29	0	
		Gas o líquido	1-5000	$10^6 - 10^8$	—	0.40	0.20	0	
	Isotermo	Gas o líquido	0.7-4000	$10^2 - 10^9$	—	0.228	0.226	0	

---

**Convección natural**


---

$$c) \quad \overline{Nu} = \text{Max}[\overline{Nu}_1, \overline{Nu}_2, \overline{Nu}_3] \quad (\text{El Sherbiny y otros, [25]}) \quad (9.50a)$$

$$\overline{Nu}_1 = 0.0605 Ra_\delta^{1/3} \quad (9.50b)$$

$$\overline{Nu}_2 = \left\{ 1 + \left[ \frac{0.104 Ra_\delta^{0.293}}{1 + (6310/Ra_\delta)^{1.36}} \right]^3 \right\}^{1/3} \quad (9.50c)$$

$$\overline{Nu}_3 = 0.242 \left( \frac{Ra_\delta}{a} \right)^{0.272} \quad (9.50d)$$

siendo  $a \equiv H/\delta$  el cociente de aspecto.

**Validez:**  $Pr \approx 0.7$  (aire y gases). Los rangos de validez de  $Ra$  y  $a$  están ligados de la siguiente manera:  $a = 5$ ,  $Ra_\delta < 10^8$ ;  $5 < a < 10$ ,  $Ra_\delta < 10^7$ ;  $10 < a < 20$ ,  $Ra_\delta < 2 \times 10^6$ ;  $20 < a < 40$ ,  $Ra_\delta < 2 \times 10^5$ ;  $40 < a < 80$ ,  $Ra_\delta < 3 \times 10^4$ ;  $80 < a < 110$ ,  $Ra_\delta < 10^4$ .

- Recinto rectangular inclinado

El ángulo  $\tau$  que forma la cavidad con la horizontal es un factor importante. Destaca la correlación de Hollands y colaboradores [26]

$$\begin{aligned} \overline{Nu} = & 1 + 1.44 \left[ 1 - \frac{1708}{Ra_\delta \cos \tau} \right]^* \left[ 1 - \frac{1708 (\text{sen}(1.8\tau))^{1.6}}{Ra_\delta \cos \tau} \right] + \\ & + \left[ \left( \frac{Ra_\delta \cos \tau}{5830} \right)^{1/3} - 1 \right]^* \quad (9.51) \end{aligned}$$

indicando la notación  $[ ]^*$  que si el valor del corchete es negativo, éste debe igualarse a cero.

**Validez:**  $0 < \tau < 60^\circ$ ;  $H/\delta > 12$ ;  $0 < Ra_\delta < 10^5$ .

Para ángulos superiores a  $60^\circ$ , se utiliza una interpolación lineal [25]

$$\overline{Nu}_\tau = \frac{(90^\circ - \tau)\overline{Nu}_{60^\circ} + (\tau - 60^\circ)\overline{Nu}_{90^\circ}}{30^\circ} \quad 60^\circ < \tau < 90^\circ \quad (9.52)$$

---

**Recintos cerrados**


---

con  $\overline{Nu}_{60^\circ} = \text{Max}[\overline{Nu}_1, \overline{Nu}_2]$  (El Sherbiny y otros, [25]) (9.53a)

$$\overline{Nu}_1 = \left[ 1 + \left( \frac{0.093 Ra_\delta^{0.314}}{1 + G} \right)^7 \right]^{1/7} \quad (9.53b)$$

$$\overline{Nu}_2 = \left( 0.104 + \frac{0.175}{a} \right) Ra_\delta^{0.283} \quad (9.53c)$$

$$G = \frac{0.5}{\left[ 1 + \left( \frac{Ra_\delta}{3160} \right)^{20.6} \right]^{0.1}} \quad (9.53d)$$

y  $\overline{Nu}_{90^\circ}$  dada por las fórmulas (9.50).

En el caso de que el cociente de aspecto  $a \equiv H/\delta$  sea pequeño, Catton [15] sugiere la expresión

$$\overline{Nu}_\tau = \overline{Nu}_{0^\circ} \left[ \frac{\overline{Nu}_{90^\circ}}{\overline{Nu}_{0^\circ}} \right]^{\tau/\tau^*} (\text{sent } \tau^*)^{(\tau/4\tau^*)} \quad (9.54)$$

con

$H/\delta$	1	3	6	12	> 12
$\tau^*$	25°	53°	60°	67°	70°

**Validez:**  $H/\delta < 12$  ;  $0 < \tau < \tau^*$ .

- Recinto horizontal rectangular ( $\tau = 0^\circ$ )

En esta posición se demuestra que las expresiones para  $\overline{Nu}$  no dependen del cociente de aspecto, con lo que se simplifican. Entre las correlaciones sofisticadas sólo cabe destacar la aplicación de la de Hollands, válida para bajos valores del  $Ra_\delta$  ( $Ra_\delta < 10^5$ ).

Se puede utilizar la correlación de Hollands en recinto inclinado, ec. (9.51), con  $\tau = 0$ , resultando

$$\overline{Nu} = 1 + 1.44 \left[ 1 - \frac{1708}{Ra_\delta} \right]^* + \left[ \left( \frac{Ra_\delta}{5830} \right)^{1/3} - 1 \right]^* \quad (9.55)$$

Para  $Ra_\delta < 1708 \Rightarrow \overline{Nu} = 1$  de acuerdo con multitud de experiencias y estudios teóricos [1], [26] que demuestran que por debajo de ese valor del  $Ra_\delta$ , no se ha iniciado la convección, existiendo solamente la conducción.

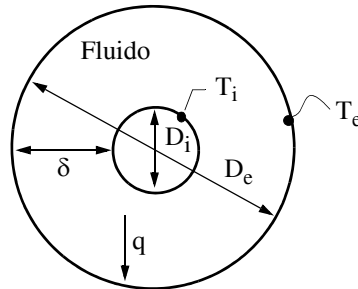
Para valores superiores del  $Ra_\delta$ , hay que utilizar alguna de las correlaciones simples de la tabla 9.5.

- Anillo cilíndrico horizontal largo

En el escaso trabajo existente sobre esta configuración y la siguiente, a veces se aborda el comportamiento como el de un problema de conducción [6] pero con un valor efectivo superior de  $\lambda$  (Raithby y Hollands, [27]), de manera que en esta geometría el calor intercambiado entre ambos cilindros viene dado por

$$q' = \frac{T_i - T_e}{\frac{\ln(D_e/D_i)}{2\pi\lambda_{ef}}} \left( \frac{W}{m} \right) \quad (9.56)$$

FIGURA 9.13 Convección natural en un anillo cilíndrico o esférico.



con 
$$\frac{\lambda_{ef}}{\lambda} = 0.386 \left( \frac{Pr}{0.861 + Pr} \right)^{1/4} (Ra_{cil}^*)^{1/4} \quad (9.57)$$

$$(Ra_{cil}^*)^{1/4} = \frac{\ln(D_e/D_i)}{\delta^{3/4} (D_i^{-3/5} + D_e^{-3/5})^{5/4}} Ra_\delta^{1/4} \quad (9.58)$$

---

**Convección mixta (forzada y natural)**

---

siendo  $\delta = \frac{1}{2}(D_e - D_i)$  y de validez  $10^2 < (Ra_{cil}^*) < 10^7$ .

- Anillo esférico

En los mismos términos se tiene

$$q = \lambda_{ef} \frac{\pi D_i D_e}{\delta} (T_i - T_e) \quad (9.59)$$

$$\text{con} \quad \frac{\lambda_{ef}}{\lambda} = 0.74 \left( \frac{Pr}{0.861 + Pr} \right)^{1/4} (Ra_{esf}^*)^{1/4} \quad (9.60)$$

$$\text{y} \quad (Ra_{esf}^*)^{1/4} = \frac{\delta^{1/4}}{D_i D_e} \frac{Ra_{\delta}^{1/4}}{(D_i^{-7/5} + D_e^{-7/5})^{5/4}} \quad (9.61)$$

**Validez:**  $10^2 < Ra_{esf}^* < 10^4$

---

**Convección mixta (forzada y natural)**

---

En esta lección y en las precedentes se han tratado las situaciones de Convección Forzada y Natural como casos puros; pero se indicó, al comenzar el estudio sobre los fenómenos convectivos, que esto sólo sucedía si el cociente  $Gr/Re^2$  era muy distinto de 1. En el caso en que  $Gr/Re^2 \sim 1$ , ambos efectos son competitivos y se exigiría una solución más general. Una discusión de este asunto se encuentra en Acrivos [28], Gebhart [29] y otras referencias bibliográficas.

Para evitar soluciones complicadas se sugiere aprovechar los resultados particulares de la Convección Forzada,  $Nu_F$ , y de la Convección Natural,  $Nu_N$ , mediante una correlación del tipo [15], [23]

$$\boxed{Nu^n = Nu_F^n \pm Nu_N^n} \quad (9.62)$$

donde como norma general el signo + es para los casos de

- *flujo asistido*: movimientos forzados y debidos a la flotación en una

---

## Convección natural

---

misma dirección. (Ejemplo: movimiento forzado ascendente en una placa vertical caliente),

- *flujo transversal*: movimientos perpendiculares. (Ejemplo: movimiento forzado horizontal sobre una esfera caliente). Se encuentran excepciones a estos casos [33], en los que la flotación reduce el intercambio de calor de la convección forzada pura,

y el signo – para el caso de

- *flujo opuesto*: movimientos de direcciones opuestas. (Ejemplo: movimiento forzado descendente en una placa vertical caliente).

En general, la mejor correlación de los datos se obtiene para  $n = 3$ , salvo para

Flujos transversales sobre placas horizontales,  $n = 3.5$ .

Flujos transversales sobre cilindros y esferas,  $n = 4$ .

En cualquier caso la expresión (9.62) debe tomarse como una primera aproximación, debiendo buscarse en la bibliografía correlaciones específicas para cada caso particular. Algunas de las muchas referencias existentes son [31] a [34] y especialmente los capítulos 14 y 15 de la referencia [35].

## Referencias

---

1. S. Chandrasekhar  
*Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*  
Dover Publications, New York, 1981.
2. L. Landau y E. M. Lifshitz  
*Mecánica de fluidos. Física teórica, vol. 6*  
Ed. Reverté, Barcelona, 1986.
3. S. Ostrach  
*An Analysis of Laminar Free-Convection Flow and Heat Transfer About a Flat Plate Parallel to the Direction of the Generating Body Force*  
National Advisory Committee for Aeronautics, Report 1111, 1953.
4. E. M. Sparrow, and J. L. Gregg  
*Similar Solutions for Free Convection From a Nonisothermal Vertical Plate*  
Transactions of the ASME, vol. 80, p. 379, 1958.

---

## Referencias

---

5. W. J. King  
*The Basic Laws and Data of Heat Transmission*  
Mechanical Engineering, vol. 54, p. 347, 1932.
6. M. Jakob  
*Heat Transfer, vol. I*  
Wiley, New York, 1967.
7. W. H. McAdams  
*Transmisión del calor*  
McGraw-Hill, México, 1978.
8. S. W. Churchill, and H. H. S. Chu  
*Correlating Equations for Laminar and Turbulent Free Convection from a Vertical Plate*  
International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 18, p. 1323, 1975.
9. G. C. Vliet, and C. K. Liu  
*An Experimental Study of Turbulent Natural Convection Boundary Layers*  
Journal of Heat Transfer, vol. 91, p. 517, 1969.
10. G. C. Vliet, and D. C. Ross  
*Turbulent Natural Convection on Upward and Downward Facing Inclined Constant Heat Flux Surfaces*  
Journal of Heat Transfer, vol. 97, p. 549, 1975.
11. E. M. Sparrow, and J. L. Gregg  
*Laminar Free Convection Heat Transfer from the Outer Surface of a Vertical Circular Cylinder*  
Transactions of ASME, vol. 78, p. 1823, 1956.
12. T. Cebeci  
*Laminar Free Convective Heat Transfer from the Outer Surface of a Vertical Slender Circular Cylinder*  
Fifth Int. Heat Transfer Conference, vol. 3, NC 1.4, pp. 15–19, 1974.
13. H. R. Nagendra, M. A. Tirunarayanan, and Ramachandran  
*Laminar Free Convection from Vertical Cylinders with Uniform Heat Flux*  
Journal of Heat Transfer, vol. 92, p. 191, 1970.
14. J. R. Lloyd, and W. R. Moran  
*Natural Convection Adjacent to Horizontal Surface of Various Planforms*  
Journal of Heat Transfer, vol. 96, p. 443, 1974.
15. L. F. A. Azevedo, and E. M. Sparrow  
*Natural Convection in Open-Ended Inclined Channels*  
Journal of Heat Transfer, vol. 107, p. 893, 1985.
16. J. Fujii, and H. Imura  
*Natural Convection Heat Transfer from a Plate with Arbitrary Inclination*  
International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 15, p. 755, 1972.

---

**Convección natural**

---

17. V. T. Morgan  
*The Overall Convective Heat Transfer from Smooth Circular Cylinders*  
*Advances in Heat Transfer*, T. F. Irvine and J. P. Hartnett (eds.), p. 199  
Academic Press, New York, 1975.
18. S. W. Churchill, and H. H. S. Chu  
*Correlating Equations for Laminar and Turbulent Free Convection from a Horizontal Cylinder*  
*International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 18, p. 1049, 1975.
19. J. H. Lienhard  
*On the Commonality of Equations for Natural Convection from Immersed Bodies*  
*International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 16, p. 2121, 1973.
20. A. V. Hassani, and K. G. T. Hollands  
*On Natural Convection Heat Transfer from Three Dimensional Bodies of Arbitrary Shape*  
*Journal of Heat Transfer*, vol. 111, p. 363, 1989.
21. W. Elenbaas  
*Heat Dissipation of Parallel Plates by Free Convection*  
*Physica*, vol. IX, p. 1, 1942.
22. A. Bar-Cohen, and W. M. Rohsenow  
*Thermally Optimum Spacing of Vertical, Natural Convection Cooled, Parallel Plates*  
*Journal of Heat Transfer*, vol. 106, p. 116, 1984.
23. S. W. Churchill, and R. Usagi  
*A General Expression for the Correlation of Rates of Transfer and Other Phenomena*  
*AIChE Journal*, vol. 18, p. 1121, 1972.
24. L. Martin, G. D. Raithby, and M. M. Yovanovich  
*On the Low Rayleigh Number Asymptote for Natural Convection Through an Isothermal, Parallel Plate Channel*  
*Journal of Heat Transfer*, vol. 113, p. 899, 1991.
25. S. M. El Sherbiny, G. D. Raithby, and K. G. T. Hollands  
*Heat Transfer by Natural Convection Across Vertical and Inclined Air Layers*  
*Journal of Heat Transfer*, vol. 104, p. 96, 1982.
26. K. G. T. Hollands, T. E. Unny, G. D. Raithby, and L. Konicek  
*Free Convective Heat Transfer Across Inclined Air Layers*  
*Journal of Heat Transfer*, vol. 98, p. 189, 1976.
27. G. D. Raithby, and K. G. Hollands  
*A General Method of Obtaining Approximate Solutions to Laminar and Turbulent Free Convection Problems*  
*Advances in Heat Transfer*, vol. 11, Academic Press, New York, p. 265, 1975.

---

## Referencias

---

28. A. Acrivos  
*Combined Laminar Free and Forced Convection Heat Transfer in External Flows*  
AIChE Journal, vol. 4, p. 285, 1958.
29. B. Gebhart  
*External Natural Convection Flows*  
Applied Mechanics Reviews, vol. 22, p. 691, 1969.
30. A. Bejan  
*Heat Transfer*  
Wiley, New York, 1993.
31. M. N. Özisik  
*Heat Transfer. A Basic Approach*  
McGraw-Hill, New York, 1985.
32. F. Incropera and D. de Witt  
*Fundamentals of Heat and Mass Transfer*  
Wiley, 1990.
33. Y. Mori  
*Buoyancy Effects in Forced Laminar Convection Flow over a Horizontal Flat Plate*  
J. Heat Transfer, vol. 83, p. 479. 1961.
34. E. R. G. Eckert, and A. J. Diaguila  
*Convective Heat Transfer for Mixed, Free and Forced Flow Thorough Tubes*  
Transactions of the ASME, vol. 76, p. 497, 1954.
35. S. Kakaç, R. K. Shah, and W. Aung  
*Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer*  
Wiley, New York, 1987.

---

## Síntesis del capítulo

---

- El fluido se mueve porque la gravedad actúa sobre los gradientes de densidad que, provocados principalmente por diferencias de temperatura, puedan aparecer en su seno. Por ello en los coeficientes de convección,  $h$  y  $Nu$ , aparece una dependencia de  $g$  y  $(T_s - T_f)$ .
- En el capítulo 6 de Fundamentos de Convección se vio que el número de Nusselt depende de las variables del argumento de las funciones genéricas

$$Nu = f(x^*, Gr, Pr) \quad \text{y} \quad \overline{Nu} = f(Gr, Pr)$$

siendo  $Gr \equiv \frac{g\beta(T_s - T_f)L^3}{\nu^2}$  el número de Grashof y donde  $\beta \equiv -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$  es

el coeficiente de dilatación isobara;  $T_f$ , una temperatura de referencia adecuada del fluido;  $L$ , una dimensión geométrica característica del sólido.

Es habitual que los grupos adimensionales de Grashof y Prandtl,  $Gr$  y  $Pr$ , aparezcan agrupados en el número de Rayleigh

$$Ra \equiv Gr \cdot Pr = \frac{g\beta(T_s - T_f)L^3}{\nu \alpha}$$

jugando  $Gr$  o  $Ra$  el papel del número de Reynolds en convección forzada y marcando la transición entre regímenes, según un valor crítico muy variable con la geometría.

Es frecuente que

$Nu$  (proporcional a)  $Ra^{1/4}$  en régimen laminar y

$Nu$  (proporcional a)  $Ra^{1/3}$  en régimen turbulento.

- Grupos de geometrías

Las distintas geometrías se pueden agrupar en tres tipos

- a) Exterior, en la que la superficie sólida está sumergida en una cantidad infinita de fluido, de forma semejante a la convección forzada exterior (capítulo 7). El caso tipo es la placa vertical, cuya dimensión característica es su altura  $L$ .
- b) Canales, en los que el fluido circula en un conducto, de forma semejante a la convección forzada interior (capítulo 8). Ejemplo: flujo entre aletas.  
Las dimensiones características son la distancia entre aletas (es decir, la anchura del canal),  $S$ , su altura,  $L$ , y su valor relativo  $S/L$ .
- c) Recintos cerrados en los que el fluido puede moverse, pero no entrar o salir. Ejemplo: Una cámara de aire.

- Convección mixta

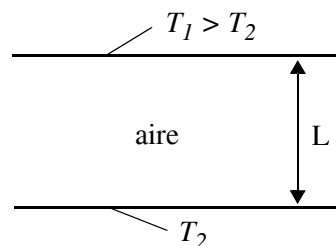
Cuando la convección natural y la forzada tienen una importancia parecida, lo que sucede para  $Gr/Re^2 \sim 1$ , es habitual utilizar promedios con las fórmulas de ambos tipos de convección de la forma  $Nu^n = Nu_F^n \pm Nu_N^n$  en lugar de resolver las ecuaciones completas de la convección, por la enorme dificultad que entraña (ver capítulo 6 sobre *Fundamentos de convección*).

---

## Cuestiones

---

1. Se tienen dos placas infinitas paralelas separadas por aire en reposo y a temperatura diferente, tal y como muestra la figura. Calcular el valor del número de Nusselt,  $Nu$ , que da la transferencia de calor en este caso



2. En una placa horizontal más caliente que el fluido que le rodea, ¿en qué cara será mayor el número de Nusselt,  $\overline{Nu}$ , en la superior o en la inferior? ¿por qué?
3. En convección natural el coeficiente de convección,  $h$ , es pequeño y especialmente cuando se trata de gases. En consecuencia, este fenómeno será en general despreciable; por ejemplo, en el cálculo de un radiador de calefacción, donde deberán tenerse en cuenta sobre todo la convección forzada del agua que va por el interior del radiador y la conducción a través de sus paredes.

Estas afirmaciones ¿son ciertas o falsas? Justificar la respuesta.

4. El calor intercambiado por convección natural, entre una placa vertical de un metro de altura y 0.6 metros de anchura y el aire, a 20 K por debajo de la temperatura de la placa, es conocido ¿Cuál es el cociente entre ese calor y el que intercambia, también por convección natural, otra placa vertical de 0.6 metros de altura y un metro de anchura con aire 20 K más caliente que ella?

Considerar que las propiedades termofísicas del aire son constantes y que el valor del número de Nusselt es proporcional a la raíz cúbica del número de Rayleigh,  $\overline{Nu} = C Ra_L^{1/3}$ .

---

**Cuestiones**

---

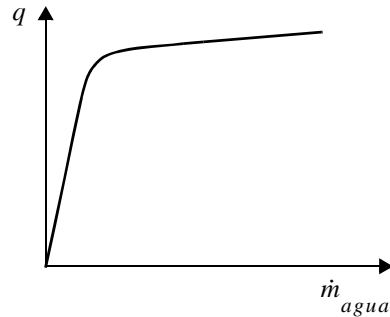
5. Cuando se quiere refrigerar una superficie caliente por convección natural con el aire ambiental, ¿en qué posición debe colocarse dicha superficie?, ¿por qué?

6. El techo de una habitación se encuentra a una temperatura,  $T_1$ , superior a la del suelo,  $T_2$ . Si no hay otras fuentes de calor en la misma, ¿habrá corrientes de convección natural en el seno del aire?, ¿por qué?

¿Habrá transmisión de calor de  $T_1$  a  $T_2$ ?, ¿por qué mecanismo(s)?

7. Explicar por qué la relación entre el calor que emite un radiador de calefacción de agua caliente y el caudal de agua que va por su interior tiene la forma que presenta la figura

Por tanto, ¿la regulación del radiador mediante la variación del caudal de agua es adecuada o no? Explicarlo brevemente.



8. En una placa vertical más caliente que el aire con el que está en contacto, se hace circular al aire forzadamente hacia arriba mediante un ventilador. El cálculo del número de Nusselt que tiene en cuenta los efectos de la convección natural y de la forzada, ¿con cuál de las siguientes expresiones se hace?:

a)  $\overline{Nu} = \overline{Nu}_F + \overline{Nu}_N$

b)  $\overline{Nu} = \overline{Nu}_F - \overline{Nu}_N$

c)  $\overline{Nu}^3 = \overline{Nu}_F^3 + \overline{Nu}_N^3$

d)  $\overline{Nu}^3 = \overline{Nu}_F^3 - \overline{Nu}_N^3$

siendo  $\overline{Nu}_F$  el valor del número de Nusselt correspondiente sólo a la convección forzada y  $\overline{Nu}_N$  el correspondiente a la convección natural.

---

# Problemas

---

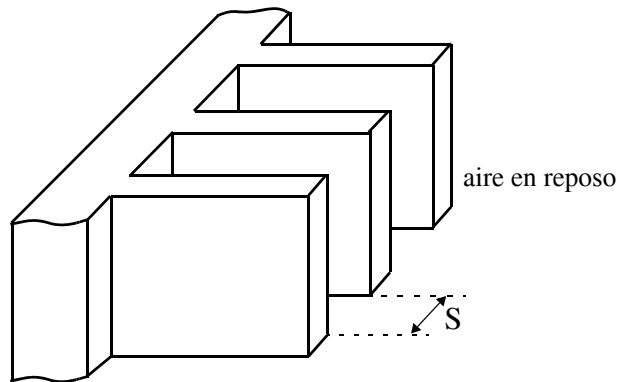
1. Una placa cuadrada de 0.4 m por 0.4 m mantenida a una temperatura  $T_s = 400$  K se suspende verticalmente en aire atmosférico en calma a  $T_\infty = 300$  K. Calcular el coeficiente promedio de transferencia de calor  $\bar{h}$  sobre la placa, utilizando las expresiones teóricas y las empíricas y comparando resultados.
2. Una placa delgada vertical de 3 m de altura y 1.5 m de anchura se aísla térmicamente en un lado y se expone en el otro a un flujo de radiación solar de  $q''_s = 750$  W/m. La superficie expuesta tiene una absorptividad a la radiación solar de  $\alpha = 0.8$ . Suponiendo que la energía absorbida se disipa por convección natural hacia el aire en calma de los alrededores a presión atmosférica y  $T_\infty = 300$  K, calcular la temperatura superficial de la placa.
3. Considérese una placa cuadrada de 0.5 m por 0.5 m con una superficie aislada y la otra mantenida a una temperatura  $T_s = 385$  K, colocada en aire en reposo a presión atmosférica y temperatura  $T_\infty = 315$  K. Calcular el coeficiente de convección promedio para las siguientes orientaciones de la placa:
  - a) Horizontal con la superficie caliente hacia arriba.
  - b) Vertical.
  - c) Horizontal con la superficie caliente hacia abajo.
4. Un tubo largo de 0.1 m de diámetro se mantiene a  $120$  °C haciendo pasar vapor por su interior. Se instala un escudo radiativo concéntrico con el tubo, siendo 10 mm el espacio intermedio. Si el escudo se encuentra a  $35$  °C y el espacio intermedio está lleno de aire a 1 atm, estimar la transferencia de calor por convección por unidad de longitud desde el tubo. ¿Cuál es la pérdida de calor si el espacio entre el tubo y el escudo se llena con aislante de fibra de vidrio?

---

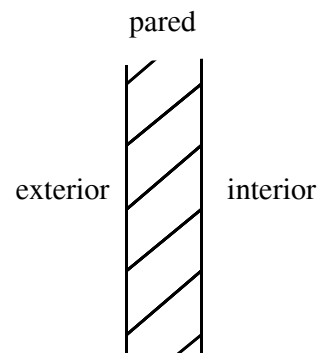
**Problemas**

---

5. Determinado componente electrónico ha de refrigerarse con aire en reposo. Para ello se utilizan aletas de ciertas dimensiones y conductividad térmica, espaciadas una distancia  $S$ . Cuantas más aletas se empleen (menor  $t$ ), más calor podrá evacuarse, ya que aumenta el área de intercambio. Sin embargo, existe un valor mínimo de  $S$  por debajo del cual el calor transferido ya no crece. Partiendo de la teoría básica de convección natural, explica conceptualmente por qué.



6. La pared de un edificio es hueca y su interior está dividido en celdas mediante particiones inclinadas, como se muestra en la figura. Cuando el exterior es el lado caliente, la resistencia térmica es menor que en caso contrario. Explicar por qué. En climas fríos, este efecto puede utilizarse para almacenar el calor del sol durante el día, evitando que se pierda de noche ¿Como deberían ser las particiones para climas cálidos?



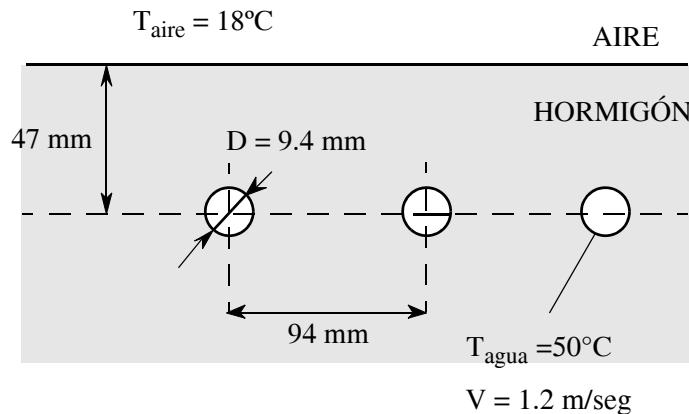
7. Un tubo horizontal de 1 m de diámetro pierde 200 W/m por convección natural cuando su superficie está a  $65\text{ }^{\circ}\text{C}$  y el aire ambiente a  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$  ¿Cuánto pierde otro tubo horizontal de  $D = 0.7\text{ m}$  cuya superficie alcanza  $142\text{ }^{\circ}\text{C}$  en el mismo ambiente? Ignorar la radiación y considerar constantes las propiedades del aire (que entonces no se necesitan para nada).

---

**Problemas**

---

8. Se introduce agua a  $T_{\text{agua}} = 50\text{ }^{\circ}\text{C}$  en los tubos mostrados en la figura, con una velocidad  $V = 1.2\text{ m/seg}$ . Los tubos son de cobre, de diámetro  $D = 9.4\text{ mm}$  y espesor despreciable, y están empotrados en una losa de hormigón de una gran sala, con sus centros a  $47\text{ mm}$  por debajo de la superficie de hormigón.



Calcular:

- La temperatura superficial del hormigón  $T_s$ , si hay aire en calma  $T_{\text{aire}} = 18\text{ }^{\circ}\text{C}$  adyacente a la superficie y el recinto está a la misma temperatura. Suponer en este apartado que la temperatura del agua permanece constante y su flujo está completamente desarrollado.
- El flujo de calor en estas condiciones.
- El cambio de temperatura global del agua por metro de tubería. Según el resultado comenta si la suposición del caso a) es correcta o no.

Propiedades (se pueden considerar constantes):

$\lambda_{\text{hormigón}}$	=	0.93 W/m K	$Gr_{\text{Laire}}$	=	$11.275 \times 10^7$
$c_{p\text{agua}}$	=	4181 J/kg K	$c_{p\text{aire}}$	=	1004 J/kg K
$\lambda_{\text{agua}}$	=	0.640 W/m K	$\lambda_{\text{aire}}$	=	$2.63 \times 10^{-3}$ W/m K
$\rho_{\text{agua}}$	=	988 kg/m <sup>3</sup>	$\rho_{\text{aire}}$	=	1.205 kg/m <sup>3</sup>
$\mu_{\text{agua}}$	=	$5.481 \times 10^{-4}$ Pa·s	$\mu_{\text{aire}}$	=	$18.17 \times 10^{-6}$ Pa·s
$Pr_{\text{agua}}$	=	3.58	$Pr_{\text{aire}}$	=	0.707

---

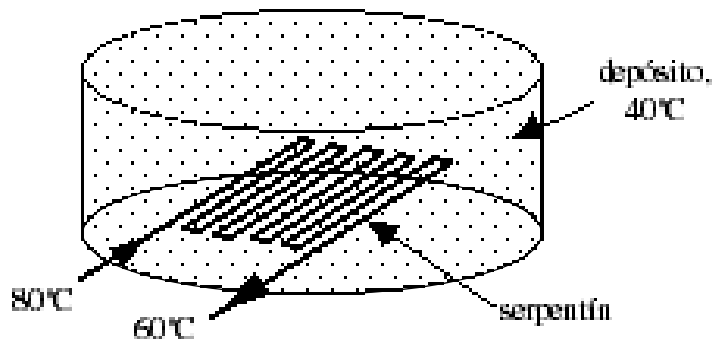
**Problemas**

---

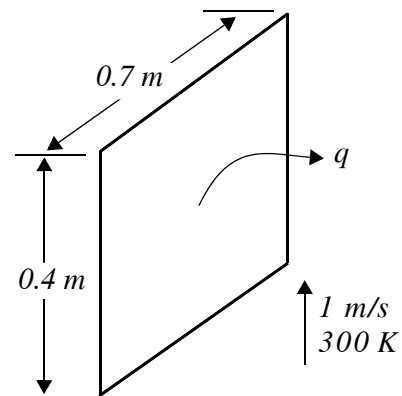
9. Se quiere mantener la temperatura de un depósito de agua a  $40\text{ }^{\circ}\text{C}$ , sabiendo que se pierde calor a razón de  $2300\text{ W}$ . Para ello se va a introducir un serpentín de cobre, cuyas características son  $\lambda = 200\text{ W/m K}$ , radio interior  $8\text{ mm}$  y espesor  $1\text{ mm}$ , por el que circulará agua caliente, que entra a  $80\text{ }^{\circ}\text{C}$  y deseamos que salga a  $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Se desea calcular la longitud de tubo a introducir, así como el caudal de agua caliente.

Datos para el agua:  $\mu = 4.7 \times 10^{-4}\text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $\rho = 983.3\text{ kg/m}^3$ ,  $c_p = 4180\text{ J/kg K}$ ,  
 $\beta = 0.437 \times 10^{-3}\text{ K}^{-1}$ ,  $\lambda = 0.654\text{ W/m K}$ .

Nota: para el cálculo de  $Gr$ , considerar  $(T_s - T_{\infty}) = 14\text{ }^{\circ}\text{C}$ .



10. Los costados de un equipo electrónico son placas de aluminio de  $70\text{ cm}$  de ancho por  $40\text{ cm}$  de altura que absorben todo el calor disipado en su interior. Su temperatura no debe ser superior a  $340\text{ K}$ . Si se hace pasar sobre las placas una corriente de aire a  $300\text{ K}$  que fluye hacia arriba a velocidad lenta de  $1\text{ m/s}$ , calcular la potencia que cada placa disipa por transferencia de calor convectiva.



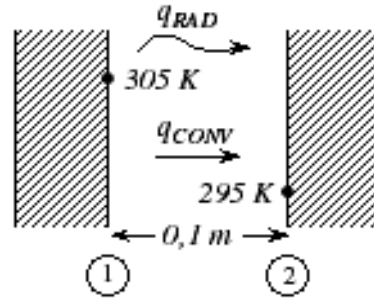
---

**Problemas**


---

**11.** Un muro doble vertical de 3 m de altura está provisto de una cámara de aire de 10 cm de espesor.

- a) Calcular el coeficiente de transferencia de calor por convección  $\bar{h}$ , cuando las caras internas del muro están a 305 K y 295 K, respectivamente y la presión es de 1 atm.



- b) Comparar la pérdida de calor convectiva con la pérdida por radiación a través de la cámara de aire. Las paredes de la cámara se pueden considerar negras.
- c) Si la cámara se rellena con fibra de vidrio, que variación sufren las pérdidas de calor.
- d) Se plantea otra de reducir las pérdidas cubriendo las paredes de la cámara con papel de aluminio de  $\varepsilon = 0.04$ . Si el factor  $F_{12} = \varepsilon/(2 - \varepsilon)$ , que variación sufren en este caso las pérdidas de calor.

**12.** El agua contenida en un gran tanque se calienta mediante cuatro tubos cilíndricos horizontales de 10 cm de diámetro externo, sumergidos en el agua, por los que circula vapor. La temperatura del agua es de 316 K y la de la superficie externa de los tubos 366 K. Suponiendo que los tubos están suficientemente distanciados entre sí, de tal forma que las corrientes de convección no se interfieran unas a otras, calcular:

- a) El coeficiente de transmisión de calor de los tubos al agua.  
 b) El flujo de calor aportado.

**Datos:** Propiedades del agua a varias temperaturas

	283 K	305.2 K	321.9 K	344.1 K	366.3 K
$\mu$ / (Pa·s)	$1.31 \times 10^{-3}$	$7.65 \times 10^{-4}$	$5.62 \times 10^{-4}$	$4.01 \times 10^{-4}$	$3.06 \times 10^{-4}$
$\rho$ / (kg/m <sup>3</sup> )	999.2	995	988.8	977.3	963.2
$c_p$ / (kJ/kg K)	4.195	4.174	4.174	4.186	4.204
$\lambda$ / (W/m K)	0.585	0.623	0.644	0.665	0.678
$\beta$ (K <sup>-1</sup> )	$1.18 \times 10^{-4}$	$2.92 \times 10^{-4}$	$4.42 \times 10^{-4}$	$6.01 \times 10^{-4}$	—

---

**Problemas**

---

- 13.** En una cavidad vertical consistente en dos placas paralelas cuadradas de 0.6 m de lado y separadas por una distancia  $\delta = 0.05$  m hay contenido aire a presión atmosférica. Las temperaturas de las placas caliente y fría son respectivamente  $T_c = 380$  K y  $T_f = 320$  K. Comparar el número de Nusselt para la convección interior natural para diversas correlaciones existentes (ecs. 9.50).

---

**Problemas**

---

---

## **CAPÍTULO 10**

# **Convección bifásica**

---

### **Introducción**

En muchas situaciones reales se aprovecha la gran capacidad de absorber y ceder calor que tienen las sustancias al cambiar de fase, particularmente los fluidos. Dado que éstos, objeto de estudio en convección, comprenden gases y líquidos, en este capítulo se abordan los cambios de fase entre ambos, es decir, la condensación y la ebullición. Los mecanismos detallados del cambio de fase son complicados y no se abordan en este texto. El que tenga interés puede consultar la bibliografía especializada [1], [2], [3].

El estudio se aborda desde modelos más sencillos y prácticos y empieza por la condensación, por ser un fenómeno más sencillo de entender, donde existe un modelo consolidado y asequible que explica bien los resultados de muchas situaciones.

Además el mismo modelo se aplica al estudio de ciertos casos de ebullición, lo que justifica todavía más el hecho de explicar ésta en segundo lugar.

### **Condensación**

---

#### **Mecanismos físicos**

La condensación de un vapor se produce al entrar en contacto con un medio a una temperatura inferior a la de saturación. A nivel de aplicación, el medio frío más habitual es una superficie, y a ellas se les dedica la atención en esta sección.

Según sea la forma en que condensa el vapor sobre la superficie se habla de condensación en película o en gotas; la primera es la situación habitual y la segunda la excepcional, dedicándole a esta última un breve apartado al final. La condensación en película consiste esencialmente en la formación de una capa líquida (condensado) entre pared y vapor, que desliza por gravedad. Basándose en este hecho principal, Nusselt elabora su modelo [4] en el año 1916 estudiando el caso arquetípico de una placa vertical.

### **Modelo de Nusselt para condensación sobre una placa plana vertical**

Este modelo desarrolla sus cálculos a partir de unas hipótesis [4], [5], que se listan a continuación, y que conducirán a obtener el coeficiente convectivo para este caso, así como otros resultados interesantes. Un esquema del modelo se presenta en la figura 10.1, mientras que en la figura 10.2 se representa un modelo más acorde con la realidad.

#### **Hipótesis del modelo**

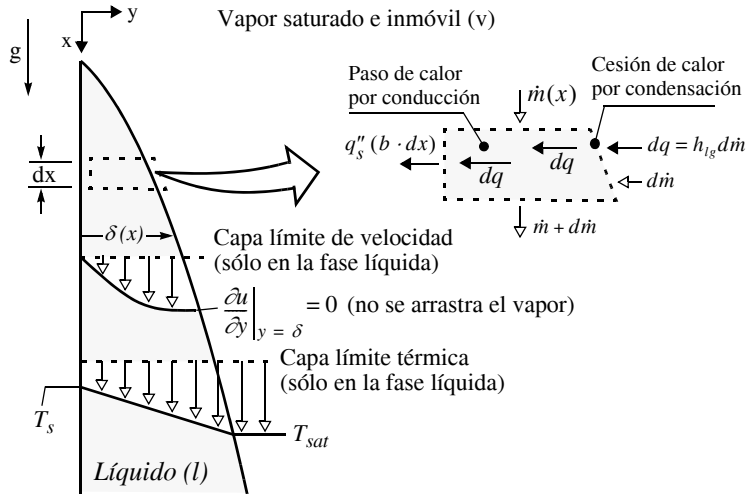
1. La pared se mantiene a una temperatura fija, inferior a la de saturación del vapor,  $T_s < T_{\text{sat}}$ , y está lisa y limpia.
2. El condensado cae laminarmente, sin ondulaciones en la superficie de separación con el vapor y a baja velocidad. Su aceleración se supone despreciable, lo que quiere decir que se desprecian las fuerzas de inercia en la ecuación del momento.
3. Las propiedades físicas del condensado\* se suponen constantes y se evalúan a la temperatura media  $T_p = (T_s + T_{\text{sat}})/2$ .
4. El vapor está saturado a una temperatura,  $T_{\text{sat}}$ , constante por lo que la transferencia de calor en la intercara vapor–condensado no se produce por conducción desde la masa del vapor sino por condensación, es decir, por difusión del vapor al condensado. Este mecanismo presenta una resistencia despreciable al paso del calor frente a la de la película de condensado.
5. La transferencia de calor y momento por advección en la capa de condensado es despreciable, debido a la baja velocidad de la misma, por lo que la transfer-

---

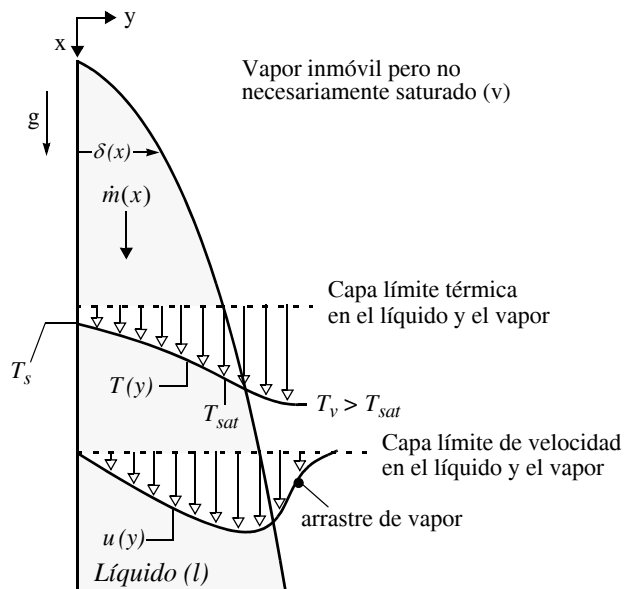
\*. A lo largo de este capítulo se distinguen las propiedades del condensado con el subíndice “l” y las del vapor con el subíndice “v”.

encia de calor en la capa líquida es por conducción pura y por tanto la distribución de temperatura en la película del condensado es lineal.

**FIGURA 10.1** Condensación sobre una placa plana vertical según el modelo de Nusselt.



**FIGURA 10.2** Modelo más próximo a la situación real de la condensación sobre una placa plana vertical.



---

**Convección bifásica**

---

6. El vapor se supone estacionario (quieto) o con baja velocidad, tomándose despreciables los esfuerzos cortantes entre condensado y vapor  $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=\delta} = 0$ .
7. De las hipótesis sexta y cuarta se deduce que no se van a considerar las capas límites hidráulica y térmica en el vapor.

**Desarrollo del modelo**

La ausencia de aceleración implica que en la ecuación del momento en el eje x se toma  $(Du/Dt) = 0$ . Como además  $v = w = 0$  y se considera la situación estacionaria

$$\frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Consecuentemente se desprecia la variación de u con x.

Además, según las aproximaciones de capa límite  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ , quedando la ecuación del momento en el eje X (1ª ecuación de Navier–Stokes)

$$\rho_1 g - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (10.1a)$$

Las ecuaciones del momento en los ejes Y y Z se reducen a

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (10.1b)$$

$$y \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (10.1c)$$

de donde la presión solo va a depender de x. Esta dependencia se puede obtener resolviendo la ecuación de Navier–Stokes en el eje X en la zona de vapor. Como el vapor está quieto se tiene que  $u = v = w = 0$ , y dicha ecuación se reduce en esta zona a  $\rho_v g = \frac{\partial p}{\partial x}$ . La Ec. (10.1a) queda

$$\mu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g(\rho_1 - \rho_v) \quad (10.2)$$

---

**Condensación**

---

y con las condiciones de contorno que le corresponden, según la condición de no deslizamiento y la hipótesis sexta

$$u(y=0) = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0, \quad (10.3)$$

la solución se obtiene fácilmente, resultando

$$u(y) = \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} \delta^2 \left[ \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \quad (10.4)$$

El caudal de condensado que atraviesa una sección, perpendicular a la placa, de anchura  $b$  en un punto  $x$ , vale:

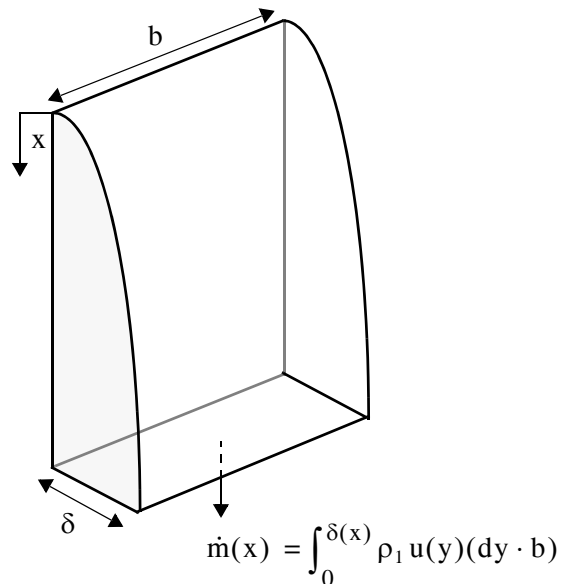
$$\dot{m}(x) = \int_0^{\delta(x)} \rho_l u(y) (dy \cdot b)$$

Como la anchura  $b$  es indefinida se maneja el caudal por unidad de anchura

$$\Gamma(x) \equiv \frac{\dot{m}}{b} = \int_0^{\delta(x)} \rho_l u \, dy \quad (10.5)$$

---

**FIGURA 10.3** Esquema para calcular el caudal de condensado formado sobre la placa vertical.



---

**Convección bifásica**

---

En la Ec. (10.5) se sustituye la expresión (10.4) que da el perfil de velocidad y se llega a

$$\Gamma(x) \equiv \frac{g\rho_l(\rho_l - \rho_v)\delta^3}{3\mu_l} \quad (10.6)$$

Para poder calcular el caudal  $\Gamma$  y el espesor de la película  $\delta$  es preciso hacer un balance de energía en un elemento de altura diferencial  $dx$  de la película de condensado, según se ve en la figura 10.4. El balance comporta los siguientes pasos:

1. Según la hipótesis cuarta, en la interfase líquido–vapor el calor se transfiere por condensación, es decir,

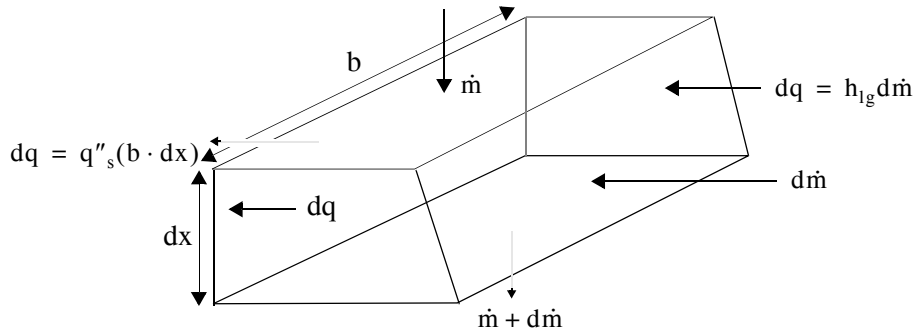
$$dq = h_{lg} d\dot{m}. \quad (10.7)$$

2. Según la hipótesis quinta los efectos de la advección son despreciables, el calor transferido en la intercara líquido–vapor es igual al transferido a la superficie, es decir,

$$dq = q''_s (b \cdot dx) \quad (10.8)$$

---

**FIGURA 10.4** Volumen elemental sobre la película de condensado para la realización del balance de energía.



3. Como la transferencia de calor en la capa de condensado es por conducción pura y además la distribución de temperaturas en ella es lineal, la ley de Fourier da

$$dq = \lambda_1 (b \cdot dx) \frac{T_{\text{sat}} - T_s}{\delta}. \quad (10.9)$$

Igualando las ecuaciones (10.7) y (10.9)

$$h_{lg} d\dot{m} = \lambda_1 (b \cdot dx) \frac{T_{sat} - T_s}{\delta} \Rightarrow \frac{d\Gamma}{dx} = \frac{\lambda_1 (T_{sat} - T)}{h_{lg} \delta} \quad (10.10)$$

Diferenciando (10.6) respecto a  $x$  e igualando a (10.10) se obtiene

$$\delta^3 d\delta = \frac{\lambda_1 \mu_1 (T_{sat} - T_s)}{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) h_{lg}} dx$$

que integrada con la condición de contorno  $\delta(x=0) = 0$  resulta

$$\delta = \left[ \frac{4 \mu_1 \lambda_1 (T_{sat} - T_s)}{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) h_{lg}} x \right]^{1/4} \quad (10.11)$$

Una mejora a este resultado la obtuvieron Nusselt [4] y Rohsenow [6] incorporando los efectos del subenfriamiento del líquido (piénsese que la temperatura media del condensado es menor que la de saturación), definiendo un calor latente modificado

$$h'_{lg} = h_{lg} + 0.68 c_{p,l} (T_{sat} - T_s) = h_{lg} (1 + 0.68 Ja), \quad (10.12)$$

$$\text{donde } Ja \equiv \frac{c_{p,l} (T_{sat} - T_s)}{h_{lg}} \text{ es el número de Jakob.} \quad (10.13)$$

La consideración de otros aspectos en el modelo de Nusselt se encuentra en Sparrow y Gregg [7].

Por otro lado  $q''_s = \lambda_1 \frac{T_{sat} - T_s}{\delta}$  por la conducción a través de la película de condensado, expresando  $q''_s$  en los términos de la convección  $q''_s = h(T_{sat} - T_s)$ , resulta  $h = \frac{\lambda_1}{\delta}$ .

Sustituyendo  $\delta$  de (10.11) e incorporando  $h'_{lg}$  se tiene finalmente

$$h_x = \left[ \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) \lambda_1^3 h'_{lg}}{4 \mu_1 (T_{sat} - T_s) x} \right]^{1/4} \quad (10.14)$$

---

### Convección bifásica

---

Para obtener un valor promedio de  $h$  en toda la placa, no hay más que integrar

según  $\bar{h}_L = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx$ , resultando

$$\bar{h}_L = 0.943 \left[ \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) \lambda_l^3 h'_{lg}}{\mu_l (T_{sat} - T_s) L} \right]^{1/4} \quad (10.15)$$

Cálculo de **propiedades**: Las del líquido en  $T_p$  (Hipótesis 3ª); las del vapor en  $T_{sat}$  (Hipótesis 4ª);  $h'_{lg}$  en  $T_{sat}$  (Hipótesis 4ª).

**Nota importante**: El cálculo del condensado formado debe efectuarse según la expresión (10.16)

$$\dot{m} = \frac{q}{h'_{lg}} = \frac{\bar{h}_L A (T_{sat} - T_s)}{h'_{lg}} \quad (10.16)$$

### Introducción del número de Reynolds en la expresión de $\bar{h}_L$

En una geometría cualquiera el número de Reynolds viene dado por la expresión

$$Re = \frac{\rho u_m D_h}{\mu} = \frac{\dot{m} D_h}{A_c \mu} = \frac{4 \dot{m}}{P \mu} \quad (10.17)$$

donde  $P$  es el perímetro húmedo. En la placa vertical que se está considerando (ver figura 10.3)  $P = b$ , de manera que la definición del  $Re$  en condensación sobre placa vertical plana queda

$$Re = \frac{4 \dot{m}}{b \mu_l} = \frac{4 \Gamma}{\mu_l} \quad (10.18)$$

Si la placa tiene una altura  $L$ , el área de contacto placa-fluido vale  $A = Lb$  que, sustituida en la ecuación (10.16) y teniendo en cuenta la definición de  $\Gamma$ , ecuación (10.5), conduce a

$$\Gamma = \frac{\bar{h}_L L (T_{sat} - T_s)}{h'_{lg}} \quad (10.19)$$

---

## Condensación

---

Cambiando el grupo  $\frac{h'_{lg}}{(T_{sat} - T_s)L}$  de la ecuación (10.15) por  $\frac{\bar{h}_L}{\Gamma}$  según la ec. (10.19), se llega a

$$\bar{h}_L = 0.943 \left[ \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) \lambda_l^3}{\mu_l} \frac{\bar{h}_L}{\Gamma} \right]^{1/4} \quad (10.20)$$

Sustituyendo  $\Gamma$  por el número de Reynolds, según la relación (10.18), en (10.20) resulta

$$\bar{h}_L = 0.943 \left[ \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) \lambda_l^3}{\mu_l^2} \frac{4 \bar{h}_L}{Re_L} \right]^{1/4} \quad (10.21)$$

**Nota:** El subíndice L en  $Re_L$  indica que el caudal del condensado ( $\Gamma$  ó  $\dot{m}$ ) utilizado en el cálculo del número de Reynolds es el que hay al final de la placa ( $x = L$ ).

Finalmente, despejando  $\bar{h}_L$  en (10.21) se obtiene

$$\bar{h}_L = 1.47 \left[ \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) \lambda_l^3}{\mu_l^2} \right]^{1/3} Re_L^{-1/3} \quad (10.22)$$

Esta expresión es muy útil porque es similar a las utilizadas en convección forzada sin cambio de fase, donde  $Nu = f(Re)$ . Aquí no aparece el Nusselt propiamente dicho, sino una versión modificada de este número. Efectivamente, reagrupando términos en la ecuación anterior (10.22)

$$\frac{\bar{h}_L [\mu_l^2 / g \rho_l (\rho_l - \rho_v)]^{1/3}}{\lambda_l} \cong \frac{\bar{h}_L (v_l^2 / g)^{1/3}}{\lambda_l} = 1.47 Re_L^{-1/3} \quad (10.23)$$

Obsérvese que  $(v^2/g)$  tiene dimensiones de longitud y por tanto el miembro izquierdo de la ecuación anterior tiene la definición de un número de Nusselt. Esta presentación del resultado de la teoría de Nusselt sugiere la forma de las correlaciones a buscar cuando el régimen deje de ser laminar, lo que sucede para  $Re > 1800$ , momento en el que la teoría deja de tener validez.

### Cálculo del número de Reynolds

Cuando se empieza a resolver un problema de condensación, rara vez se conoce de partida el caudal de condensado formado y por ello no se puede determinar el número de Reynolds de la ecuación (10.18). Pero sin conocer el caudal se puede determinar este número utilizando los resultados de la teoría de Nusselt.

Efectivamente, para la placa plana vertical se puede utilizar la ecuación (10.18) conjuntamente con la ecuación (10.6) para dar

$$\text{Re} = \frac{4g\rho_1(\rho_1 - \rho_v)\delta^3}{3\mu_1^3} \quad (10.24)$$

Sustituyendo  $\delta$  de la Ec. (10.11) se tiene el valor de Re en cualquier punto x de la placa.

$$\text{Re} = \frac{4}{3} \left[ \frac{g\rho_1(\rho_1 - \rho_v)}{\mu_1^5} \right]^{1/4} \left[ \frac{4\lambda_1(T_{\text{sat}} - T_s)}{h'_{lg}} x \right]^{3/4} \quad (10.25)$$

Para asegurarse que se cumplen las hipótesis de la teoría de Nusselt debe calcularse Re en el extremo de la placa que es donde su valor es máximo y comprobar si es o no menor que el valor de transición al régimen turbulento.

## Aplicación del modelo de Nusselt a otras geometrías

### Condensación sobre tubos verticales

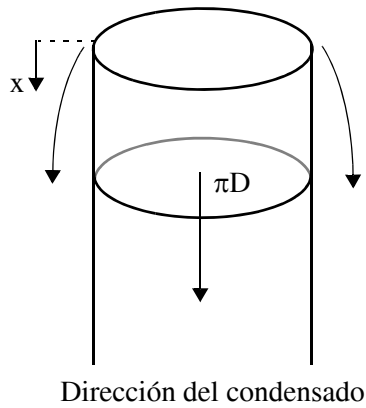
En la condensación en el exterior o interior de cilindros verticales, los resultados de la placa vertical permanecen válidos si el radio del cilindro es mucho mayor que el espesor de la película de condensado [8] ( $R \gg \delta$ ). *La única diferencia es que ahora el perímetro húmedo P vale  $\frac{1}{4}D$ , y por tanto*

$$\Gamma = \frac{\dot{m}}{\pi D}$$

y

$$\text{Re} = \frac{4\dot{m}}{P\mu_1} = \frac{4\dot{m}}{\pi D\mu_1} = \frac{4\Gamma}{\mu_1}$$

**FIGURA 10.5** Perímetro húmedo del cilindro vertical.



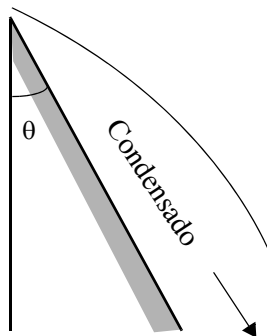
Las demás relaciones,  $\delta(x)$ ,  $h(x)$ ,  $\bar{h}_L$  ( $Re_L$ ),  $Re(\delta)$ ,  $Re(x)$ , **permanecen idénticas.**

### Condensación sobre placas inclinadas

Los resultados de la placa vertical se pueden utilizar [8] si se cambia  $g$  por  $g \cos \theta$ , con precaución para altos valores del ángulo  $\theta$  desde la vertical y resultando no válido para  $\theta = \pi/2$ .

---

**FIGURA 10.6** Esquema de condensación sobre una placa inclinada.

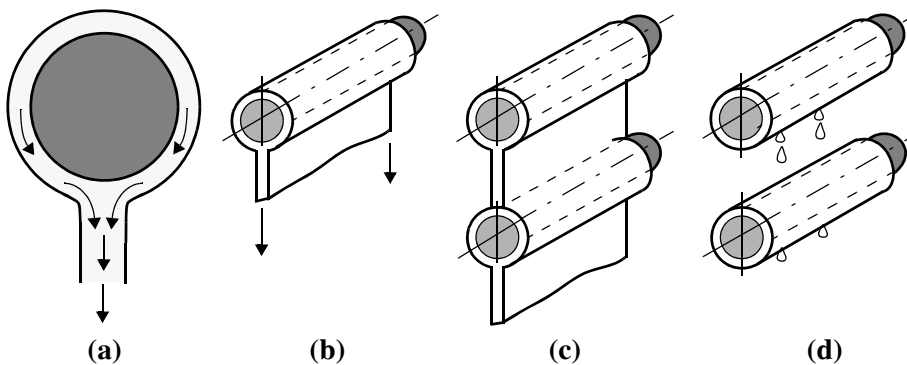


Condensación sobre geometrías radiales

a) Sobre un cilindro horizontal y una esfera.

La forma que tienen las películas de condensado se aprecia en la figura 10.7.

**FIGURA 10.7** Condensación en película sobre (a) una esfera, (b) un cilindro horizontal, (c) una columna vertical de cilindros horizontales con una película continua de condensado, y (d) con una película que gotea.



El propio Nusselt [4] aplicó su modelo al caso frecuente del cilindro horizontal y obtuvo una expresión para  $\bar{h}$ , mejorada después por Sparrow y Gregg [9] y Chen [10]. Dhir y Lienhard la aplicaron también a una esfera [11]

$$\bar{h}_D = C \left[ \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) \lambda_l^3 h'_{lg}}{\mu_l (T_{sat} - T_s) D} \right]^{1/4} \quad (10.26)$$

C es igual a 0.815 para la esfera y 0.728 para el cilindro. D es el diámetro del cilindro o la esfera.

El **caso del cilindro** tiene gran aplicación industrial e interesa relacionar  $\bar{h}_D$  con el caudal de condensado y el número de Reynolds.

Como el caudal de condensado por unidad de longitud del cilindro está relacionado con  $\bar{h}_D$  por

$$\Gamma = \frac{\dot{m}}{L} = \frac{\bar{h}_D \pi D L (T_{sat} - T_s) / h'_{lg}}{L} = \frac{\bar{h}_D (T_{sat} - T_s) \pi D}{h'_{lg}} \quad (10.27)$$

sustituyendo, análogamente al caso de la placa plana, resulta

$$\bar{h}_D = 0.961 \left[ \frac{g\rho_1(\rho_1 - \rho_v)\lambda_1^3}{\mu_1^2} \right]^{1/3} \left[ \frac{\mu_1}{\Gamma} \right]^{1/3} \quad (10.28)$$

Para el caso de un cilindro horizontal de longitud L

$$P = 2L \Rightarrow Re = \frac{2\Gamma}{\mu_1} \quad (10.29)$$

Sustituyendo (10.29) en (10.28) queda

$$\bar{h}_D = 1.21 \left[ \frac{g\rho_1(\rho_1 - \rho_v)\lambda_1^3}{\mu_1^2} \right]^{1/3} Re^{-1/3} \quad (10.30)$$

Comparando las expresiones (10.15) (cilindro vertical) y (10.26) (cilindro horizontal), la relación de los coeficientes  $\bar{h}$  en ambos casos da

$$\frac{\bar{h}_{hor}}{\bar{h}_{vert}} = 0.773 \left[ \frac{L}{D} \right]^{1/4} \quad (10.31)$$

considerando ambos cilindros iguales, es decir, de igual diámetro D y longitud L.

Para que ambos coeficientes sean iguales se debe cumplir  $L = 2.80 D$ , pero en un caso real la relación longitud–diámetro es mucho mayor. Por ejemplo en un tubo real de 4.88 m de largo y 1.9 cm de diámetro la ecuación (10.31) da

$$\bar{h}_{hor} = 3.09 \bar{h}_{vert}$$

Por este motivo las disposiciones de tubos horizontales son generalmente preferidas a las de tubos verticales en el diseño de condensadores, aunque en la práctica la diferencia no sea tan grande y para ciertas aplicaciones haya que considerar otros factores.

*No hay que olvidar que el límite de validez de este desarrollo está dentro del régimen laminar, es decir con  $Re < 1800$ . El cálculo de  $Re$  se puede hacer di-*

rectamente sin pasar por el cálculo del caudal de condensado, de las expresiones (10.26), (10.27) y (10.29) llegando a

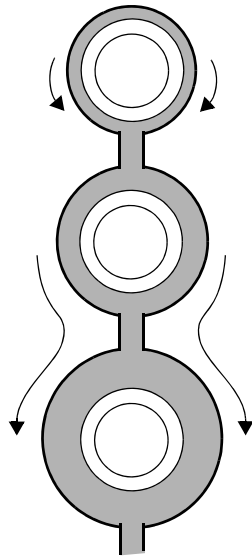
$$\text{Re} = 4.58 \left[ \frac{g\rho_l(\rho_l - \rho_v)\lambda_l^3(T_{\text{sat}} - T_s)^3 D^3}{\mu_l^5 h'_{lg}} \right]^{1/4} \quad (10.32)$$

b) Condensación sobre una columna vertical de tubos horizontales

Como se aprecia en la figura 10.8 la capa de condensado va aumentando su espesor conforme desciende por la columna, con lo que  $\bar{h}_D$  va a disminuir en el mismo sentido descendente.

---

**FIGURA 10.8** Engrosamiento de la película de condensado al descender por una columna de tubos horizontales.



La fórmula (10.27) ahora tomará la forma

$$\Gamma = \frac{\bar{h}_{D,N}(T_{\text{sat}} - T_s)N\pi D}{h'_{lg}} \quad (10.33)$$

siendo  $N$  el número de cilindros de la columna y  $\bar{h}_{D,N}$  el coeficiente promedio en todos los cilindros.

---

## Condensación

---

La **hipótesis** que se hace es que la relación entre el coeficiente de convección y el caudal de condensado  $\Gamma$  es la misma que para un sólo cilindro, es decir, se considera válida la formula (10.28).

Llevando la ecuación (10.33) a la (10.28) se tiene

$$\bar{h}_{D,N} = 0.728 \left[ \frac{g\rho_l(\rho_l - \rho_v)\lambda_l^3 h'_{lg}}{N\mu_l(T_{sat} - T_s)D} \right]^{1/4} \quad (10.34)$$

Comparando las ecuaciones (10.34) y (10.26) resulta

$$\bar{h}_{D,N} = \frac{\bar{h}_D}{N^{1/4}} \quad (10.35)$$

relación que traduce la disminución de  $\bar{h}$  al aumentar el número de tubos en la columna. En la práctica el condensado no fluye formando una capa continua sino goteando (ver figura 10.7d) lo que aumenta  $\bar{h}_{D,N}$  al disminuir el espesor de las capas de condensado y provocar la turbulencia. Por ello la relación  $\bar{h}_{D,N} = \bar{h}_D/N^{1/6}$  reproduce mejor los resultados experimentales [12].

**Nota:** La relación entre  $\bar{h}_{D,N}$  y  $Re$  es la misma que la (10.30) para un sólo tubo, al haberse impuesto que la dependencia de  $\bar{h}_{D,N}$  con el caudal  $\Gamma$  es la misma que para un solo cilindro.

### c) Condensación sobre tubos inclinados.

Si la relación entre la longitud  $L$  del tubo y su diámetro  $D$ , es mayor que  $1.8 \tan\theta$ , las ecuaciones anteriores pueden aplicarse a tubos inclinados, sustituyendo  $g$  por  $g \cdot \cos \theta$  y siendo  $\theta$  el ángulo que forma el tubo con la horizontal.

## Régimen no laminar

Según la Ec. (10.22)  $\bar{h}_L$  disminuye con  $Re_L$ . Sin embargo Roshenow y otros [13] vieron que  $\bar{h}_L$  empezaba a crecer con  $Re_L$  a partir de  $Re_L \approx 600 - 1800$  lo que indicaba la transición a la turbulencia y el límite de validez del modelo de Nusselt. Este valor se alcanza si la placa es suficientemente larga.

Estudios posteriores detectaron que antes de ese límite empezaban a producirse ondulaciones en la superficie del condensado (ver figura 10.9), por lo que convenía corregir algo los resultados de Nusselt en esa zona. Las correlaciones recomendadas [11] son:

---

**Convección bifásica**

---

- Ecuación de Kutateladze (1963)

$$\frac{\bar{h}_L (v_1^2/g)^{1/3}}{\lambda_1} = \frac{Re_L}{1.08 Re_L^{1.22} - 5.2} \quad (10.36)$$

para  $30 < Re_L < 1800$ , región laminar ondulada

- Ecuación de Labuntsov (1957)

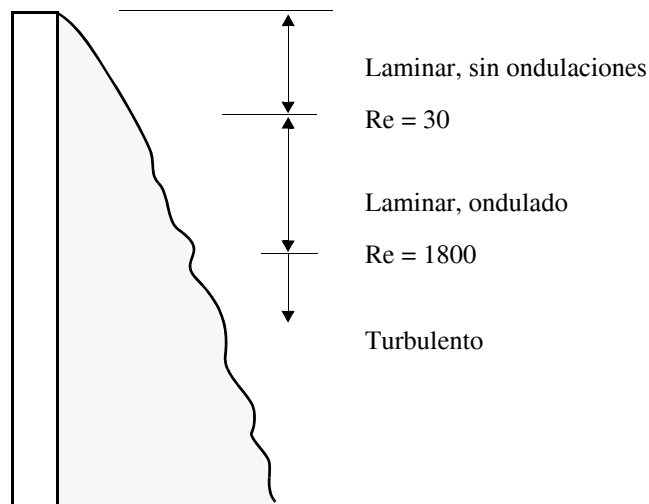
$$\frac{\bar{h}_L (v_1^2/g)^{1/3}}{\lambda_1} = \frac{Re_L}{8750 + 58 Pr_1^{-0.5} (Re_L^{0.75} - 253)} \quad (10.37)$$

para  $Re_L > 1800$ , región turbulenta

Estas correlaciones ya dan los valores promedio para toda la placa, teniendo en cuenta los diversos regímenes.

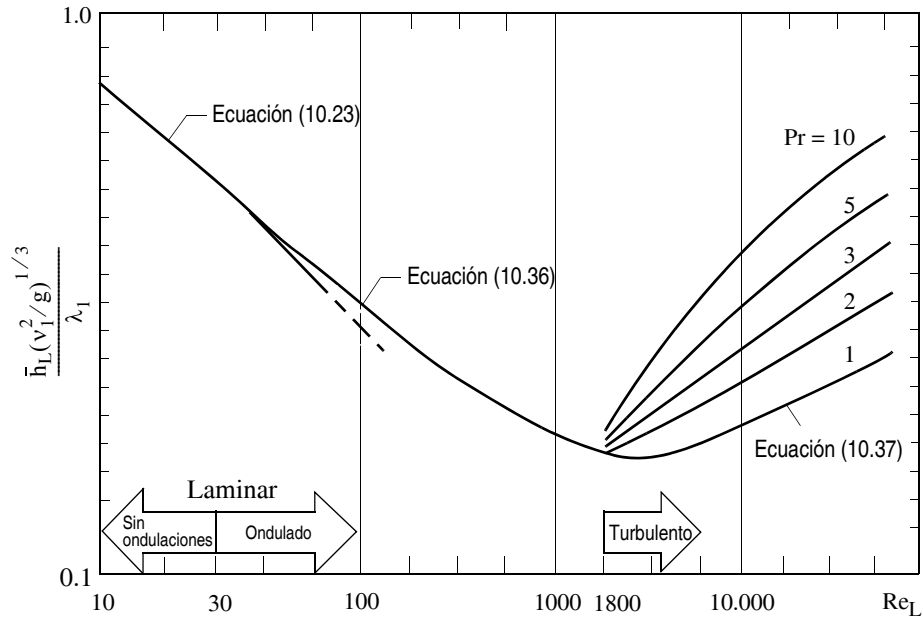
---

**FIGURA 10.9** Regímenes de la película de condensado según el valor del número de Nusselt.



En la figura 10.10 se observa la forma de las ecuaciones para las tres regiones, cuyas tendencias se han comprobado experimentalmente.

**FIGURA 10.10** Número de Nusselt modificado para condensación sobre una placa vertical.



### Condensación forzada

Todas las situaciones consideradas anteriormente en régimen **laminar** se han derivado del modelo de Nusselt, donde el movimiento de la capa del condensado queda gobernado por la gravedad y son, por tanto, casos semejantes a los de **convección natural**. En muchas situaciones reales, el vapor es forzado a circular por el condensador, arrastrando la capa líquida y convirtiéndose el proceso en una convección mixta, mezcla de convección natural y forzada. En general, el efecto es de adelgazamiento de la capa de condensado y en un aumento consecuente del coeficiente de convección.

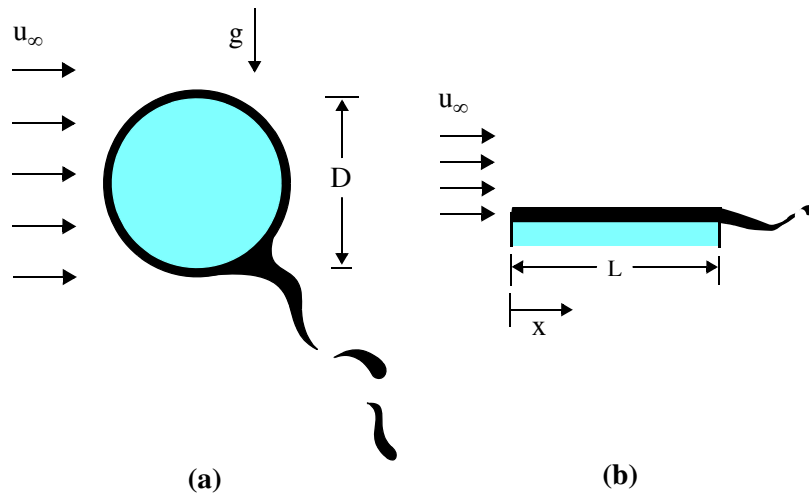
Un caso importante es el del cilindro horizontal en flujo cruzado (figura 10.11a), configuración muy frecuente en los condensadores. El coeficiente de convección depende tanto de la velocidad del vapor libre,  $u_\infty$ , como de la gravedad y viene dado por la siguiente expresión [14], válida para  $Re_D < 10^6$

$$\bar{Nu}_D \equiv \frac{\bar{h}_D D}{\lambda_1} = 0.64 Re_D^{1/2} \left[ 1 + \left( 1 + 1.69 \frac{gh'_{lg} \mu_1 D}{u_\infty^2 \lambda_1 (T_{sat} - T_s)} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (10.38)$$

donde el número de Reynolds se define de la forma habitual en flujo forzado,

$$Re_D \equiv \frac{u_\infty D}{\nu_1}$$

**FIGURA 10.11** Condensación de vapor en movimiento sobre: a) un cilindro horizontal en flujo cruzado, b) una placa plana horizontal paralela al flujo.



Para una corriente de vapor paralela a una placa plana horizontal (caso b de la figura 10.11) se propone en la bibliografía [15] la expresión local (10.39a)

$$Nu \equiv \frac{hx}{\lambda_1} = 0.436 Re_x^{1/2} \left[ \frac{1.508}{(1 + Ja/Pr_1)^{3/2}} + \frac{Pr_1}{Ja} \left( \frac{\rho_v \mu_v}{\rho_l \mu_l} \right)^{1/2} \right]^{1/3} \quad (10.39a)$$

que promediado se convierte en la correlación global (10.39b)

$$\bar{Nu}_L = \frac{\bar{h}_L L}{\lambda_1} = 0.872 Re_L^{1/2} \left[ \frac{1.508}{(1 + Ja/Pr_1)^{3/2}} + \frac{Pr_1}{Ja} \left( \frac{\rho_v \mu_v}{\rho_l \mu_l} \right)^{1/2} \right]^{1/3} \quad (10.39b)$$

comprobada para régimen laminar,  $10 < (\rho_l \mu_l / \rho_v \mu_v)^{1/2} < 500$  y  $0.01 < Ja/Pr_1 < 1$ .

Se define aquí  $Re_x \equiv \frac{u_\infty x}{\nu_1}$  y  $Re_L \equiv \frac{u_\infty L}{\nu_1}$  y el número de Jakob, Ja, como en la ecuación (10.13).

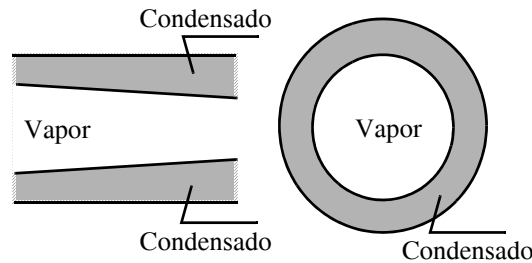
**Condensación en el interior de tubos**

Cuando el vapor condensa en el interior de tubos, como sucede en los aparatos de producción de frío y de aire acondicionado, siempre está en movimiento. Es por tanto un caso, particularmente importante y extendido, de condensación forzada.

En las correlaciones siguientes de este apartado,  $D$  significa el diámetro interno del tubo.

---

**FIGURA 10.12** Condensación anular dentro de un tubo con alta velocidad del vapor: perfil y sección.



Cuando la *velocidad del vapor* es suficientemente *alta* (figura 10.12), la orientación del tubo pierde importancia debido a que el efecto de la gravedad se vuelve despreciable. En este caso el régimen de circulación es anular (ver figura 10.12), y la expresión que propone Bejan [14], basándose en el trabajo de Chen y colaboradores [16], es la (10.40), donde las propiedades se calculan a  $T_{\text{sat}}$

$$\frac{\bar{h}_L D}{\lambda_1} = 0.0181 \text{Pr}_1^{0.65} \left( \frac{\mu_v}{\mu_1} \right)^{0.078} \left( \frac{\rho_1}{\rho_v} \right)^{0.39} \frac{\text{Re}_L^{0.2} \text{Re}_t^{0.7}}{1.25 + 0.39 \text{Re}_L / \text{Re}_t} \quad (10.40)$$

donde  $\text{Re}_L$  viene dado por la fórmula (10.18), siendo  $\Gamma(L)$  el caudal de condensado por unidad de perímetro húmedo (aquí  $P = \frac{1}{4}D$ ) calculado a una distancia  $L$  del comienzo de la condensación. Por otro lado, el llamado Reynolds terminal se define como  $\text{Re}_t \equiv 4 \frac{\dot{m} / \pi D}{\mu_1}$ , donde  $\dot{m}$  es el caudal másico total (vapor y condensado).

Por contra, si el *vapor circula más lentamente*, la condensación es consecuencia del efecto combinado de la gravedad y la velocidad y la orientación del tubo es muy importante. En el caso de *tubo horizontal* la condensación se efectúa en la forma indicada en la figura 10.13a. En la bibliografía se suele distinguir entre la parte superior del tubo, donde aparece una delgada película de condensado a la

---

**Convección bifásica**


---

que se le aplica la teoría de Nusselt, y la inferior, cuya película de condensado es mucho más gruesa y su coeficiente de convección muy inferior al de la parte superior y difícil de determinar, por lo que se desprecia

$$\bar{h}_{\text{superior}} = \beta \left[ \frac{g \rho_1 (\rho_1 - \rho_v) \lambda_1^3 h'_{lg}}{\mu_1 (T_{\text{sat}} - T_s) D} \right]^{1/4} \quad (10.41)$$

donde  $\beta = \beta(\theta)$  y  $\beta(\theta = 2\pi/3) \approx 0.84$

$$\bar{h} = \frac{\theta}{\pi} \bar{h}_{\text{sup}} + \frac{\pi - \theta}{\pi} \bar{h}_{\text{inf}} \cong \frac{\theta}{\pi} \bar{h}_{\text{sup}} \quad (10.42)$$

$\theta$  es difícil de determinar y se suele tomar en la bibliografía

$$\theta \approx 2\pi/3 \quad (10.43)$$

Las Ecs. (10.41), (10.42) y (10.43) conducen a la ecuación de Chato [17]

$$\bar{h}_D = 0.555 \left[ \frac{g \rho_1 (\rho_1 - \rho_v) \lambda_1^3 h'_{lg}}{\mu_1 (T_{\text{sat}} - T_s) D} \right]^{1/4} \quad (10.44)$$

con  $h'_{lg} = h_{lg} + \frac{3}{8} c_{p,1} (T_{\text{sat}} - T_s)$  y válido para  $Re_V = \left( \frac{\rho_v u_{m,v} D}{\mu_v} \right)_{\text{entrada tubo}} < 35000$ .

Con el subíndice v se refiere al estado de vapor.

Para la *posición vertical*, sólo se encuentran correlaciones sencillas para *vapor descendente* (figura 10.13b). En este caso el vapor circulante adelgaza por arrastre la película de condensado y mejora la transmisión de calor hacia el tubo frío. Chen y otros investigadores [16] ofrecen la siguiente fórmula según la versión de Bejan [14]

$$\frac{\bar{h}_L (v_1^2/g)^{1/3}}{\lambda_1} = \left[ Re_L^{-0.44} + (5.82 \times 10^{-6}) Re_L^{0.8} Pr_1^{1.3} + (3.27 \times 10^{-4}) \left( \frac{Pr_1^{1.3}}{D^2} \right) \left( \frac{v_1^2}{g} \right)^{2/3} \left( \frac{\mu_v}{\mu_1} \right)^{0.156} \left( \frac{\rho_1}{\rho_v} \right)^{0.78} \frac{Re_L^{0.47} Re_t^{1.4}}{(1.25 + 0.39 Re_L / Re_t)^2} \right]^{1/2} \quad (10.45)$$

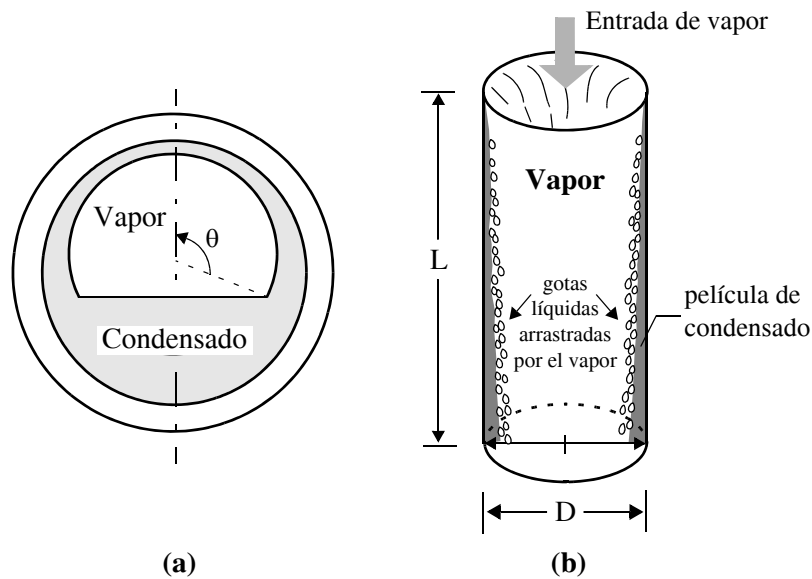
---

## Condensación

---

donde  $Re_L$  y  $Re_t$  y las propiedades se calculan exactamente igual que en el caso de vapor a alta velocidad, ecuación (10.40).

**FIGURA 10.13** (a) Condensación en un tubo horizontal con baja velocidad del vapor.  
(b) Condensación en un tubo vertical con flujo de vapor descendente.



Cuando el vapor *sube* por el interior de un tubo vertical, la situación se complica y es preciso acudir a la bibliografía especializada para encontrar alguna expresión [16].

### Condensación en gotas

Una condensación en gotas tal y como presenta la figura 10.14 es muy interesante ya que el contacto entre la pared fría y el vapor es directo en muchos puntos (sin película de condensado entre ambas) y por tanto el coeficiente de convección allí es mucho mayor (entre cinco y diez veces más que en condensación en película) resultando en promedio un valor de  $\bar{h}$  dos o tres veces mayor que para la condensación en película.

En general las condiciones que favorecen la formación de gotas son:

- Presencia de promotores (aceites y otras sustancias) de gotas.
- Superficies altamente pulimentadas.

---

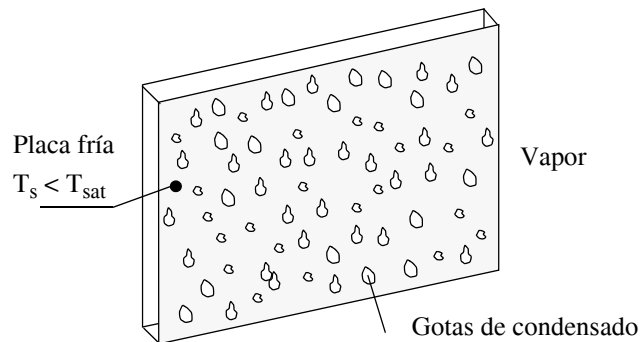
## Convección bifásica

---

Sin embargo en la práctica es difícil mantener durante un tiempo apreciablemente largo condiciones de condensación en gotas o bien si se consigue es a costa de un procedimiento muy caro (recubrimiento de la superficie con metales nobles) o de posibles efectos en el resto de la planta (adición periódica de promotores), por lo que de momento no tiene aplicación industrial apreciable.

---

**FIGURA 10.14** Condensación de vapor de agua en gotas en condiciones ideales.



Además los valores tan altos alcanzados para  $\bar{h}$  hacen que, en los intercambiadores de calor en que pudiera aparecer este fenómeno, existan otras resistencias térmicas mucho mayores y por tanto que tenga poca importancia práctica el conocimiento del  $\bar{h}$  de condensación para este caso.

Sin embargo existen estudios, la mayor parte para condensación de vapor de agua sobre superficies de cobre con presencia de agentes promotores. Para presiones cercanas a la atmosférica, se han obtenido las siguientes correlaciones [11]

$$\bar{h} = 51104 + 2044 T_s \quad (\text{W/m}^2 \text{ K}) \quad 22 \text{ }^\circ\text{C} < T_s < 100 \text{ }^\circ\text{C} \quad (10.46)$$

$$\bar{h} = 255510 \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad 100 \text{ }^\circ\text{C} < T_s \quad (10.47)$$

## Presencia de gases incondensables

Representa una resistencia térmica añadida por dificultar la difusión del vapor hacia la superficie del condensado y reduciendo notablemente el valor de  $\bar{h}$ . Por ello es imprescindible la purga de estos gases. Para hacerse una idea [18] de su efecto nocivo basta considerar que un 0.5% de masa de aire en el seno del vapor de agua puede reducir  $\bar{h}$  a la mitad y un 5% de masa de aire en vapor de agua puede reducir  $\bar{h}$  a la quinta parte.

Información más detallada aparece en las referencias [19] y [20].

## Ebullición

---

Antes de entrar en el estudio de este fenómeno conviene aclarar la diferencia entre dos formas muy distintas de producirse la **vaporización** (paso de un líquido a vapor).

<b>Evaporación</b>	es una vaporización <b>superficial</b> que conlleva fenómenos combinados de transporte de <b>calor</b> y <b>masa</b> .
<b>Ebullición</b>	es la vaporización <b>masiva</b> en el interior de un líquido cuando está en contacto con una superficie a temperatura $T_s$ superior a la de saturación del líquido, $T_{sat}$ ( $T_s > T_{sat}$ ).

El objeto de estudio de esta sección es este segundo fenómeno.

### Tipos de ebullición

Se distinguen dos clases distintas de ebullición en función de la velocidad del líquido.

<b>Natural o en piscina</b>	cuando el líquido está inicialmente inmóvil o se mueve muy lentamente. Es el caso de depósitos, pucheros, calderas piro-tubulares, etc...
<b>Forzada</b>	cuando el líquido se mueve a una velocidad apreciable. El caso principal es el de las calderas acuotubulares, donde el líquido (normalmente agua) se desplaza por el interior de tubos.

### Ebullición en piscina

La ebullición es un fenómeno complicado como puede apreciarse en la figura 10.15, donde se recoge la primera curva experimental que se obtuvo de este fenómeno debida al japonés Nukiyama [21]. En ella se puede apreciar una relación altamente no lineal entre el flujo de calor en la superficie y la diferencia de temperaturas entre la superficie y la de saturación, denominada exceso de temperatura,  $\Delta T_e = T_s - T_{sat}$ , y tomada como potencial que genera el flujo de calor entre la superficie y el líquido,  $q''_s$ .

---

## Convección bifásica

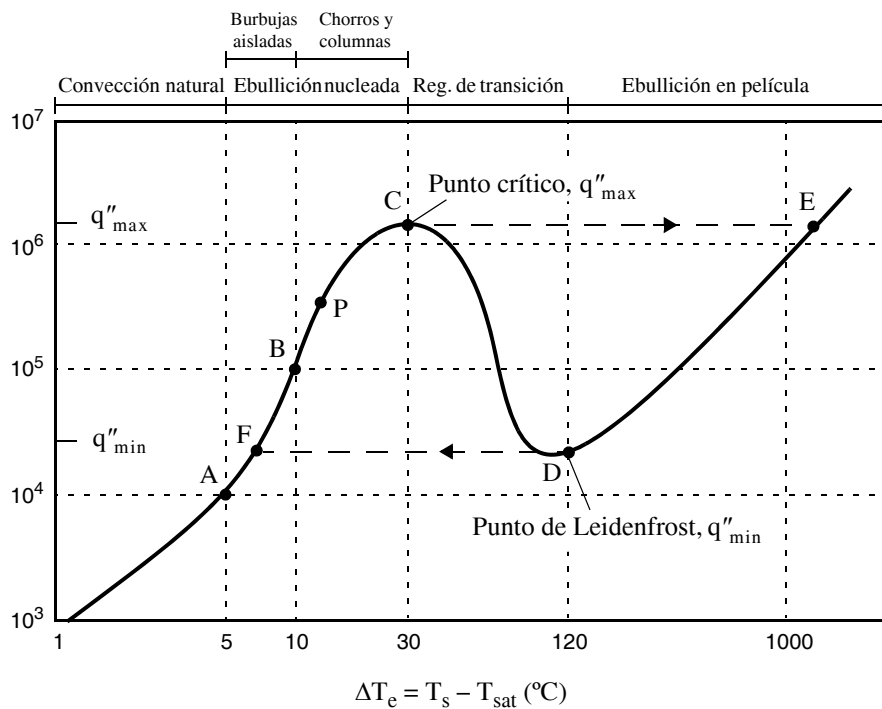
---

Las diversas regiones que aparecen son las siguientes:

- $\Delta T_e < \Delta T_{e,A} \approx 5 \text{ }^\circ\text{C}$ . Empiezan a aparecer burbujas que se **colapsan**\*, existiendo simplemente corrientes de convección **natural**.
- En el punto A comienza la ebullición propiamente dicha, manteniendo las burbujas su existencia.
- $\Delta T_{e,A} < \Delta T_e < \Delta T_{e,C} \approx 30 \text{ }^\circ\text{C}$ . Ebullición **nucleada**. Se forma una gran cantidad de burbujas, cuya agitación provoca un gran aumento del coeficiente de convección, que toma valores en torno a  $10^4 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ .
- A partir de B, las burbujas **interfieren**; y a partir de P, h disminuye.

---

**FIGURA 10.15** Curva de ebullición del agua a una atmósfera de presión (Nukiyama, [21], [22]).



---

\*. Sobre el mecanismo de formación y subsistencia de burbujas pueden consultarse las referencias [1], [23]–[25].

---

## Ebullición

---

- $\Delta T_{e,C} < \Delta T_e < \Delta T_{e,D} \approx 120 \text{ }^\circ\text{C}$ . Región de transición o de película metaestable [35]. Empieza a aparecer una capa de vapor en la superficie, que dificulta el paso del calor entre la superficie y el líquido.
- $\Delta T_{e,D} < \Delta T_e$ . Ebullición en **película**. La superficie está totalmente cubierta con una **película** de vapor y el calor pasa a través de ella por **conducción** principalmente y, para valores altos de  $T_s$ , también por **radiación**.

**IMPORTANTE:** Observar la posibilidad de destrucción del recipiente (transición brusca del punto C al E), así como la posibilidad de un colapso de la película (transición del punto D al F) si  $q''_s$  es la variable controlante (caso frecuente). Sobre los problemas de estabilidad en los fenómenos de ebullición pueden consultarse las referencias [26] y [27].

## Correlaciones para ebullición en piscina

### Ebullición nucleada

La correlación más encontrada en la bibliografía anglosajona es la de Rohsenow [28], válida para superficies limpias

$$q''_s = \mu_l h_{lg} \left[ \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma_l} \right]^{1/2} \left( \frac{c_{p_l} \Delta T_e}{C_{sf} h_{lg} Pr_l^k} \right)^3 \quad (10.48)$$

Es importante la presencia del grupo  $[\sigma_l/g(\rho_l - \rho_v)]^{1/2}$  directamente proporcional al diámetro de las burbujas al abandonar la superficie, que juegan el papel de dimensión característica del fenómeno [29]. Las propiedades para líquido (l) y vapor (v) se calculan en el punto de saturación ( $T_{sat}$  a p), k y  $C_{sf}$  son coeficientes que dependen de la superficie y del líquido, y están determinados experimentalmente; en la tabla 10.1 aparecen sus valores para combinaciones habituales de líquido y superficie.

Como  $q''_s$  es inversamente proporcional a  $h_{lg}^2$ , un aumento de la presión del líquido origina un aumento importante en el flujo de calor; ésto es cierto hasta presiones de aproximadamente 0.35 la presión crítica. La fuerte dependencia entre  $q''_s$  y  $\Delta T_e$  es debida a la influencia de la densidad de puntos de nucleación, que aparece explícitamente en la formulación de Yamagata [11]. Esto ha inducido a la búsqueda comercial de superficies especiales donde se consiguen aumentos de  $q''_s$  de más de un orden de magnitud (ver figuras 10.16 y 10.17)

---

**Convección bifásica**


---

$$q''_s = C \Delta T_e^a n^b \quad a \cong 1.2, b \cong \frac{1}{3}$$

$n$  es la densidad de puntos de nucleación y es proporcional a  $\Delta T_e^5$  ó  $\Delta T_e^6$ .

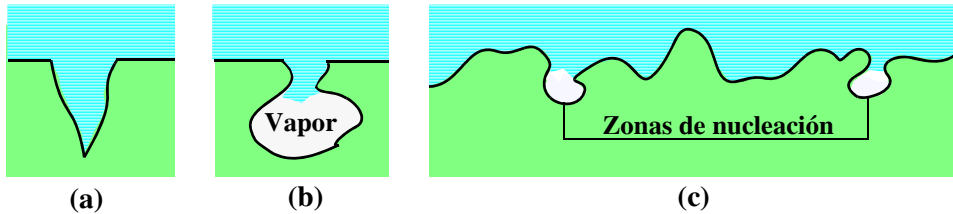
Otras correlaciones se pueden encontrar en la literatura científica rusa [30].

---

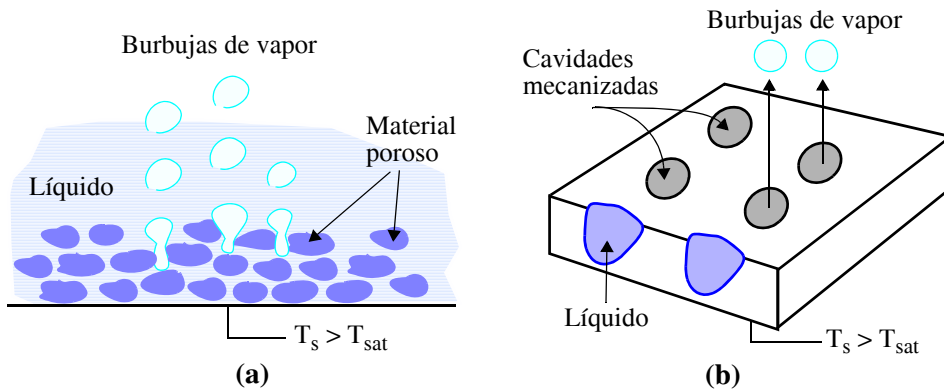
**TABLA 10.1** Constantes empíricas [14] para la correlación de ebullición nucleada de Rohsenow, ec. (10.48).

Combinación líquido–superficie	$C_{sf}$	$k$
Agua–cobre		
Pulido	0.013	1.0
Estriado	0.0068	1.0
Pulido con esmeril y tratado con parafina	0.015	1.0
Agua–acero inoxidable		
Rectificado químicamente	0.008	1.0
Decapado químicamente	0.013	1.0
Pulido mecánicamente	0.013	1.0
Agua–latón	0.006	1.0
Agua–níquel	0.006	1.0
Agua–platino	0.013	1.0
CCl <sub>4</sub> –cromo	0.013	1.7
Benceno–cromo	0.010	1.7
<i>n</i> –Pentano–cromo	0.015	1.7
<i>n</i> –Pentano–cobre		
Pulido con esmeril	0.0154	1.7
Desbastado con esmeril	0.0074	1.7
<i>n</i> –Pentano–níquel		
Pulido con esmeril	0.013	1.7
Alcohol etílico–cromo	0.0027	1.7
Alcohol isopropílico–cobre	0.0025	1.7
35% K <sub>2</sub> CO <sub>3</sub> –cobre	0.0054	1.7
50% K <sub>2</sub> CO <sub>3</sub> –cobre	0.0027	1.7
<i>n</i> –Butílico alcohol–cobre	0.0030	1.7

**FIGURA 10.16** Formación de lugares de nucleación. (a) Cavity húmeda sin vapor atrapado. (b) Cavity con vapor atrapado. (c) Perfil de una superficie rugosa.



**FIGURA 10.17** Superficies tratadas para aumento de la ebullición nucleada. (a) Capa de material poroso. (b) Cavidades reentrantes formadas mecánicamente.



**Flujo crítico de calor**

A partir de un análisis de estabilidad hidrodinámica, Zuber [31] predice los valores de los flujos de calor máximo y mínimo. Posteriormente sus expresiones fueron corregidas experimentalmente y modificadas para diversas geometrías por otros investigadores. En particular la correlación de Zuber para el flujo máximo o crítico fue adaptada por Lienhard y colaboradores a distintas geometrías resultando

$$q''_{max} = F(L') \frac{\pi}{24} \rho_v^{1/2} h_{1g} [\sigma g (\rho_l - \rho_v)]^{1/4} \tag{10.49}$$

$F(L')$  recoge el efecto de la geometría, siendo  $L' = L \sqrt{\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma}} = Bo^{1/2}$  donde  $Bo$  es el número de Bond. En la tabla 10.2 se presenta el valor de  $F(L')$  para geometrías comunes.

---

## Convección bifásica

---

**TABLA 10.2** Factor geométrico  $F(L')$  para calcular el flujo crítico de calor según la ecuación (10.49) [18], [32].

Geometría	$F(L')$	Anotaciones
Placa plana infinita mirando hacia arriba	1.14	$L' > 2.7$ ; $L$ es la anchura o diámetro
Cilindro horizontal	$0.89 + 2.27e^{-3.44\sqrt{L'}}$	$L' > 0.15$ ; $L$ es el radio del cilindro
Esfera grande	0.84	$L' > 4.26$ ; $L$ es el radio de la esfera.
Esfera pequeña	$\frac{1.734}{(L')^{1/2}}$	$0.15 < L' < 4.26$ ; $L$ es el radio de la esfera
Cuerpo ancho finito	$\sim 0.90$	$L' > 4$ ; $L = \text{volumen}/\text{área superficial}$

Todas las propiedades (vapor, líquido y  $h_{lg}$ ) se calculan en  $T_{\text{sat}}$ .

### Flujo mínimo de calor

Si  $q''_s < q''_{\text{min}}$ , la película se colapsa y hay una vuelta brusca al régimen nucleado. El coeficiente numérico de la expresión de Zuber [31] ( $\pi/24$ ) fue corregido experimentalmente por Berenson [33], adoptando el valor que aparece en la ec. (10.50) para grandes placas horizontales.

$$q''_{\text{min}} = 0.09\rho_v h_{lg} \left[ \frac{g\sigma(\rho_l - \rho_v)}{(\rho_l + \rho_v)^2} \right]^{1/4} \quad (10.50)$$

Esta ecuación es muy imprecisa y sus propiedades se calculan de la misma manera que para  $q''_{\text{max}}$ .

Para cilindros horizontales puede consultarse la referencia [34].

### Ebullición en película

Dada la semejanza de esta situación con la de condensación en película, Bromley [35] aplica el modelo de Nusselt a este caso obteniendo la expresión siguiente para cilindros y esferas [11]

$$\bar{h} = C \left[ \frac{\lambda_v^3 g(\rho_l - \rho_v) h'_{lg}}{\nu_v (T_s - T_{\text{sat}}) D} \right]^{1/4} \quad (10.51)$$

---

## Ebullición

---

siendo  $h'_{lg} = h_{lg} + 0.4 c_{p,v} (T_s - T_{sat})$ . C tiene un valor de 0.62 para cilindros horizontales y 0.67 para esferas.

Las propiedades del vapor se evalúan en  $T_p = (T_s + T_{sat})/2$ . Las del líquido y  $h_{lg}$  se evalúan en  $T_{sat}$ .

- *Superficies horizontales.* Berenson [3], [33] obtiene en 1961 la siguiente expresión, relacionada con la de Bromley

$$\bar{h} = 0.42 \left[ \frac{\lambda_v^3 g (\rho_l - \rho_v) h_{lg}}{v_v (T_s - T_{sat}) \left[ \frac{\sigma}{g (\rho_l - \rho_v)} \right]^{1/2}} \right]^{1/4} \quad (10.52)$$

donde la longitud característica es el diámetro de las burbujas del vapor.

- *Aparición de la radiación.* Bromley [35] da la siguiente expresión para un coeficiente combinado  $\bar{h}_{comb}$  que engloba los efectos de la radiación y la convección.

$$\bar{h}_{comb} = \bar{h} \left( \frac{\bar{h}}{\bar{h}_{comb}} \right)^{1/3} + \bar{h}_{rad} \quad (10.53)$$

postulando que la radiación procedente de la superficie se absorbe en un pequeño espesor del líquido produciendo vapor que aumenta el espesor de la película de vapor que separa el líquido de la superficie caliente.

La ecuación (10.53) no resulta cómoda de resolver, salvo para el caso en el que la componente radiante sea apreciablemente menor que la convectiva ( $\bar{h}_{rad} \ll \bar{h}$ ) en el cual se puede aproximar por la (10.54)

$$\bar{h}_{comb} \approx \bar{h} + \frac{3}{4} \bar{h}_{rad} \quad (10.54)$$

$\bar{h}$  representa la componente convectiva dada por ecuaciones como las (10.51) ó

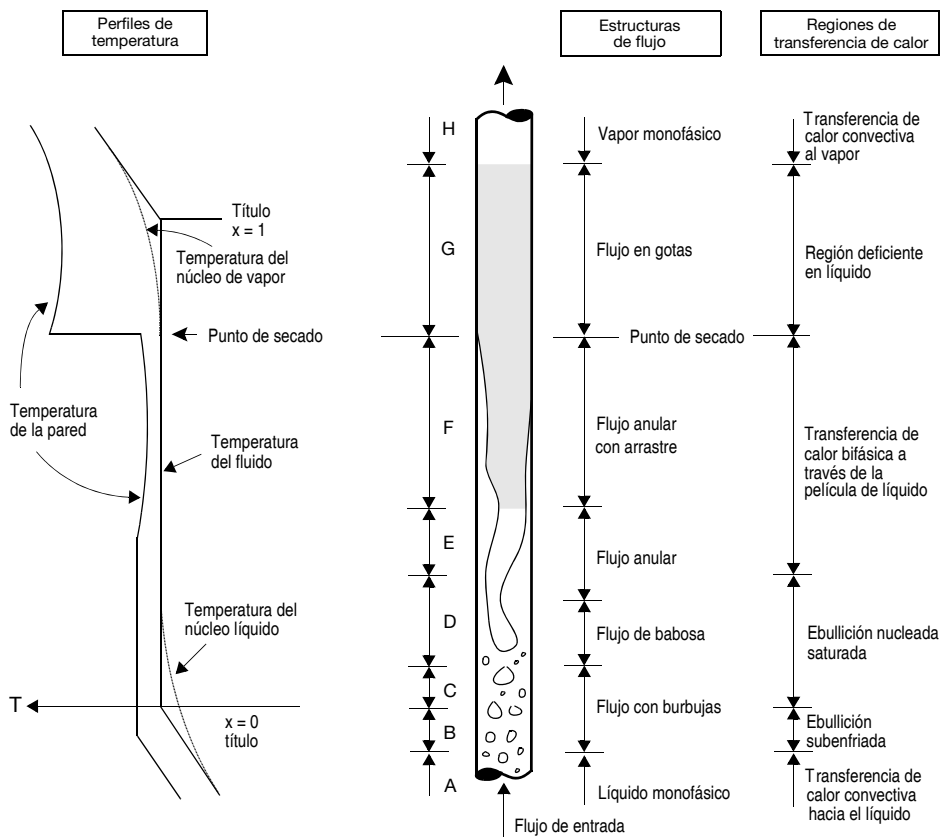
(10.52) y  $\bar{h}_{rad}$  es la componente radiativa dada por  $\frac{\sigma(T_s^4 - T_{sat}^4)}{(1/\varepsilon + 1/\alpha - 1)(T_s - T_{sat})}$ ; sien-

do  $\varepsilon$  la emisividad de la pared,  $\alpha$  la absorptancia del líquido y  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ .

### Ebullición forzada. Zonas en un tubo vertical

De manera parecida a la ebullición en piscina, en ebullición forzada (cuando el líquido circula de manera forzada por el interior de un tubo) aparecen diversas regiones según la manera en que se produce el cambio de líquido a vapor. En la figura 10.18 se muestran las zonas que aparecen en la ebullición forzada dentro de un tubo vertical sometido a un flujo moderado de calor uniforme.

**FIGURA 10.18** Regímenes de flujo y de transmisión de calor en ebullición forzada dentro de un tubo vertical sometido a un flujo moderado de calor uniforme [1].



Es importante tener presente que esta sucesión de etapas se modifica fuertemente al cambiar el valor de ciertas variables como la intensidad del flujo de calor o la posición del tubo.

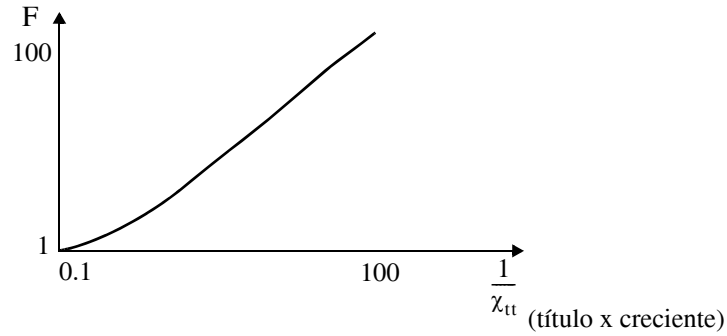
**Correlaciones para ebullición forzada en un tubo vertical**

<b>REGIÓN A</b>	<b>Convección forzada monofásica</b> Correlaciones del capítulo 8.
<b>REGIÓN B</b>	<b>Ebullición subenfriada</b> En esta región existe el efecto combinado de la ebullición nucleada en piscina y de la convección forzada monofásica, por lo que se emplea una suma ponderada de la correlación de Rohsenow, ecuación (10.48), y de alguna de las de convección monofásica del capítulo 8 [2], [36]. Una discusión de los mecanismos en esta región aparece en [37].
<b>REGIONES C, D, E y F</b>	<b>Ebullición saturada nucleada y convección forzada bifásica</b> A pesar de los distintos regímenes englobados en estas cuatro regiones, existe una correlación válida para todas ellas debida a Chen, muy mencionada en la bibliografía [3], [18] y obtenida a partir de una selección de 594 datos experimentales de varios investigadores. En ella el coeficiente total, $h_{BF}$ , se da como una suma de dos aportaciones, la convectiva debida al movimiento del fluido, $h_c$ , y la debida a la agitación generada por el cambio de fase, $h_{EN}$ . $h_{BF} = h_{EN} + h_C \quad (10.55)$ donde el término convectivo se presenta como una modificación de la ecuación de Dittus–Boelter $h_C = 0.023 \frac{\lambda_1}{D} Re_1^{0.8} Pr_1^{0.4} F \quad (10.56)$

$$\text{con } Re_1 = \frac{\dot{m}''(1-x)D}{\mu_1} = \frac{\dot{m}(1-x)D}{A_c \mu_1} .$$

siendo  $\dot{m}$  el caudal másico de la mezcla líquido–vapor,  $A_c$  la sección del tubo,  $x$  el título y  $D$  el diámetro del tubo.  $F$  es el factor convectivo de la ebullición dado por las expresiones (10.57) [2] y representado en la figura 10.19.

**FIGURA 10.19** Factor convectivo de la correlación de Chen, ecs. (10.55) y (10.56).



$$F = \begin{cases} 1 & ; \chi_{tt} \geq 10 \\ 2.35 \left[ \frac{1}{\chi_{tt}} + 0.213 \right]^{0.736} & ; \chi_{tt} < 10 \end{cases} \quad (10.57)$$

$\chi_{tt}$  es el llamado parámetro de Martinelli dado por la expresión (10.58)

$$\chi_{tt} = \left( \frac{1-x}{x} \right)^{0.9} \left( \frac{\rho_v}{\rho_l} \right)^{0.5} \left( \frac{\mu_l}{\mu_v} \right)^{0.1} \quad (10.58)$$

El término de ebullición lo da la fórmula (10.59), denominada ecuación modificada de Foster-Zuber

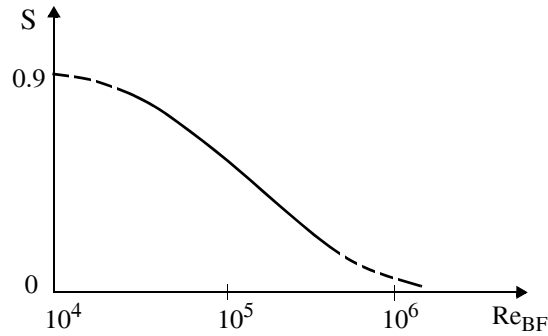
$$h_{EN} = 0.00122 \left( \frac{\lambda_l^{0.79} c_{pl}^{0.45} \rho_l^{0.49}}{\sigma^{0.5} \mu_l^{0.29} h_{lg}^{0.24} \rho_v^{0.24}} \right) \Delta T_{sat}^{0.24} \Delta p_{sat}^{0.75} S \quad (10.59)$$

donde  $\Delta T_{sat} = T_s - T_{sat}$  ( $\Delta T_e$ ), en Kelvin;  $\Delta p_{sat} = p_{sat}(a T_s) - p_{sat}(a T_{sat})$ , en Pa; S: factor de supresión, dado en función del Reynolds bifásico,  $Re_{BF} = F^{1.25} Re_l$ , como [2]

$$S = 1 / (1 + 2.53 \cdot 10^{-6} Re_{BF}^{1.17}). \quad (10.60)$$

La figura 10.20, conjuntamente con la 10.19 para F, indican que con el progreso del cambio de fase aumenta el término convectivo (a más cantidad de vapor más velocidad de la mezcla) y disminuye el de ebullición (menor agitación debida a la generación de burbujas).

**FIGURA 10.20** Factor de supresión en el término de ebullición (10.59) de la correlación de Chen (10.55).



Como  $h_{EN}$  depende de  $\Delta T_{sat}$  se necesita un proceso iterativo para calcular  $h_{BF}$  si se conoce  $q''_s$  y se quiere calcular la temperatura de la superficie,  $T_s$ . El algoritmo es el siguiente, dados  $q''_s$ ,  $x$ ,  $D$ ,  $\dot{m}/A_c$  y  $T_{sat}$ .

1. Cálculo de propiedades a  $T_{sat}$
2. Cálculo de  $\chi_{tt}$
3. Cálculo de  $F$
4. Cálculo de  $h_c$
5. Cálculo de  $Re_{BF}$
6. Cálculo de  $S$
7. Según la expresión de  $h_{EN}$  se tiene

$$\left. \begin{aligned} h_{EN} &= C \Delta T_{sat}^{0.24} \Delta p_{sat}^{0.75} \\ q''_s &= h_{BF} \Delta T_{sat} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{q''_s = C \Delta T_{sat}^{1.24} \Delta p_{sat}^{0.75} + h_c \Delta T_{sat}} \quad (10.61)$$

donde la constante  $C$  agrupa todos los términos que ya se han calculado en los pasos previos, como aquellos que dependen de las propiedades y  $S$ , además de los coeficientes numéricos.

8. La ecuación (10.61) depende de una forma compleja de  $T_s$  a través de  $(T_s - T_{sat})$  y de  $(p_{sat}(a T_s) - p_{sat}(a T_{sat}))$ .

---

## Convección bifásica

---

Un procedimiento posible de resolución es el de ensayo y error, consistente en asignar un valor a  $T_s$ , calcular  $p_{\text{sat}}$  (a  $T_s$ ) y evaluar el miembro de la derecha de la ecuación anterior.

Si difiere de  $q''_s$ , ir modificando los valores de  $T_s$  hasta que ambos miembros coincidan.

$$9. \quad h_{\text{BF}} = \frac{q''_s}{\Delta T_{\text{sat}}} \quad (10.62)$$

### Regiones G y H. Convección forzada con vapor

Correlación de convección forzada monofásica (ver capítulo 8).

**Nota:** En muchas aplicaciones reales (generadores de vapor) se hace circular mucha más agua de la evaporada por lo que no se alcanza el punto de  $x = 1$ .

### Ebullición forzada en tubos horizontales

La estructura del flujo se parece a la de los tubos verticales, pero es más compleja por la asimetría entre las fases causada por la gravedad. Información más detallada se encuentra en [1] y [2].

### Correlaciones para ebullición forzada en tubos horizontales y verticales

Además de observarse desviaciones importantes en la correlación de Chen, ésta no vale para tubos horizontales. Kandlikar [39] ofrece otra correlación mucho más moderna, exacta y válida tanto para tubos horizontales como para verticales, que se presenta en las expresiones (10.63) a (10.67) y que está basada en 5246 puntos experimentales procedentes de veinticuatro investigadores e incluyendo diez fluidos

$$\frac{h_{\text{BF}}}{h_c} = C_1 C_o^{C_2} (25 \text{Fr}_1)^{C_5} + C_3 \text{Bo}^{C_4} \text{F}_{\text{fl}} \quad (10.63)$$

$$h_c = 0.023 \frac{\lambda_1}{D} \text{Re}_1^{0.8} \text{Pr}_1^{0.4} \quad (10.64)$$

---

## Ebullición

---

donde  $C_1$  a  $C_5$  son unas constantes que se muestran en la tabla 10.3,  $Fr_1$  un parámetro que depende del fluido y cuyo valor aparece en la tabla 10.4 para un grupo de fluidos,  $Co$  es el número convectivo definido por la expresión (10.65),  $Bo$  el número de ebullición dado por la expresión (10.66) y  $Fr$  el número de Froude definido por (10.67) como si todo el caudal fuese líquido.

$$Co \equiv \left( \frac{1-x}{x} \right)^{0.8} \left( \frac{\rho_v}{\rho_l} \right)^{0.5} \quad (10.65)$$

$$Bo \equiv \frac{q_s'' A_c}{\dot{m} h_{lg}} \quad (10.66)$$

$$Fr_1 \equiv \frac{\dot{m}^2}{A_c^2 \rho_l^2 g D} \quad (10.67)$$

$A_c$  es la sección interna del conducto ( $\pi D^2/4$ ) y  $g$  la aceleración de la gravedad.

---

**TABLA 10.3** Constantes de la correlación (10.63).

Constante	Región convectiva	Región de ebullición nucleada
$C_1$	1.1360	0.6683
$C_2$	-0.9	-0.2
$C_3$	667.2	1058.0
$C_4$	0.7	0.7
$C_5^a$	0.3	0.3

a.  $C_5 = 0$ , siempre en tubos verticales y para  $Fr_1 > 0.04$  también en tubos horizontales.

La región convectiva es aquella en la que  $Co < 0.65$ .

La región de ebullición nucleada es aquella en la que  $Co > 0.65$ .

Para  $Co = 0.65$  debe utilizarse el mayor valor obtenido con los dos conjuntos de valores.

La correlación de Kandlikar es la que debe utilizarse de forma preferente, ya que ha sido comparada con datos experimentales muy recientes [40] y se ha obser-

---

## Convección bifásica

---

vado que se ajusta mucho mejor a ellos que la correlación de Chen y otras que aparecen en la bibliografía. Además el rango de flujos de calor utilizado para su ajuste es muy amplio ( $300 \text{ W/m}^2 < q''_s < 2.3 \text{ MW/m}^2$ ).

---

**TABLA 10.4** Parámetro dependiente del fluido,  $F_{ff}$ , en la correlación (10.63).

Fluido	$F_{ff}$
Agua	1.00
R-11	1-30
R-12	1.50
R-13B1	1.31
R-22	2.20
R-113	1.30
R-114	1.24
R-152a	1.10
Nitrógeno	4.70
Neón	3.50

En otro artículo posterior [41], Kandlikar introduce nuevos parámetros para ampliar el uso de su correlación a tubos con algún aumento de su superficie interna debido a surcos, aletas, turbuladores, etc.

## Referencias

---

1. J. G. Collier  
*Convective Boiling and Condensation*  
McGraw-Hill, New York, 1981.
2. A. E. Bergles, J. G. Collier, J. M. Delhaye, G. F. Hewitt, and F. Mayinger  
*Two Phase Flow and Heat Transfer in the Power and Process Industries*  
Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1981.
3. E. Costa Novella  
*Ingeniería Química, vol. 4 - Transmisión del calor*  
Alhambra Universidad, Madrid, 1986.
4. W. Nusselt  
*The Condensation of Steam on Cooled Surfaces*  
Pioneering Paper in Chemical Engineering Fundamentals, vol. 1, p. 6

---

## Referencias

---

5. D. Kern  
*Procesos de transferencia de calor*  
CECSA, México, 1965.
6. W. M. Rohsenow  
*Heat Transfer and Temperature Distribution in Laminar Film Condensation*  
Transactions of ASME, vol. 78, p. 1645, 1956.
7. E. M. Sparrow, and J. L. Gregg  
*A Boundary-Layer Treatment of Laminar Film Condensation*  
Journal of Heat Transfer, vol. 81, p. 13, 1959.
8. V. Dhir, and J. Lienhard  
*Laminar Film Condensation on Plane and Axisymmetric Bodies in Nonuniform Gravity*  
Journal of Heat Transfer, vol. 93, p. 97, 1971.
9. E. M. Sparrow, and J. L. Gregg  
*Laminar Condensation Heat Transfer on a Horizontal Cylinder*  
Journal of Heat Transfer, vol. 81, p. 291, 1959.
10. H. M. Chen  
*An Analytical Study of Laminar Film Condensation, Parts 1 and 2.*  
Journal of Heat Transfer, vol. 83, p. 48, 1961.
11. F. Incropera and D. de Witt  
*Fundamentals of Heat and Mass Transfer*  
Wiley, 1990.
12. D. Q. Kern  
*Mathematical Development of Tube Loading in Horizontal Condensers*  
AIChE Journal, vol. 4, p. 157, 1958.
13. W. M. Rohsenow, J. H. Webber, and A. T. Ling  
*Effect of Vapor Velocity and Laminar and Turbulent Film Condensation*  
Transactions of ASME, vol. 78, p. 1637, 1956.
14. A. Bejan  
*Heat Transfer*  
Wiley, New York, 1993.
15. J. W. Rose  
*A New Interpolation Formula for Forced Convection Condensation on a Horizontal Surface*  
Journal of Heat Transfer, vol. 111, p. 818, 1989.
16. S. L. Chen, F. M. Gerner, and C. L. Tien  
*General Film Condensation Correlations*  
Experimental Heat Transfer, vol. 1, p. 93, 1987.
17. J. C. Chato  
*Laminar Condensation inside Horizontal and Inclined Tubes*  
J. ASHRAE, vol. 4, p. 52, 1962.

---

**Convección bifásica**

---

18. T. Cebeci  
*Laminar Free Convective Heat Transfer from the Outer Surface of a Vertical Slender Circular Cylinder*  
Fifth Int. Heat Transfer Conference, vol. 3, NC 1.4, pp. 15–19, 1974.
19. E. M. Sparrow, and S. H. Lin  
*Condensation Heat Transfer in the Presence of a Noncondensable Gas*  
Journal of Heat Transfer, vol. 86, p. 430, 1964.
20. W. J. Minkowycz, and E. m. Sparrow  
International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 9. p. 1125, 1966.
21. S. Nukiyama  
*The Maximum and Minimum Values of the Heat Transmitted from Metal to Boiling Water under Atmospheric Pressure.*  
Publicado originalmente en Journal of Japan Society of Mechanical Engineers, vol. 37, p. 367, 1934. Traducido en International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 27, p. 959, 1984.
22. S. Nukiyama  
*Memories of my Research on Boiling*  
International Journal of Heat Mass Transfer, vol. 27, p. 955, 1984.
23. Lord Rayleigh  
*On the Pressure Developed in a Liquid During the Collapse of a Spherical Cavity*  
Philosophical Magazine, vol. 33, p. 94, 1917.
24. H. K. Forster, and N. Zuber  
*Dynamics of Vapor Bubbles and Boiling Heat Transfer*  
AIChE Journal, vol. 1, p. 531, 1955.
25. M. Jakob  
*Heat Transfer, vol. I*  
Wiley, New York, 1967.
26. E. F. Adiutori  
*New Theory of Thermal Stability in Boiling Systems*  
Nucleonics, p. 92, may 1964.
27. E. F. Adiutori  
*The New Heat Transfer*  
Ventura Press, West Chester, 1989.
28. W. M. Rohsenow  
*A Method of Correlating Heat Transfer Data for Surface Boiling Liquids*  
Transactions of ASME, vol. 74, p. 969, 1952.
29. N. Zuber  
*On the Correlation of Data in Nucleate Pool Boiling from a Horizontal Surface*  
AIChE Journal, vol. 3, p. 9S, 1957.

---

## Referencias

---

30. V. V. Yagov  
*Heat Transfer with Developed Nucleate Boiling of Liquids*  
Thermal Engineering, vol. 35, p. 65, 1988.
31. N. Zuber  
*On the Stability of Boiling Heat Transfer*  
Transactions of the ASME, vol. 80, p. 711, 1958.
32. J. S. Ded, and J. H. Lienhard  
*The Peak Pool Boiling Heat Flux from a Sphere*  
AIChE Journal, vol. 18, p. 337, 1972.
33. P. J. Berenson  
*Film Boiling Heat Transfer for a Horizontal Surface*  
J. Heat Transfer, vol. 83, p. 351, 1961.
34. J. H. Lienhard, and P. T. Y. Wong  
*The Dominant Unstable Wavelength and Minimum Heat Flux during Film Boiling on a Horizontal Cylinder*  
J. Heat Transfer, vol. 86, p. 220, 1964.
35. L. Bromley  
*Heat Transfer in Stable Film Boiling*  
Chemical Engineering Progress, vol. 46, p. 221, 1950.
36. W. M. Rohsenow  
*Boiling*  
Handbook of Heat Transfer (Rohsenow and Hartnett, eds.), sec. 13  
McGraw-Hill, New York, 1973.
37. G. Tsung-Chang, and S. G. Bankoff  
*On the Mechanism of Forced-Convection Subcooled Nucleate Boiling*  
Journal of Heat Transfer, vol. 112, p. 213, 1990.
38. J. C. Chen  
*Correlation for Boiling Heat Transfer to Saturated Liquids in Convective Flow*  
Int. Eng. Chem. Process Des. Develop., vol. 5, p. 322, 1966.
39. S. G. Kandhkar  
*A General Correlation for Saturated Two-Phase Flow Boiling Heat Transfer Inside Horizontal and Vertical Tubes*  
Journal of Heat Transfer, vol. 112, p. 219, 1990.
40. J. C. Khanpara, A. E. Bergles, and M. B. Pate  
*Augmentation of R-113 In-Tube Evaporation with Micro-Fin Tubes.*  
ASHRAE Paper no. PO-86-11, no. 3
41. S. G. Kandlikar  
*A Model for Correlating Flow Boiling Heat Transfer in Augmented Tubes and Compact Evaporators*  
Journal of Heat Transfer, vol. 113, p. 966, 1991.

---

# Síntesis del capítulo

---

## CONDENSACIÓN

- Se produce condensación de un vapor cuando éste está saturado, o levemente sobrecalentado, y se pone en contacto con una superficie más fría que él (con  $T_s < T_{sat}$ ).
- El fenómeno principal que se produce es la formación de una película de condensado entre el vapor y la superficie, que se opone al paso del calor entre ambos. Basándose en este hecho, Nusselt formula en 1916 un sencillo modelo en el que calcula el coeficiente de convección suponiendo que el calor pasa exclusivamente por conducción a través de la película del condensado.

De esta manera se obtienen expresiones de  $\bar{h}$  para las geometrías habituales: placas, cilindros, esferas, bancos de tubos, etc. tanto en circulación exterior como interior, con dos presentaciones distintas aunque ligadas.

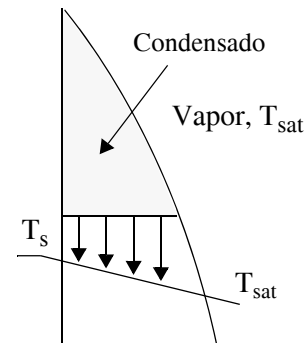
1. En función de la diferencia de temperaturas de saturación y de la superficie,  $T_{sat} - T_s$ , de las propiedades del fluido principalmente en estado líquido), de  $g$  y de la dimensión geométrica característica de la superficie sólida.
2. En función del número de Reynolds, es decir del caudal de condensado que se forma, de las propiedades y de  $g$ .

Obviamente debe usarse la más conveniente para cada problema.

- Entre las propiedades ocupa un lugar importante la entalpía del cambio de fase,  $h_{lg}$ , a la que se le añade un término corrector para tener en cuenta el subenfriamiento del líquido.

$$h'_{lg} = h_{lg} + x c_{p,l} (T_{sat} - T_s)$$

donde  $x$  es el valor del factor numérico de corrección, que depende de cada caso.

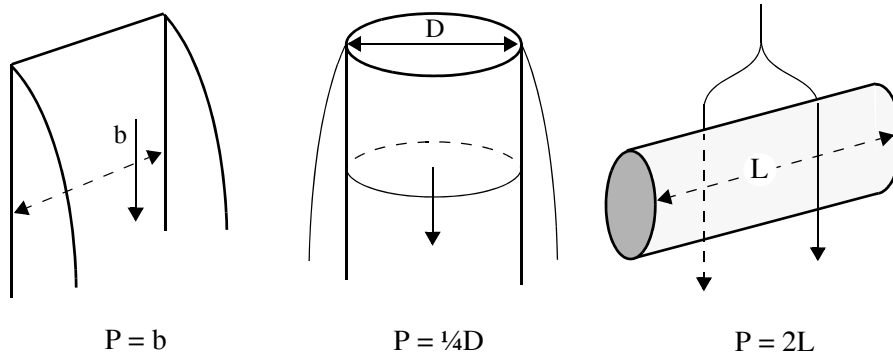


### Regímenes

- Como es habitual, quien indica el régimen del flujo es el número de Reynolds, definido aquí como

$$Re \equiv \frac{4\dot{m}}{P\mu_l}$$

Donde  $P$  es el perímetro húmedo de contacto entre el fluido y la superficie sólida. Por ejemplo:



Todas las expresiones que se deducen del modelo de Nusselt valen para régimen laminar,  $Re < 180$ . Para régimen turbulento,  $Re > 180$ , e incluso para una situación intermedia llamada régimen laminar ondulado,  $30 < Re < 180$ , hay que utilizar otras fórmulas que aparecen al final de la sección del capítulo dedicada a la condensación.

## EBULLICIÓN

Hay que distinguir entre:

- **Vaporización:** *Cambio de fase* de un líquido a su vapor.
- **Evaporación:** Vaporización que se produce en la *superficie* de un líquido. Se produce siempre que el vapor sobre la superficie del líquido no esté saturado e implica una transferencia conjunta de calor y materia.
- **Ebullición:** Es un fenómeno *masivo* de cambio de fase en el interior de un líquido. Se produce cuando el líquido entra en contacto con una superficie a temperatura superior a la de saturación,  $T_s > T_{sat}$ . Esta sección se dedica a esta forma de vaporización.

Tipos de ebullición

- **Natural o en piscina.** Cuando el líquido está inicialmente inmóvil en un recipiente. Ejemplo: Depósitos, pucheros, calderas pirotubulares.
- **Forzada.** Cuando el líquido circula por el interior de un conducto. El ejemplo más importante son las calderas acuotubulares.

— *Ebullición en piscina*

La relación entre el flujo de calor en la superficie,  $q''_s$ , y el salto térmico  $\Delta T_e = T_s - T_{sat}$ , es compleja según se ve en la figura (10.15) de Nukiyama de ebullición del agua.

Existen una serie de regiones de distinto comportamiento, cada una de las cuales tiene su(s) expresión(es); interesando especialmente las zonas de ebullición nucleada y de ebullición en película, así como los puntos de flujo de calor máximo y mínimo.

— *Ebullición forzada*

También existen diversas zonas de comportamiento según se muestra en la figura 10.18. Las más importantes a nivel práctico son las C, D, E y F

---

**Síntesis del capítulo**

---

donde se aplica la fórmula de Kandlikar, que considera dos contribuciones: la de la convección forzada y la debida a la generación de burbujas que agitan el líquido.

Conforme avanza la mezcla líquido–vapor por el tubo aumenta la importancia relativa de la primera y disminuye la de la segunda.

---

## Cuestiones

---

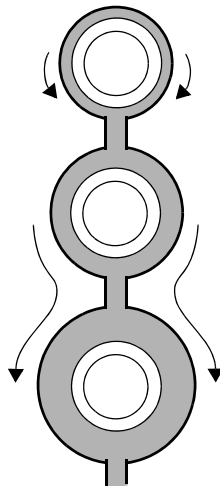
1. Una de las siguientes hipótesis **no** está incluida en la teoría de Nusselt sobre la condensación laminar en película en una placa plana vertical. Señalarla:
  - a) La aceleración del condensado es despreciable.
  - b) Las propiedades termofísicas del condensado se evalúan a la temperatura de saturación.
  - c) La distribución de temperaturas en la capa de condensado es lineal.
  - d) Los esfuerzos cortantes entre condensado y vapor son despreciables.
  
2. Al calcular el coeficiente de convección en condensación en película según el modelo de Nusselt, el cambiar el calor latente de vaporización  $h_{lg}$  por el calor latente modificado  $h'_{lg} = h_{lg}(1 + .68Ja)$  es una mejora debida a:
  - a) Evaluación de las propiedades del condensado en otro valor distinto de la temperatura.
  - b) El vapor no permanece inmóvil.
  - c) Tener en cuenta el subenfriamiento del condensado.
  - d) El condensado cae con régimen turbulento.
  
3. En la teoría de Nusselt que explica la condensación en película de un vapor sobre una superficie plana vertical, se obtiene que el coeficiente de convección es proporcional a la raíz cuarta de la aceleración de la gravedad.  
Comentar breve y cualitativamente:
  - a) ¿A qué se debe la aparición de  $g$  en la expresión de  $h$ ?
  - b) La dependencia funcional antes apuntada indica que  $h$  crece con  $g$ , ¿es esto lógico?, ¿por qué?

---

## Cuestiones

---

4. *En un cilindro de diámetro  $D$  y longitud  $L$  sobre cuya superficie externa condensa vapor, determinar cuál es el perímetro húmedo del mismo en posición vertical y horizontal.*
5. *¿En qué posición (horizontal, vertical o inclinada) debe colocarse un cilindro, sobre cuya superficie exterior va a condensarse un vapor, para que la condensación sea máxima? Justificar brevemente la respuesta.*
6. *Obtener la expresión que da el número de Reynolds para el estudio de un condensado, de caudal  $\dot{m}$ , formado sobre una columna de  $N$  tubos horizontales de diámetro  $D$  y longitud  $L$ .*



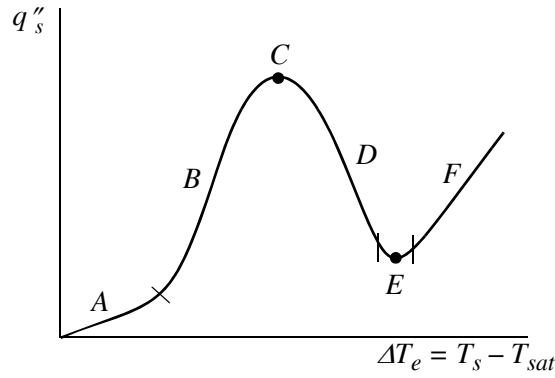
7. *Cuando un vapor condensa sobre una columna de  $N$  cilindros horizontales, el coeficiente de convección promedio,  $\bar{h}$ , disminuye con  $N$ , siendo aproximadamente inversamente proporcional a  $N^{1/6}$ . Explicar cualitativamente a qué se debe esta disminución.*
8. *La condensación por gotas es mejor que la condensación en película ¿Por qué? ¿Por qué industrialmente se prefiere la segunda?.*
9. *Explicar tres diferencias importantes entre la transferencia de calor por ebullición y por convección forzada sin cambio de fase.*

---

**Cuestiones**

---

10. En la curva de ebullición en piscina indica el nombre de los tramos y puntos señalados en la figura siguiente.

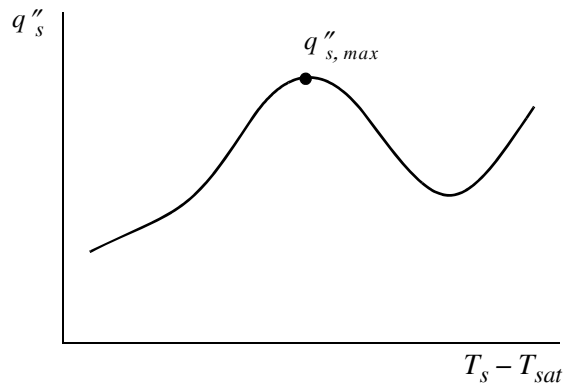


Tramo A: ..... Tramo D: .....

Tramo B: ..... Punto E: .....

Punto C: ..... Tramo F: .....

11. En la curva de ebullición en piscina, al punto de máximo flujo de calor,  $q''_{s,max}$ , se le llama también “punto crítico” o “punto de destrucción”. Justificar este nombre

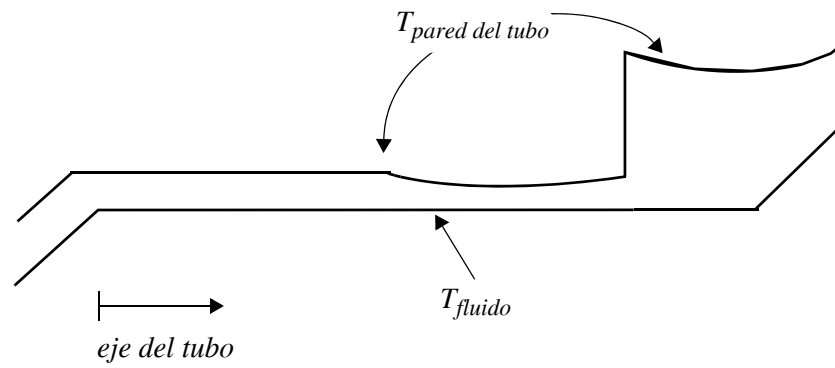


---

**Cuestiones**

---

12. Lo que aparece en la figura es el perfil de temperaturas a lo largo de un tubo para un fluido que circula forzadamente por su interior. ¿Qué fenómeno térmico está sufriendo el fluido?



¿A qué se debe el salto brusco que experimenta la temperatura de la pared del tubo?

---

# Problemas

---

1. Por el interior de un tubo de cobre de diámetro interior y exterior  $D_i = 16.5$  mm y  $D_e = 19$  mm respectivamente circula agua en unas condiciones tales que el coeficiente de transferencia de calor del agua en el interior del tubo vale  $\bar{h}_i = 5200$  W/m<sup>2</sup>K. Debido a esta transferencia de calor, en la pared exterior del tubo condensa vapor de agua saturado a 0.1 bar con un coeficiente de convección de  $\bar{h}_e = 6800$  W/m<sup>2</sup> K. Estimar el caudal condensado por metro de tubo cuando la temperatura media del agua son 30 °C.
2. En la superficie exterior de una tubería vertical de 1 m de largo y 100 mm de diámetro cuya superficie se mantiene a una temperatura uniforme de 94 °C se condensa vapor de agua saturado a 1 atm. Estimar el caudal de condensado y el calor (W) transferido a la tubería.
3. Una placa vertical de 500 mm de alto y 200 mm de ancho se utiliza para que condense en su superficie vapor de agua saturado a 1 atm ¿A qué temperatura deberá mantenerse la superficie de la placa si se desea condensar un caudal de 25 kg/h?
4. Un tubo horizontal de 50 mm de diámetro, con una temperatura superficial de 34 °C está expuesto a vapor de agua a 0.2 bar. Estimar el caudal de condensado y el calor transferido por unidad de longitud del tubo (W/m).
5. Un vapor saturado a 0.1 bar condensa, con un coeficiente de convección de 6800 W/m<sup>2</sup>K, en el exterior de un tubo de latón de diámetros exterior e interior 19 y 16.5 mm respectivamente. El coeficiente de convección del agua que circula por el interior del tubo es 5200 W/m<sup>2</sup>K. Estimar la velocidad de condensación del vapor por unidad de longitud del tubo cuando la temperatura media del agua es 30 °C.

---

**Problemas**

---

6. Un vapor de agua saturado a 0.1 bar condensa sobre un banco horizontal compuesto por 10 hileras de 10 tubos de  $D = 8$  mm en disposición alineada. Si la superficie de los tubos está a  $27$  °C, estimar el caudal de condensado por unidad de longitud.

Datos:  $v_l = 1.007 \times 10^{-3}$  m<sup>3</sup>/kg;  $v_g = 22.93$  m<sup>3</sup>/kg;  $\lambda_l = 0.628$  W/m K;

$h_{lg} = 2390$  kJ/kg;  $c_{p,l} = 4178$  J/kg·K;  $\mu_l = 695 \times 10^{-6}$  Pa·s;  $T_{sat} = 320$  K.

7. Por un hilo conductor largo de 1 mm de diámetro circula una corriente eléctrica tal que hace que la potencia disipada sean 3150 W/m, alcanzando una temperatura superficial de  $126$  °C cuando está sumergido en agua a 1 atm ¿Cuál es el coeficiente de transferencia de calor por convección asociado a la ebullición? Estimar el valor del coeficiente de correlación  $C_{s,f}$ .
8. Un calentador eléctrico cilíndrico de 6 mm de diámetro y emisividad  $\varepsilon = 1$  esta sumergido en posición horizontal en un recipiente que contiene agua. La temperatura superficial del metal es  $255$  °C en condiciones estacionarias de ebullición. Estimar la potencia disipada por el calefactor por unidad de longitud.
9. Los avances en tecnología LSI (Large Scale Integration), en particular para grandes computadores, se encuentran a menudo supeditados a la posibilidad de refrigerar los chips individualmente. Una construcción típica de un dispositivo de este tipo consiste en un vector de varios cientos de chips de  $25$  mm<sup>2</sup> de área cada uno, montado en un sustrato cerámico. Un método de refrigerar este dispositivo es sumergirlo en un fluido con bajo punto de ebullición, por ejemplo el refrigerante R-113. Estimar la potencia que puede disiparse con este montaje, si el punto de operación se fija en el 50% del flujo de calor crítico (máximo) ¿Cuál es la temperatura del chip es estas condiciones? Suponer  $C_{s,f} = 0.004$  y  $k = 1.7$ . Propiedades del R-113:  $c_{pl} = 983.8$  J/kg·K;  $\mu_l = 5.147 \times 10^{-4}$  Pa·s;  $Pr_l = 7.18$ ,  $h_{lg} = 147$  kJ/kg,  $\rho_l = 1511$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_v = 7.38$  kg/m<sup>3</sup>,  $T_{sat} = 321$  K,  $\sigma = 15.9 \times 10^{-3}$  N/m.
10. Un caudal  $\dot{m} = 0,1$  kg/s de agua saturada a  $T_{sat} = 180$  °C fluye a través de un tubo vertical de 2.5 cm de diámetro interno al que llega un flujo de calor constante  $q''_s = 135$  kW/m<sup>2</sup>. Calcular la temperatura de la pared del tubo

---

**Problemas**

---

$T_s$  y el coeficiente de transferencia de calor bifásico  $\bar{h}_{BF}$  en un punto donde el título de la mezcla es  $x = 0.25$ .

- 11.** El fondo de una cacerola de cobre se mantiene a  $118\text{ }^\circ\text{C}$  mediante un calentador eléctrico. Estimar la potencia necesaria para hervir agua a 1 atm partiendo de condiciones de saturación ¿Cuál es el caudal de evaporación suponiendo estado estacionario? Estimar el flujo crítico de calor. (Considerar la superficie del fondo de cobre pulido y diámetro 30 cm).
- 12.** Se extrae una barra de acero de 20 mm de diámetro, 200 mm de largo y emisividad 0.9 de un horno a  $455\text{ }^\circ\text{C}$  y se sumerge súbitamente en un baño de agua a presión atmosférica. Estimar la transferencia de calor inicial desde la barra.
- 13.** Estimar la corriente a la cual se quemará un cable de níquel de 1 mm de diámetro, al sumergirlo en agua a presión atmosférica. La resistencia eléctrica del cable es  $0.129\ \Omega/\text{m}$ .

---

## CAPÍTULO 11

# Intercambiadores de calor

---

En las aplicaciones reales donde debe existir una transferencia de calor entre sustancias o sistemas, se pretende que esta transferencia se realice de forma controlada en una cierta zona del espacio. En la mayor parte de los casos la zona está localizada dentro de un tipo de equipos, cuyo objetivo es conseguir el intercambio de calor entre varias sustancias (casi siempre dos) de la forma más eficaz posible. Estos equipos reciben el nombre de Intercambiadores de Calor y son el objeto de estudio del presente capítulo.

La variedad de intercambiadores de calor es muy grande en función de muy diversos aspectos como: sustancias que intercambian el calor (casi siempre fluidos), aplicación y planta industrial o servicio donde se utiliza, caudal, temperatura y presión de los fluidos, etc. Para dar una pincelada de esta variedad se empieza con una primera parte puramente descriptiva donde se presentan con dibujos esquemáticos los tipos de intercambiadores de calor más habituales.

La mayor parte de estos equipos se pueden clasificar de la siguiente manera.

- **De contacto directo.** Ambos fluidos intercambian calor al mezclarse.
- **Sin contacto directo.** Ambos fluidos intercambian calor a través de algún medio interpuesto. Éstos a su vez, siguen la clasificación siguiente

---

## Intercambiadores de calor

---

- **Recuperativos.** Los fluidos intercambian calor a través de un medio conductor.
  - **Tubulares.** Los fluidos intercambian calor a través de las paredes de tubos, por cuyo interior y exterior circulan.
  - **De placas.** Los fluidos intercambian calor a través de placas (planas o no) que los separan.
  - **Con tubos de calor.** El calor circula a través de un tubo cerrado superconductor basado en el cambio de fase de un fluido interior.
- **Regenerativos.** Los fluidos caliente y frío ocupan alternativamente el interior de un material finamente dividido (tipo poroso) que hace de almacenador y transmisor intermedio entre ambos fluidos.

En las figuras que siguen se hace un recorrido descriptivo siguiendo esta clasificación.

## Descriptiva

---

En la relación que viene a continuación, se ha seguido básicamente la referencia [1], adaptándola a la clasificación establecida más arriba.

### Intercambio de calor por contacto directo

Se muestran ejemplos en las figuras 11.1 a 11.3, de los cuales el más importante en la industria es la torre de refrigeración (Fig. 11.3) empleada para enfriar agua a temperaturas moderadas.

---

**FIGURA 11.1** Para condensación de un vapor con su fase líquida.

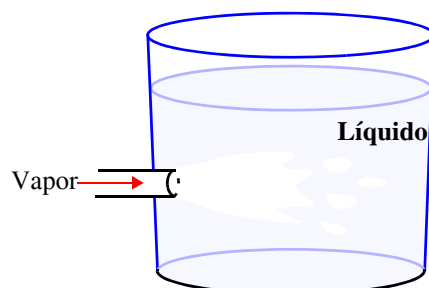
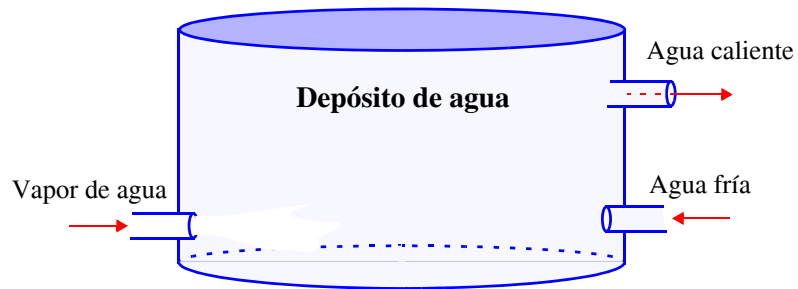
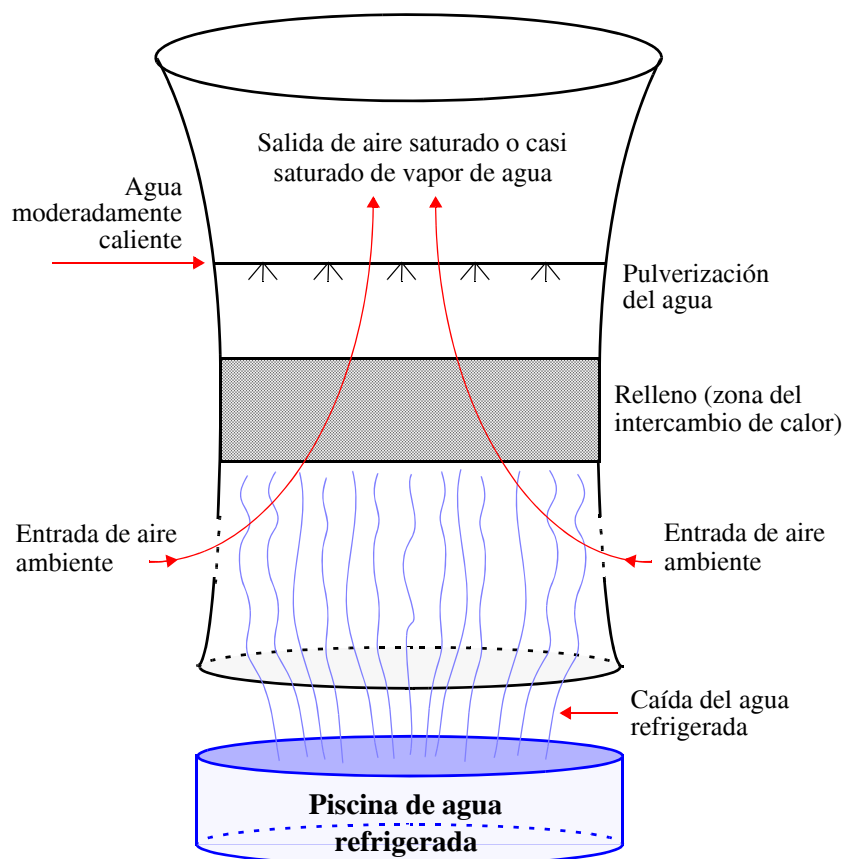


FIGURA 11.2 Para calentamiento de agua por vapor.



---

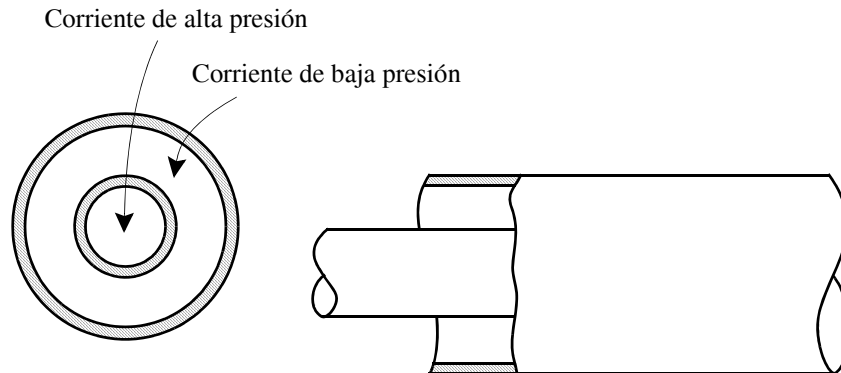
FIGURA 11.3 Torre de refrigeración.



## Intercambiadores de calor tubulares

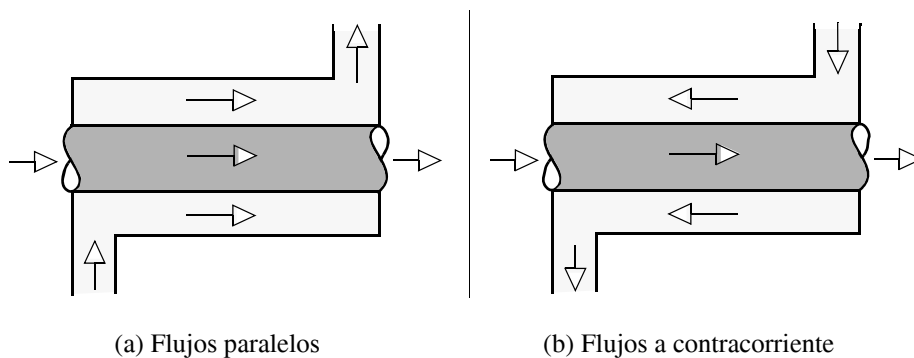
---

**FIGURA 11.4** Intercambiadores de calor tubulares de tubos concéntricos.



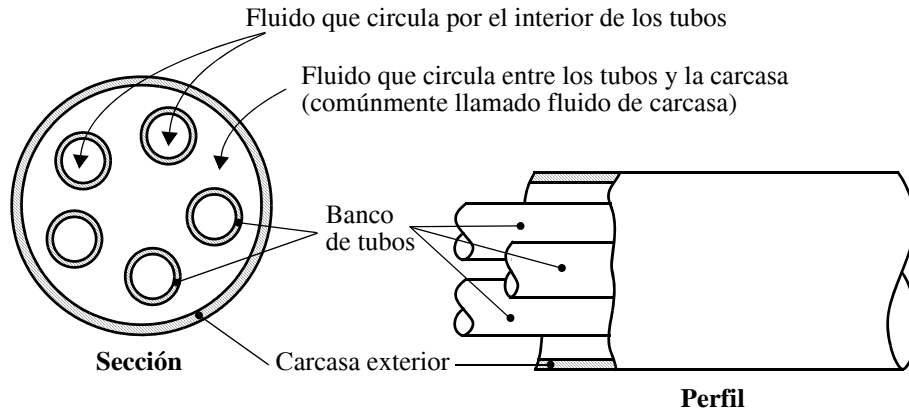
Los intercambiadores de calor tubulares de tubos concéntricos son sencillos y de poca capacidad. Los de un solo tubo se utilizan por ejemplo, para calefactar naves. Esquemas constructivos y de circulación de los fluidos en intercambiadores de dos tubos concéntricos se muestran en las figuras 11.4 y 11.5.

**FIGURA 11.5** Circulación en intercambiadores concéntricos.

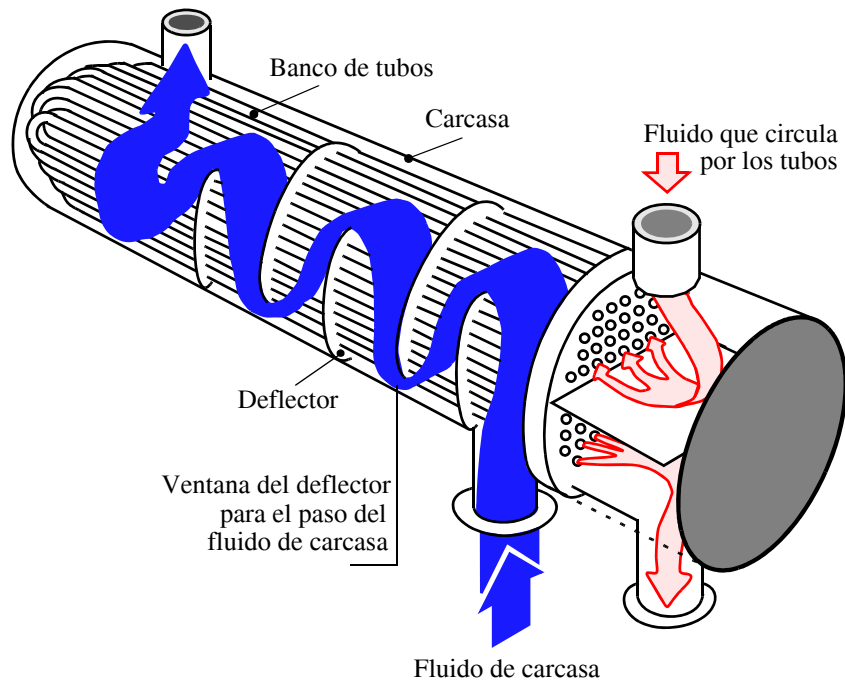


Los intercambiadores de carcasa y tubos son los más utilizados por tradición y facilidad constructiva y se usan preferentemente con líquidos. Permiten el uso de caudales y potencias grandes. Esquemas de los tipos más corrientes se ofrecen en las figuras 11.6 a 11.12.

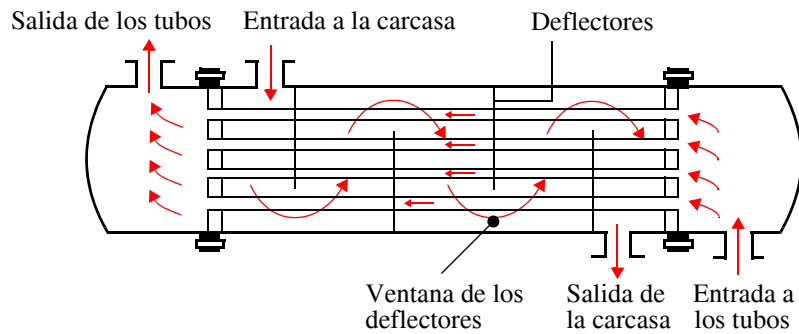
**FIGURA 11.6** Intercambiadores de carcasa y tubos. Cortes elementales.



**FIGURA 11.7** Configuración con circulación doble en los tubos en un intercambiador de carcasa y tubos. Presenta facilidades constructivas y de mantenimiento respecto de la configuración básica que aparece en la figura 11.8.



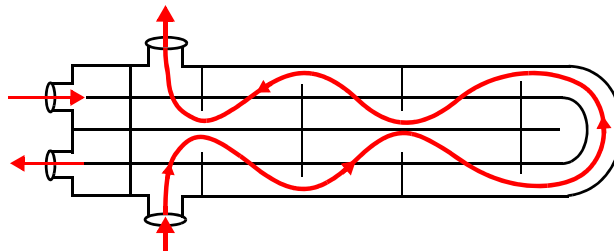
**FIGURA 11.8** Configuración básica de los intercambiadores de carcasa y tubos. (Un paso por la carcasa y un paso por los tubos). La circulación es mixta cruzada-a contracorriente.



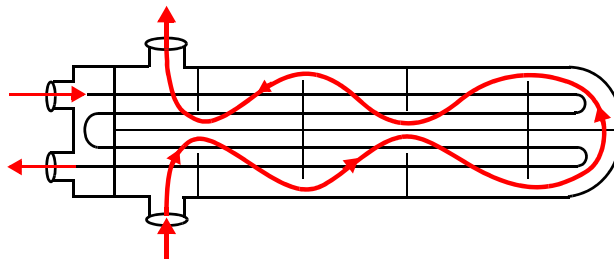
### Otras configuraciones en IC de carcasa y tubos

Se aumenta el número de pasos de carcasa para mejorar la eficiencia del intercambiador y el número de pasos por los tubos para aumentar el área de intercambio, tal y como se muestra en las figuras 11.9 a 11.12.

**FIGURA 11.9** Intercambiador de calor de carcasa y tubos. Dos pasos en los tubos y en la carcasa.



**FIGURA 11.10** Intercambiador de calor de carcasa y tubos.. Cuatro pasos en los tubos y dos en la carcasa.

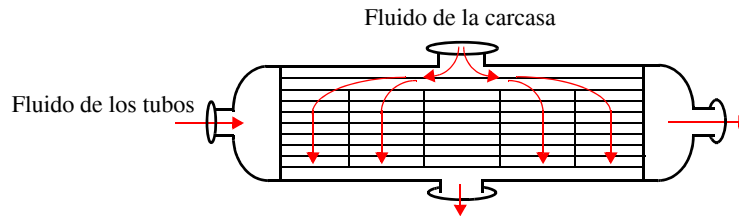


---

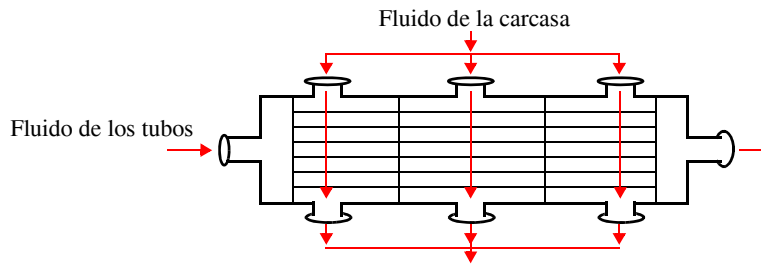
**Descriptiva**

---

**FIGURA 11.11** Intercambiador de calor de carcasa y tubos. Entrada única en flujo cruzado con deflectores de distribución del flujo. Su uso es frecuente en los condensadores.



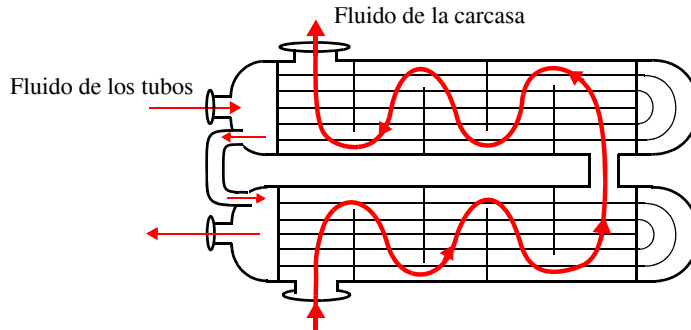
**FIGURA 11.12** Intercambiador de calor de carcasa y tubos. Entradas y salidas múltiples con separadores interiores. También se usa para los condensadores.



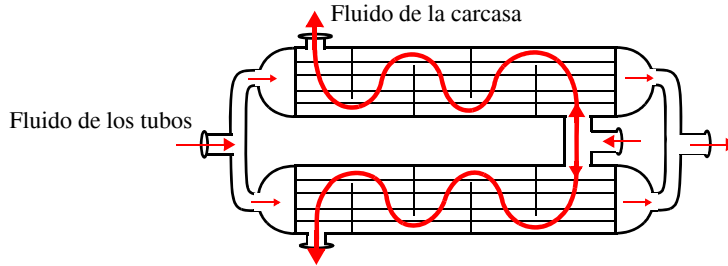
**Conexiones de intercambiadores de carcasa y tubos**

Debido a que el aumento de pasos en un intercambiador tiene límites constructivos y de operación, a veces para mejorar la eficiencia o la capacidad se conectan varios intercambiadores, tal y como se muestra en las figuras 11.13 a 11.15.

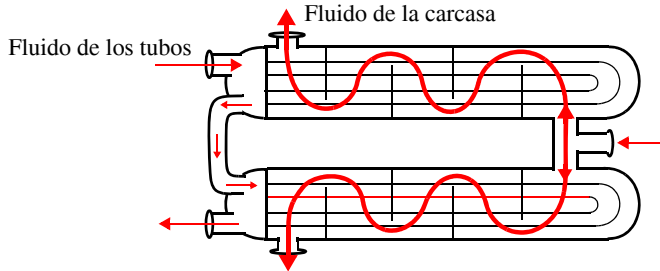
**FIGURA 11.13** Acoplamiento de intercambiadores de calor de carcasa y tubos en serie en ambos lados (tubos y carcasas).



**FIGURA 11.14** Acoplamiento de intercambiadores de calor en carcasa y tubos en paralelo en ambos lados (tubos y carcasa).



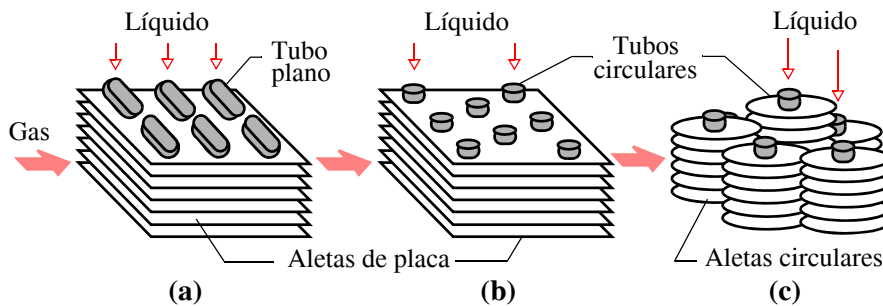
**FIGURA 11.15** Acoplamiento de intercambiadores de calor en carcasa y tubos en serie de los tubos y en paralelo de las carcasa.



### Compactos de tubos y aletas

Los intercambiadores de calor compactos son aquellos que presentan una alta relación entre el área de intercambio y el volumen que ocupan, habitualmente debido a la presencia de aletas. Entre los tubulares, los más conocidos son los radiadores de los coches, presentados en la figura 11.16.

**FIGURA 11.16** Intercambiadores de calor tubulares compactos. (a) De tubos planos y aletas continuas de placa. (b) De tubos circulares y aletas continuas de placa. (c) De tubos y aletas circulares.

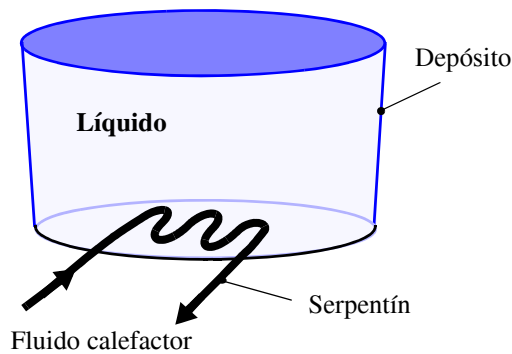


### Otros tipos de intercambiadores de calor tubulares

Casos a destacar son los serpentines para calentamiento de depósitos (figura 11.17) y los tubos de calor (11.18).

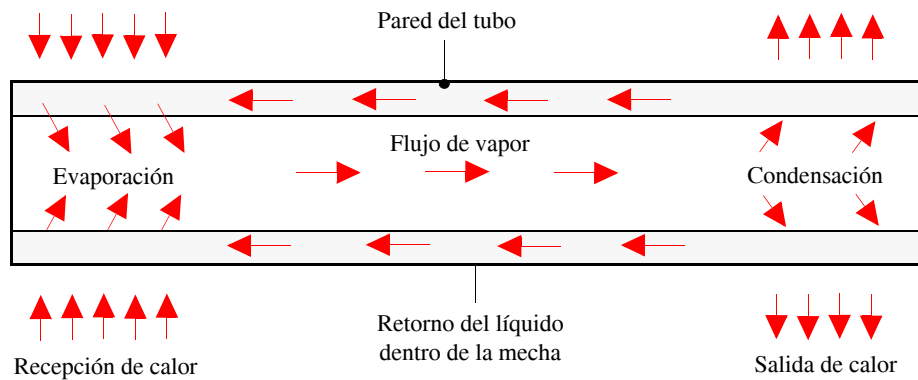
---

**FIGURA 11.17** Calentadores y enfriadores de tanques.



---

**FIGURA 11.18** Tubo de calor.



Un tubo de calor es un mecanismo muy eficaz de transmisión del calor. El calor que absorbe el tubo por un extremo y luego cede por el otro provoca un cambio de fase en el fluido que encierra, con lo que la temperatura de ambos extremos del tubo es muy parecida y la cantidad de calor transmitida de un extremo a otro es grande. Esto quiere decir que este dispositivo actúa como si fuera una barra de un material de muy alta conductividad térmica.

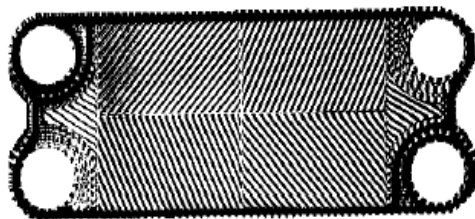
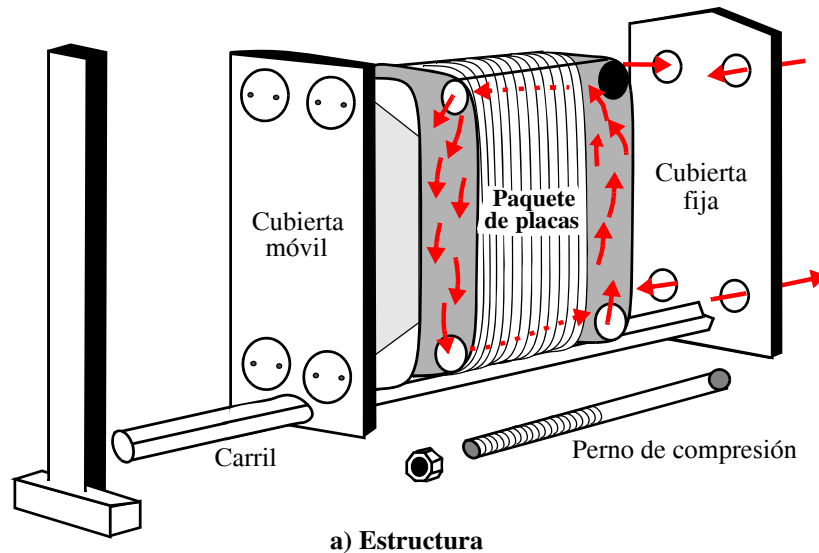
Intercambiadores compuestos de tubos de calor se utilizan preferentemente en la recuperación de energía de las instalaciones de aire acondicionado.

## Intercambiadores de calor de placas

**De placa y estructura (bastidor).** Es un tipo de intercambiador muy compacto (alta relación área de intercambio/volumen), muy útil para líquidos sometidos a presiones más bien bajas y muy adecuado en la industria agroalimentaria por su facilidad de limpieza.

En la figura 11.19 se muestra un esquema del aparato y de las placas de que se compone.

**FIGURA 11.19** Intercambiador de placas. Detalles de su estructura y funcionamiento.



b) Placa suelta. Obsérvense las corrugaciones, de gran importancia en el funcionamiento del intercambiador, al generar turbulencia y aumentar el área de intercambio.



c) Los fluidos circulan a contracorriente a ambos lados de las placas, por lo que es un intercambiador muy eficaz.<sup>a</sup>

a. Más adelante se explica la importancia que tiene en los intercambiadores de calor el sentido de circulación de los fluidos.

---

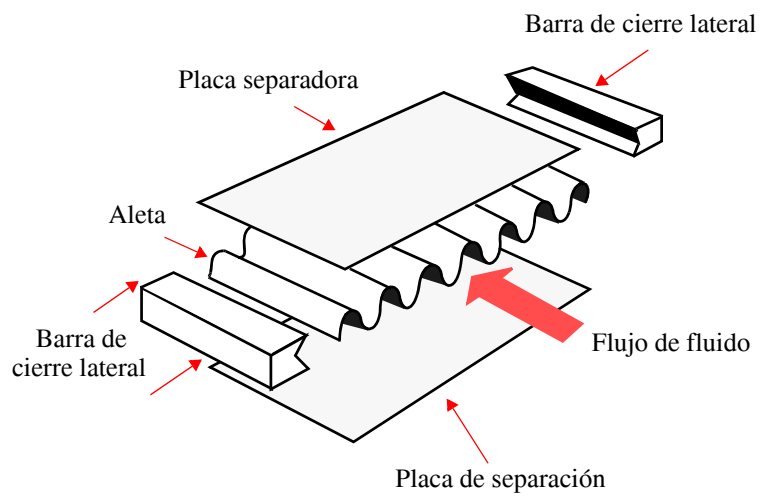
**Descriptiva**

---

**Compactos de placas y aletas.** Estos intercambiadores se emplean normalmente para intercambio de calor entre gases para compensar con su alta compacidad el bajo valor de los coeficientes de convección. Sus elementos principales y la circulación de los fluidos se muestran en las figuras 11.20 y 11.21.

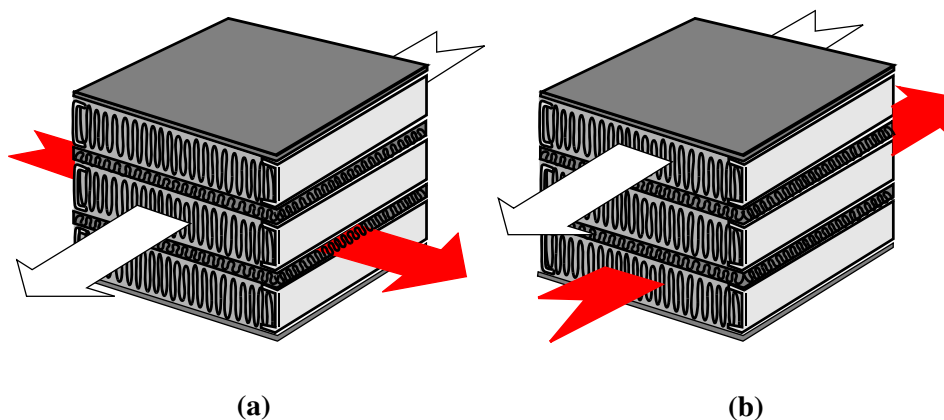
---

**FIGURA 11.20** Componentes principales de un elemento de un intercambiador de placas y aletas.



---

**FIGURA 11.21** Disposición de flujos en un intercambiador de calor de placas y aletas. (a) en flujo cruzado. (b) a contracorriente.

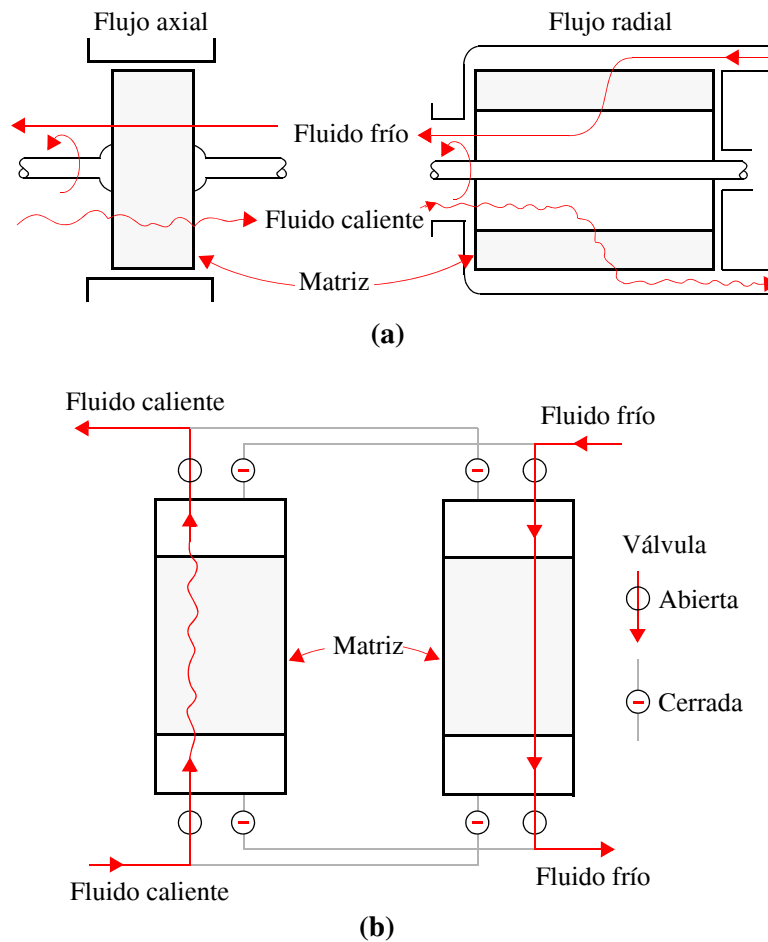


### Intercambiadores de calor regenerativos

Como ya se ha indicado los fluidos caliente y frío entran y salen alternativamente del regenerador o de algunas de sus partes. Este proceso puede hacerse bien moviendo el intercambiador (figura (11.22a) o abriendo y cerrando alternativamente válvulas que dejan pasar uno u otro fluido (figura (11.22b)).

---

**FIGURA 11.22** Intercambiadores de calor regenerativos. (a) Móvil. (b) Fijo.



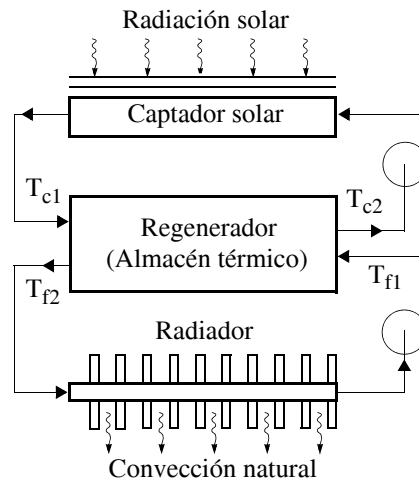
Este tipo de intercambiadores se utilizan, entre otras posibilidades, para almacenar energía térmica (por ejemplo en aplicaciones solares) o para intercambio de calor entre grandes cantidades de gases (por ejemplo en centrales termoeléctricas). Ejemplos de ambos casos se ven en las figuras 11.23 y 11.24.

---

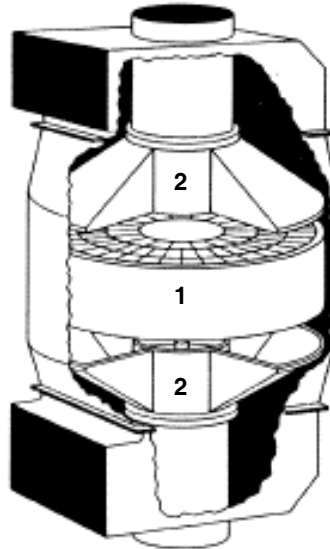
## Disposición de los flujos y perfiles térmicos

---

**FIGURA 11.23** Almacenamiento de la energía solar para calefacción.



**FIGURA 11.24** Precalentador de aire [1].



## Disposición de los flujos y perfiles térmicos

---

Uno de los aspectos que más influye en la eficiencia de un intercambiador de calor es el sentido de circulación de los fluidos, como se justificará más adelante. Las situaciones que se dan se pueden agrupar en tres casos.

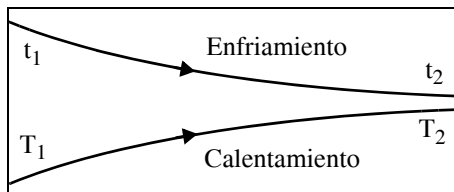
**1. Ambos fluidos tienen la misma dirección.** Según el sentido relativo de ambos se denomina al intercambiador

*De flujos paralelos:* si los dos fluidos avanzan en el mismo sentido.

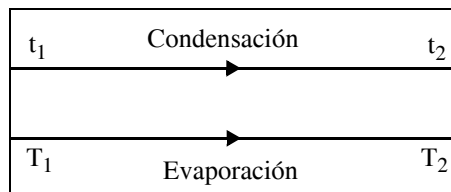
*A contracorriente:* si los fluidos avanzan en sentidos opuestos.

Esta situación aparece en los intercambiadores de tubos concéntricos, y los distintos perfiles de temperatura que pueden aparecer se muestran en la figura 11.25.

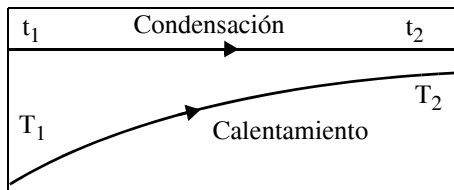
**FIGURA 11.25** Perfiles de temperatura que pueden aparecer en los intercambiadores de tubos concéntricos [1].



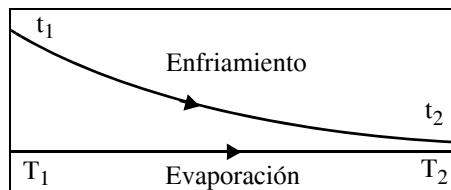
a) Flujos paralelos sin cambio de fase



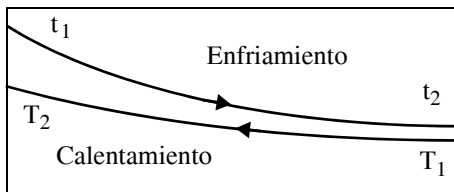
b) Ambos fluidos cambian de fase



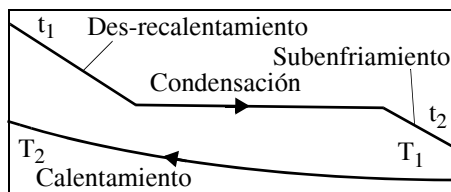
c) Un fluido cambia de fase



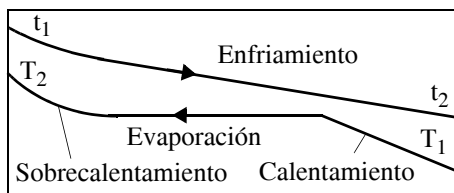
d) Un fluido cambia de fase



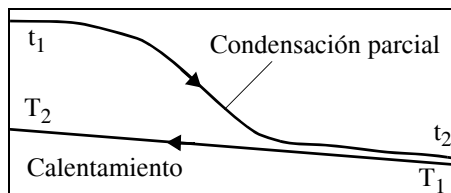
e) Flujos a contracorriente sin cambio de fase



f) Un fluido sufre cambio de fase y de temp.



g) Un fluido sufre cambio de fase y de temperatura



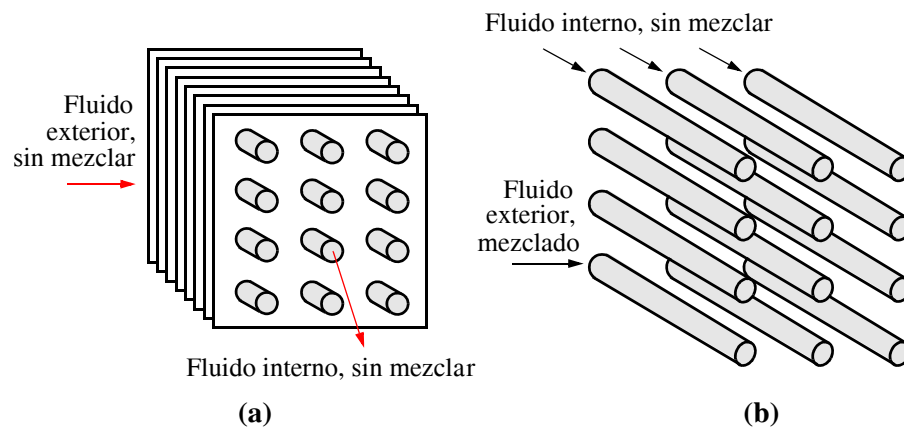
h) Un fluido tiene componentes condensantes y otros que no condensan

**2. De flujos cruzados.** Las direcciones de ambos fluidos son perpendiculares.

Esta situación aparece en muchos tipos de intercambiadores como por ejemplo radiadores de coches o intercambiadores compactos gas-gas. En la mayor parte de estos intercambiadores, por lo menos uno de los dos flujos resulta dividido en venas o filetes fluidos al pasar por el intercambiador; en este caso, se dice que ese fluido no está mezclado. El otro fluido puede estar mezclado o sin mezclar. En la figura 11.26 se presentan las dos situaciones.

---

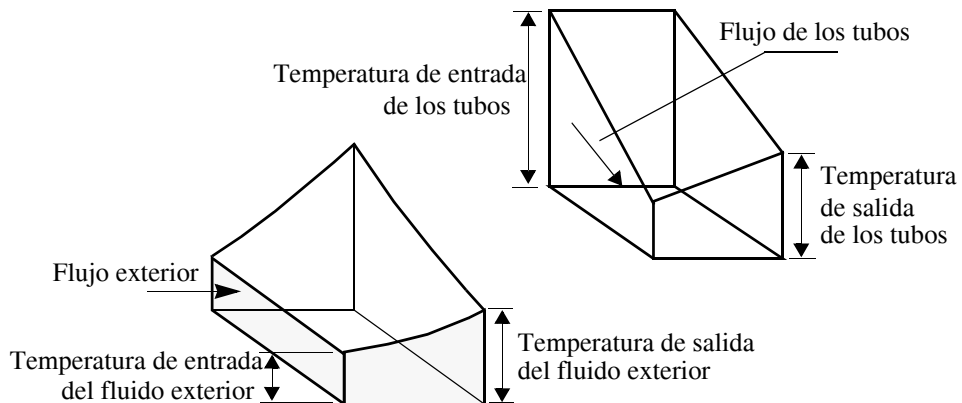
**FIGURA 11.26** Bancos de tubos con y sin aletas. (a) Ambos fluidos sin mezclar. (b) Un fluido mezclado y otro sin mezclar [1].



Los perfiles de temperatura son más complejos que en el caso anterior, según muestra la figura 11.27.

---

**FIGURA 11.27** Perfil de temperaturas en un intercambiador de flujos cruzados.



Para ambos fluidos sin mezclar el perfil de temperaturas sería similar pero más pronunciado.

**3. De flujo combinado.** Parcialmente en la misma dirección y parcialmente en direcciones perpendiculares.

Esta situación es típica de los intercambiadores de carcasa y tubos (ver por ejemplo la figura 11.7).

---

## Otras características de los intercambiadores de calor

---

### Compacidad

Se refiere al cociente  $A/V$ , donde  $A$  es el área de intercambio de uno de los lados del intercambiador y  $V$  su volumen. Este concepto es importante porque en muchas aplicaciones, siendo necesario a veces intercambios grandes de calor y por tanto superficies grandes, a su vez existen limitaciones de espacio que obligan al intercambiador a ocupar un volumen menor o igual a uno máximo dado; un caso familiar es el radiador de los automóviles.

Históricamente el término **compacto** aparece en la ref. [2] y se llama así al intercambiador que cumple que la relación  $A/V$  es superior a una tomada como referencia. En la ref. [2] se llamaba compacto a uno cuya compacidad fuera superior a  $250 \text{ m}^2/\text{m}^3$  pero hoy día se toman valores superiores; en la ref. [3] se indica como separación entre intercambiadores compactos y no compactos los  $700 \text{ m}^2/\text{m}^3$ .

De todos los existentes entran en el grupo de los compactos

- w Los de placas y aletas, que tienen compacidad de hasta unos  $6000 \text{ m}^2/\text{m}^3$
- w Los regenerativos, que presentan valores de la compacidad similares o superiores.

Por contra los tubulares tienen valores de la compacidad inferiores a  $500 \text{ m}^2/\text{m}^3$ .

### Mecanismos que participan en la transferencia de calor

En la mayoría de las aplicaciones industriales, debido al nivel de temperaturas de los fluidos que realizan el intercambio de calor, los mecanismos preponderantes son la convección (con o sin cambio de fase) y la conducción.

En casos excepcionales, debido al entorno con el que se intercambia el calor (como sucede en el espacio exterior) o al nivel de temperaturas de los fluidos puede intervenir la radiación. De hecho existe un grupo muy importante de intercambiadores de calor, llamados calderas o generadores de calor, donde la radiación es el mecanismo principal. Sin embargo, este tipo de equipos se suelen tratar aparte y no se van a considerar en este capítulo.

## **Análisis de los intercambiadores de calor**

---

Un intercambiador de calor es un caso **particular** de sistema compuesto, en el que hay que **incluir ensuciamiento y aletas**. Para un tratamiento más cómodo de las superficies aleteadas, es útil la introducción de los conceptos siguientes.

### **Eficiencia y resistencia convectiva de una superficie aleteada**

Estos dos conceptos se definen fácilmente y resultan muy útiles.

En una superficie con aletas, el intercambio de calor entre ella y el fluido exterior viene dada por

$$\begin{aligned} q &= h [A_p (T_p - T_f) + A_a (T_p - T_\infty) \eta_a] \\ &= h (T_p - T_f) (A_p + \eta_a A_a) \end{aligned} \quad (11.1)$$

donde:  $\eta_a$ : eficiencia de las aletas;  $A_p$ : área de la pared sin aletas;  $A_a$ : área de las aletas;  $T_p$ : temperatura de la pared y la base de las aletas;  $T_f$ : temperatura del fluido. Si se llama  $A$  al área total de la pared y las aletas, se tiene

$$\begin{aligned} q &= h (T_p - T_f) (A - A_a + \eta_a A_a) \\ &= h(T_p - T_f) A \left[ 1 - \frac{A_a}{A}(1 - \eta_a) \right] \end{aligned} \quad (11.2)$$

A la expresión entre corchetes se le suele definir como eficiencia de la superficie aleteada

$$\eta_0 \equiv 1 - \frac{A_a}{A}(1 - \eta_a) \quad (11.3)$$

resultando  $q = \eta_0 h A (T_p - T_f)$  (11.4)

y 
$$R_t \equiv \frac{1}{\eta_0 h A} \quad (11.5)$$

resistencia convectiva de la superficie aleteada.

### Coefficiente global de transferencia de calor

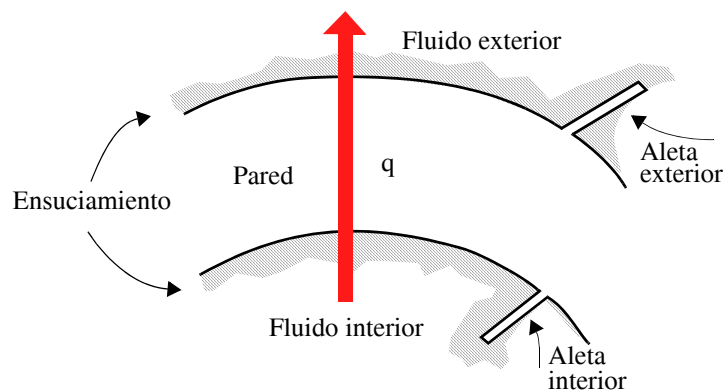
En intercambiadores de calor se tiene el hábito de manejar la conductancia del sistema total en lugar de su resistencia. A la conductancia por unidad de área se le denomina coeficiente global de transferencia de calor y se utiliza la letra U para designarlo.

La forma de calcular U en cualquier punto del intercambiador es inmediata, sin más que tener en cuenta que la transmisión de calor del fluido caliente al frío se realiza a través de un conjunto de mecanismos dispuestos en serie y que, por tanto, suman sus resistencias térmicas para dar la total. El valor de U se obtiene simplemente multiplicando la resistencia total por el área e invirtiendo el producto. Dado que, en general, las áreas de intercambio no son iguales para un fluido que para el otro (por ejemplo en un tubo, los diámetros interior y exterior son diferentes), hay que especificar a qué superficie se refiere el valor de U; de ahí el subíndice que le acompaña en la expresión 11.6.

Un esquema muy general de intercambio de calor entre fluidos se presenta en la figura 11.28.

---

**FIGURA 11.28** Transmisión de calor entre los dos fluidos de un intercambiador de calor.



---

## Análisis de los intercambiadores de calor

---

De esta figura se deduce directamente que el coeficiente global de transmisión de calor referido al área  $A_i$ ,  $U_i$ , viene dado por

$$\frac{1}{U_i A_i} = R_{\text{total}} = \frac{1}{(\eta_0 h A)_c} + \frac{R''_{e,c}}{(\eta_0 A)_c} + R_p + \frac{R''_{e,f}}{(\eta_0 A)_f} + \frac{1}{(\eta_0 h A)_f} \quad (11.6)$$

donde los subíndices c y f se refieren a los fluidos caliente y frío, respectivamente, y  $R''_e$  es la resistencia de ensuciamiento por unidad de área. Esta resistencia se determina experimentalmente, presentándose en la tabla 11.1 valores utilizables para los fluidos térmicos de uso más frecuente en intercambiadores de calor.

---

**TABLA 11.1** Valores estimados para la resistencia de ensuciamiento por unidad de superficie,  $R''_e$  ( $\text{m}^2 \text{K/W}$ ), en el caso de fluidos habituales en intercambiadores de calor.

<b>Gases y vapores</b>	
Vapor de agua (sin arrastre de aceite)	$10^{-4}$
Vapor de agua (con arrastre de aceite)	$3 \times 10^{-4} - 4 \times 10^{-4}$
Aire	$2 \times 10^{-4}$
Amoníaco	$2 \times 10^{-4}$
Gas natural	$2 \times 10^{-4} - 4 \times 10^{-4}$
Gases de combustión	$4 \times 10^{-4}$
Vapores de refrigerantes (arrastrando aceite)	$4 \times 10^{-4}$
Fluidos orgánicos para intercambio de calor	$2 \times 10^{-4}$
<b>Líquidos</b>	
Refrigerantes	$2 \times 10^{-4}$
Fluidos hidráulicos	$2 \times 10^{-4}$
Fluidos orgánicos para intercambio de calor	$2 \times 10^{-4}$
Sales fundidas	$10^{-4}$
Ácidos y bases (por debajo de $50^\circ\text{C}$ )	$2 \times 10^{-4}$
Ácidos y bases (por encima de $50^\circ\text{C}$ )	$4 \times 10^{-4}$
<b>Aceites</b>	
Vegetales	$5 \times 10^{-4}$
Gasolina	$2 \times 10^{-4}$
Gasóleo	$4 \times 10^{-4}$
<b>Agua</b>	
Destilada	$10^{-4}$
Marina (por debajo de $50^\circ\text{C}$ )	$10^{-4}$
Marina (por encima de $50^\circ\text{C}$ )	$2 \times 10^{-4}$
De río	$6 \times 10^{-4}$
De pozo o ciudad (por debajo de $50^\circ\text{C}$ )	$2 \times 10^{-4}$
De pozo o ciudad (por encima de $50^\circ\text{C}$ )	$4 \times 10^{-4}$
Tratada para caldera	$2 \times 10^{-4}$
Tratada para torre de refrigeración	$3 \times 10^{-4}$

---

## Intercambiadores de calor

---

En las referencias [4] y [5] se encuentran modelos sencillos de predicción del ensuciamiento en los intercambiadores de calor y en la referencia [6] hay abundante información sobre el tema.

Existen varios métodos para analizar matemáticamente el comportamiento de los intercambiadores de calor. Se presentan los dos más utilizados: el MLDT y el  $\epsilon$ -NTU.

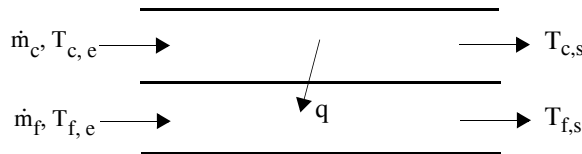
## Método MLDT

---

En la figura 11.29 se muestra de forma general y abstracta (es decir, sin referirse a ningún modelo particular de intercambiador) el intercambio de calor entre fluidos con las variables más importantes de este proceso, que son los caudales y las temperaturas de entrada y salida de ambos fluidos.

---

**FIGURA 11.29** Esquema genérico del intercambio de calor entre fluidos.



Este fenómeno viene regido por dos tipos distintos de ecuaciones, una general, es decir común a todos los casos y otra específica de cada situación.

### 1. Balance de energía

Si se pueden considerar despreciables las variaciones de energía cinética y potencial de ambos fluidos, el calor intercambiado entre ambos vale

$$q = \dot{m}_c(h_{c,e} - h_{c,s}) = \dot{m}_f(h_{f,s} - h_{f,e}) \quad (11.7)$$

donde  $h$  representa la entalpía específica. Si además ninguno de los fluidos cambia de fase, sus pérdidas de carga al pasar por el intercambiador son despreciables y el valor de su calor específico apenas varía con la temperatura de trabajo, se tiene

$$q = \dot{m}_f c_{p,f}(T_{f,s} - T_{f,e}) = \dot{m}_c c_{p,c}(T_{c,e} - T_{c,s}) \quad (11.8)$$

Esta expresión es general para todo intercambiador de calor.

## 2. Cinética de la transferencia

La velocidad a la que intercambian calor ambos fluidos en cada punto del intercambiador depende del salto térmico entre ambos, según

$$dq = U \Delta T dA \quad (11.9)$$

donde  $\Delta T = T_c - T_f$  es la diferencia de temperaturas entre ambos fluidos (salto térmico) y  $dA$  es el área de intercambio diferencial en un punto particular del equipo.

Dado que las temperaturas de los dos fluidos cambian (salvo que haya cambio de fase), el valor de  $\Delta T$  va cambiando a lo largo del intercambiador y hay que buscar un valor medio de  $\Delta T$ ,  $\Delta T_m$ , que cumpla

$$q = UA \Delta T_m \quad (11.10)$$

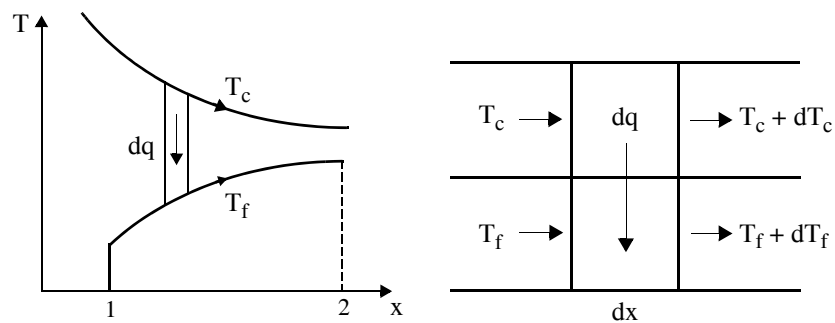
Este valor medio del salto térmico es particular de cada tipo de intercambiador de calor, y en general es difícil de hallar.

A continuación se demuestra el valor que toma en los casos sencillos.

### Intercambiadores de flujos en paralelo

En la figura 11.30 se muestra el perfil de temperaturas y la forma de plantear un balance de energía térmica en un elemento diferencial de este tipo de intercambiador.

**FIGURA 11.30** Perfil de temperaturas y forma de plantear un balance de energía térmica.



Perfiles de temperaturas en un intercambiador de flujos paralelos

Balance diferencial de energía en un intercambiador de flujos paralelos

---

## Intercambiadores de calor

---

Para obtener el valor de  $\Delta T_m$  se plantean un conjunto de hipótesis simplificadas, comunes por otro lado a todos los intercambiadores.

1. No hay pérdidas de calor hacia el exterior.
2. El calor que se propaga axialmente, tanto en los fluidos como por las paredes metálicas, es despreciable.
3. Las variaciones de energía potencial y cinética de ambos fluidos son despreciables frente a sus variaciones de entalpía.
4. El calor específico de ambos fluidos se puede considerar constante.
5. El valor de  $U$  permanece constante a lo largo de la dirección  $x$  de avance de los fluidos (dirección axial).
6. No hay condensación o ebullición parcial en el intercambiador de calor. (Puede haber cambio de fase si se produce en todo el intercambiador).

El análisis del elemento diferencial resulta

### Balances de energía

$$\left. \begin{aligned} dq &= +\dot{m}_f c_{p,f} dT_f = +C_f dT_f \\ dq &= -\dot{m}_c c_{p,c} dT_c = -C_c dT_c \\ \Delta T &= T_c - T_f, d(\Delta T) = dT_c - dT_f \end{aligned} \right\} d(\Delta T) = -dq \left( \frac{1}{C_f} + \frac{1}{C_c} \right) \Rightarrow$$

**Ley de transferencia**  $dq = U \Delta T dA$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_1^2 \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} &= -U \left( \frac{1}{C_f} + \frac{1}{C_c} \right) \int_1^2 dA \Rightarrow \ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = -UA \left( \frac{1}{C_f} + \frac{1}{C_c} \right) = \\ &= -UA \left( \frac{T_{f,s} - T_{f,e}}{q} + \frac{T_{c,e} - T_{c,s}}{q} \right) = -\frac{UA}{q} (\Delta T_1 - \Delta T_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow q &= UA \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln(\Delta T_2 / \Delta T_1)} = \boxed{UA \Delta T_{ml} = q} \end{aligned}$$

---

**Método MLDT**

---

Es decir para el intercambiador de flujos paralelos

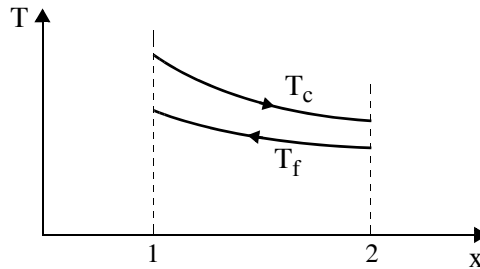
$$\boxed{\Delta T_m = \Delta T_{ml}} \quad (11.11)$$

donde  $\Delta T_{ml}$  es la media logarítmica de los saltos de temperatura a la entrada y salida del intercambiador.

**Flujo en contracorriente**

El perfil de temperaturas se muestra en la figura 11.31

---

**FIGURA 11.31** Perfil de temperaturas en un intercambiador a contracorriente.

Repitiendo el análisis del caso anterior se obtiene  $\Delta T_m = \Delta T_{ml}$ ,

$$\text{pero ahora } \Delta T_1 = T_{c,e} - T_{f,s} \quad (11.12a)$$

$$\Delta T_2 = T_{c,s} - T_{f,e} \quad (11.12b)$$

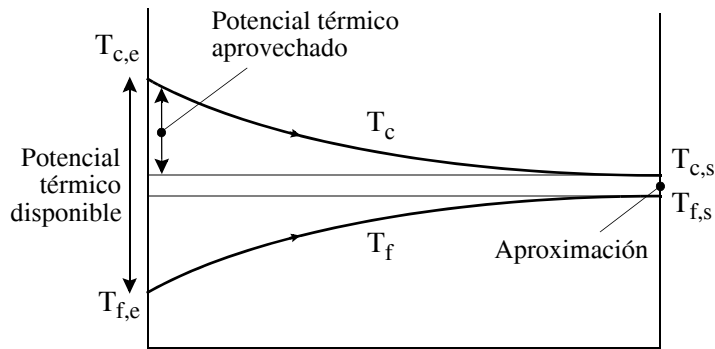
Se puede demostrar que con  $T_{c,e}$ ,  $T_{f,e}$ ,  $U$  y  $A$  iguales  $\Delta T_{ml}$  es mayor en contracorriente que en flujos paralelos  $\Rightarrow$

*La eficiencia de la disposición en contracorriente es mayor, y de hecho es la máxima*

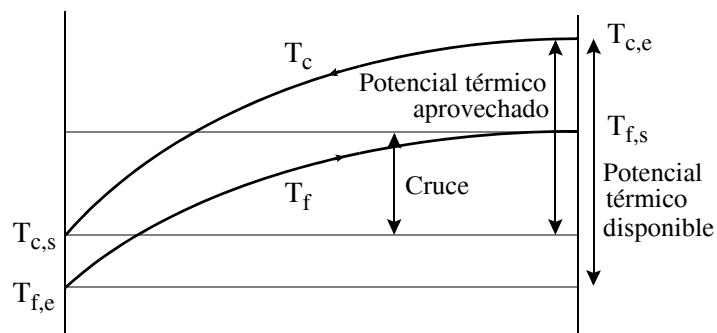
Por este hecho se toma el valor del salto medio logarítmico de temperaturas a contracorriente,  $\Delta T_{ml,cc}$ , como un valor ideal máximo, es decir, como una referencia para cualquier intercambiador. Esto da lugar al nombre del método, denominado de la *media logarítmica de la diferencia de temperaturas*, o abreviadamente MLDT.

Una explicación física de por qué es mayor la eficiencia de una disposición a contracorriente que en flujos paralelos se puede ver en las figuras 11.32 y 11.33 [7].

**FIGURA 11.32** Aprovechamiento térmico (eficiencia) de un intercambiador de flujos paralelos. No hay cruce de temperaturas. Poco aprovechamiento térmico.



**FIGURA 11.33** Aprovechamiento térmico (eficiencia) de un intercambiador a contracorriente. El cruce de temperaturas a la salida permite un aprovechamiento térmico mucho mayor.



### Flujos en direcciones no paralelas

Se puede demostrar que  $\Delta T_m < \Delta T_{m,cc}$ , definiéndose un factor de corrección  $F$  [8], tal que

$$\Delta T_m \equiv F \Delta T_{m, cc} \quad (11.13)$$

donde este factor es, en definitiva, la **eficiencia** que tiene un tipo particular de intercambiador **respecto de** la del que tiene el mejor comportamiento térmico, que es el de **contracorriente**.

---

**Método MLDT**

---

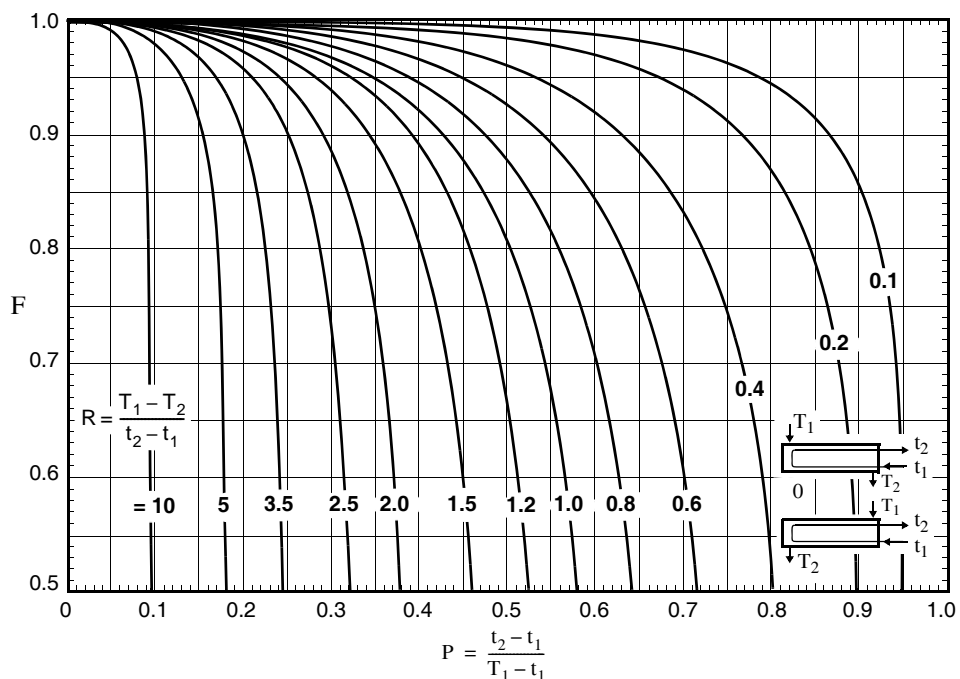
F está calculado para una serie de configuraciones y, dado que suele obedecer a fórmulas complicadas, se suele presentar en forma gráfica. Da un criterio de elección del intercambiador de calor, cuyo punto de operación no debe estar en zona vertical (ver figuras sucesivas) porque en esa zona F toma los valores menores, y por tanto  $\Delta T_m$  y el calor intercambiado son menores, y sobre todo porque el valor de F es muy impreciso y por tanto q, con lo cual no se sabe qué comportamiento va a tener el intercambiador.

La forma de aumentar el valor de F en un intercambiador de carcasa y tubos es aumentando el número de pasos por carcasa como se puede observar en las figuras 11.34 a 11.36.

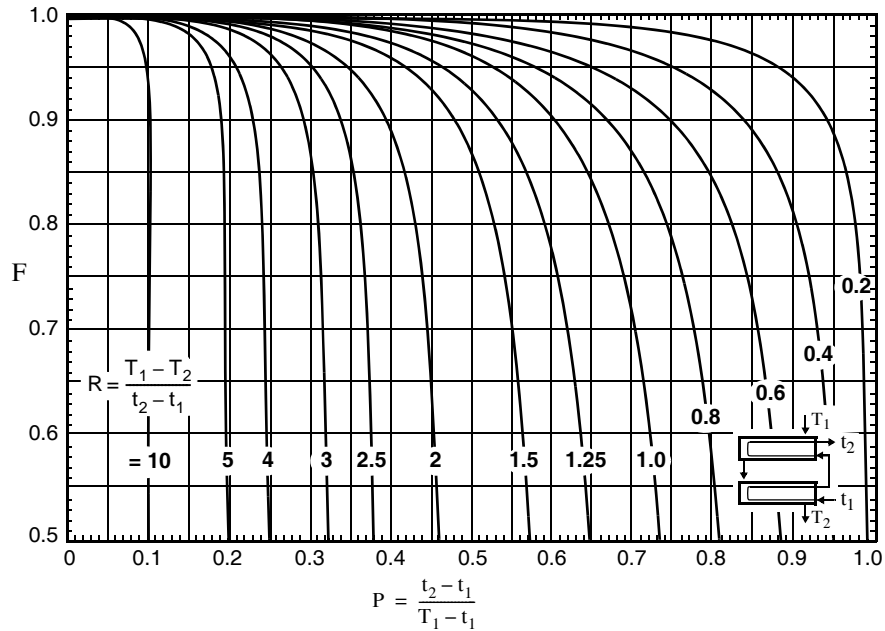
En todas estas figuras se representa F frente a un cociente de temperaturas, P, relacionado con otra eficiencia que se define más adelante ( $\epsilon$ ), y frente al parámetro R, que es el cociente entre las capacidades caloríficas del fluido interior (el de los tubos) y del fluido externo (el de la carcasa). Se ve claramente en las gráficas que para distinguir las variables térmicas de ambos fluidos se usan letras mayúsculas para uno y minúsculas para el otro, indicando el subíndice 1 la temperatura de entrada de cada fluido al intercambiador y el subíndice 2 la de salida.

---

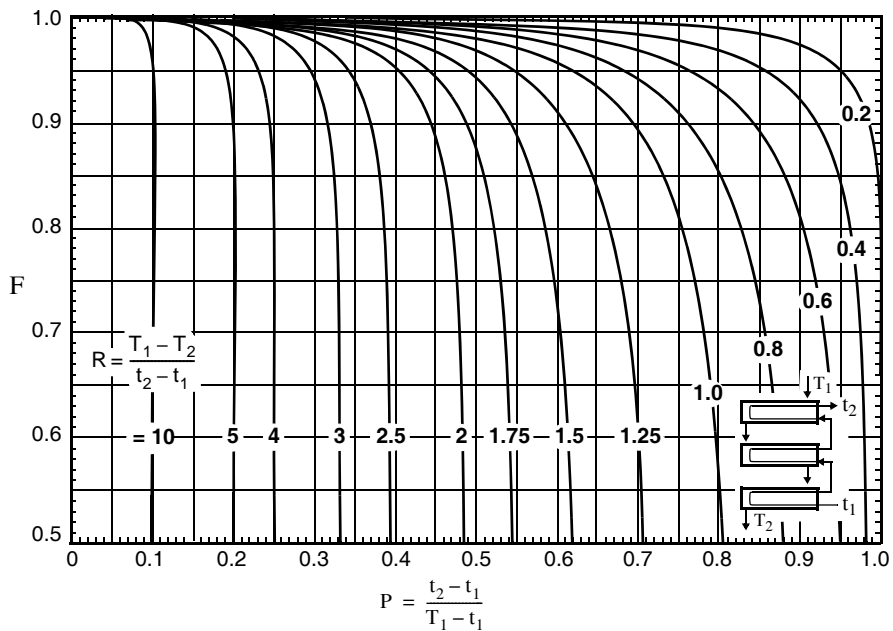
**FIGURA 11.34** Factor de corrección F para intercambiadores de calor de carcasa y tubos de un paso por carcasa y un múltiplo de dos pasos por los tubos.



**FIGURA 11.35** Factor de corrección F para intercambiadores de calor de carcasa y tubos de 2 pasos por carcasa y un múltiplo de 4 pasos por los tubos.



**FIGURA 11.36** Factor de corrección F para intercambiadores de calor de carcasa y tubos de 3 pasos por carcasa y un múltiplo de 6 pasos por los tubos.



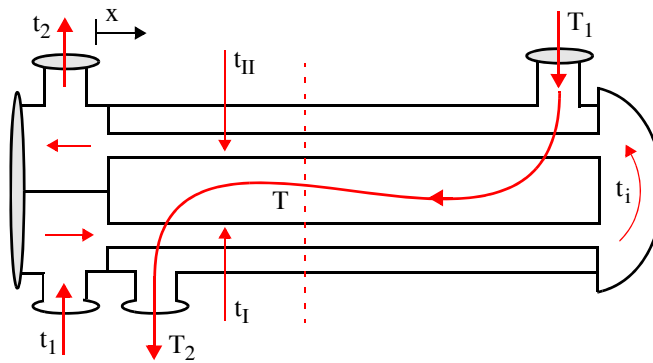
---

**Método MLDT**

---

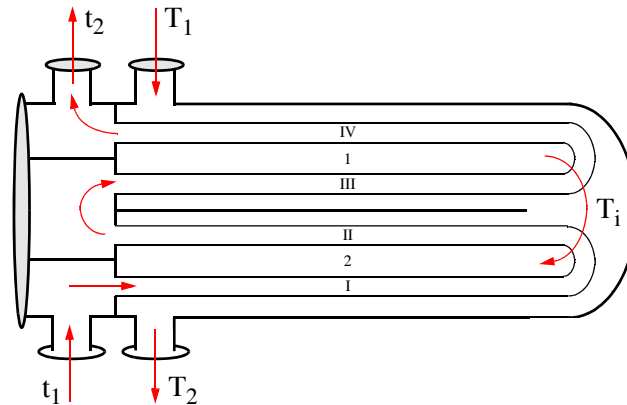
La explicación de que el valor de  $F$  mejora al aumentar el número de pasos por la carcasa se explica por la disminución (o eliminación) del efecto negativo de una inversión del salto de temperaturas en alguna zona del intercambiador, como se muestra en las figuras 11.37 a 11.39 con un ejemplo numérico [7].

**FIGURA 11.37** Intercambiador de carcasa y tubos 1-2 (un paso por la carcasa y dos por los tubos).



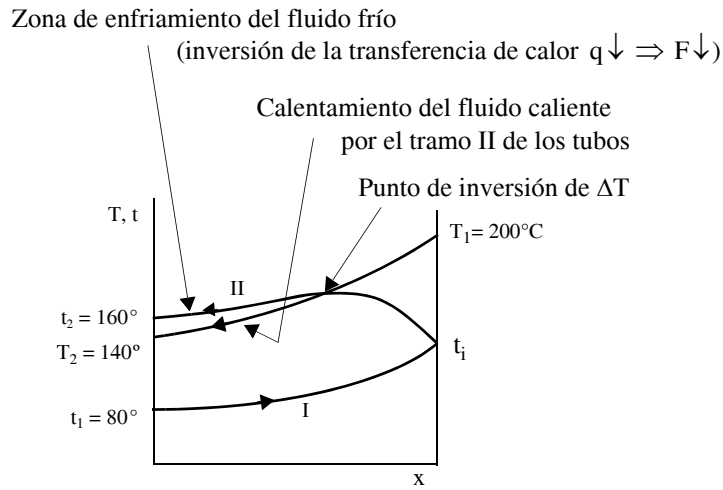
$$T_1 = 200^\circ\text{C}, T_2 = 140^\circ\text{C}, t_1 = 80^\circ\text{C}, t_2 = 160^\circ\text{C}$$

**FIGURA 11.38** Intercambiador de carcasa y tubos 2-4 (dos pasos por la carcasa y cuatro por los tubos).



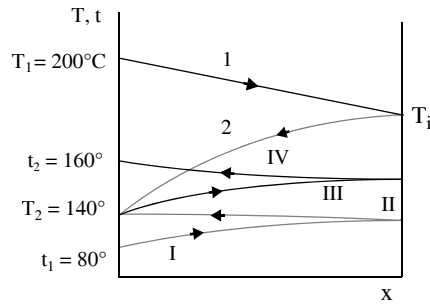
$$T_1 = 200^\circ\text{C}, T_2 = 140^\circ\text{C}, t_1 = 80^\circ\text{C}, t_2 = 160^\circ\text{C}$$

**FIGURA 11.39** Relación entre la inversión del salto térmico,  $F$ , y el número de pasos por carcasa.



(a) INTERCAMBIADOR 1-2 de la figura 11.37.

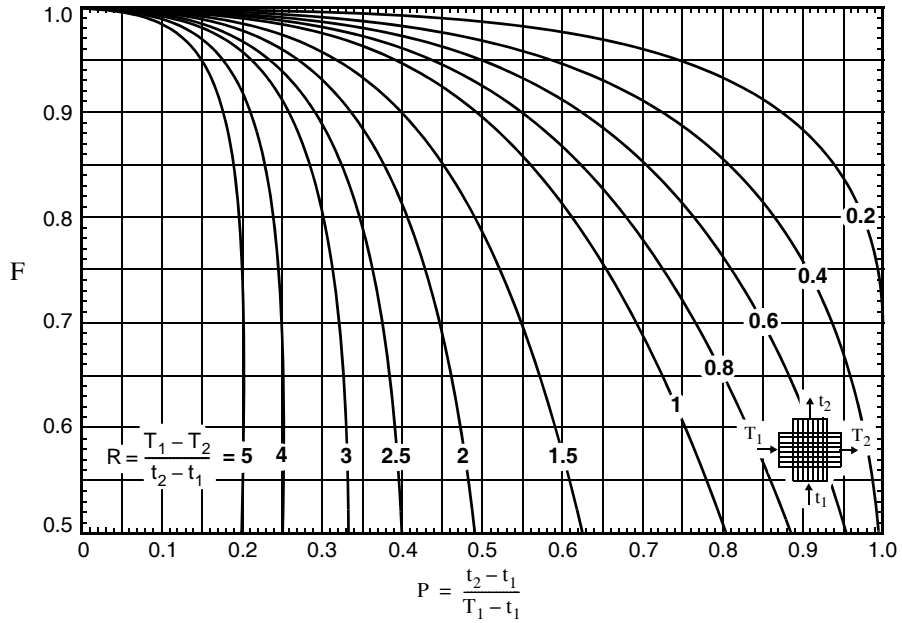
No hay inversión de la transferencia de calor, siempre  $\Delta T > 0$



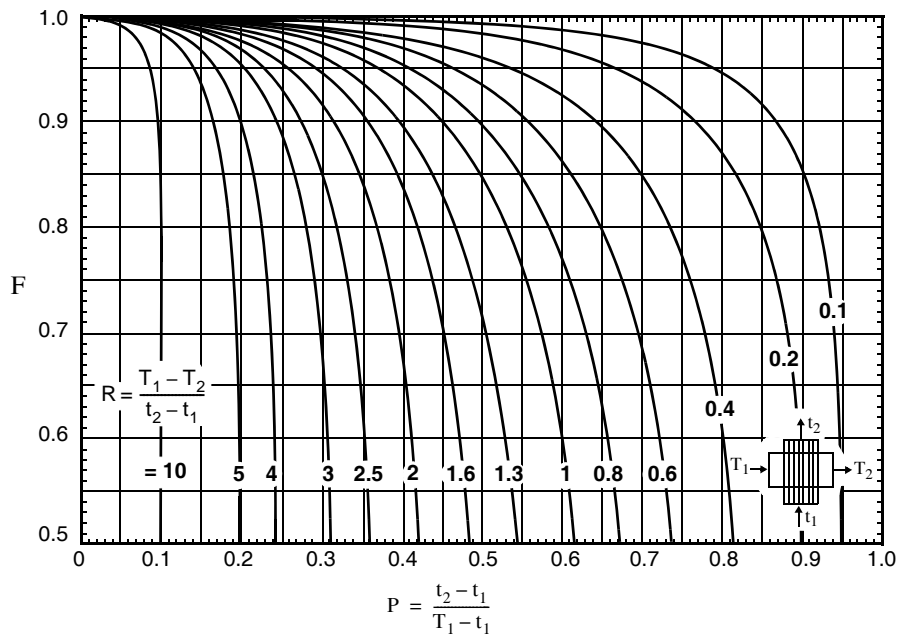
(b) INTERCAMBIADOR 2-4 de la figura 11.38.

A continuación se presentan las gráficas que dan el valor de  $F$  para el grupo también muy importante de intercambiadores de flujo cruzado. (Figs. 11.40 y 11.41 y 11.42, de flujo cruzado de paso único y Figs. 11.43 y 11.44 de flujo cruzado de dos pasos).

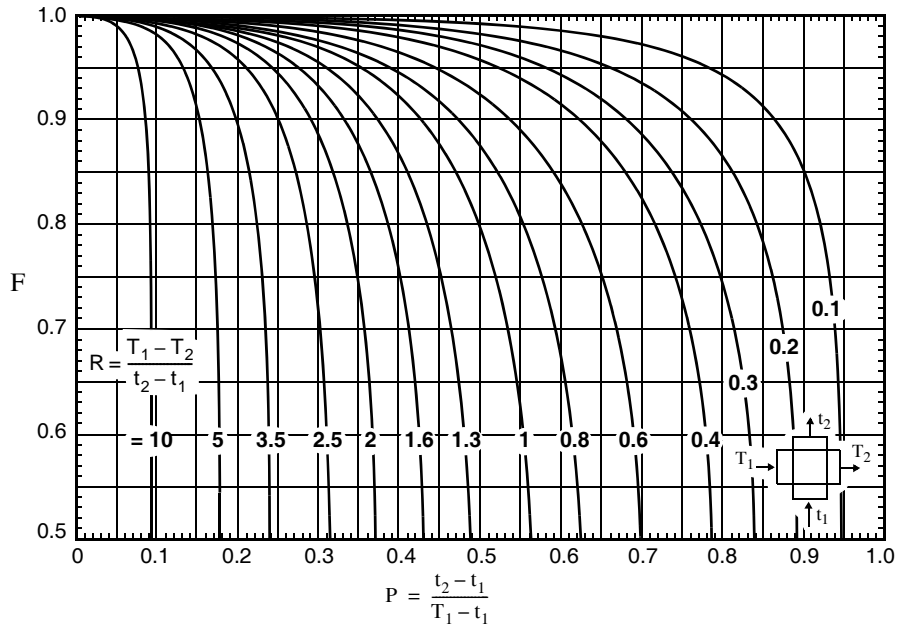
**FIGURA 11.40** Factor de corrección F para intercambiadores de calor de flujo cruzado de paso único con ambos fluidos sin mezclar.



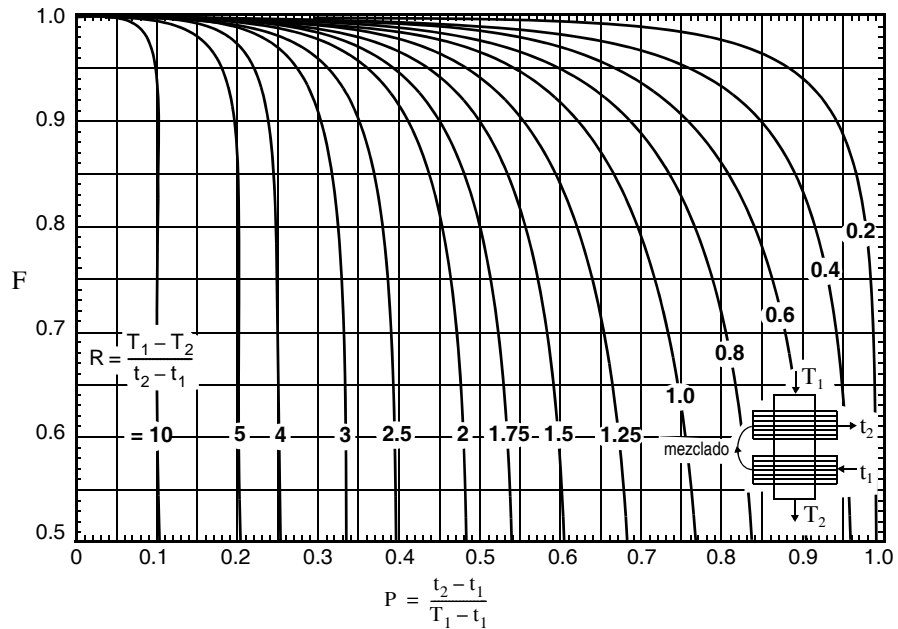
**FIGURA 11.41** Factor de corrección F para intercambiadores de calor de flujo cruzado de paso único con un fluido mezclado y otro sin mezclar.



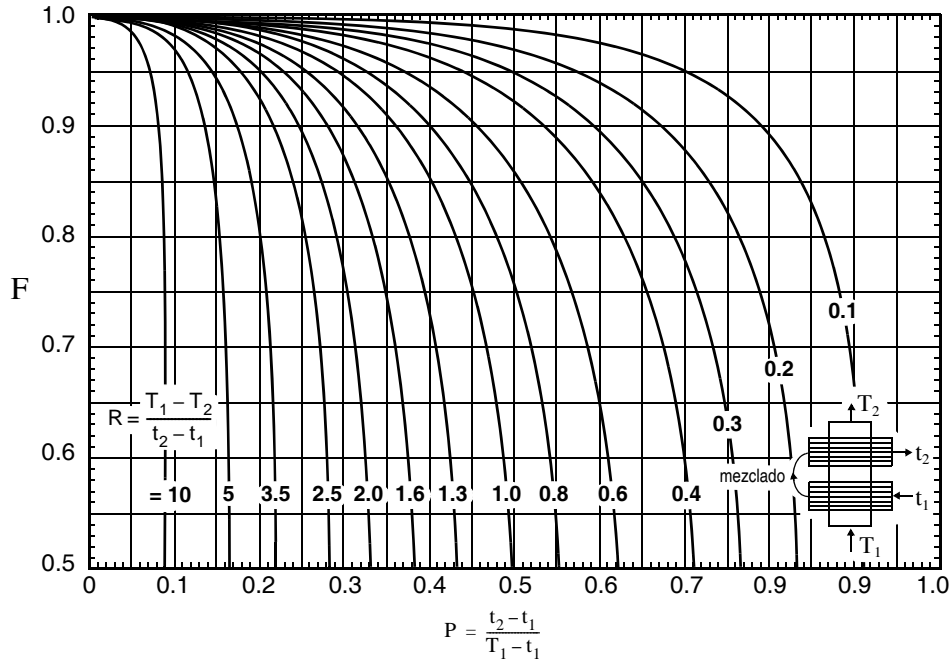
**FIGURA 11.42** Factor de corrección F para intercambiadores de calor de flujo cruzado de paso único con ambos fluidos mezclados.



**FIGURA 11.43** Factor de corrección F para intercambiadores de calor de flujo cruzado y doble paso con disposición a contracorriente.



**FIGURA 11.44** Factor de corrección F para intercambiadores de calor de flujo cruzado y doble paso con disposición en paralelo.



**Nota final.**— Si uno de los dos fluidos experimenta a lo largo del intercambiador una variación despreciable de la temperatura —por cambiar de fase o tener una capacidad calorífica mucho mayor que el otro fluido— entonces se demuestra que, para todo tipo de intercambiadores, se cumple  $F = 1$ . Este efecto se puede observar en todas las gráficas para  $F$  que se han presentado.

### Coeficiente global, U, variable

Aunque hasta aquí se ha supuesto que el coeficiente  $U$  era constante, en realidad varía con la posición en el intercambiador debido principalmente a la modificación con la temperatura de las propiedades termofísicas de los fluidos y materiales del intercambiador.

Si  $U$  varía linealmente con la temperatura de alguno de los fluidos o de la superficie de intercambio, varios autores [9], [10] recomiendan utilizar la expresión

$$q = AF \frac{U_2 \Delta T_1 - U_1 \Delta T_2}{\ln[(U_2 \Delta T_1)/(U_1 \Delta T_2)]} \quad (11.14)$$

siendo  $U_1$  y  $U_2$  los valores de  $U$  en los extremos del intercambiador donde el salto de temperaturas entre fluidos vale  $\Delta T_1$  y  $\Delta T_2$  respectivamente.

## El condensador de un frigorífico doméstico

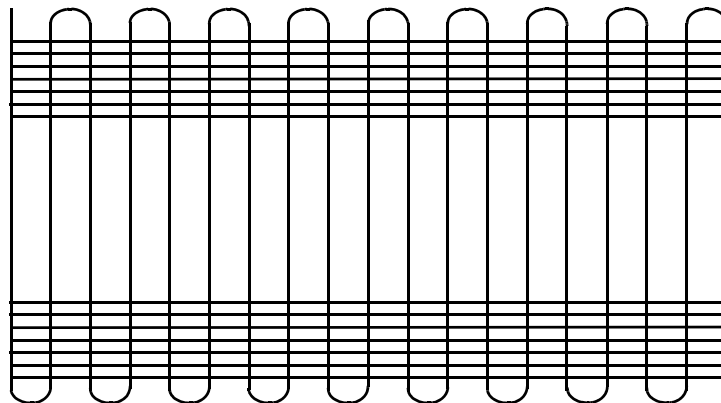
---

Con un ejemplo donde aplicar el método de análisis desarrollado previamente, MLDT, se ofrece el de un intercambiador familiar a todo el mundo. Es un caso particularmente sencillo de analizar porque los dos fluidos permanecen a temperatura constante (el refrigerante condensante por cambiar de fase y el aire ambiente por estar presente en gran cantidad).

Considérese el condensador habitual de un frigorífico doméstico, tal y como se presenta en la figura 11.45, compuesto por su serpentín, por el que circula el refrigerante, y varillas, que hacen el papel de aletas.

---

**FIGURA 11.45** Esquema de un condensador de hilo de un frigorífico doméstico.



El material del condensador es hierro soldado y sus dimensiones son:

Serpentín: Longitud: 14.74 m; diámetro exterior: 4.76 mm; espesor: 0.7 mm.

Varillas: Longitud: 1.27 m; diámetro: 1.30 mm; número: 130.

---

\*. Esto no es realmente cierto ya que el refrigerante sufre un proceso previo de desrecalentamiento y el aire que refrigera el condensador suele estar confinado y sufrir un calentamiento. No obstante, la aproximación no es descabellada y permite hacer un primer análisis rápido y sencillo.

---

### Método NTU- $\varepsilon$

---

La temperatura de condensación es 60 °C y la del aire ambiental 20 °C. Considerar que la eficiencia de las varillas es de 0.8.

Calcular el calor que se cede al ambiente en el proceso de condensación.

### Método NTU- $\varepsilon$

---

Es un método de análisis conveniente cuando se ignoran ambas temperaturas de salida. Es el típico problema de análisis de un intercambiador de calor al que se le modifican las condiciones de diseño y del que se pretende conocer su respuesta.

Se comienza definiendo la **eficiencia** de un intercambiador de calor como

$$\varepsilon \equiv \frac{q}{q_{\max}} \quad (11.15)$$

siendo  $q$  el calor intercambiado realmente en el equipo y  $q_{\max}$  un calor máximo ideal dado por la expresión (11.16)

$$q_{\max} = C_{\min}(T_{c,e} - T_{f,e}) \quad (11.16)$$

donde  $C_{\min}$  es la capacidad calorífica,  $\dot{m} c_p$ , más pequeña entre ambos fluidos.

La expresión (11.16) significa que si el área de intercambio de calor fuera infinita, el fluido de menor capacidad calorífica podría alcanzar a la salida una temperatura igual a la de entrada del otro fluido. Es fácil de ver en el intercambiador de calor a contracorriente sobre la figura 11.25e; allí se ve como la temperatura del fluido de menor capacidad calorífica, en ese caso el caliente, se aproxima a la salida a la de entrada del otro fluido. Si el intercambiador fuera infinitamente largo, el fluido caliente saldría a la temperatura de salida del frío, que es la mínima temperatura que puede alcanzar según la Termodinámica. Lo mismo sucederá si  $C_{\min}$  correspondiera al fluido frío, y también se puede extender el razonamiento a cualquier otro intercambiador. Aplicando simplemente el balance de energía

$$q = C_c (T_{c,e} - T_{c,s}) = C_f (T_{f,s} - T_{f,e})$$

que para  $q_{\max}$ , o bien  $C_c = C_{\min}$  y  $T_{c,s} = T_{f,e}$  o bien  $C_f = C_{\min}$  y  $T_{f,s} = T_{c,e}$ , se obtiene la ecuación (11.16).

---

## Intercambiadores de calor

---

Si se conoce  $\varepsilon$ , inmediatamente se puede calcular el calor real intercambiado por los fluidos,  $q = \varepsilon C_{\min} (T_{c,e} - T_{f,e})$ , y de ahí sus temperaturas de salida,  $T_{c,s}$  y  $T_{f,s}$ .

### Determinación de la eficiencia, $\varepsilon$

En la bibliografía [11] se demuestra que siempre se cumple  $\varepsilon = f(\text{NTU}, C_r)$ , siendo  $C_r \equiv C_{\min}/C_{\max}$  y dependiendo  $f$  de la configuración y de la circulación de los fluidos, y siendo NTU el número de unidades de transferencia definido como

$$\text{NTU} \equiv \frac{UA}{C_{\min}} = \left( \frac{U}{C_{\min}} \right) A \quad (11.17)$$

Diagram illustrating the components of NTU:

- capacidad del equipo (capacity of the equipment) points to  $U$
- tamaño (size) points to  $A$
- tarea a realizar (task to be performed) points to  $C_{\min}$
- configuración y estado de los fluidos (configuration and state of the fluids) points to  $C_{\min}$

La expresión particular de cada tipo de intercambiador no es fácil de obtener, salvo para los casos simples como el que se muestra a continuación a modo de ejemplo.

### Flujo paralelo

Sea, por ejemplo,  $C_{\min} = C_f$  (el razonamiento es el mismo para  $C_{\min} = C_c$ )

$$\varepsilon = \frac{q}{q_{\max}} = \frac{C_f(T_{f,s} - T_{f,e})}{C_f(T_{c,e} - T_{f,e})} = \frac{T_{f,s} - T_{f,e}}{T_{c,e} - T_{f,e}} \quad (11.18)$$

Del balance de energía se tiene

$$C_r \equiv \frac{C_{\min}}{C_{\max}} = \frac{(\dot{m}c_p)_f}{(\dot{m}c_p)_c} = \frac{T_{c,e} - T_{c,s}}{T_{f,s} - T_{f,e}} \quad (11.19)$$

En el método MLDT se llegó para este tipo de intercambiador a

$$\ln\left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right) = -UA\left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f}\right)$$

de donde

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{T_{c,s} - T_{f,s}}{T_{c,e} - T_{f,e}}\right) &= -\frac{UA}{C_{\min}}\left(1 + \frac{C_{\min}}{C_{\max}}\right) = -NTU(1 + C_r) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{T_{c,s} - T_{f,s}}{T_{c,e} - T_{f,e}} = \exp\left[-NTU(1 + C_r)\right] \end{aligned} \quad (11.20)$$

Se suma y resta  $T_{f,e}$  en el numerador del primer miembro de (11.20) y se sustituye  $T_{c,s}$  de (11.19)

$$\begin{aligned} &\frac{(T_{c,s} - T_{f,e}) + (T_{f,e} - T_{f,s})}{T_{c,e} - T_{f,e}} \\ &= \frac{[T_{c,e} - C_r(T_{f,s} - T_{f,e}) - T_{f,e}] + (T_{f,e} - T_{f,s})}{T_{c,e} - T_{f,e}} \\ &= \frac{(T_{c,e} - T_{f,e}) - (C_r + 1)(T_{f,s} - T_{f,e})}{T_{c,e} - T_{f,e}} = 1 - \varepsilon(C_r + 1) \end{aligned} \quad (11.21)$$

Igualando el miembro derecho de (11.21) al segundo miembro de (11.20) resulta

$$1 - \varepsilon(C_r + 1) = \exp\left[-NTU(1 + C_r)\right] \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{1 - \exp\left[-NTU(1 + C_r)\right]}{1 + C_r}}$$

Los resultados para otros intercambiadores están tabulados presentándose en la Tabla 11.2 para los intercambiadores más comunes y la representación gráfica de algunos de ellos en la figura 11.46. En la referencia [13] se presenta un método para determinar la eficiencia de un conjunto de intercambiadores a partir de la eficiencia individual de cada uno de ellos.

**Importante.** Si uno de los fluidos cambia de fase (ó  $C_i \gg \gg C_j$ )

$$\varepsilon = 1 - \exp(-NTU) \text{ para toda configuración}$$

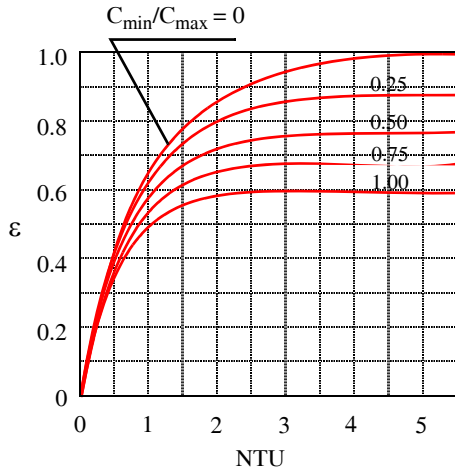
como se puede demostrar fácilmente a partir del método MLDT.

**Intercambiadores de calor**

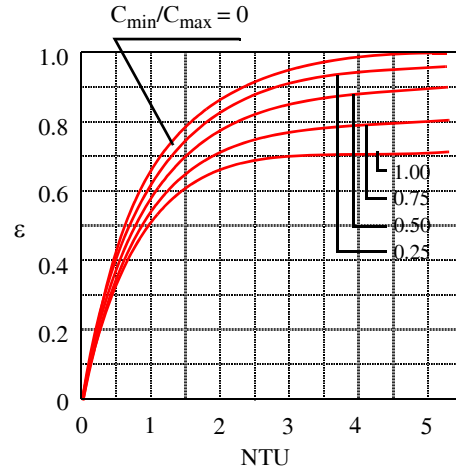
**TABLA 11.2** Fórmulas de la eficiencia de los intercambiadores más comunes [11] y [12].

<b>Configuración</b>	<b>Eficiencia</b>
Todo tipo de intercambiadores cuando $C_r = 0$	$\varepsilon = 1 - \exp(-NTU)$
Flujos paralelos	$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-NTU(1 + C_r)]}{1 + C_r}$
Contracorriente	$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-NTU(1 - C_r)]}{1 - C_r \exp[-NTU(1 - C_r)]}$
<b>Flujo cruzado, un solo paso</b>	
Ambos fluidos sin mezclar	$\varepsilon = 1 - \exp\left\{\frac{NTU^{0.22}}{C_r} \left[\exp(-C_r NTU^{0.78}) - 1\right]\right\}$
Ambos fluidos mezclados	$\varepsilon = \left[\frac{1}{1 - \exp(-NTU)} + \frac{C_r}{1 - \exp(-C_r NTU)} - \frac{1}{NTU}\right]^{-1}$
$C_{m\acute{a}x}$ mezclado, $C_{m\acute{i}n}$ sin mezclar	$\varepsilon = \frac{1}{C_r} \left\{1 - \exp\left[C_r (e^{-NTU} - 1)\right]\right\}$
$C_{m\acute{a}x}$ sin mezclar, $C_{m\acute{i}n}$ mezclado	$\varepsilon = 1 - \exp\left[\frac{1 - e^{-C_r NTU}}{C_r}\right]$
<b>Carcasa y tubos</b>	
Un paso por carcasa; 2, 4, 6, ... pasos por los tubos	$\varepsilon = \varepsilon_1 = 2 \left\{1 + C_r + (1 + C_r^2)^{1/2} \frac{1 + \exp[-NTU(1 + C_r^2)^{1/2}]}{1 - \exp[-NTU(1 + C_r^2)^{1/2}]}\right\}^{-1}$
n pasos por carcasa; 2n, 4n, 6n, ... pasos por los tubos	$\varepsilon = \left[\left(\frac{1 - \varepsilon_1 C_r}{1 - \varepsilon_1}\right)^n - 1\right] \left[\left(\frac{1 - \varepsilon_1 C_r}{1 - \varepsilon_1}\right)^n - C_r\right]^{-1}$

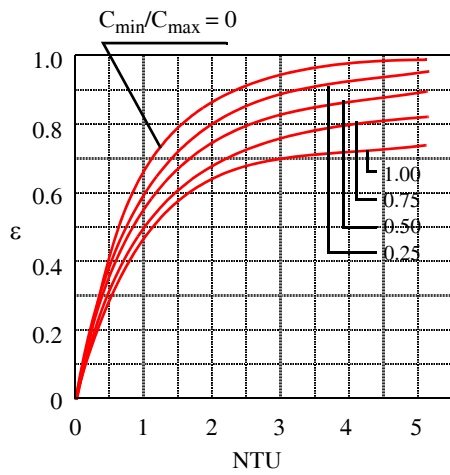
FIGURA 11.46 Representación gráfica de varios tipos de intercambiadores [11].



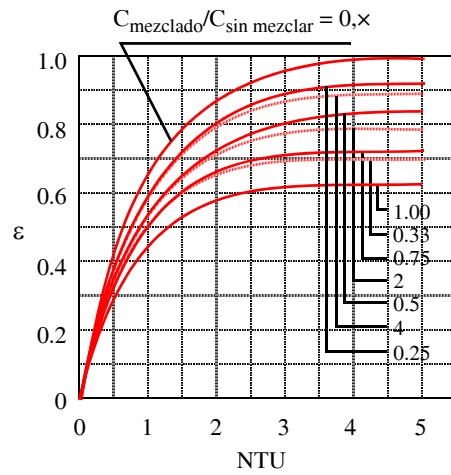
Eficiencia de un intercambiador de carcasa y tubos con un paso por carcasa y cualquier múltiplo de dos pasos por los tubos.



Eficiencia de un intercambiador de carcasa y tubos con dos pasos por carcasa y cualquier múltiplo de cuatro pasos por los tubos.



Eficiencia de un intercambiador de flujo cruzado y paso único con ambos fluidos sin mezclar.



Eficiencia de un intercambiador de flujo cruzado y paso único con un fluido mezclado y otro sin mezclar.

## Metodología de trabajo en intercambiadores de calor

---

Aunque tanto los dos métodos presentados como otros existentes [14] se pueden utilizar en diversas situaciones, como orientación general se puede decir lo siguiente:

### Diseño

Se conocen los caudales y las temperaturas de entrada y salida de ambos fluidos

1. Se elige el **tipo** de intercambiador según la **aplicación**.
2. Se calculan las **dimensiones** del equipo elegido según el método MLDT,

$$A = \frac{q}{UF \Delta T_{ml, cc}} .$$

### Análisis

El intercambiador está fijado y se conocen las condiciones de **entrada**, siendo lo más directo calcular la eficiencia por el método  $\epsilon$ -NTU y después el calor intercambiado y las temperaturas de salida de los fluidos. (El método MLDT exigiría iterar).

## Regeneradores

---

El funcionamiento de los regeneradores es muy diferente al de los intercambiadores respectivos analizados hasta aquí, por lo que exigen unos procedimientos distintos que se desarrollan seguidamente. Su principio de operación ya se ha descrito en la primera parte del capítulo. Estos intercambiadores pueden consistir en una matriz fija a través de la cual fluyen de manera alternada la corriente caliente y la corriente fría, o bien, en una rueda giratoria con distribuidores segmentados para ir alojando alternativamente ambos fluidos. Los regeneradores fijos hicieron su aparición en 1816 en los hornos industriales en forma de pilas de ladrillos alternados por donde pasaban los gases de combustión antes de su expulsión al ambiente y después el aire de la combustión que se precalentaba. El regenerador rotativo se desarrolló en 1919 y se usa para recuperar el calor residual principalmente en centrales térmicas y también en turbinas de gas y sistemas de aire acondicionado.

---

## Regeneradores

---

Si los elementos del regenerador (sean de matriz fija o giratorios) se consideran fijos en el espacio, eligiendo un sistema de coordenadas adecuado, el análisis es idéntico en ambos casos. Las ecuaciones que rigen su comportamiento son ecuaciones en derivadas parciales, ya que las temperaturas en el interior del intercambiador dependen de la posición y del tiempo. En general, estas ecuaciones se resuelven usando métodos numéricos en vez de analíticos. No obstante se verá como el uso de las variables adimensionales  $\varepsilon$  y NTU conduce a unas curvas semejantes a las de los recuperadores de calor. Para el desarrollo matemático siguiente se ha seguido principalmente la referencia [15].

En la mayor parte de los casos, los regeneradores se usan para flujos equilibrados, es decir, cuando las capacidades térmicas de flujo son iguales,  $C_c = C_f = C$ . La figura 11.47 muestra un esquema de un regenerador de matriz de placas paralelas de las que se coge una longitud diferencial  $dx$ . El semiespesor de la pared es  $\delta$ , la profundidad  $l$  y la temperatura de la matriz,  $T_M$ , se considera constante a través de su espesor  $\delta$ . La matriz está expuesta al flujo frío a temperatura  $T_f$  desde el instante  $t = 0$  hasta  $\tau$ , y al flujo caliente a temperatura  $T_c$  desde el instante  $t = \tau$  hasta  $2\tau$ . La variación de temperatura de ambas corrientes resulta

$$CdT_f = h l dx (T_M - T_f) \quad (11.22a)$$

$$CdT_c = h l dx (T_c - T_M) \quad (11.22b)$$

para corrientes en contracorriente. Se ha supuesto que los coeficientes de transferencia de calor de las dos corrientes son iguales.\* Manipulando matemáticamente se tiene

$$C \frac{\partial T_f}{\partial x} = hl(T_M - T_f) \quad (11.23a)$$

$$C \frac{\partial T_c}{\partial x} = hl(T_c - T_M) \quad (11.23b)$$

Cuando el fluido frío pasa por el intercambiador, la matriz se enfría. La capacidad calorífica de un elemento matriz de longitud  $dx$  es  $\rho c \delta l dx$ ; así, el balance de energía sobre un intervalo de tiempo  $dt$  durante el cual la variación de temperatura de la matriz es  $dT_M$  da por resultado

$$-\rho c \delta l dx dT_M = h l dx (T_M - T_f) dt \quad (11.24)$$

---

\*. Realmente existen muchas hipótesis en el análisis. Una relación completa de las mismas se encuentra en la referencia [16].

---

**Intercambiadores de calor**

---

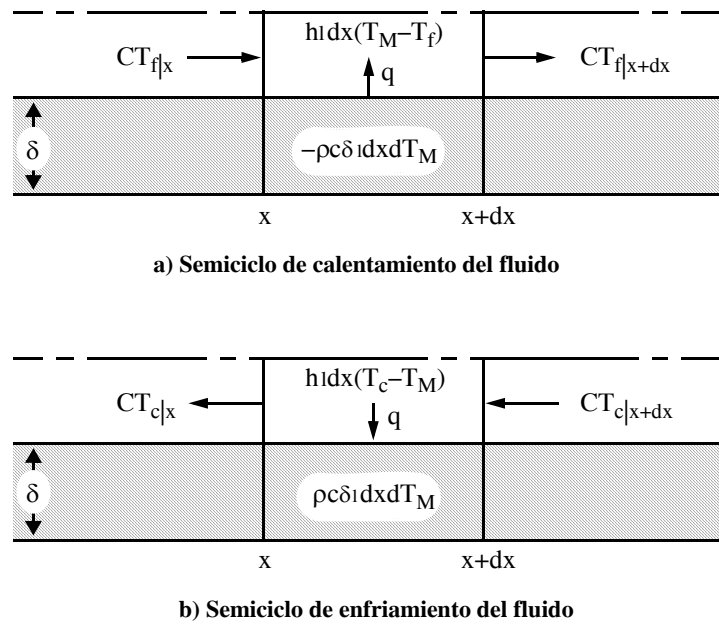
Cuando la conducción axial es muy pequeña de la ecuación (11.24) se obtiene directamente la ecuación (11.25a)

$$- \rho c \delta l \frac{\partial T_M}{\partial t} = h l (T_M - T_f) \quad (11.25a)$$

y análogamente, cuando el fluido caliente calienta la matriz,

$$+ \rho c \delta l \frac{\partial T_M}{\partial t} = h l (T_c - T_M) \quad (11.25b)$$

**FIGURA 11.47** Volúmenes de control elementales para el análisis de un regenerador.



Reescribiendo las ecuaciones (11.23a) y (11.25a) en función de las variables adimensionales independientes  $x^* = x/L$ , donde  $L$  es la distancia recorrida por el gas en el regenerador, y  $t^* = t/\tau$  se obtiene, para  $0 < t < \tau$ ,

$$C \frac{\partial T_f}{\partial x^*} = h l L (T_M - T_f) = -C_R \frac{\partial T_M}{\partial t^*} \quad (11.26)$$

---

## Regeneradores

---

donde  $C_R$  es la capacidad térmica del regenerador dividida por el tiempo de exposición. Si la matriz tiene una masa  $M$  y su calor específico es  $C$ ,  $C_R$  viene dada por

$$C_R = \frac{\rho c \delta l L}{\tau} = \frac{cM}{\tau}$$

independiente de la geometría de la matriz. Dividiendo la Ec. (11.26) entre  $C$  se obtiene

$$\frac{\partial T_f}{\partial x^*} = NTU(T_M - T_f) = -R \frac{\partial T_M}{\partial t^*} \quad (11.27)$$

donde  $NTU \equiv hL/C$  y  $R \equiv C_R/C$ .

Análogamente, para  $\tau < t < 2\tau$ ,

$$C \frac{\partial T_c}{\partial x^*} = hL(T_c - T_M) = C_R \frac{\partial T_M}{\partial t^*} \quad (11.28)$$

$$\frac{\partial T_c}{\partial x^*} = NTU(T_c - T_M) = R \frac{\partial T_M}{\partial t^*} \quad (11.29)$$

Así pues, análogamente a los recuperadores, aparecen los parámetros adimensionales  $NTU$  y  $R$ .  $R$  es semejante aunque no idéntico a  $C_r$  de los recuperadores, por lo que se ha preferido utilizar una notación distinta. Las condiciones de contorno son

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad ; \quad 0 < t < \tau & ; \quad T_f = T_{f,ent} \\ x = L & \quad ; \quad \tau < t < 2\tau & ; \quad T_c = T_{c,ent} \end{aligned}$$

No hay condición inicial sino que la solución debe ser periódica. Las ecuaciones diferenciales parciales (11.27) y (11.29) se pueden resolver numéricamente para las temperaturas de salida de los fluidos (que obviamente deben ser iguales). La solución se muestra en la figura 11.48 en forma de eficiencia

$$\varepsilon = \frac{\bar{T}_{f, sal} - T_{f, ent}}{T_{c, ent} - T_{f, ent}}$$

donde  $\bar{T}_{f, sal}$  es la media calculada sobre un semicírculo.

Si el intercambiador es giratorio con una velocidad angular  $\omega$  y la matriz está expuesta al flujo caliente desde el ángulo  $\theta = 0$  hasta  $\Theta$  y al flujo frío desde  $\theta = \pi$  hasta  $\pi + \Theta$ , los resultados anteriores son válidos reemplazando  $t$  por  $\theta/\omega$  y  $\tau$  por  $\Theta/\omega$ .

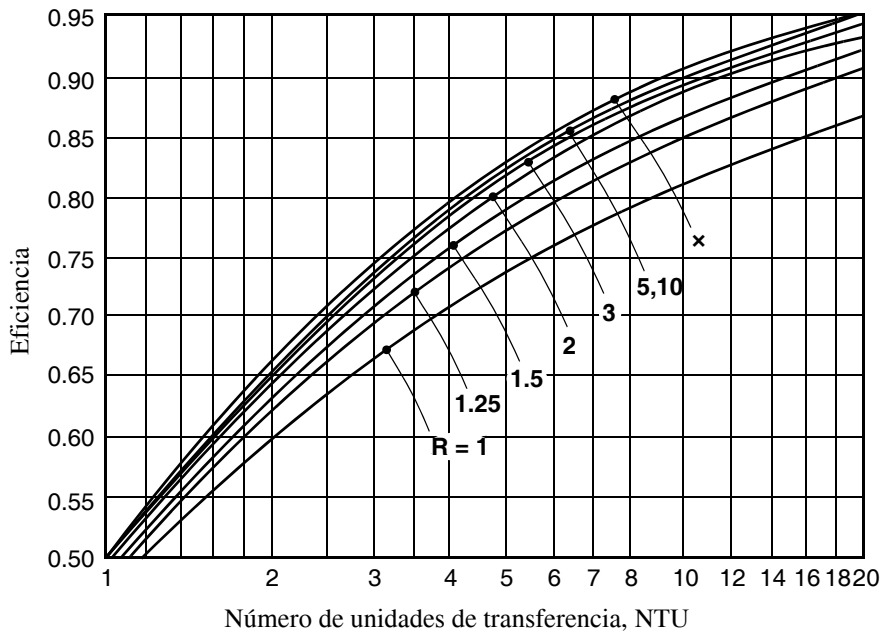
Se pueden obtener soluciones analíticas para dos casos límite.

**Caso 1**

$R \gg NTU$ . Cuando el tiempo característico  $\tau$  es pequeño, lo cual se obtiene en la práctica por medio de un intercambiador rotatorio que gira a una velocidad suficientemente elevada, las Ecs. (11.27) y (11.29) muestran que  $\partial T_M / \partial t^*$  tiende a cero, es decir, que la temperatura de la matriz depende sólo de la distancia axial y no del tiempo (o del ángulo  $\theta$  en el caso rotatorio). Sumando las Ecs. (11.26) y (11.28) se obtiene

$$hL(T_c - T_f) = C \left( \frac{dT_c}{dx^*} + \frac{dT_f}{dx^*} \right)$$

**FIGURA 11.48** Eficiencia de un regenerador de contracorriente equilibrada [15], [16].



Como los flujos son equilibrados  $dT_c/dx^* = dT_f/dx^*$ ; por lo tanto,

$$hL(T_c - T_f) = 2C \frac{dT_c}{dx^*} = 2C \frac{dT_f}{dx^*}$$

que equivale al caso de un recuperador a contracorriente de flujos equilibrados ( $C_f = C_c$ ) y con  $U = h/2$ . De la relación  $\epsilon$ -NTU para este tipo de intercambiadores

con  $C_r = 1$  se obtiene  $\epsilon = \frac{NTU}{1 + NTU}$  (ver tabla 11.2).

Cuando los coeficientes de transferencia de calor de los lados caliente y frío no son iguales, se puede demostrar que la relación  $\varepsilon = NTU/(1+ NTU)$  conserva su validez si

$$NTU = \frac{UIL}{C} \quad \text{y} \quad \frac{1}{U} = \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_f}$$

Obsérvese que el área de transferencia  $IL$  corresponde a una sola corriente y, por tanto, es igual a  $\Theta/2\pi$  del área total del regenerador en caso de ser rotativo.

## Caso 2

$NTU \gg R$ . Cuando  $h$  es grande podemos hacer  $T_c = T_M$  y, de la Ec. (11.29)

$$\frac{\partial T_M}{\partial x^*} = R \frac{\partial T_M}{\partial t^*} = \frac{\partial T_M}{\partial (t^*/R)}$$

que establece que  $T_M$  no es función de  $x^*$  o de  $t^*$  de manera independiente, sino sólo de la combinación  $x^* + (t^*/R)$ . En forma similar, en el ciclo frío, de la ecuación (11.27),  $T_M$  es sólo función de  $x^* - (t^*/R)$ .

El resultado es que un frente de temperatura se desplaza como una onda a través del regenerador. Mientras el flujo caliente pasa por la matriz, un frente caliente avanza en la dirección  $-x$  (ver figura 11.47b); en el otro semiciclo el frente frío avanza en dirección  $+x$  (figura 11.47a).

Es importante conocer si los frentes tienen el tiempo suficiente para recorrer toda la matriz. Para que esto ocurra es necesario que  $x^* = t^*/R$  para  $x^* = 1$  y  $t^* = 1$ ; o sea,

$$R = \frac{cM}{\dot{m}c_p\tau} = 1 \quad (11.30)$$

La ecuación (11.30) proporciona la combinación de longitud y semi periodo necesaria para que el frente recorra exactamente la longitud de la matriz. Si  $R$  es mucho mayor que la unidad, o la matriz es innecesariamente larga o la velocidad de rotación es excesiva.

Soluciones para situaciones mucho más generales se encuentran en la bibliografía [17], [18].

## Métodos de aumento de la transferencia de calor

---

El intentar aumentar el calor intercambiado entre los fluidos ha sido y sigue siendo una preocupación constante de los diseñadores de intercambiadores de calor. Para lograrlo, según indica la fórmula (11.10) se puede actuar sobre tres factores:

1. Sobre las resistencias térmicas de los mecanismos de transmisión de calor intervinientes y en particular sobre los coeficientes de convección. Para esto último se actúa sobre las superficies y/o sobre los fluidos.
2. Sobre el área de intercambio. Ese es el objetivo principalmente de las aletas y también de otras actuaciones sobre las superficies como ondulaciones y acanalamientos.
3. Sobre el salto medio de temperaturas. Eso, como se explica al introducir el factor  $F$  del método MLDT se consigue aproximando el sentido de circulación de los fluidos al de contracorriente.

Un esquema de las más habituales actuaciones que se hacen sobre las superficies y los fluidos se presenta seguidamente e información más detallada se puede encontrar, entre otras, en las referencias [19] a [21].

### Sobre la superficie

- Extensión de la superficie (aletas)
- Aumento de la rugosidad
- Acanalamiento
- Dispositivos para aumentar la turbulencia
- Vibraciones de la superficie
- Rotación de la superficie.

### Sobre los fluidos

- Vibración
- Aumento de la velocidad
- Aditivos
- Campos electrostáticos.

## Referencias

---

1. G. Walker  
*Industrial Heat Exchangers. A Basic Guide*  
Chemical Engineering. McGraw–Hill, New York, 1982.
2. W. M. Kays, and A. L. London  
*Heat Transfer and Flow–Friction Characteristics of Some Compact Heat–Exchanger Surfaces*  
Transactions of ASME, vol. 72, p. 1075, 1950.
3. M. N. Özisik  
*Heat Transfer. A Basic Approach*  
McGraw–Hill, New York, 1985.
4. A. Zanker  
*Predict fouling by nomograph*  
Hydrocarbon processing, p. 145, march 1978.
5. B. Thonon, and J. M. Grillo  
*Cooling Water Fouling of Compact Heat Exchangers*  
2nd. European Thermal–Sciences, Roma, may 1996.
6. J. Taborek, G. F. Hewitt, and N. Afgan  
*Heat Exchangers. Theory and Practice*  
Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1983.
7. D. Kern  
*Procesos de transferencia de calor*  
CECSA, México, 1965.
8. R. A. Bowman, A. C. Mueller, and W. M. Nagle  
*Mean Temperature Difference in Design*  
Transactions of the ASME, vol. 62, p. 283, 1940.
9. A. P. Colburn  
*Mean Temperature Difference and Heat Transfer Coefficient in Liquid Heat Exchangers*  
Industrial and Engineering Chemistry, vol. 25, p. 873, 1933.
10. K. Gardner, and J. Taborek.  
*Mean Temperature Difference: A Reappraisal*  
AIChE Journal, vol. 23, p. 777, 1977.
11. W. M. Kays and A. L. London  
*Compact Heat Exchangers*  
McGraw–Hill, New York, 1984.
12. F. Incropera, and P. de Witt  
*Fundamentals of Heat and Mass Transfer*  
Wiley, New York, 1990.

13. J. D. Domingos  
*Analysis of Complex Assemblies of Heat Exchangers*  
International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 12, p. 537, 1969.
14. R. K. Shah, and A. C. Mueller  
*Heat Exchangers, Cap. 4 del Handbook of Heat Transfer Applications. Rohsenow, Hartnett and Ganic (eds.)*  
McGraw-Hill, New York, 1985.
15. A. F. Mills  
*Transferencia de Calor*  
Irwin, Madrid, 1995
16. R. S. Shah  
*Thermal Design Theory for Regenerators*  
*Heat Exchangers. Thermal-Hydraulic Fundamentals and Design. S. Kakaç, A. E. Bergles, F. Mayinger (eds.)*  
Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1981.
17. F. E. Romie  
*A Table of Regenerator Effectiveness*  
Journal of Heat Transfer, vol. 112, p. 497, 1990.
18. T. J. Lanbertson  
*Performance Factors of a Periodic-Flow Heat Exchanger*  
Transactions of ASME, vol. 80, p. 586, 1958.
19. C. A. Balaras  
*A Review of Augmentation Techniques for Heat Transfer Surfaces in Single Phase Heat Exchangers*  
Energy, vol. 15, p. 899, 1990.
20. R. L. Webb  
*Enhancement of Single Phase Heat Transfer*  
*Handbook of Single Phase Convective Heat Transfer; S. Kakaç, R. K. Shah, and W. Aung (eds.); Cap. 17*  
Wiley, New York, 1987.
21. S. Kakaç, A. E. Bergles, and F. Mayinger  
*Heat Exchangers. Thermal-Hydraulic Fundamentals and Design; pp. 819-911.*  
Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1981.

---

## Síntesis del capítulo

---

- Los intercambiadores de calor son equipos para que varias sustancias, casi siempre dos fluidos, intercambien calor de la forma más eficiente y económica posible. Los más utilizados son los llamados recuperativos, donde una pared sólida separa ambos fluidos. De entre ellos, por razones históricas, económicas y constructivas, los más usados son los de tubos y después, difundiendo cada vez más su uso, los de placas.
- Los dos **elementos principales** que determinan, desde el punto de vista térmico, el funcionamiento de un intercambiador (calor intercambiado) son:

1. El **coeficiente global de transmisión de calor**, que es su **conductancia por unidad de área**. Es, por tanto, un valor local y tiene dimensiones de coeficiente de convección.

Aunque se suele considerar constante a lo largo del intercambiador, por sencillez de cálculo, realmente varía a lo largo del mismo y si su variación es importante no se debe ignorar.

2. El **sentido de circulación de ambos fluidos** y, a él ligado, sus perfiles de temperatura. El sentido más eficiente es el de contracorriente, tomándose como una referencia óptima ( $F = 1$ ), y el menos eficiente el de flujos paralelos. Dicho de otra manera, se trata de conseguir el **máximo salto medio de temperatura**, entre ambos fluidos.

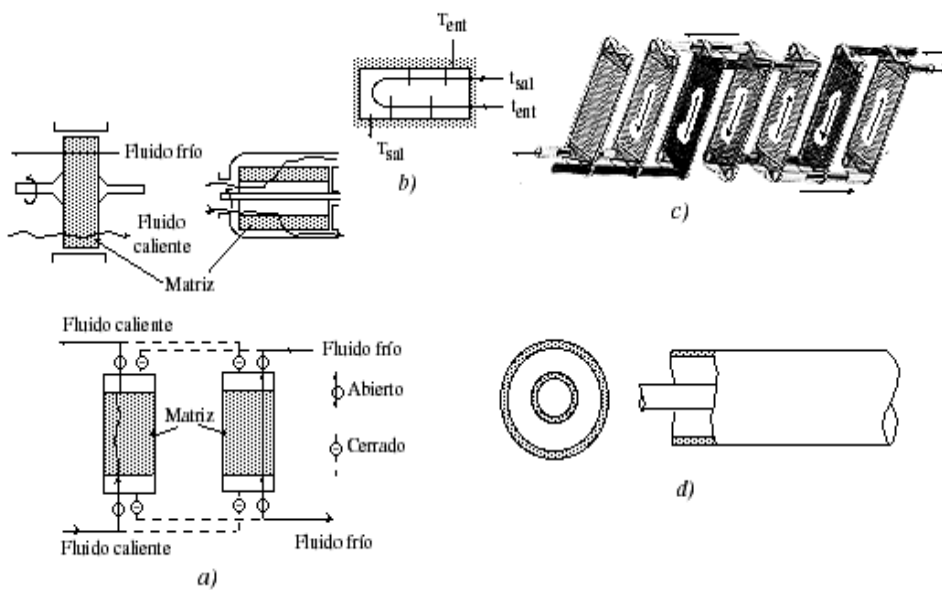
- La ley cinética fundamental de los intercambiadores de calor no es más que una nueva versión de la Ley de Ohm

$$q = UA \Delta T_m = \frac{\Delta T_m}{R}$$

- La magnitud física NTU indica si el intercambiador está convenientemente dimensionado; si su capacidad, UA, es adecuada para la tarea que debe realizar, proporcional a  $C_{\min}$ . Por tanto, el orden de magnitud de NTU debe ser la unidad, y su valor más habitual suele estar entre 2 y 3.

# Cuestiones

1. Debajo de cada figura poner el nombre del tipo de intercambiador de calor representado:



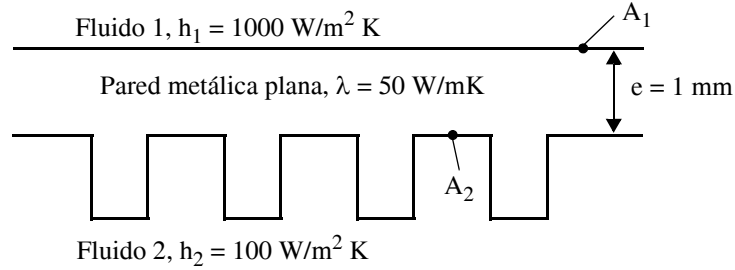
2. Definir matemáticamente y con claridad el concepto de **compacidad** de un intercambiador de calor.
3. Obtener la expresión que da la resistencia a la convección en una superficie aleteada.
4. Calcular el coeficiente global de transferencia de calor referido a la superficie 1,  $U_1$ , en el intercambiador de calor de la figura. Despreciar el ensuciamiento.

Aletas:  $\eta_a = 0.8$ ,  $\frac{A_a}{A_2} = 0.9$ ,  $A_2$ : área total (tubo + aletas) en el lado 2;  $A_2 = 10 A_1$

---

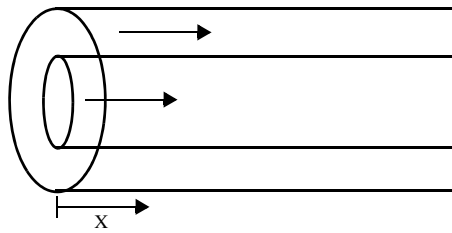
**Cuestiones**

---



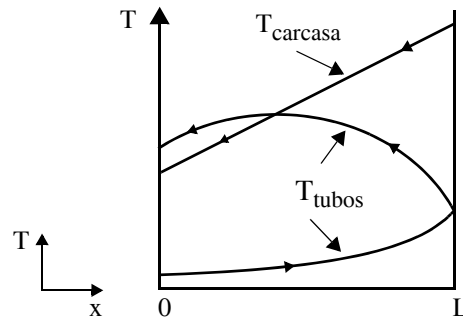
5. *Demostrar que en un intercambiador de calor de flujos paralelos, si ambos fluidos tienen la misma capacidad calorífica,  $C_h = C_c$ , se cumple que*

$$T_h + T_c = \text{constante a lo largo del eje X del intercambiador.}$$



6. *¿Cuál es el significado físico del factor de corrección del salto medio logarítmico de temperaturas,  $F$ ?*
7. *Demostrar que  $q = \bar{U} A \Delta T_{lm} (F = 1)$  para un evaporador, sin importar la disposición de los flujos (paralelos, a contracorriente, cruzados o cualquier otra).*

8. *Un intercambiador de calor de carcasa y tubos 1-2 presenta el perfil térmico que aparece en la figura. ¿Es posible este perfil de temperaturas? En caso afirmativo, ¿es un intercambiador*



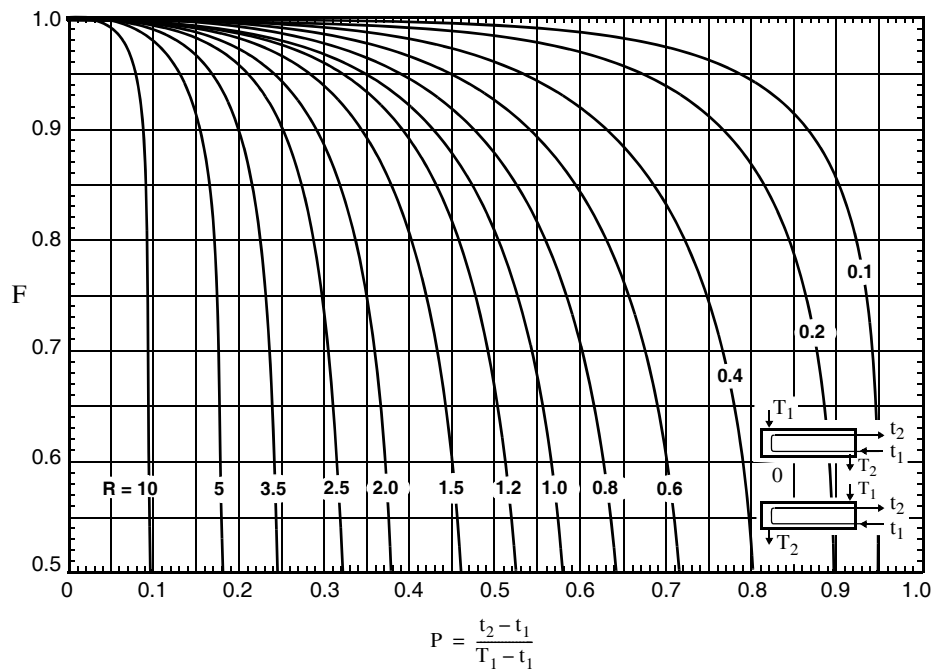
---

**Cuestiones**

---

*adecuado? Justificar convenientemente las respuestas.*

- 9.** *Para una aplicación en la que deben intercambiar calor dos líquidos se ha elegido un intercambiador convencional de carcasa y tubos con un paso por la carcasa y dos por los tubos. Para las condiciones térmicas planteadas, el valor del factor de corrección  $F$ , que aparece en la figura adjunta, toma el valor de 0.6 ¿Está bien elegido el tipo de intercambiador de calor en este caso? ¿por qué?*



*¿Qué deberá hacer el diseñador del intercambiador de calor, si desea utilizar un intercambiador de carcasa y tubos?*

- 10.** *Demostrar que cuando en un intercambiador de calor uno de los fluidos cambia de fase, se cumple siempre  $\varepsilon = 1 - \exp(-NTU)$ .*
- 11.** *¿Cuáles son los métodos de cálculo más adecuados para diseñar o para analizar el comportamiento de un intercambiador de calor?*

---

# Problemas

---

1. Un intercambiador de calor de flujo cruzado y un paso utiliza gases calientes de escape (mezclados) para calentar 3 kg/s de agua (sin mezclar) de 30 °C a 80 °C. Los gases, cuyas propiedades termofísicas pueden asimilarse a las del aire, entran a una temperatura de 225 °C y salen a 100 °C respectivamente. Si el coeficiente global de transferencia de calor es de 200 W/m<sup>2</sup>·K, determinar el área de intercambio necesaria.
  
2. Considérense las condiciones de flujo y el coeficiente global de transferencia de calor del problema 1 para el caso de un intercambiador de calor concéntrico en flujo paralelo, en el cual ambos fluidos están separados por un tubo de pared delgada de 100 mm de diámetro.
  - a) Determinar la longitud del intercambiador para que se alcancen las temperaturas requeridas.
  - b) Suponiendo que el flujo de agua que circula por el tubo interior presente condiciones de pleno desarrollo, estimar el coeficiente de convección del lado agua.
  - c) Si la longitud del intercambiador es el doble del valor calculado en el apartado (a), determinar la potencia transferida y las temperaturas de salida de ambos fluidos, suponiendo que el coeficiente global de transferencia de calor y las temperaturas de entrada son las mismas que antes.
  - d) Si el mismo intercambiador del enunciado trabaja a contraflujo ¿cuál es la reducción en longitud respecto a la calculada en (a)?
  
3. En un intercambiador de carcasa y tubos, con una carcasa y dos pasos por tubo se condensa vapor de agua a 0.14 bar. El intercambiador está formado por 130 tubos de latón. Las dimensiones de los tubos son: 2 m de largo por paso, diámetro interior 13.4 mm. y diámetro exterior 15.9 mm. Por el interior de los tubos circula agua fría con una velocidad media de 1.25 m/s, que

---

**Problemas**

---

entra al intercambiador a una temperatura de 20 °C. El coeficiente de convección en el lado vapor vale 13500 W/m<sup>2</sup>·K. Calcular el coeficiente global de transferencia de calor, la temperatura de salida del agua y el caudal de condensado.

4. Un intercambiador de carcasa y tubos, con un paso por carcasa y cuatro pasos por tubo se utiliza para calentar 10000 kg/h de agua de 16 °C a 84 °C con aceite industrial que circula por la carcasa. El aceite entra a 160 °C y sale a 94 °C, con un coeficiente de convección promedio de 400 W/m<sup>2</sup>·K. El agua circula por 11 tubos de latón de diámetro interior 22.9 mm y diámetro exterior 25.4 mm. Suponiendo condiciones de flujo plenamente desarrollado, calcular la longitud por paso de tubo necesaria para que se cumplan las condiciones de diseño.
  
5. Se propone un sistema para generación de energía eléctrica aprovechando los gradientes de temperatura del agua del mar, basado en un ciclo de potencia convencional y pensado para ciertos lugares donde el agua del mar se encuentra aproximadamente a 300 K en la superficie y a 280 K a cierta profundidad. El agua más caliente se utiliza como foco caliente para el evaporador, y el agua fría como foco frío para condensar el fluido de trabajo. Considérese una planta con una potencia de salida de 2 MW y cuya eficiencia sea del 3 %. El evaporador es un intercambiador de carcasa sencilla con muchos tubos. Si el fluido de trabajo se evapora a 290 K absorbiendo calor del agua de mar, que entra a 300 K y sale a 292 K ¿cuál es el área de intercambio necesaria? ¿qué caudal de agua es necesario que pase por el evaporador? El coeficiente global de transferencia de calor vale 1200 W/m<sup>2</sup>·K.
  
6. Debe diseñarse un intercambiador de carcasa y tubos para calentar 2.5 kg/s de agua de 15 °C a 85 °C. El proceso se realiza haciendo circular aceite caliente por la carcasa, disponible a 160 °C. Se sabe que la circulación de aceite produce un coeficiente de convección promedio de 400 W/m<sup>2</sup>·K en el exterior de los tubos. Los tubos son de pared delgada, con diámetro de 25 mm y pasan ocho veces por la carcasa. Si el aceite abandona el intercambiador a 100 °C ¿cuál es su caudal? ¿Cuál debe ser la longitud total de cada tubo? ¿Cuánto debe medir la carcasa? Ayudas:  $L/D \gg 60$ . El número de tubos adecuado a las pérdidas de carga es 10.

---

**Problemas**

---

7. Hay que diseñar un intercambiador de calor para enfriar 1.39 kg/s de glicerina ( $c_p = 2.442 \text{ kJ/kg K}$ ) desde 323 K hasta 303.4 K, con 9.72 kg/s de agua fría ( $c_p = 4.187 \text{ kJ/kg K}$ ), cuya temperatura de entrada es 15 °C. Si el coeficiente global de transferencia de calor es en cualquier caso  $\bar{U} = 1.7 \text{ kW/m}^2\cdot\text{K}$ , determinar la superficie de intercambio necesaria para cada una de estas dos opciones:
- Intercambiador de dos pasos en carcasa y cuatro pasos de tubos, circulando el agua fría por el interior de los tubos y la glicerina por la carcasa.
  - Intercambiador de flujos cruzados con ambos fluidos sin mezclar.
8. El condensador de una central termoeléctrica de 1 GW es un intercambiador de calor en el que el vapor se condensa transformándose en agua líquida. Supóngase una construcción de carcasa y tubos con un solo paso de carcasa y 30000 tubos a dos pasos. Los tubos son de pared delgada y diámetro 25 mm. El vapor condensa en su superficie exterior con un coeficiente de convección de  $\bar{h}_e = 11000 \text{ W/m}^2\text{K}$ . La potencia que debe intercambiarse son 2 GW, lo que se consigue haciendo circular agua de refrigeración a través de los tubos con un caudal total  $\dot{m} = 3 \cdot 10^4 \text{ kg/s}$ . El agua entra a 20 °C y el vapor condensa a 50 °C. ¿Cuál es la temperatura de salida del agua? ¿Qué longitud de tubo  $L$  se requiere por paso?
9. Un intercambiador de doble tubo en contracorriente se usa para enfriar el aceite lubricante de una turbina de gas. El caudal de agua de refrigeración a través del tubo interior ( $D_i = 25 \text{ mm}$ ) es 0.2 kg/s. El caudal de aceite por el anillo exterior ( $D_e = 45 \text{ mm}$ ) es 0.1 kg/s. El aceite y el agua entran a temperaturas de 100 °C y 30 °C respectivamente. ¿Qué longitud se necesita si la temperatura de salida del aceite debe ser 60 °C?
10. Para el diseño de un calentador de agua se elige el tipo de carcasa y tubos, con una carcasa. El agua a calentar circulará por los tubos a razón de 3.8 kg/s pasando de 38 °C a 54 °C. El fluido caliente es también agua que se suministra a 1.9 kg/s y 93 °C. El diseño hidráulico especifica tubos de 3/4" de diámetro con una velocidad media del fluido en su interior de 0.37 m/s. Se estima un co-

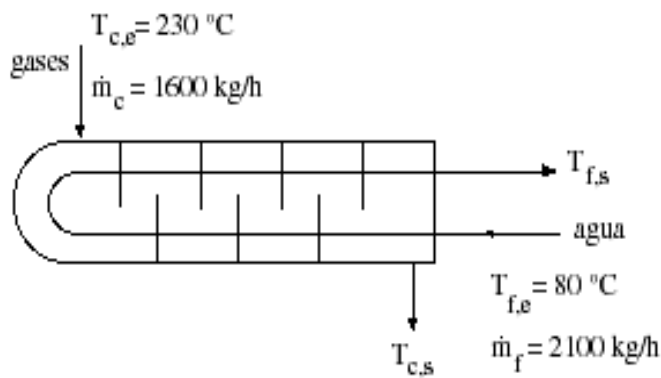
---

**Problemas**

---

eficiente de transferencia  $\bar{U} = 1420 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$  y el equipo no puede medir más de 2 m de largo (excluidos colectores) por razones de espacio. Determinar el número de tubos, el número de pasos (1, 2, 3, 4,...) y la longitud por paso apropiada.

- 11.** Se utiliza un intercambiador de calor de un paso por carcasa y dos pasos por los tubos para precalentar con los humos de combustión el agua de alimentación de una caldera. Por la carcasa circula un caudal de gases de 1600 kg/h ( $c_p = 850 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ) que entran a  $230 \text{ }^\circ\text{C}$ . Por los tubos se introducen 2100 kg/h de agua ( $\mu = 5.56 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ;  $c_p = 4186.8 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ;  $\lambda = 0.64 \text{ W/m K}$ ) a  $80 \text{ }^\circ\text{C}$ . Estimar las temperaturas de salida de ambos fluidos.



Las características del intercambiador son:  $N = 24$  tubos;  $L = 2.5 \text{ m/paso}$

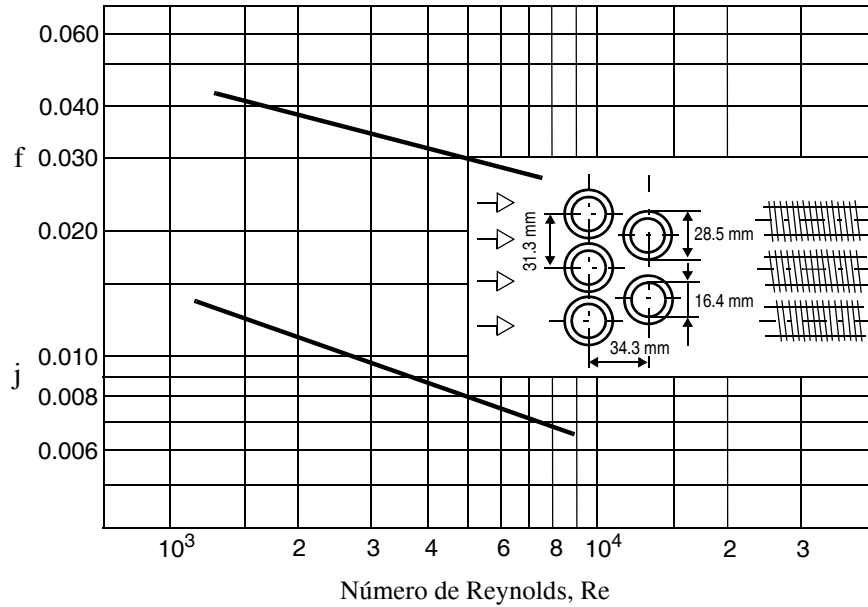
Tubos:  $D_{\text{int}} = 24 \text{ mm}$ ;  $D_{\text{ext}} = 30 \text{ mm}$ ;  $\lambda = 46.5 \text{ W/m K}$ .

El coeficiente de convección en el lado gases vale  $\bar{h}_e = 65.2 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ . Como resistencias de ensuciamiento en el lado gases y lado agua pueden tomarse respectivamente  $R''_{e,c} = 6.45 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$  y  $R''_{e,f} = 0 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$ .

El fabricante de la caldera recomienda una temperatura mínima en el exterior de los tubos de  $110 \text{ }^\circ\text{C}$ , con objeto de evitar depósitos ácidos sobre el metal ¿Se cumple este criterio con el funcionamiento previsto?

**Problemas**

12. Considérese un intercambiador compacto de tubos con aletas cuyas características son las que se dan a continuación:



Características de los tubos	Características de las aletas
Diámetro interior, $D_i = 13.8 \text{ mm}$	Diámetro interior, $D_e = 16.4 \text{ mm}$ Diámetro exterior, $D_a = 28.5 \text{ mm}$ Esp. de las aletas, $t = 0.254 \text{ mm}$ Núm. de aletas = $275 \text{ m}^{-1}$ Material: aluminio, $\lambda = 237 \text{ W/m K}$
Diámetro exterior, $D_e = 16.4 \text{ mm}$	
Material: aluminio, $\lambda = 237 \text{ W/m K}$	
<b>Características del banco de tubos</b>	
Diámetro hidráulico, $D_h = 6.68 \text{ mm}$	
$\frac{\text{Área mínima transversal}}{\text{Área total}}, \sigma = 0.449$	
$\frac{\text{Superficie de las aletas}}{\text{Área total}}, \frac{A_a}{A} = 0.83$	
$\frac{\text{Área transferencia de calor}}{\text{Volumen total}}, \alpha = 269 \frac{\text{m}^2}{\text{m}^3}$	
Área frontal = $0.2 \text{ m}^2$	

---

**Problemas**

---

Este intercambiador se utiliza para recuperar calor residual de los gases de combustión a la salida de una caldera, calentando un caudal de agua de 1 kg/s desde 290 K hasta 370 K. El agua circula por el interior de los tubos, calentándose con un coeficiente de convección  $\bar{h}_i = 1500 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ , mientras que gases de combustión a 1 atm y 825 K pasan en flujo cruzado a través del banco de tubos. Si el caudal de gas es 1.25 kg/s ¿Cuánto vale el coeficiente de transferencia de calor global del lado gas? ¿Cuál es el volumen de intercambiador necesario?

- 13.** Un recuperador es un intercambiador de calor que calienta el aire a utilizar en un proceso de combustión mediante la energía de los humos de la misma combustión. Consideramos un intercambiador de flujos cruzados de un solo paso. Existen 80 tubos cerámicos ( $\lambda = 20 \text{ W/m K}$ ), de diámetros interior y exterior 55 y 80 mm respectivamente y longitud  $L = 1.4 \text{ m}$ . El banco es de disposición alineada, con pasos transversal y longitudinal  $S_T = 120$  y  $S_L = 100 \text{ mm}$ . El aire frío fluye por la carcasa, en flujo cruzado sobre los tubos, con unas condiciones de corriente libre de  $V = 1 \text{ m/s}$  y  $T_{f,e} = 300 \text{ K}$ . Los gases calientes atraviesan los tubos, siendo su temperatura de entrada  $T_{c,e} = 1400 \text{ K}$ . La superficie exterior de los tubos está limpia, mientras que la interior puede caracterizarse por una resistencia de ensuciamiento  $R''_f = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ K/W}$ . Los caudales de aire y gases son  $\dot{m}_f = 1.0 \text{ kg/s}$  y  $\dot{m}_c = 1.05 \text{ kg/s}$ . Si se ahorra un 1% de combustible cada 10 K de incremento de la temperatura,  $T_{f,s}$  del aire de combustión por encima de 300 K, ¿qué porcentaje de combustible se está ahorrando? Como primera aproximación, evaluar todas las propiedades del aire que se precisen a 1 atm y 300 K, y las de los gases tienen las propiedades del aire a 1 atm y 1400 K.

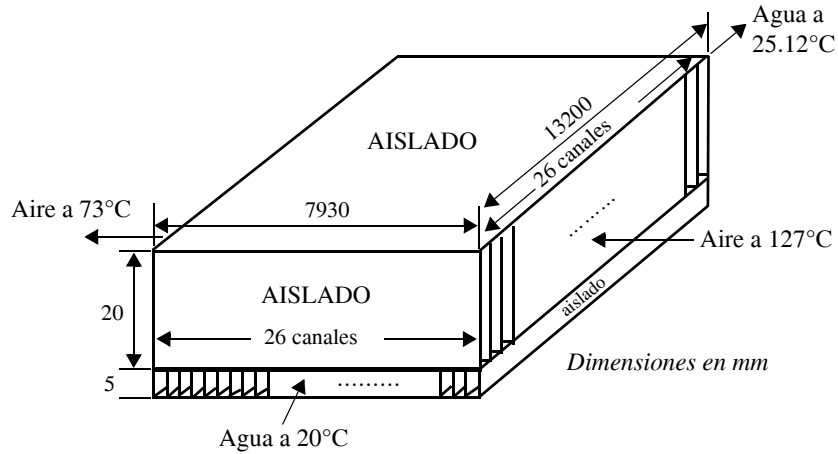
- 14.** Un sistema de recuperación de calor consiste en una serie de canales de cobre formados por chapas horizontales de 2 mm de espesor, sección rectangular dispuestos en dos pisos mediante tabiques verticales también de cobre de 0.1 mm de espesor, con direcciones cruzadas según las dimensiones y caudales indicado en la figura.

El conjunto está aislado térmicamente e inicialmente se introducen, según se indica en la figura, aire a 127 °C y una velocidad de 60 m/s y agua a 0.9 m/s y 20 °C, saliendo ambos fluidos a 73 °C y 25.12 °C, respectivamente.

---

**Problemas**

---



Calcular:

- El NTU (nº de unidad de transferencia) del intercambiador.
- El coeficiente de convección  $\bar{h}_a$  en la zona de aire.
- El coeficiente de convección  $\bar{h}_w$  en la zona de agua.

Si la velocidad del aire a la misma temperatura pasa a ser de 45 m/s y la velocidad y las condiciones de entrada del agua no varían, calcular:

- El nuevo coeficiente de convección  $\bar{h}_a$  en la zona de aire.
- El nuevo coeficiente de convección  $\bar{h}'_w$  en la zona de agua.
- Cuales serán las nuevas temperaturas de salida del aire y del agua.
- Cuál será el calor recuperado en el segundo caso y el porcentaje de reducción en calor recuperado respecto a la situación inicial.

**Notas:** Para calcular los coeficientes de transmisión superficial del aire, inicial y al reducir la velocidad, se puede usar la fórmula de Dittus-Boelter.

Suponer que las propiedades del aire y del agua no varían de un caso a otro.

- 15.** El calor residual de los gases de salida de un horno industrial se recupera instalando un banco de tubos sin aletas en la chimenea del horno, para calentar

---

**Problemas**

---

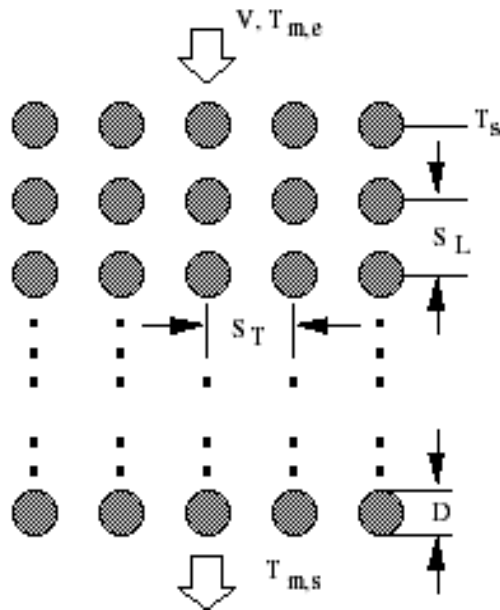
un caudal de agua  $\dot{m}_a = 5 \text{ kg/s}$ . Los gases se mueven en flujo cruzado sobre los tubos, con una  $u_\infty = 5 \text{ m/s}$  y un caudal  $\dot{m}_g = 2.5 \text{ kg/s}$ . El banco de tubos por el que circula el agua consiste en un cuadrado de 100 tubos de pared delgada, cuyas dimensiones son 25 mm de diámetro y 4 m de largo. Los tubos se encuentran en disposición alineada, con una separación transversal de 50 mm. El agua efectúa un paso único a través de cada uno de los tubos.

Las temperaturas de entrada del agua y de los gases son 300 K y 800 K respectivamente. Se pide

- Calcular el coeficiente global de transferencia de calor entre el agua y el gas.
- Calcular las temperaturas de salida de ambos fluidos.

**Nota:** El flujo de agua es completamente desarrollado y las propiedades del gas se pueden aproximar a las del aire.

16. Un generador de vapor consiste en un banco de tubos en disposición alineada, cada uno de los cuales tiene un diámetro  $D = 10 \text{ mm}$  y una longitud  $L = 1 \text{ m}$ . Los pasos longitudinal y transversal son iguales a  $S_L = S_T = 20 \text{ mm}$ . Los números de filas longitudinal y transversal son  $N_L = 20$  y  $N_T = 5$  respectivamente. Al interior de los tubos entra agua líquida saturada a una presión de 2.5 bares, estando ajustado su caudal de forma que siempre abandona los tubos como vapor saturado. La ebullición mantiene una temperatura uniforme en la pared de los tubos igual a 400 K.



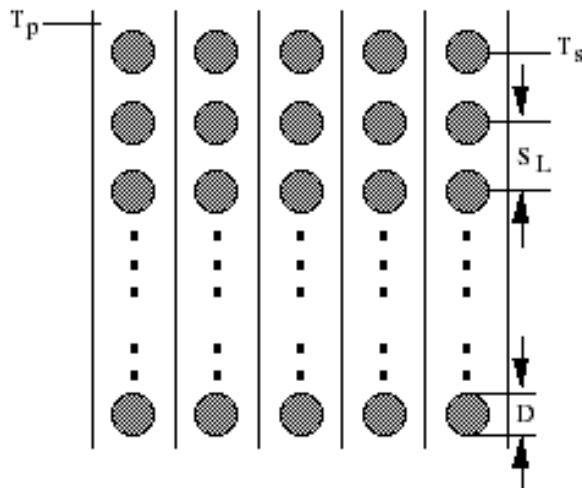
---

**Problemas**

---

Los productos de la combustión inciden sobre el banco de tubos a velocidad  $V = 10 \text{ m/s}$  y temperatura  $T_{m,e} = 1200 \text{ K}$ . Determinar el coeficiente de convección promedio en el lado gas, la temperatura de salida de los humos y el caudal másico de vapor producido. Las propiedades del gas pueden aproximarse por las del aire a presión atmosférica y  $900 \text{ K}$ .

Un diseño alternativo para el generador de vapor anterior consiste en utilizar el mismo banco de tubos, y en lugar de calentarlo con el flujo de gas, disponer unas placas radiadoras entre cada línea de tubos. Las placas se calientan con electricidad y los efectos de la convección son despreciables. Si la temperatura de las placas es aproximadamente uniforme e igual a  $T_p = 1200 \text{ K}$ , ¿cuál es la producción de vapor? Considerar todas las superficies difusas-grises con  $\epsilon = 0.8$ .



17. Un intercambiador de carcasa y tubos tiene 135 tubos de pared delgada y  $12.5 \text{ mm}$  de diámetro dispuestos en doble paso. La longitud por paso es de  $4.5 \text{ m}$ . Por el interior de los tubos circulan  $6.5 \text{ kg/s}$  de agua, que entra a  $15 \text{ }^\circ\text{C}$  y se calienta mediante  $5 \text{ kg/s}$  de gas cuya temperatura de entrada a la carcasa es  $200 \text{ }^\circ\text{C}$ . Puede suponerse que los gases tienen las propiedades del aire a presión atmosférica. El coeficiente global de transferencia de calor es aproximadamente  $200 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ . ¿Cuáles son las temperaturas de salida del agua y del gas?

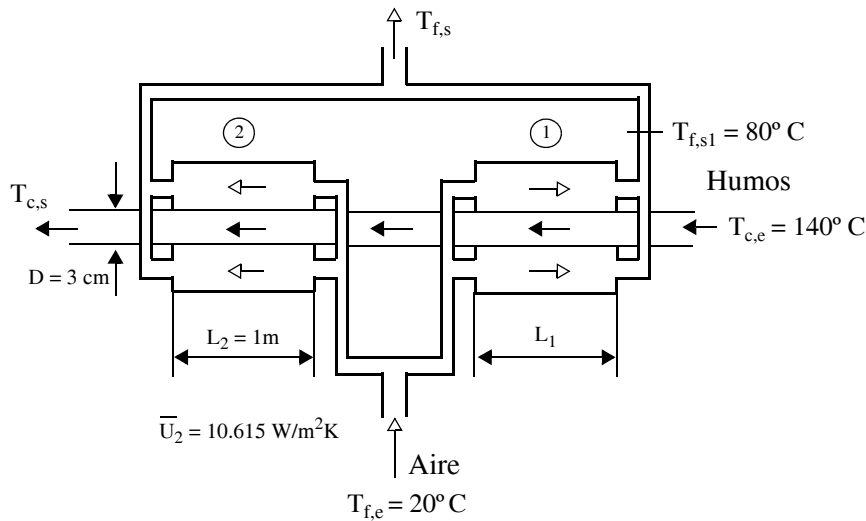
---

**Problemas**

---

- 18.** Para recuperar calor de los humos de combustión se precalienta aire. Para ello se dispone de dos intercambiadores de cobre de tubo concéntrico de pared fina, dispuestos como se muestran en la figura (en serie la corriente caliente y en paralelo la fría).

El caudal de aire es  $\dot{m}_f = 2 \dot{m}_c$  (siendo  $\dot{m}_c$  el caudal de los humos) y se distribuye en partes iguales por las dos envolventes. Si se puede considerar el número de unidades transferidas (NTU) por cada uno de los intercambiadores iguales, calcular el calor absorbido por el aire en cada uno de ellos ( $q_1$  y  $q_2$ ) las temperaturas de salida finales de los humos ( $T_{c,s}$ ) y del aire ( $T_{f,s}$ ).



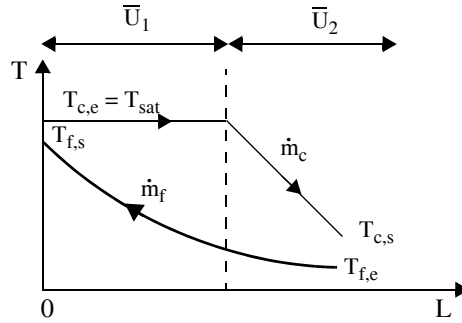
Para simplificar los cálculos considerar las mismas propiedades para el aire que para los humos, permaneciendo estas constantes en todo el proceso  $c_p = c_{p,c} = c_{p,f} = 1 \text{ KJ/Kg}\cdot\text{K}$ . El coeficiente global de transferencia para el intercambiador n° 2 es  $\bar{U}_2 = 10.615 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ .

- 19.** Se tiene un condensador de flujo en contracorriente que funciona subenfriando bastante el líquido condensado. ¿Por qué no puede calcularse como un único intercambiador de calor?

Suponiendo conocidos los coeficientes globales de transferencia  $\bar{U}_1$  y  $\bar{U}_2$  correspondientes a la condensación pura y al subenfriamiento, explicar brevemente las ecuaciones necesarias para obtener las temperaturas de sal-

**Problemas**

ida  $T_{f,s}$  y  $T_{c,s}$  en función de las de entrada y los caudales. Las dimensiones físicas del equipo y las propiedades de los fluidos también son datos.



20. Para precalentar agua mediante gases de combustión en una central térmica, se utiliza un intercambiador de calor de flujo cruzado y 50 pasos a contracorriente, con el líquido en el interior de los tubos. Las superficies totales de intercambio son  $A_f = 2133 \text{ m}^2$  y  $A_c = 7813 \text{ m}^2$ . El intercambiador posee aletas en el lado gases, cuya área total es  $A_a = 5180 \text{ m}^2$ .

	Diseño	Real
$T_{f,e}$ (°C)	173	177
$T_{f,s}$ (°C)	265.8	238
$\dot{m}_f$ (kg/s)	58.3	54
$T_{c,e}$ (°C)	424	387
$T_{c,s}$ (°C)	186.8	230.2
$\dot{m}_c$ (kg/s)	94.5	87

Al funcionar la instalación, los valores reales se alejan bastante de los de diseño. Como muestra la tabla, la recuperación de calor es menor y la temperatura de salida de los gases es bastante superior a la prevista. En una reunión técnica se discuten los motivos. Al intercambiador se le suministran unos caudales inferiores a los nominales, por lo que los coeficientes de convección son más reducidos y el diseñador del equipo se excusa de toda culpa. Por otra parte, los ingenieros de la planta han comprobado que las aletas favorecen el ensuciamiento con ceniza y creen que el diseñador in-

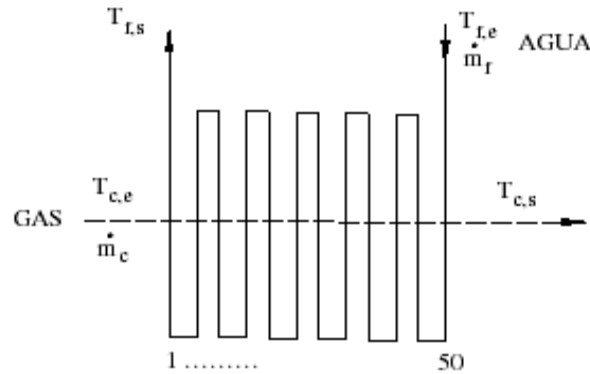
---

**Problemas**

---

cluyó en sus cálculos un valor incorrecto de la resistencia térmica correspondiente ¿Quién tiene razón?

**Notas:** El intercambiador puede calcularse como si fuera de flujo a contracorriente puro.  $c_{p,f} = 4590 \text{ J/kg K}$  y  $c_{p,c} = 1108 \text{ J/kg K}$ . Los coeficientes de convección en condiciones de diseño son  $\bar{h}_f = 8940$  y  $\bar{h}_c = 110 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Según correlaciones para convección forzada y considerando propiedades termofísicas constantes, varían con el caudal de forma proporcional a  $\dot{m}_f^{0.8}$  y  $\dot{m}_c^{0.6}$  respectivamente. El rendimiento de las aletas puede considerarse invariable y de valor  $\eta_a = 0.9$ . La resistencia térmica del metal de los tubos es despreciable. Los tubos no se ensucian por el lado agua.



21. Se ha estimado en  $2 \text{ m}^3/\text{h}$  el consumo de agua caliente sanitaria a  $50 \text{ }^\circ\text{C}$  de un bloque de viviendas. Para obtener dicho caudal, a la temperatura anteriormente citada, se piensa emplear un intercambiador de calor que utilice agua caliente procedente de una caldera, a  $90 \text{ }^\circ\text{C}$ , enfriándola  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ , y calentando el agua de red a  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  hasta la temperatura deseada.

Considerando que el intercambiador debe ser de un paso por carcasa y dos pasos por tubo, que los tubos serán de cobre (diámetro interior  $D_{\text{int}} = 12 \text{ mm}$  y diámetro exterior  $D_{\text{ext}} = 16 \text{ mm}$ ), que por su interior circulará el agua caliente con velocidad máxima de  $0.5 \text{ m/s}$ , y que el fluido frío circulará por la carcasa a  $0.2 \text{ m/s}$ , con  $\bar{h}_{\text{ext}} = 2169.74 \text{ W/m}^2 \text{ K}$

Diseñar el intercambiador calculando:

- Número de tubos por paso del intercambiador.
- Longitud del cambiador.

**Nota:** Considerar los fluidos en región completamente desarrollada

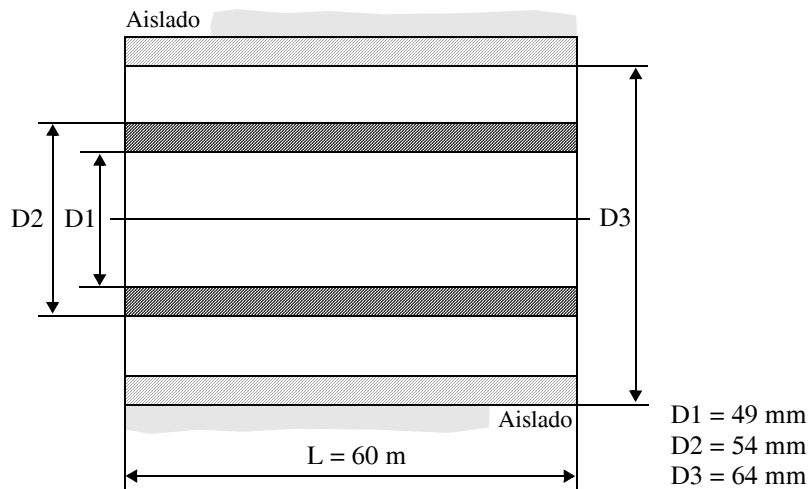
---

**Problemas**

---

- 22.** Un intercambiador de calor esta formado por dos tubos concéntricos de cobre (ver figura). Por uno de los extremos se introduce agua a  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  con velocidad de  $1\text{ m/s}$ , mientras que por el extremo opuesto y por el espacio anular se introduce agua a  $90\text{ }^{\circ}\text{C}$  y  $2\text{ m/s}$ .

Calcular: La temperatura final de ambos fluidos



**Nota:** Considerar los fluidos en región completamente desarrollada.

- 23.** Un precalentador de aire en contracorriente para una central térmica está constituido por una serie de placas paralelas, existiendo una separación de  $e_a = 20\text{ mm}$ , en los pasos de aire, y de  $e_h = 25\text{ mm}$  en los de humos de combustión (los pasos de los fluidos son alternos y los más extremos corresponden al aire, con vistas a evitar las pérdidas de calor).

El material de los placas es metálico y de espesor tal que puede despreciarse la resistencia térmica que se opone al paso de calor por conducción.

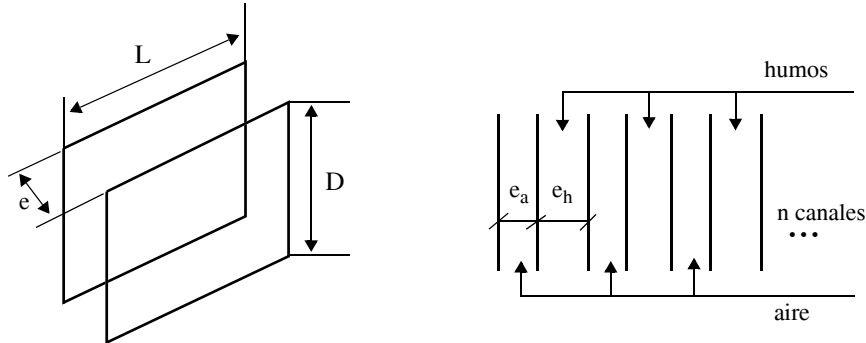
En condiciones de funcionamiento, para unos caudales de aire y humos de  $4.89$  y  $5.5\text{ kg/s}$  respectivamente, el aire entra con una temperatura de  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ , mientras que los humos lo hacen con una de  $480\text{ }^{\circ}\text{C}$ , siendo la temperatura de salida de estos últimos de  $180\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Considérese un mismo valor de  $20\text{ kg/m}^2\cdot\text{s}$  para los flujos máxicos en ambos fluidos.

---

**Problemas**


---



Diseñar el intercambiador calculando:

- El número de canales  $n$ .
- Longitud de los canales  $L$  y su altura  $D$ .

**Nota:** Considerar los fluidos en región completamente desarrollada

Propiedades de los fluidos:

Aire	Humos
$\rho = 0.917 \text{ kg/m}^3$	$\rho = 0.68 \text{ kg/m}^3$
$\lambda = 0.029 \text{ W/m}\cdot\text{K}$	$\lambda = 0.03365 \text{ W/m}\cdot\text{K}$
$\mu = 2.336 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$	$\mu = 2.904 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
$Pr = 0.725$	$Pr = 0.733$
$c_p = 900 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$	$c_p = 850 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$

- 24.** Se dispone de los siguientes datos a partir de un ensayo de rendimiento de un intercambiador de calor formado por una sola carcasa y un doble paso de tubos: aceite ( $c_p = 2100 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ ) en flujo turbulento por el interior de los tubos entraba a  $340 \text{ K}$  con una velocidad másica de  $1 \text{ kg/s}$  y salía a  $310 \text{ K}$ ; por la parte de la carcasa entraba agua a  $290 \text{ K}$  y salía a  $300 \text{ K}$ . Una variación de las condiciones de servicio exige el enfriamiento de un aceite semejante desde una temperatura inicial de  $370 \text{ K}$ , pero con una velocidad de flujo igual a los tres cuartos de la velocidad utilizada en el ensayo previo. Considerando que el coeficiente global de transferencia del intercambiador permanece constante para cualquier ensayo, calcular la temperatura de salida del aceite para la misma velocidad del agua y temperatura de entrada que antes.

---

## CAPÍTULO 12

# Radiación Fundamentos

---

La radiación térmica es el tercer mecanismo existente de transporte de calor que, como se dice en el capítulo 1, consiste en transporte de energía a través de ondas electromagnéticas generadas en la actividad térmica de la materia (movimiento de las moléculas, vibración y rotación de las moléculas, actividad de las redes cristalinas, etc).

La constatación de la existencia de este fenómeno físico queda plasmada en la llamada **ley de Prevost**, cuyo enunciado es el siguiente [1]

*Cualquier cuerpo, por el hecho de encontrarse a una temperatura superior al **cero absoluto**, emite energía radiante, tanto mayor cuanto mayor sea su temperatura termodinámica e independientemente de la naturaleza, temperatura y forma de los cuerpos que integran su entorno.*

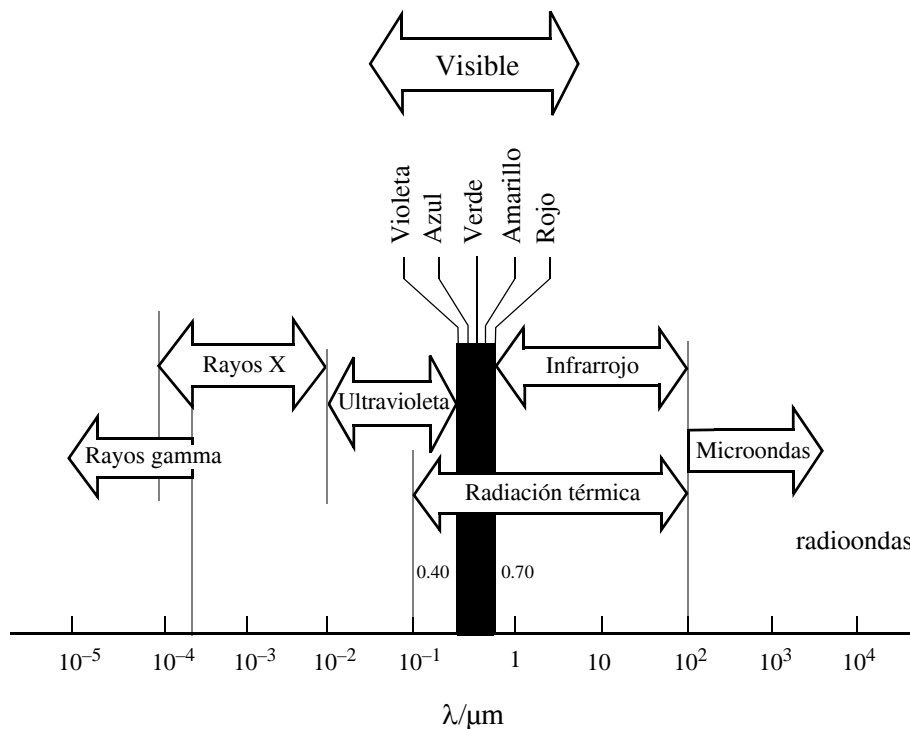
Más allá de esta constatación experimental, el conocimiento detallado del mecanismo de radiación es limitado debido a su complejidad en la que intervienen aspectos pertenecientes a los campos más modernos de la Física (cuántica). Una discusión cualitativa sobre la radiación y su relación con la conducción se encuentra en la referencia [2].

Es importante recalcar que la radiación térmica es un caso particular de las ondas electromagnéticas que cubren un conjunto más amplio de fenómenos, abarcando

aquella solamente el campo de frecuencias de la radiación generada por la agitación térmica de la materia, es decir por aquellos fenómenos cuya expresión macroscópica es la temperatura. Este hecho se ilustra en la figura 12.1.

---

**FIGURA 12.1** Localización de la radiación térmica en el espectro electromagnético (en el vacío).



---

## Características principales de la radiación

---

Aunque se irá detallando progresivamente, es conveniente destacar desde el principio dos aspectos fundamentales a tener siempre presentes en cualquier tipo de radiación electromagnética: la espectralidad (variación del comportamiento con la longitud de onda,  $\lambda$ , o la frecuencia) y la direccionalidad (dependencia de la dirección de propagación  $\omega$ ).

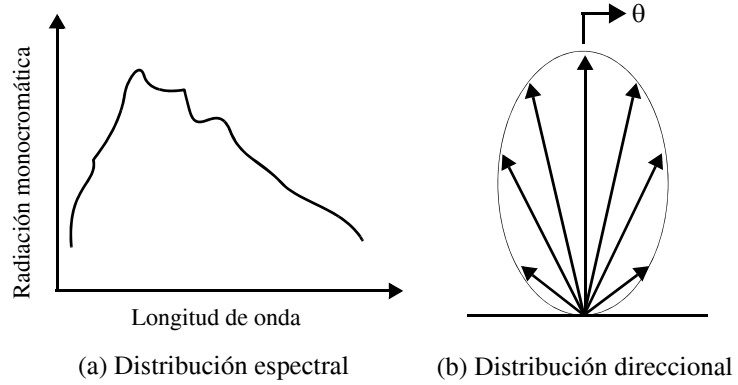
Más adelante se concreta qué magnitud(es) física(s) miden la cantidad de energía radiante. De momento es suficiente con hablar de forma genérica.

---

## Tipos de radiación

---

**FIGURA 12.2** Representación genérica de la variación con la frecuencia (a) y la dirección (b) de la radiación emitida por una superficie.



---

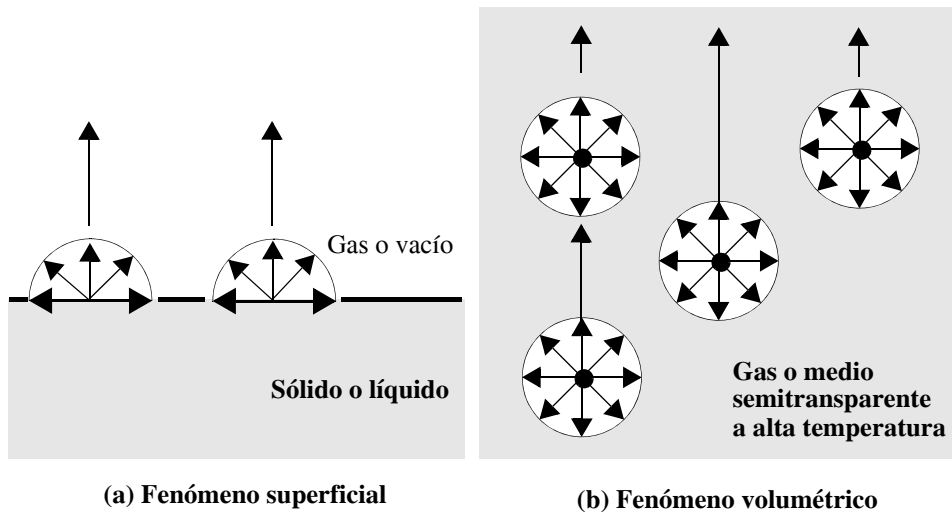
## Tipos de radiación

---

También es importante distinguir la radiación desde cuerpos opacos (no sólo a la luz visible, sino a la radiación térmica en general) donde sólo se recibe desde el exterior la que se genera en su superficie (figura 12.3a), y la que se genera en medios semitransparentes donde la radiación se transporta por todo el volumen (figura 12.3b) y sale, aunque sea parcialmente, al exterior.

---

**FIGURA 12.3** Emisión de energía radiante.



## **Aplicaciones de la radiación**

---

A elevadas temperaturas ( $T > 500 \text{ }^\circ\text{C}$ ) la radiación es el mecanismo de transmisión de calor preponderante, pero en algunos casos también es importante a más bajas temperaturas (climatización). Entre las aplicaciones de la radiación térmica más relevantes dentro de la ingeniería térmica cabe citar:

Hogares, íntimamente ligada a los fenómenos de combustión.

Generadores de fluidos térmicos diversos (vapor, agua caliente, aceites térmicos, ...) para procesos industriales o calefacción.

Secaderos.

Hornos de todo tipo:

- Industriales: altos hornos, hornos de cemento y vidrio
- Domésticos.

Reactores químicos.

Radiación solar y ambiental.

- Meteorología
- Calderas solares
- Colectores solares
- Energía fotovoltaica.

Vehículos espaciales.

Climatización.

## **Conceptos fundamentales**

---

Los dos problemas básicos que se plantean en Radiación son:

- La interacción entre la radiación y la materia, o lo que es lo mismo, como y en qué cantidades es emitida y recibida la radiación por la materia.
- La propagación de la radiación en los diversos medios, es decir, cual es la cantidad de energía que se desplaza en las diversas direcciones.

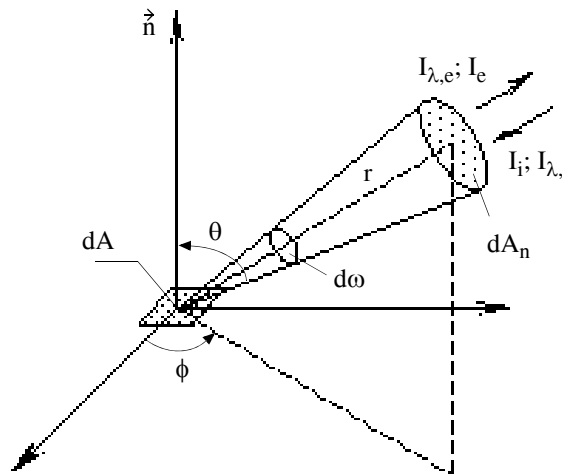
Para manejarlos adecuadamente, es preciso definir un conjunto de conceptos ligados a ellos. En las referencias [3] y [4] se presentan los conceptos básicos de forma muy rigurosa e incluyendo su relación con el electromagnetismo.

### Intensidad

Este concepto, siempre direccional, es típico de la Física Ondulatoria e indica la *cantidad de energía transportada por la radiación en una determinada dirección*.

Para definirla con rigor se parte de un área diferencial  $dA$  en torno a un punto y partiendo de éste un ángulo sólido también diferencial  $d\omega$  en una dirección determinada  $\omega$  ( $\theta, \phi$ ), según se indica en la figura 12.4

**FIGURA 12.4** Definición de intensidad en Radiación y magnitudes ligadas a ella.



Si por la pequeña superficie esférica  $dA_n$  pasa una cantidad de calor  $d^3q_\lambda$  (W) en un intervalo  $d\lambda$  en torno a  $\lambda$ , se define la intensidad espectral o monocromática como

$$I_\lambda \equiv \frac{d^3q_\lambda}{(dA \cos\theta) \cdot d\omega \cdot d\lambda} \quad \left( \frac{W}{m^2 \cdot sr \cdot \mu m} \right) \quad (12.1)$$

Recuérdese que el ángulo sólido  $d\omega$  se define según la expresión (12.2)

$$d\omega \equiv \frac{dA_n}{r^2} = \sin\theta \, d\theta \, d\phi \quad (sr) \quad (12.2)$$

---

## Radiación Fundamentos

---

La intensidad total es el mismo concepto pero englobando todas las longitudes de onda, es decir, si por  $dA_n$  pasa una cantidad total de calor  $d^2q$  (W) se define la intensidad total como

$$I \equiv \frac{d^2q}{(dA \cos\theta) d\omega} \quad \left( \frac{W}{m^2 \cdot sr} \right) \quad (12.3)$$

La relación entre ambas intensidades es inmediata

$$I = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda \quad (12.4)$$

ya que obviamente

$$d^2q = \int_0^\infty \frac{d^3q_\lambda}{d\lambda} d\lambda$$

Otra distinción radica en el sentido del calor radiante. Si, según se indica en la figura 12.4, el calor atraviesa  $dA_n$  hacia afuera, alejándose de  $dA$ , entonces el calor radiante sale de  $dA$  y se habla de:

- $I_{\lambda,e}$ ;  $I_e$ : Intensidad emitida (por  $dA$ ) si la radiación procede de la propia actividad térmica de  $dA$ , es decir la emite debida a su temperatura no nula.
- $I_{\lambda,r}$ ;  $I_r$ : Intensidad reflejada, si procede de una radiación ajena a  $dA$  que ésta ha reflejado en la dirección  $\omega$ .
- $I_{\lambda,t}$ ;  $I_t$ : Intensidad transmitida, si la radiación atraviesa  $dA$  procedente del interior del cuerpo en cuya superficie se encuentra  $dA$ .

Por contra si la radiación se dirige hacia  $dA$ , procedente del exterior, se habla de intensidad incidente:  $I_{\lambda,i}$ ;  $I_i$ .

## Conceptos hemisféricos

Mientras que la intensidad es un concepto direccional (transmisión de energía radiante en una dirección determinada), es importante, sobre todo en aplicaciones de Ingeniería Térmica disponer de magnitudes que engloben toda la radiación recibida o enviada en todas las direcciones.

---

**Conceptos fundamentales**

---

En definitiva de la misma manera que el paso de una magnitud espectral a otra total supone integrar en  $\lambda$ , ahora se trata de integrar en todas las direcciones  $\omega$  ( $\theta$ ,  $\phi$ ) para pasar de una magnitud direccional (la intensidad) a otra hemisférica (semiesfera es el conjunto de direcciones que ve un punto sobre una superficie).

Según de qué tipo de radiación se trate (emitida, incidente, reflejada,...) el concepto hemisférico recibe un nombre específico.

**Poder emisivo**

Se define como el flujo de calor emitido desde un punto de una superficie en todas las direcciones.

Se distingue entre  $E_\lambda$ , *poder emisivo espectral* ( $\text{W/m}^2 \cdot \mu\text{m}$ ), si se trata del emitido por unidad de longitud de onda en una longitud de onda  $\lambda$ ; y  $E$ , *poder emisivo total* ( $\text{W/m}^2$ ), cuando se trata de la radiación emitida en todas las longitudes de onda.

Obviamente debe existir una relación entre estos conceptos y la intensidad. Efectivamente si en la definición de intensidad se agrupan los términos que definen el Poder Emisivo se tiene

$$I_\lambda \equiv \frac{\boxed{d^3q_\lambda}}{dA d\lambda \cos\theta d\omega} \Rightarrow E_\lambda = \int_{\Delta\omega=0}^{2\pi} dq''_\lambda = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} I_{\lambda,e} \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \quad (12.5a)$$

Análogamente para el poder emisivo total se tiene

$$E = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} I_e \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \quad (12.5b)$$

Y ambos poderes emisivos (espectral y total) están relacionados por la fórmula

$$E = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda \quad (12.6)$$

Caso particular: Cuando una superficie emite por igual en todas las direcciones, se dice que emite difusamente, es decir  $I_{\lambda,e}$  e  $I_e$  no dependen de la dirección ( $\theta$ ,  $\phi$ ). Es fácil demostrar que para un emisor difuso se cumple

$$E_\lambda = \pi I_{\lambda,e} \quad (12.7a)$$

$$E = \pi I_e \quad (12.7b)$$

**Irradiación**

Es un concepto semejante al poder emisor pero para la radiación que incide sobre una superficie. Así se tiene

*Irradiación espectral*,  $G_\lambda$  ( $\text{W}/\text{m}^2 \cdot \mu\text{m}$ ), es el flujo de calor radiante que incide sobre un punto de una superficie desde todas las direcciones por unidad de longitud de onda en una longitud de onda  $\lambda$ . Análogamente a la ecuación (12.5a) está relacionado con la intensidad espectral incidente por la expresión (12.8a)

$$G_\lambda = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} I_{\lambda,i} \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \quad (12.8a)$$

*Irradiación total*,  $G$  ( $\text{W}/\text{m}^2$ ), es el flujo de calor radiante incidente sobre un punto de una superficie procedente de todas las direcciones y en todas las longitudes de onda y está relacionado con la intensidad total incidente por la ecuación (12.8b)

$$G = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} I_i \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \quad (12.8b)$$

También se cumple como en el poder emisor que

$$G = \int_0^\infty G_\lambda d\lambda \quad (12.9)$$

Caso particular: Si la radiación incidente es difusa, es decir si  $I_{\lambda,i}$  e  $I_i$  no dependen de la dirección ( $\theta, \phi$ ), se tiene

$$G_\lambda = \pi I_{\lambda,i} \quad (12.10a)$$

$$\text{y} \quad G = \pi I_i \quad (12.10b)$$

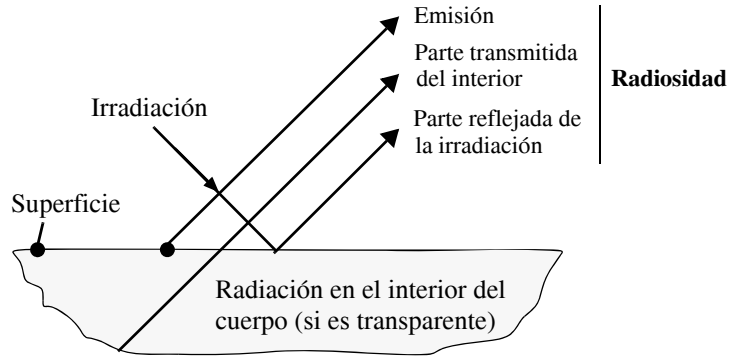
**Radiosidad**

Este concepto se refiere al flujo de calor radiante que abandona un punto de una superficie en todas las direcciones.

Es, por tanto, distinto del poder emisor, ya que la radiación que parte de una superficie es la suma de tres componentes, según se muestra en la figura 12.5

Emitida + Reflejada + Transmitida

FIGURA 12.5 Componentes de la radiosidad.



Por tanto y de la misma manera que antes se tiene

*Radiosidad espectral*,  $J_\lambda$  ( $\text{W}/\text{m}^2 \cdot \mu\text{m}$ ), es el flujo de calor radiante que abandona un punto de una superficie hacia todas las direcciones por unidad de longitud de onda en una longitud de onda  $\lambda$ . Viene relacionada con la intensidad espectral por la ecuación (12.11a)

$$J_\lambda = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} (I_{\lambda,e} + I_{\lambda,r} + I_{\lambda,t}) \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \quad (12.11a)$$

donde  $I_{\lambda,e}$ ,  $I_{\lambda,r}$  e  $I_{\lambda,t}$  son, respectivamente, las intensidades espectrales emitida, reflejada y transmitida.

*Radiosidad total*,  $J$  ( $\text{W}/\text{m}^2$ ), flujo de calor radiante que abandona un punto de una superficie hacia todas las direcciones y en todas las longitudes de onda. Su relación con la intensidad total es la dada por la ecuación (12.11b), donde

$$J = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} (I_e + I_r + I_t) \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \quad (12.11b)$$

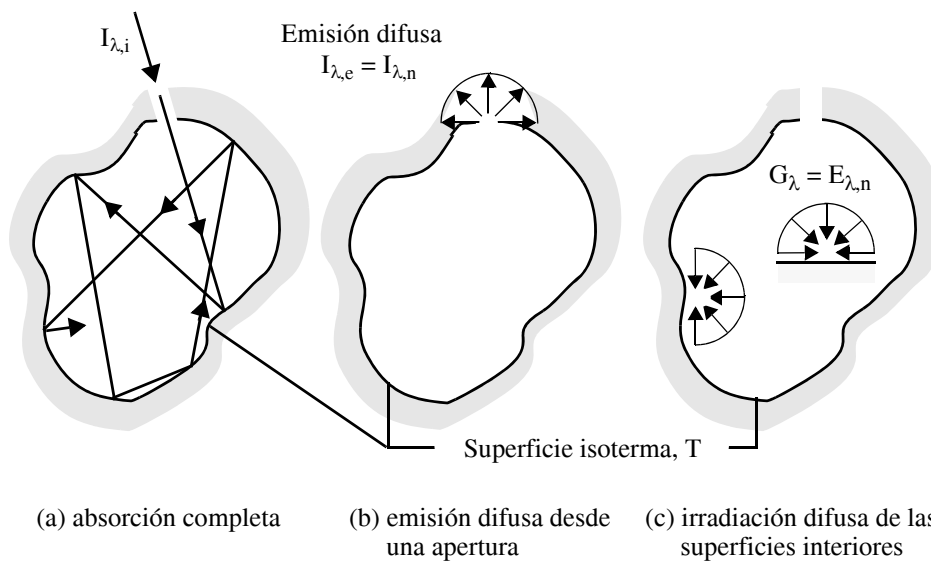
$I_e$ ,  $I_r$  e  $I_t$  son, respectivamente, las intensidades totales emitida, reflejada y transmitida. Finalmente

$$J = \int_0^\infty J_\lambda d\lambda \quad (12.12)$$

## El cuerpo negro

El comportamiento radiativo de un cuerpo cualquiera es complejo. Por ello, para su estudio se parte de un caso **ideal** llamado Cuerpo Negro, cuyas características más sencillas permiten su estudio y el establecimiento de unas leyes, utilizadas luego en el estudio de los cuerpos reales.

**FIGURA 12.6** Características de una cavidad isoterma (cuerpo negro).



El cuerpo negro es una superficie ideal que absorbe toda la radiación que incide sobre ella. Ésta es su característica principal, la que lo define y le da el nombre. Además tiene otras características importantes que, aunque derivadas de la anterior, conviene destacar:

- Es el **emisor máximo**, es decir, dada una temperatura y una longitud de onda y una dirección, ninguna otra superficie puede emitir mayor energía radiante que un cuerpo negro.
- Es un **emisor difuso**, es decir la energía radiante que emite depende de la longitud de onda,  $\lambda$ , y de la temperatura, T, pero no de la dirección. Por tanto,  $I_{\lambda,n} = f(\lambda, T)^*$ .

---

## El cuerpo negro

---

Ninguna superficie real cumple estos requisitos. La aproximación más cercana, utilizada para obtener información experimental y teórica [5], es una cavidad isoterma con una pequeña abertura. La radiación en el interior de la cavidad, así como la que sale por la abertura, es la del cuerpo negro (ver figura 12.6); esta radiación es isótropa.

### Leyes del cuerpo negro

Las leyes que explican el comportamiento del Cuerpo Negro se empezaron a obtener a finales del S. XIX a partir de observaciones experimentales o de argumentos termodinámicos. Una completa revisión histórica de la radiación térmica desde los orígenes aparece en la referencia [6]. En 1901 Max Planck formula su *Ley de distribución espectral* [7] que agrupa y explica todas las anteriores, y que además sería posteriormente el punto de arranque de una nueva rama de la física: la física cuántica [8].

Esta ley establece que la intensidad espectral de un cuerpo negro en el vacío viene dada por:

$$I_{\lambda, n}(\lambda, T) = \frac{2hc_0^2}{\lambda^5 \left[ \exp\left(\frac{hc_0}{\lambda kT}\right) - 1 \right]} \quad (12.13)$$

$h$  (cte. de Planck) =  $6.6256 \times 10^{-34}$  J·s

$k$  (cte. de Boltzmann) =  $1.38054 \times 10^{-23}$  (J/K)

$c_0$  (velocidad de la luz en el vacío) =  $2.998 \times 10^8$  (m/s)

Esta dependencia se representa en la figura 12.7 con  $E_{\lambda, n} = \pi I_{\lambda, n}$  frente a  $\lambda$  como variable y  $T$  como parámetro, observándose lo siguiente

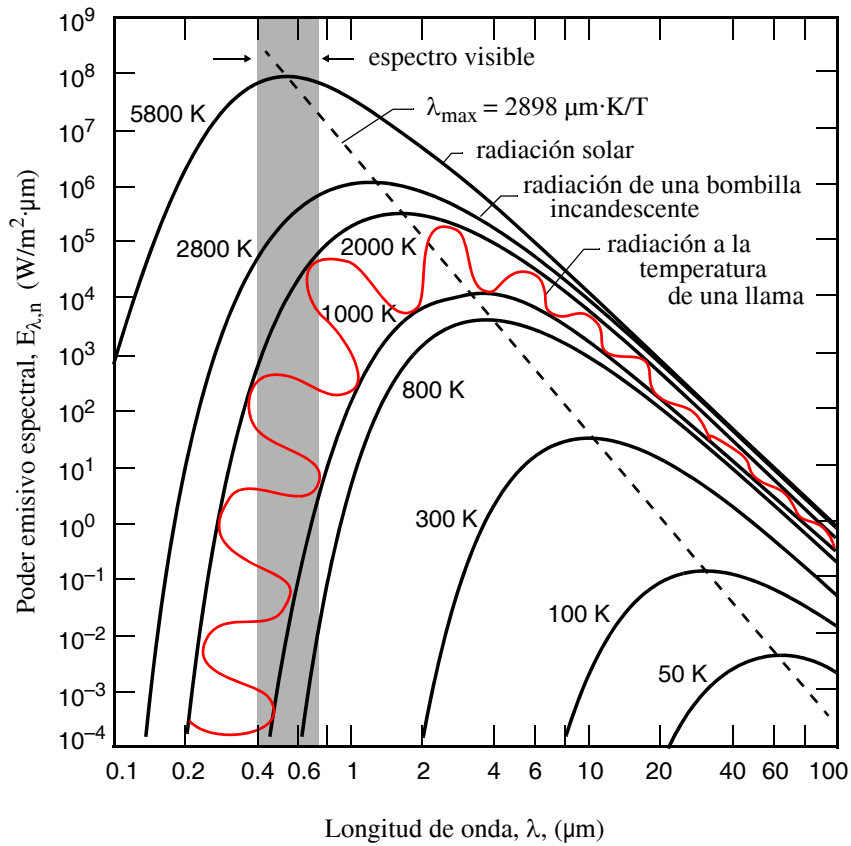
1. Aparece un máximo en un valor de  $\lambda$  que disminuye con  $T$ .
2. El máximo de la radiación solar se da justamente en el visible.
3. Para una bombilla incandescente de tungsteno ( $T_{\text{filamento}} = 2900$  K) la mayor parte de la emisión se produce en el infrarrojo.
4. Para  $T < 800$  K, prácticamente toda la radiación se emite en el infrarrojo.

---

\*. Se utilizará el subíndice “n” para designar las magnitudes físicas asociadas al cuerpo negro.

Es importante tener en cuenta que la anterior expresión de la ley de Planck es válida estrictamente para el vacío, aunque se puede utilizar en medios cuyo índice de refracción es próximo a la unidad,  $n = c_0/c = 1$ , siendo  $c$  la velocidad de la luz en el medio. En este caso es el de la mayoría de los gases en las condiciones habituales, como el aire ambiental.

**FIGURA 12.7** Poder emisoro espectral del cuerpo negro.



En un medio cuyo índice de refracción difiera apreciablemente de 1, la Ley de Planck es [5]

$$I_{\lambda, n} = \frac{2hc^2}{\lambda_m^5 \left[ \exp\left(\frac{hc}{\lambda_m kT}\right) - 1 \right]} \quad (12.14)$$

---

## El cuerpo negro

---

con  $c$ : velocidad de la luz en el medio;  $\lambda_m = \lambda(\text{vacío})/n$ : longitud de onda en el medio.

Salvo que se indique lo contrario, se trabajará con gases como medio, tomando  $n = 1$ .

### Aproximaciones a la Ley de Planck

Para no manejar tantas constantes, éstas se agrupan por comodidad y se suele poner

$$E_{\lambda, n}(\lambda, T) = \pi I_{\lambda, n}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 \left[ \exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]} = E_{\lambda, n} \quad (12.15)$$

$$C_1 = 2\pi h c_0^2 = 3.742 \times 10^8 \frac{\text{W} \cdot \mu\text{m}^4}{\text{m}^2}$$

$$C_2 = \frac{hc_0}{k} = 1.439 \times 10^4 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

de aquí se obtienen dos aproximaciones, ya obtenidas anteriormente por sus autores

1. Aproximación de Wien [9], válida para  $\lambda T \ll C_2$

$$E_{\lambda, n} = \frac{C_1}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda T}\right) \quad (12.15a)$$

2. Aproximación de Rayleigh [10]–Jeans [11], válida para  $\lambda T \gg C_2$

$$E_{\lambda, n} = \frac{C_1}{C_2} \frac{T}{\lambda^4} \quad (12.15c)$$

**Ley de desplazamiento de Wien (1891)**

Diferenciando la ley de distribución espectral [5] respecto a  $\lambda$ , se obtiene el valor de la longitud de onda para la cual se produce la máxima emisión,  $\lambda_{\max}$ . Wien ya lo obtuvo anteriormente [12], comprobando que  $\lambda_{\max}$  es inversamente proporcional a T,

$$\lambda_{\max} = \frac{C_3}{T} \quad (12.16)$$

con  $C_3 = 2897.6 \mu\text{m}\cdot\text{K}$ .

Se puede observar esta relación en la figura 12.7.

*Como ejemplo se puede comprobar como la radiación solar ( $T \approx 5800 \text{ K}$ ) presenta el máximo en torno a  $0.5 \mu\text{m}$ , en medio del espectro visible.*

**Ley de Stefan (1879) – Boltzman (1884)**

Esta ley, también deducible de la de Planck, establece la dependencia funcional del poder emisor total del cuerpo negro con la temperatura. Por integración en  $\lambda$  de  $E_{\lambda,n}(\lambda,T)$  se obtiene [5]:

$$E_n = \sigma T^4 \quad (12.17)$$

siendo  $\sigma$  la constante de Stefan–Boltzman, de valor

$$\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$$

Una deducción termodinámica de esta ley se encuentra en muchos textos [13].

Como el cuerpo negro es un emisor difuso, se tiene en consecuencia  $I_n = \frac{\sigma T^4}{\pi}$ .

**Emisión en una banda**

Si en lugar de interesar toda la radiación emitida por el Cuerpo Negro, interesa solamente la emitida en un cierto ancho de banda  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ , se puede calcular fácilmente de la siguiente manera [5]:

$$\text{Se define la fracción } F_{0 \rightarrow \lambda} \equiv \frac{\int_0^\lambda E_{\lambda,n} d\lambda}{\sigma T^4} = \int_0^{\lambda T} \frac{E_{\lambda,n}}{\sigma T^5} d(\lambda T) = f(\lambda T)$$

que como se ve sólo depende del producto  $(\lambda T)$  encontrándose calculada y mostrándose una parte representativa de los resultados en la Tabla 12.1.

**El cuerpo negro**

**TABLA 12.1** Dependencia de la fracción  $F_{0 \rightarrow \lambda}$  con  $\lambda T$ .

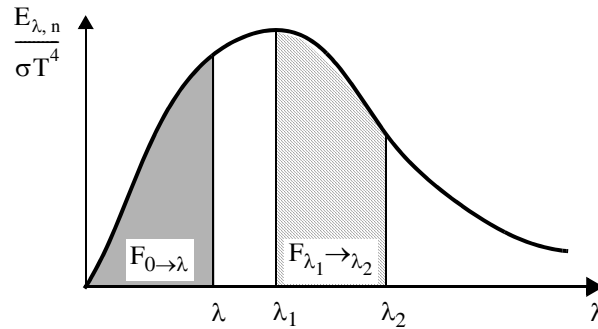
$\frac{\lambda T}{\mu\text{m} \cdot \text{k}}$	$F_{0 \rightarrow \lambda}$	$\frac{\lambda T}{\mu\text{m} \cdot \text{k}}$	$F_{0 \rightarrow \lambda}$
200	0.000000	6 200	0.754140
400	0.000000	6 400	0.769234
600	0.000000	6 600	0.783199
800	0.000016	6 800	0.796129
1 000	0.000321	7 000	0.808109
1 200	0.002134	7 200	0.819217
1 400	0.007790	7 400	0.829527
1 600	0.019718	7 600	0.839102
1 800	0.039341	7 800	0.848005
2 000	0.066728	8 000	0.856288
2 200	0.100888	8 500	0.874608
2 400	0.140256	9 000	0.890029
2 600	0.183120	9 500	0.903085
2 800	0.227897	10 000	0.914199
2 898	0.250108	10 500	0.923710
3 000	0.273232	11 000	0.931890
3 200	0.318102	11 500	0.939959
3 400	0.361735	12 000	0.945098
3 600	0.403607	13 000	0.955139
3 800	0.443382	14 000	0.962898
4 000	0.480877	15 000	0.969981
4 200	0.516014	16 000	0.973814
4 400	0.548796	18 000	0.980860
4 600	0.579280	20 000	0.985602
4 800	0.607559	25 000	0.992215
5 000	0.633747	30 000	0.995340
5 200	0.658970	40 000	0.997967
5 400	0.680360	50 000	0.998953
5 600	0.701046	75 000	0.999713
5 800	0.720158	100 000	0.999905
6 000	0.737818		

Para el cálculo de la emisión en un ancho de banda cuyo  $\lambda_1 \neq 0$ , no hay más que restar de acuerdo con las propiedades de las integrales

$$F_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2} \equiv \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{\lambda, n} d\lambda}{\sigma T^4} = \frac{\int_0^{\lambda_2} E_{\lambda, n} d\lambda}{\sigma T^4} - \frac{\int_0^{\lambda_1} E_{\lambda, n} d\lambda}{\sigma T^4} = F_{0 \rightarrow \lambda_2} - F_{0 \rightarrow \lambda_1}$$

Estas fracciones se pueden representar gráficamente como áreas bajo la curva  $(E_{\lambda, n}/\sigma T^4)$  frente a  $\lambda$ . Así se ha hecho en la figura 12.8.

**FIGURA 12.8** Representación gráfica de la fracción  $F_{0 \rightarrow \lambda}$  respecto a  $\lambda$ .



Valor total del área bajo la curva = 1

## Los radiadores reales

Una superficie real, o un cuerpo en general, tiene un comportamiento distinto al del cuerpo negro. Su emisión y absorción es menor que la de éste y para indicarlo se utilizan unas propiedades que se comentan a continuación.

### Emisividad, $\varepsilon$

La emisividad es una **propiedad termofísica** de las **superficies**, que indica la cantidad de radiación que emiten respecto a la del cuerpo negro (que es la máxima), a las mismas temperatura, longitud de onda y/o dirección. Existen cuatro casos que se definen en la tabla 12.2.

En esta tabla y en general las magnitudes radiativas sin subíndice especial se refieren a los cuerpos (o radiadores) reales y las que llevan el subíndice “n” se refieren al cuerpo negro.

En el caso particular frecuente de que  $\varepsilon_{\lambda, \omega} \neq f(\phi)$ , se cumple

$$\varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) = 2 \int_0^{\pi/2} \varepsilon_{\lambda \omega}(\lambda, \theta, T) \cos \theta \sin \theta d\theta$$

y

$$\varepsilon(T) = 2 \int_0^{\pi/2} \varepsilon_{\omega}(\theta, T) \cos \theta \sin \theta d\theta.$$

**TABLA 12.2** Definición de las cuatro modalidades de la emisividad.

Emisividad espectral direccional	$\varepsilon_{\lambda\omega}(\lambda, \theta, \phi, T) \equiv \frac{I_{\lambda, e}(\lambda, \theta, \phi, T)}{I_{\lambda, n}(\lambda, T)}$
Emisividad total direccional	$\varepsilon_{\omega}(\theta, \phi, T) \equiv \frac{I_e(\theta, \phi, T)}{I_n(T)}$
Emisividad espectral hemisférica	$\varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) \equiv \frac{E_{\lambda}(\lambda, T)}{E_{\lambda, n}(\lambda, T)}$
Emisividad total hemisférica	$\varepsilon(T) \equiv \frac{E(T)}{E_n(T)} = \frac{E(T)}{\sigma T^4} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda} E_{\lambda, n}(\lambda, T) d\lambda}{\sigma T^4}$

Aunque el valor particular de esta propiedad para cada material debe buscarse en la documentación adecuada, como la que se ofrece en el apéndice, se pueden hacer las siguientes consideraciones generales [14].

- 1ª.** En general,  $\varepsilon$  es alto ( $> 0.6$ ) en los no conductores y bajo ( $< 0.1$ ) en los conductores. Para confirmar esta afirmación, se puede observar la figura 12.9.
- 2ª.** Habitualmente la dependencia de  $\varepsilon_{\lambda\omega}$  y  $\varepsilon_{\omega}$  con  $\phi$  es débil y con  $\theta$  sigue en general (no siempre) la pauta marcada en la figura 12.10.

Promediando se llega a

$$\left| \begin{array}{ll} 1.0 \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_n} \leq 1.30 & \text{conductores} \\ 0.95 \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_n} \leq 1.0 & \text{no conductores} \end{array} \right.$$

y se suele tomar  $\varepsilon \equiv \varepsilon_n$ , donde el subíndice “n” indica en este caso la dirección normal a la superficie. Es decir, la aproximación de emisor difuso,  $\varepsilon_{\lambda\omega}$  y  $\varepsilon_{\omega} \neq f(\theta, \phi)$ , es razonable y habitual.

FIGURA 12.9 Valores representativos de la emisividad total normal,  $\epsilon_n$ .

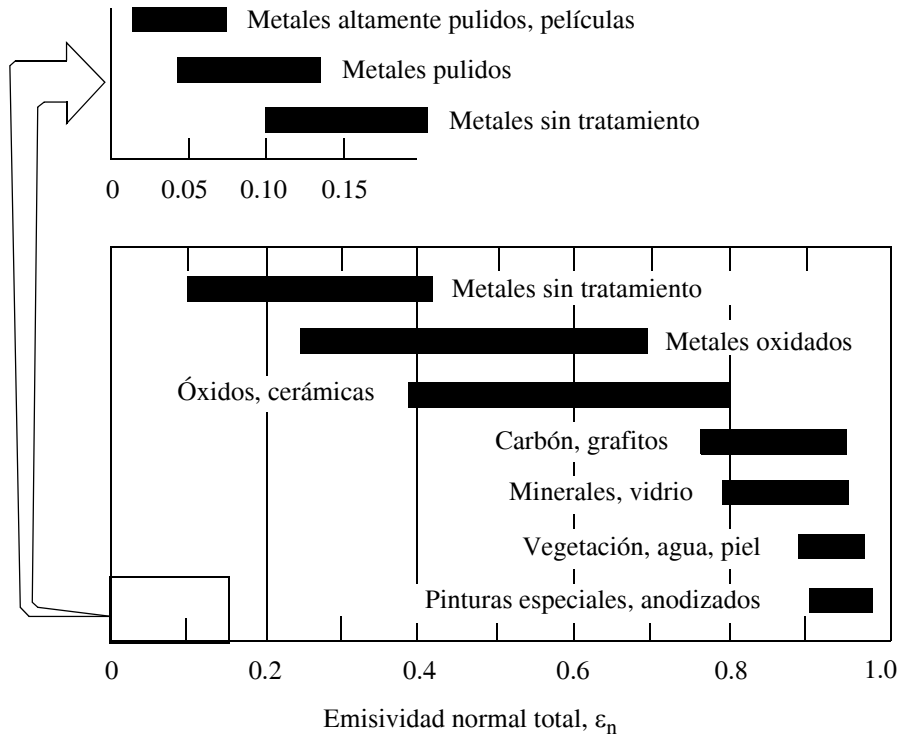
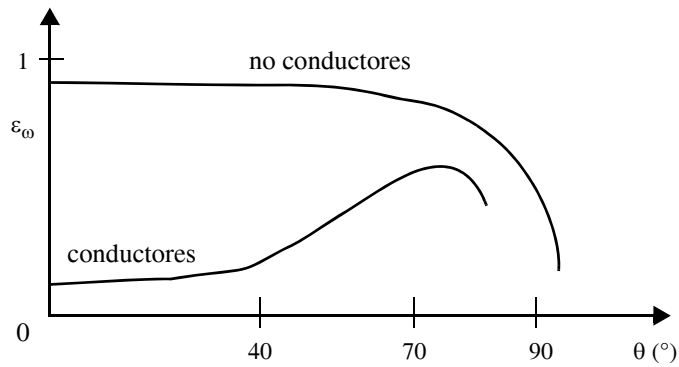
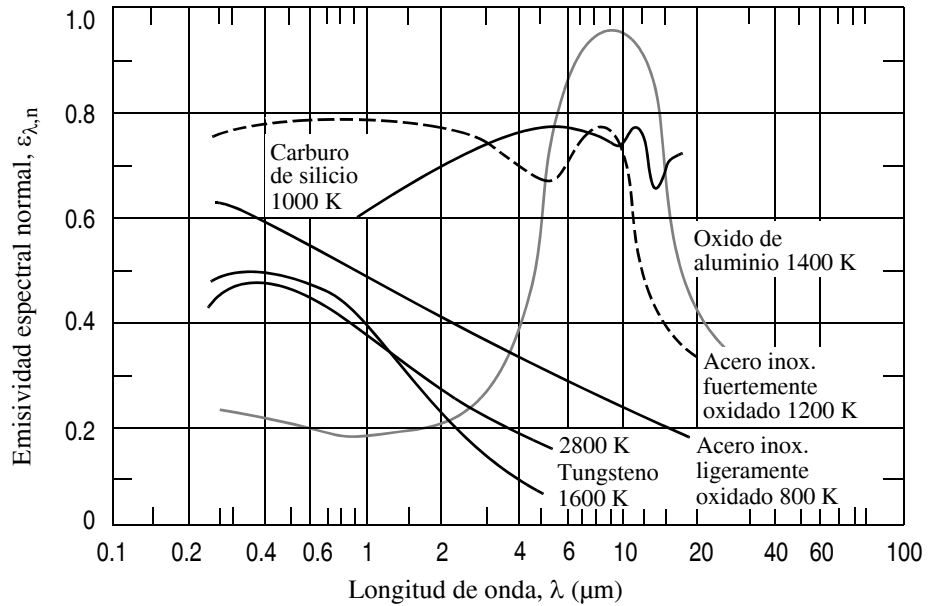


FIGURA 12.10 Dependencia de la emisividad direccional con el ángulo  $\theta$ .

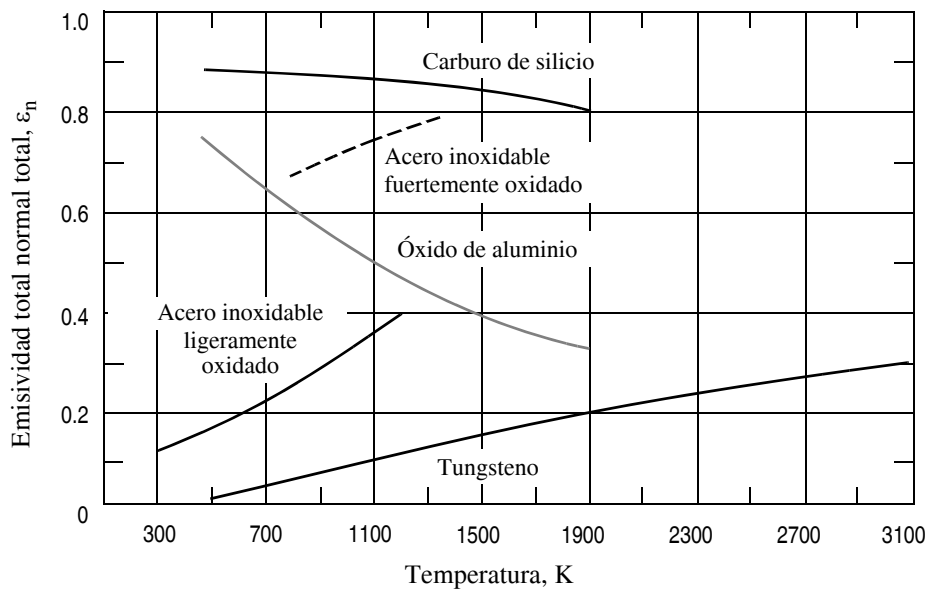


3ª. La dependencia de  $\epsilon_\lambda$  con  $\lambda$  y de  $\epsilon$  con T es importante en general, como se puede ver en las figuras 12.11 y 12.12.

**FIGURA 12.11** Dependencia espectral de la emisividad espectral y normal,  $\epsilon_{\lambda,n}$ , de ciertos materiales.



**FIGURA 12.12** Dependencia con la temperatura de la emisividad total normal,  $\epsilon_n$ , de ciertos materiales.

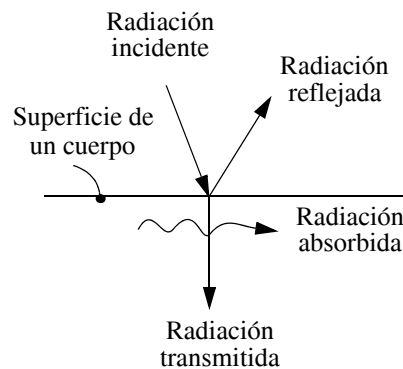


### Absorción, reflexión y transmisión

La radiación incidente sobre una superficie puede sufrir uno de los tres procesos siguientes: ser absorbida (en una pequeña profundidad en el interior del cuerpo del orden de los micrómetros), reflejada (es decir devuelta hacia la zona de donde proviene la radiación incidente) o transmitida hacia el interior del cuerpo (como sucede con la luz visible en el vidrio, el agua y otras sustancias semitransparentes). Estos fenómenos se representan en la figura 12.13.

---

**FIGURA 12.13** Recepción de la radiación por la materia.



Por tanto se siguen las siguientes relaciones

$$I_{\lambda,i} = I_{\lambda,abs} + I_{\lambda,ref} + I_{\lambda,trans}$$

$$I_i = I_{abs} + I_{ref} + I_{trans}$$

$$G_{\lambda} = G_{\lambda,abs} + G_{\lambda,ref} + G_{\lambda,trans}$$

$$G = G_{abs} + G_{ref} + G_{trans}$$

La reflexión se debe a fenómenos superficiales (profund.  $\delta$  1  $\mu\text{m}$ ), mientras que la transmisión y la absorción se deben a fenómenos volumétricos, y son muy importantes en el estudio de la radiación en volúmenes, como se verá en el capítulo 14. Cuando el medio es **opaco** se dice que no hay radiación transmitida y que se cumple:  $I_{trans}$ ,  $G_{trans} = 0$ , aunque lo que realmente sucede es que la radiación que no se ha reflejado recorre un camino muy breve quedando totalmente absorbida en un pequeño espesor de unas pocas micras. Estas ideas se pueden aclarar mediante el ejercicio sugerido en el apartado siguiente sobre medios semitransparentes.

El reparto lo indican unas propiedades que se definen en la tabla 12.3.

**TABLA 12.3** Definición de las diversas modalidades de absorptividad, reflectividad y transmisividad.

	<b>Espectral direccional</b>	<b>Total direccional</b>	<b>Espectral hemisférica</b>	<b>Total hemisférica</b>
Absortividad $\alpha$	$\alpha_{\lambda\omega} \equiv \frac{I_{\lambda, \text{abs}}(\lambda, \theta, \phi)}{I_{\lambda, i}(\lambda, \theta, \phi)}$	$\alpha_{\omega} \equiv \frac{I_{\text{abs}}(\theta, \phi)}{I_i(\theta, \phi)}$	$\alpha_{\lambda} \equiv \frac{G_{\lambda, \text{abs}}(\lambda)}{G_{\lambda}(\lambda)}$	$\alpha \equiv \frac{G_{\text{abs}}}{G}$
Reflectividad $\rho$	$\rho_{\lambda\omega} \equiv \frac{I_{\lambda, \text{ref}}(\lambda, \theta, \phi)}{I_{\lambda, i}(\lambda, \theta, \phi)}$	$\rho_{\omega} \equiv \frac{I_{\text{ref}}(\theta, \phi)}{I_i(\theta, \phi)}$	$\rho_{\lambda} \equiv \frac{G_{\lambda, \text{ref}}(\lambda)}{G_{\lambda}(\lambda)}$	$\rho \equiv \frac{G_{\text{ref}}}{G}$
Transmisividad $\tau$	$\tau_{\lambda\omega} \equiv \frac{I_{\lambda, \text{trans}}(\lambda, \theta, \phi)}{I_{\lambda, i}(\lambda, \theta, \phi)}$	$\tau_{\omega} \equiv \frac{I_{\text{trans}}(\theta, \phi)}{I_i(\theta, \phi)}$	$\tau_{\lambda} \equiv \frac{G_{\lambda, \text{trans}}(\lambda)}{G_{\lambda}(\lambda)}$	$\tau \equiv \frac{G_{\text{trans}}}{G}$

**Aspectos destacables de estas propiedades**

1. En general, la dependencia con la temperatura de la superficie receptora es pequeña.
2. Si la **radiación** incidente es **difusa** y  $\alpha_{\lambda\omega} \neq f(\phi)$ , se cumple

$$\alpha_{\lambda}(\lambda) = 2 \int_0^{\pi/2} \alpha_{\lambda\omega} \cos\theta \sin\theta d\theta \quad \text{y} \quad \alpha = 2 \int_0^{\pi/2} \alpha_{\omega} \cos\theta \sin\theta d\theta$$

y lo mismo para  $\rho$  y  $\tau$ .

3. El comportamiento de una superficie real respecto a la reflexión se encuentra entre dos extremos ideales, según se indica en la figura 12.14.

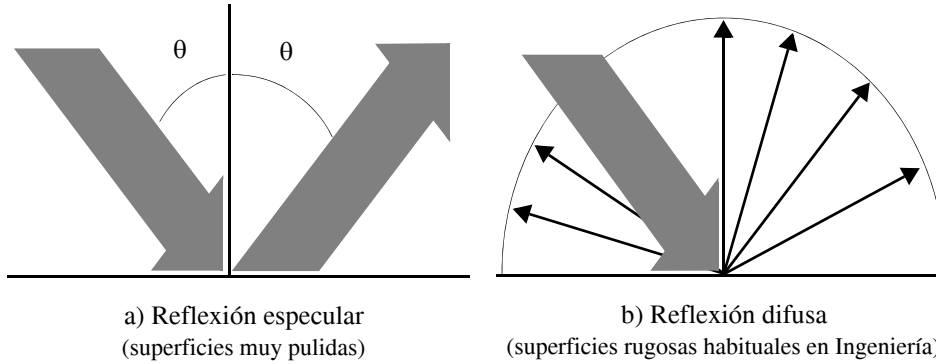
4. Relaciones algebraicas inmediatas

$$\begin{aligned} \alpha_{\lambda\omega} + \rho_{\lambda\omega} + \tau_{\lambda\omega} &= 1 \\ \alpha_{\omega} + \rho_{\omega} + \tau_{\omega} &= 1 \\ \alpha_{\lambda} + \rho_{\lambda} + \tau_{\lambda} &= 1 \\ \alpha + \rho + \tau &= 1 \end{aligned}$$

Si el medio es opaco

$$\begin{aligned} \alpha_{\lambda\omega} + \rho_{\lambda\omega} &= 1 \\ \alpha_{\omega} + \rho_{\omega} &= 1 \\ \alpha_{\lambda} + \rho_{\lambda} &= 1 \\ \alpha + \rho &= 1 \end{aligned}$$

**FIGURA 12.14** Comportamientos ideales de la materia respecto a la reflexión de la radiación.



**5. Importante.** Los valores globales (total y hemisférico) dependen de la superficie y de la radiación incidente, es decir, de la temperatura del cuerpo emisor de la radiación. En las expresiones (12.18) y (12.19) se puede apreciar como el valor de  $\alpha_\lambda$  y  $\alpha$  depende de la dependencia que tiene la radiación incidente,  $I_{\lambda,i}$  y  $G_\lambda$ , con la dirección  $(\theta, \phi)$  y la longitud de onda, y por tanto con la posición y temperatura del medio emisor.

$$\alpha_\lambda(\lambda) \equiv \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \alpha_{\lambda,\omega} I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi} \quad (12.18)$$

$$\alpha \equiv \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda(\lambda) G_\lambda(\lambda) \, d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda(\lambda) \, d\lambda} \quad (12.19)$$

## Medios semitransparentes. Ejercicio

En el caso de medios semitransparentes, como el vidrio de una ventana, existe un proceso iterativo de reflexiones en sus dos caras, apareciendo unas magnitudes globales, es decir, no locales que dan cuenta del comportamiento volumétrico del mismo.

---

## Leyes de Kirchhoff

---

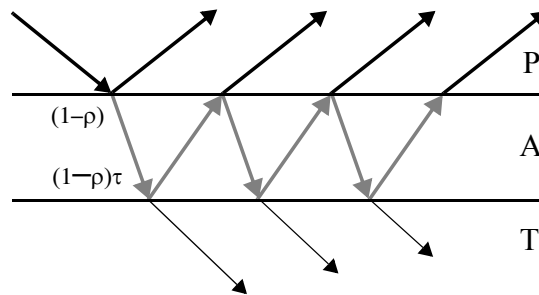
Estas propiedades se llaman:

- **Absortancia**, A ( $\alpha$  mayúscula)
- **Reflectancia**, P ( $\rho$  mayúscula)
- **Transmitancia**, T ( $\tau$  mayúscula)

y se estudian en detalle en el capítulo 14 sobre radiación volumétrica. Están relacionadas con las propiedades anteriores, en particular con  $\rho$  y  $\tau$ , y se puede encontrar sin dificultad la relación que hay entre ellas.

---

**FIGURA 12.15** Comportamiento radiante de un medio semitransparente.



Si  $\rho$  es la fracción de energía incidente reflejada en cualquiera de las caras y  $\tau$  la fracción de energía que parte de una cara y alcanza la otra, es sencillo calcular la fracción total de energía reflejada P tras las infinitas reflexiones, la fracción de energía que pasa la ventana, T, y la fracción de energía que absorbe la ventana, A.

Este ejercicio es interesante en la comprensión del comportamiento de la materia al recibir la radiación y del significado de las propiedades definidas en el apartado anterior.

## Leyes de Kirchhoff

---

Las leyes de Kirchhoff [15] establecen directamente las relaciones entre la emisividad y la absortividad, y por tanto de forma indirecta entre la emisividad y las otras dos propiedades, es decir, la reflectividad y la transmisividad.

Según estas leyes, **siempre** se cumple  $\boxed{\varepsilon_{\lambda, \omega} = \alpha_{\lambda, \omega}}$ , y sólo **bajo ciertas condiciones**  $\varepsilon_{\lambda} = \alpha_{\lambda}$ ,  $\varepsilon_{\omega} = \alpha_{\omega}$  y  $\varepsilon = \alpha$ .

Estas relaciones facilitan mucho los cálculos.

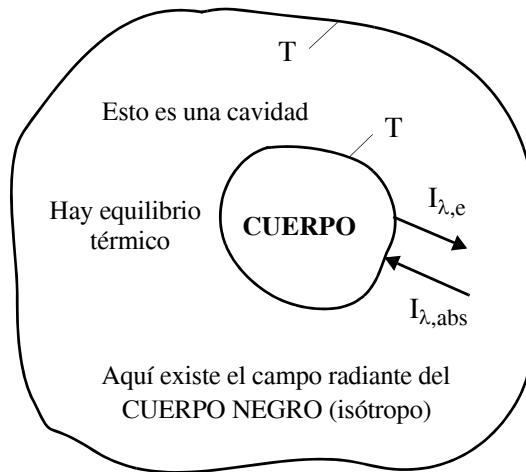
## Demostración

### 1. Caso general

Haciendo un balance de energía en un punto de la superficie del cuerpo interior de la figura 12.16, para que se mantenga la isotropía del campo debe cumplirse

$$I_{\lambda,abs} = I_{\lambda,e} \Rightarrow \alpha_{\lambda\omega} I_{\lambda,i} = \varepsilon_{\lambda\omega} I_{\lambda,n}$$

**FIGURA 12.16** Cavity utilizada para demostrar la Ley General de Kirchhoff.



Como  $I_{\lambda,i} = I_{\lambda,n}$ , resulta

$$\boxed{\alpha_{\lambda\omega} = \varepsilon_{\lambda\omega}} \quad (12.20)$$

### 2. Situaciones particulares

Se trata de estudiar en qué situaciones se puede ampliar la ley general de Kirchhoff a las propiedades hemisféricas y/o totales.

- En primer lugar se trata de ver bajo qué condiciones se cumple la igualdad  $\alpha_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda}$ . Para ello se parte de sus definiciones respectivas de las tablas 12.2 y 12.3, y tras un desarrollo de las mismas se observa en qué casos se pueden igualar  $\varepsilon_{\lambda}$  y  $\alpha_{\lambda}$ .

$$\varepsilon_\lambda \equiv \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \varepsilon_{\lambda,\omega} \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi} ; \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \alpha_{\lambda,\omega} I_{\lambda,i} \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi}{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_{\lambda,i} \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi} \equiv \alpha_\lambda$$

Ambos cocientes son iguales si se da una de las dos siguientes condiciones:

- que  $I_{\lambda,i}$  sea independiente de  $\theta$  y  $\phi$ . En ese caso se dice que la irradiación es difusa.
- que  $\varepsilon_{\lambda,\omega}$  ( $= \alpha_{\lambda,\omega}$ ) sea independiente de  $\phi$  y  $\theta$ . En ese caso se dice que superficie es difusa.

En cualquiera de esos dos casos  $\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda$ .

- b) Análogamente, ¿cuando se cumple que  $\varepsilon = \alpha$ ?

Partamos de la situación anterior (bastante habitual en aplicaciones térmicas) en que ya se cumple  $\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda$ . Para ver en qué condiciones se cumple la igualdad buscada, se ponen las definiciones de ambas magnitudes

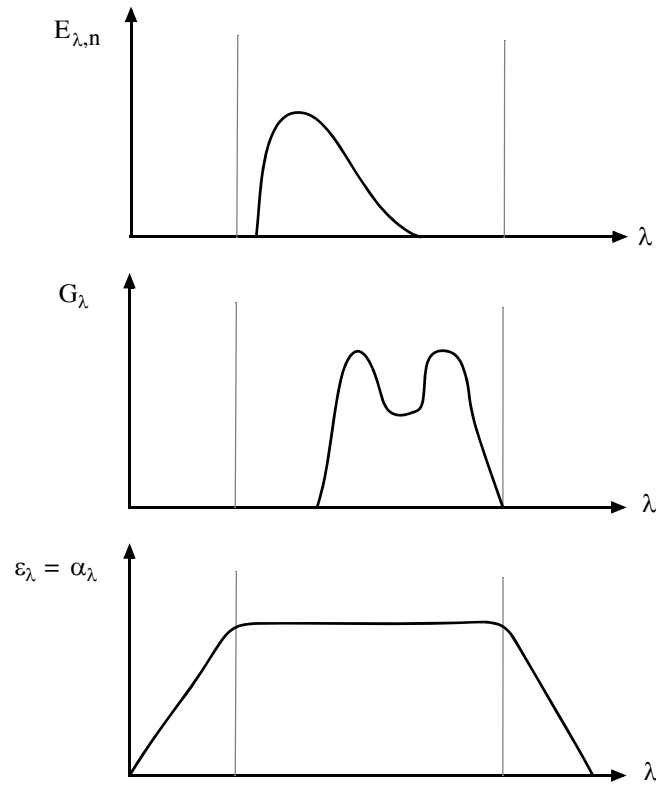
$$\varepsilon = \frac{\int_0^{\tilde{\lambda}} \varepsilon_\lambda E_{\lambda,n} d\lambda}{E_n} ; \frac{\int_0^{\tilde{\lambda}} \alpha_\lambda G_\lambda d\lambda}{G} = \alpha$$

La igualdad se cumple sólo si se pueden sacar fuera de las integrales las magnitudes  $\varepsilon_\lambda$  y  $\alpha_\lambda$ , es decir, si  $\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda$  son independientes de  $\lambda$ . En este caso el cuerpo se llama **gris**.

Estrictamente es suficiente con que  $\varepsilon_\lambda$  y  $\alpha_\lambda$  sean constantes en el ancho de banda en que se produce la emisión y la irradiación, tal y como se muestra en la figura 12.17.

Si  $\varepsilon_{\lambda,\omega}$  ( $= \alpha_{\lambda,\omega}$ ) *no depende* de la dirección ni de la longitud de onda, la superficie se llama **difusa y gris**.

- c) Tras las deducciones anteriores, es inmediato demostrar que en una superficie gris pero no difusa y para una irradiación no difusa se cumple  $\varepsilon_\omega = \alpha_\omega$  pero no se cumplen las igualdades de los apartados a) y b).

**FIGURA 12.17** Superficies grises para ciertas radiaciones.

---

## Radiación ambiental

---

El entorno (Sol, atmósfera, superficie terrestre) emite radiación que incide sobre cualquier sistema. Si su valor relativo es apreciable, habrá que considerarla.

A continuación se comenta brevemente cada una de las aportaciones ambientales.

### Radiación solar

La radiación procedente del Sol se recibe en la Tierra, como un haz de rayos prácticamente paralelos debido a la distancia, y con una distribución espectral que corresponde aproximadamente a un cuerpo negro a unos 5800 K (ver la figura 12.21).

---

**Radiación ambiental**

---

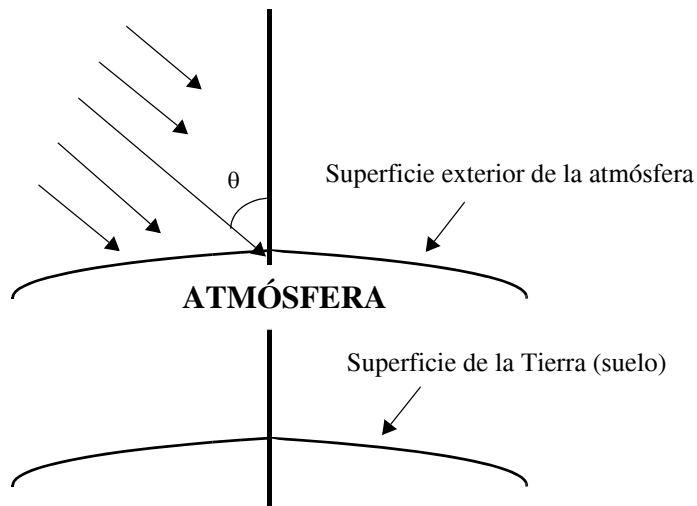
Al no existir entre la superficie solar y el exterior de la atmósfera terrestre nada más que el vacío (aproximadamente) la irradiación incidente sobre una superficie colocada en el exterior de la atmósfera (no sobre la superficie terrestre), es constante, dependiente de la temperatura de la superficie del Sol y de las relaciones geométricas Sol–Tierra y vale

$$G_{\text{solar},0} = 1353 f \cos \theta \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (12.21)$$

donde  $f$  da cuenta de la excentricidad de la órbita de la Tierra, con valores en el intervalo  $0.97 < f < 1.03$ ;  $\theta$  es el ángulo entre la dirección de los rayos solares y la normal a la superficie irradiada; y  $1353 \text{ W/m}^2$  es la llamada constante solar.

---

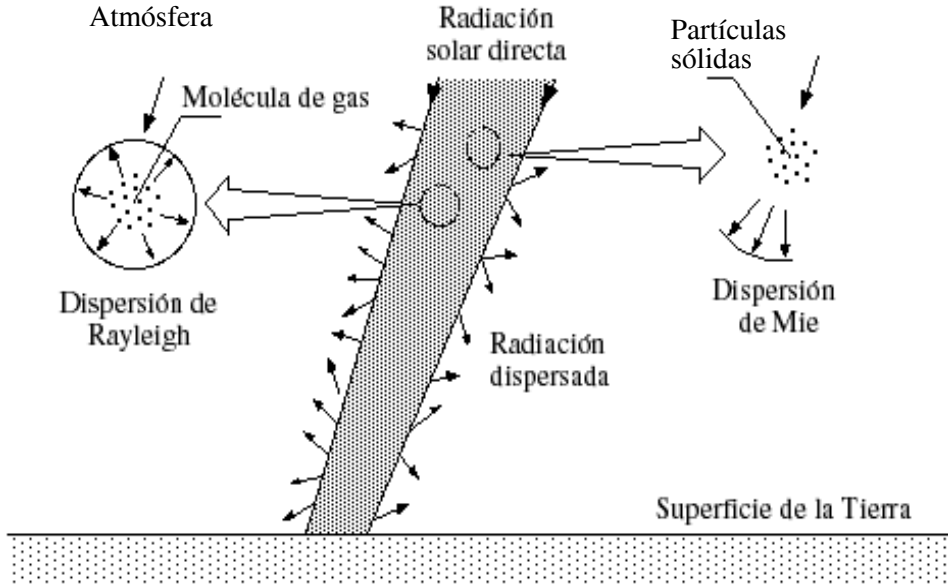
**FIGURA 12.18** Irradiación solar en el exterior de la atmósfera terrestre.



En la superficie de la Tierra la irradiación recibida es apreciablemente menor por los procesos de absorción y dispersión que sufre la radiación a su paso por la atmósfera terrestre (ver el capítulo 14).

Estos procesos causan que en la superficie de la Tierra aparezcan dos componentes distintas de la irradiación solar: directa y difusa (dispersa realmente). (Ver figuras 12.19 y 12.20). Los valores de estas componentes son muy variables, y se obtienen principalmente por medida aunque existen fórmulas para calcularlas de forma aproximada.

**FIGURA 12.19** Procesos de dispersión de la radiación solar al atravesar la atmósfera terrestre.



**FIGURA 12.20** Componentes de la radiación solar incidente sobre la corteza terrestre. (a) Reales. (b) La componente dispersa se aproxima, por comodidad matemática, por una distribución difusa (igual en todas las direcciones).

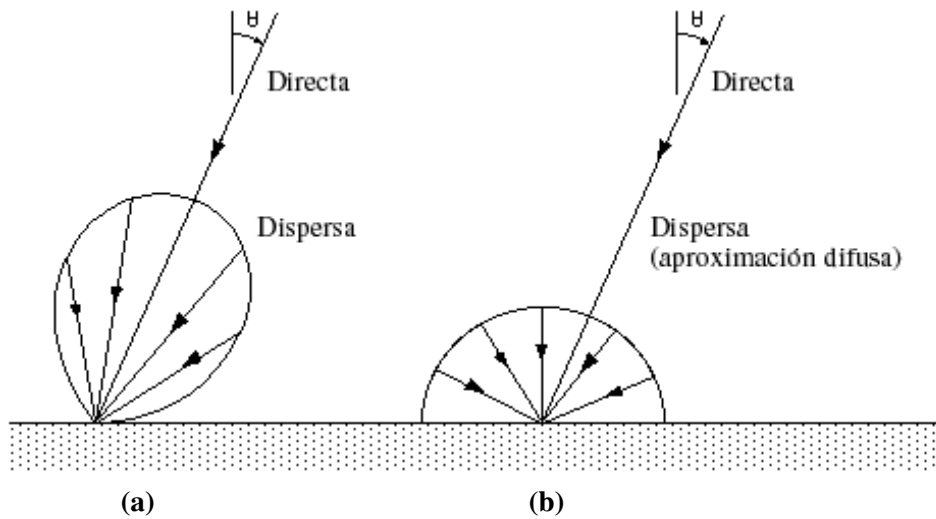
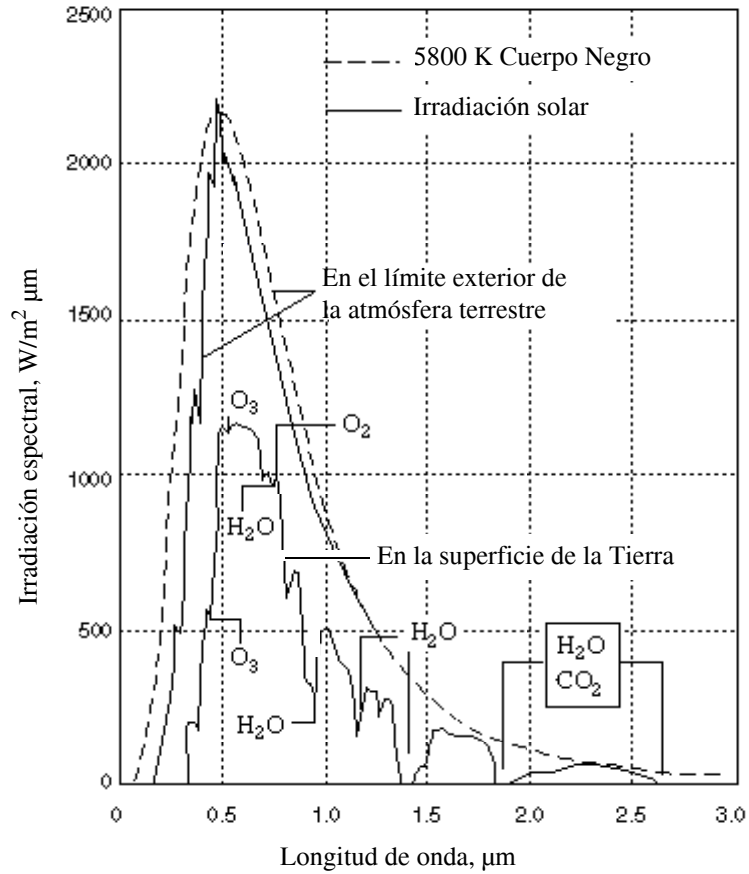


FIGURA 12.21 Distribución espectral de la irradiación solar en la Tierra.



### Radiación atmosférica

Las moléculas polares de la atmósfera ( $CO_2$  y  $H_2O$  principalmente) emiten radiación cuyo valor se ha calculado históricamente por la expresión

$$G_{atm} = \sigma T_{cielo}^4 \quad (12.22)$$

donde  $T_{cielo}$  no es la temperatura del aire atmosférico sino una compleja función de ella y de otras condiciones atmosféricas (humedad y distribución de temperaturas en la atmósfera, nubosidad, etc). Su valor, siempre inferior a la temperatura del aire

ambiente, oscila entre 230 K (−43°C) y 285 K (12°C), explicando fenómenos como las heladas nocturnas aunque la temperatura del aire sea superior a 0°C.  $G_{\text{atm}}$  es la irradiación procedente de la atmósfera recibida por cualquier objeto situado en su seno y cerca del suelo de la Tierra.

Una forma más directa y cómoda de calcular la irradiación  $G_{\text{atm}}$  es a partir de la temperatura real del aire ambiente,  $T_{\text{amb}}$  según la fórmula  $G_{\text{atm}} = \varepsilon_{\text{atm}} \sigma T_{\text{amb}}^4$ , donde para la emitancia\* de la atmósfera,  $\varepsilon_{\text{atm}}$ , se han dado multitud de expresiones, presentándose seguidamente dos de las más modernas. Para un cielo claro (sin nubes o con pocas nubes), se recomienda [16]

$$\text{Noche: } \varepsilon_{\text{atm}} \cong 0.741 + 0.0062 T_R \quad (12.23a)$$

$$\text{Día: } \varepsilon_{\text{atm}} \cong 0.727 + 0.0060 T_R \quad (12.23b)$$

siendo  $T_R$  la temperatura de rocío, expresada en °C.

Si en el cielo hay muchas nubes bajas, se puede tomar  $T_{\text{cielo}} \cong T_{\text{amb}}$ , es decir,  $\varepsilon_{\text{atm}} \cong 1$ .

Otras expresiones para la emitancia de la atmósfera se presentan en la bibliografía [17].

### **Emisión de la superficie de la Tierra**

El poder emisor de la superficie de la Tierra se calcula de la forma correspondiente a un cuerpo gris

$$E = \varepsilon \sigma T^4 \quad (12.24)$$

donde  $\varepsilon$  y  $T$  son la emisividad (cercana a uno) y la temperatura real de la superficie terrestre, respectivamente.

---

\*. El concepto de emitancia es similar pero distinto al de emisividad. Su significado se explica en el capítulo 14.

## Referencias

---

1. J. A. de Andrés y R. Pomatta, S. Aroca  
*Calor y frío industrial, I*  
UNED, Madrid, 1984.
2. H. C. Hottel, and A. F. Sarofim  
*Radiative Transfer*  
McGraw-Hill, New York, 1967.
3. M. N. Ozisik  
*Radiative Transfer and Interactions with Conduction and Convection*  
Wiley, New York, 1973.
4. M. F. Modest  
*Radiative Heat Transfer*  
McGraw-Hill International Editions, Singapore, 1993.
5. R. Siegel, and J. Howell  
*Thermal Radiation Heat Transfer*  
McGraw-Hill – Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1981.
6. E. S. Barr  
*Historical Survey of the Early Development of the Infrared Spectral Region*  
American Journal of Physics, vol. 28, p. 42, 1960.
7. M. Planck  
*Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum*  
Annalen der Physik, IV, folge 4, p. 553, 1901.
8. T. S. Kuhn  
*La teoría del cuerpo negro y la discontinuidad cuántica, 1894–1912*  
Alianza Universidad, Madrid, 1987.
9. W. Wien  
*Ueber die Energieverteilung im Emissionsspectrum eines schwarzen körpers*  
Annalen der Physik, III, folge 58, p. 662, 1896.
10. Lord Rayleigh  
*Remarks upon the Law of Complete Radiation*  
Philosophical Magazine, series 5, vol. 49, p. 539, 1900.
11. J. H. Jeans  
*On the Partition of Energy between Matter and Aether*  
Philosophical Magazine, series 6, vol. 10, p. 91, 1905.
12. W. Wien  
*Temperatur und Entropie der Strahlung*  
Annalen der Physik, II, folge 52, p. 132, 1894.

---

**Radiación Fundamentos**

---

13. V. V. Sichev  
*Complex Thermodynamic Systems*  
MIR, Moscú, 1994.
14. F. P. Incropera, and D. P. de Witt  
*Fundamentals of Heat and Mass Transfer*  
Wiley, Singapore, 1990.
15. G. Kirchhoff  
Annalen der Physik, vol. 109. p. 275, 1860.
16. P. Berdahl, and R. Fromberg  
*The Thermal Radiance of Clear Skies*  
Solar Energy, vol. 29, p. 299, 1982.
17. W. M. Elsasser  
*Heat Transfer by Infrared Radiation in the Atmosphere*  
Harvard Meteorological Studies no. 6, Harvard Univ. Blue Hill Meteorol. Observatory, 1942.

---

# Síntesis del capítulo

---

El cálculo del calor que intercambian los cuerpos por radiación tiene las siguientes bases

1. Un conjunto de magnitudes físicas adecuadas, que hay que saber definir, manejar y relacionar entre ellas con soltura. Son:
  - 1.1. Magnitudes direccionales: Intensidad espectral y total.
  - 1.2. Magnitudes hemisféricas: Poder emisivo, irradiación y radiosidad. Tanto espectrales como totales.
2. Las leyes del cuerpo negro.
3. El comportamiento de las sustancias reales respecto del correspondiente al cuerpo negro, dado por sus propiedades radiantes: emisividad, absorptividad, reflectividad y transmitividad; en sus diversas modalidades: direccional o hemisférica, espectral o total.

Estas propiedades no son independientes, sino que están ligadas:

- 3.1. La absorptividad, reflectividad y transmitividad porque deben sumar la unidad.
- 3.2. La emisividad y absorptividad por las leyes de Kirchhoff.

Cualquier sistema estudiado está siempre sometido a la radiación ambiental, es decir, procedente del Sol, la atmósfera y la corteza terrestre. En el capítulo se dan valores y expresiones que permiten calcularla.

---

## Cuestiones

---

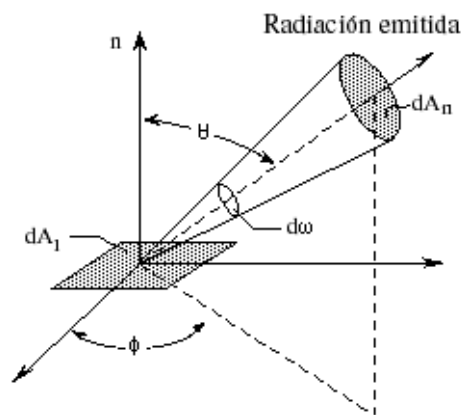
1. Enunciar de la forma más clara y completa posible la ley de Prevost.
2. ¿Cuál de las siguientes definiciones de intensidad total emitida por una superficie diferencial  $dA_1$  es la correcta?

a)  $I_e(\lambda, \theta, \phi) \equiv \frac{dq}{dA_1 \cos \theta d\omega d\lambda}$

b)  $E_\lambda \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,e} \cos \theta d\omega$

c)  $I_e(\theta, \phi) \equiv \frac{dq}{dA_1 \cos \theta d\omega}$

d)  $I_e \equiv \frac{G}{\pi}$



3. ¿Qué parte del espectro electromagnético abarca la radiación térmica?
- a) Infrarrojos, visible y microondas.
- b) Infrarrojos y visible.
- c) Infrarrojos, visible y radioondas.
- d) Infrarrojos, visible y parte del ultravioleta.
4. ¿Cuál de las siguientes relaciones, para una superficie opaca, es incorrecta?
- a)  $J = E + \rho G$
- b)  $J_\lambda = E_\lambda + \alpha_\lambda G_\lambda$

---

**Cuestiones**

---

c)  $J_\lambda = E_\lambda + (1 - \alpha_\lambda) G_\lambda$

d)  $J = \varepsilon E_n + (1 - \alpha) G$

5. Para que un cuerpo **emita** la energía por radiación:
- a) Debe encontrarse una temperatura superior a la de los cuerpos que lo rodean.
  - b) Entre él y los cuerpos que lo rodean debe haber un medio no participativo.
  - c) Basta que su temperatura absoluta sea superior a 0 K.
  - d) Su emisividad debe ser mayor que su absorptividad.
6. El poder emisivo espectral de un cuerpo
- a) Depende de la dirección.
  - b) No depende de la dirección.
  - c) No depende de la longitud de onda por resultar de la integración en  $\lambda$ .
7. La ley que determina que el poder emisivo del cuerpo negro es  $\sigma T^4$  se llama:
- a) de Stefan–Boltzmann.
  - b) de Wien.
  - c) de Planck.
  - d) de Kirchhoff.
8. Como se puede considerar que el Sol emite como un cuerpo negro a 5800 K, la irradiación solar sobre la superficie de la Tierra vale
- a)  $\sigma (5800)^4 \text{ W/m}^2$ .
  - b) Una cantidad mucho menor que la indicada en el apartado a).
  - c) Una cantidad algo mayor que la indicada en a) debido a la radiación de la atmósfera terrestre.

---

**Cuestiones**

---

9. Justificar por qué una bombilla incandescente es un aparato muy ineficiente. Nota: La constante de la ley de desplazamiento de Wien vale  $2898 \mu\text{m}\cdot\text{K}$ .
10. Definir correctamente la radiosidad  $J$  y calcular su valor para una superficie opaca, difusa y gris a  $700 \text{ K}$  y de absortividad  $\alpha = 0.4$ , que recibe una irradiación de  $400 \text{ W/m}^2$ .
11. Definir la emisividad total direccional,  $\varepsilon_{\omega}$  de una superficie, indicando de quien depende funcionalmente tanto  $\varepsilon_{\omega}$  como las magnitudes que intervienen en su definición.
12. Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es falsa, rodeando la respuesta con un círculo.
- a) La emisividad depende del tratamiento dado a la superficie.
  - b) La emisividad es, en general, alta en los conductores y baja en los no conductores.
  - c)  $\varepsilon_{\lambda}$  depende de la temperatura.
  - d) Si el emisor es difuso,  $\varepsilon_{\omega}$  no depende del ángulo  $\theta$ .
13. ¿Cuál es la forma de la ley de Kirchhoff (relación entre la emisividad y la absortividad) que se cumple siempre?
14. La igualdad  $\varepsilon_{\lambda} = \alpha_{\lambda}$  se cumple:
- a) Siempre.
  - b) Para superficies difusas.
  - c) Sólo para superficies difusas y grises.
  - d) Sólo para superficies negras.
15. Partiendo de la ley de Kirchhoff para una superficie difusa,  $\varepsilon_{\lambda} = \alpha_{\lambda}$  demostrar que si la superficie es además gris se cumple  $\varepsilon = \alpha$ .

---

**Cuestiones**

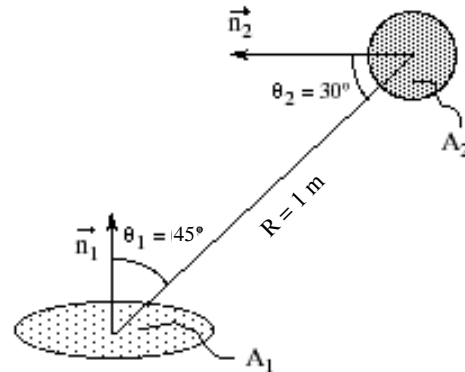
---

16. Demostrar que si  $\epsilon_{\lambda, \omega}$  no es función del ángulo  $\phi$  se cumple la relación

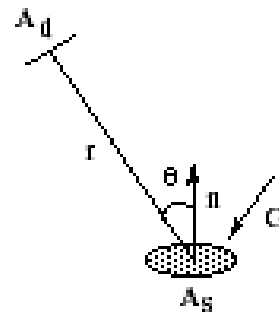
$$\epsilon_{\lambda} = 2 \int_0^{\pi/2} \epsilon_{\lambda, \omega} \cos \theta \operatorname{sen} \theta d\theta.$$

17. En un material de emisividad 0.8 que está a una temperatura uniforme de 1000 K se tiene un agujero de fondo plano de 6 mm de diámetro y 24 mm de profundidad. Considerando muy próxima a 0 K la temperatura radiante del entorno, determinar la potencia radiante que abandona la boca del agujero. La emisividad efectiva de la cavidad  $\epsilon_e$  se define como el cociente entre esta potencia y la emisión de un cuerpo negro a la misma temperatura que la cavidad y de la misma área de la boca. Calcularla. Si se aumentara la profundidad del agujero, ¿disminuiría o aumentaría la emisividad efectiva de la abertura? ¿Cuál es el límite de  $\epsilon_e$  conforme aumenta la profundidad? ¿Influye entonces un entorno de temperatura radiante próxima a la de la cavidad?

18. Considérese una superficie pequeña de área  $A_1 = 10^{-3} \text{ m}^2$  que emite difusamente con un poder emisivo total  $E_1 = 2 \times 10^4 \text{ W/m}^2$ . ¿Cuál es la irradiación total  $G$  que recibe otra pequeña superficie de área  $A_2 = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  situada como indica la figura?



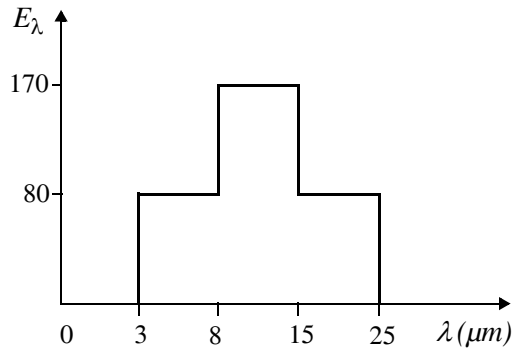
19. Un detector de radiación tiene una apertura de área  $A_d = 10^{-6} \text{ m}^2$  y se coloca a una distancia  $r = 1 \text{ m}$  de una superficie  $A_s = 10^{-4} \text{ m}^2$ . El ángulo formado por las normales del detector y de la superficie vale  $\theta = 30^\circ$ . La superficie se encuentra a 500 K, es opaca, difusa y gris con una emisividad  $\epsilon = 0.7$  y recibe una irradiación  $G = 1500 \text{ W/m}^2$ . ¿Qué energía radiante (por unidad de tiempo) procedente de la superficie recibe el detector?



**Cuestiones**

**20.** Una cavidad tiene una superficie interior de  $80 \text{ m}^2$  de área que se mantiene a una temperatura constante. Por una abertura de  $0.01 \text{ m}^2$  abierta en su superficie se emite una radiación de  $45 \text{ W}$  ¿Cuál es la temperatura de la superficie interior de la cavidad?

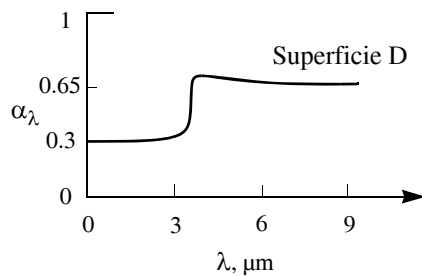
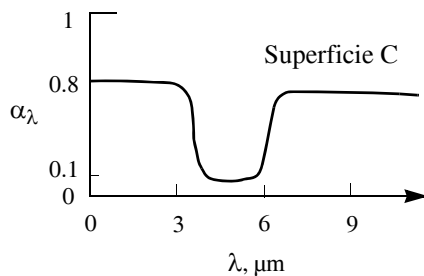
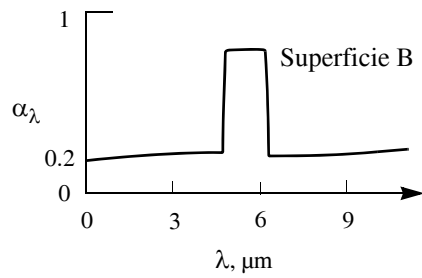
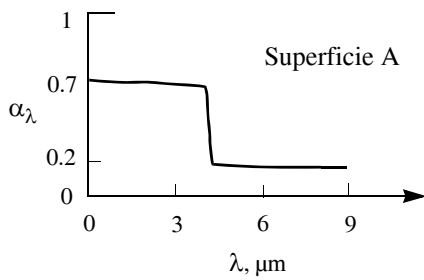
**21.** La distribución espectral de la radiación emitida por una superficie difusa se puede aproximar como se muestra en la figura.



a) ¿Cuál es el poder emisor total,  $E$ ?

b) ¿Cuál es la intensidad total de la radiación emitida en la dirección normal y a un ángulo de  $30^\circ$  respecto de la normal?

**22.** Cuatro superficies difusas con la absorptividad espectral indicada en las cuatro figuras siguientes se encuentran a  $300 \text{ K}$  y están expuestas a la radiación solar ¿Cuál (o cuáles) de dichas superficies puede considerarse gris?

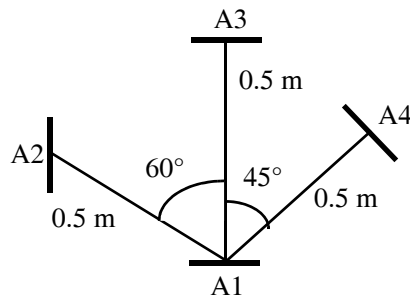


---

## Problemas

---

1. Una pequeña superficie de área  $A_1 = 10^{-3} \text{ m}^2$  se comporta como un emisor difuso, teniendo una intensidad radiante asociada a su dirección normal de  $I_n = 7000 \text{ W/m}^2 \text{ sr}$ . La radiación emitida desde la superficie es interceptada por otras tres superficies de área  $A_2 = A_3 = A_4 = 10^{-3} \text{ m}^2$ , situadas a una distancia de 0,5 m de  $A_1$  y con una orientación tal como se indica en la figura.



- a) ¿Cuál es la intensidad radiante en cada una de las tres direcciones?
- b) ¿Cuál es el ángulo sólido subtendido por las tres superficies visto desde  $A_1$ ?
- c) ¿Qué potencia radiante atraviesa cada una de las tres superficies?
2. Un termómetro de radiación es un dispositivo que detecta un flujo radiante dentro de un intervalo espectral determinado y que está calibrado para indicar la temperatura de un cuerpo negro que emite la misma potencia.
- a) Cuando el termómetro se orienta hacia una superficie a temperatura elevada  $T_s$  cuya emisividad es menor que 1, indicará una temperatura aparente  $T_\lambda$ , denominada temperatura de brillo ¿ $T_\lambda$  será mayor, igual o menor que  $T_s$ ?
- b) Escribir una expresión para el poder emisor de la superficie en los términos de la ley de Wien y de la emisividad espectral de la superficie. Escribir la expresión equivalente utilizando la temperatura de

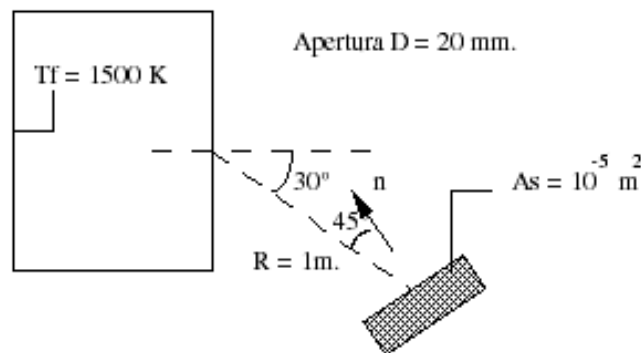
---

**Problemas**

---

brillo de la superficie,  $T_\lambda$ , y demostrar que  $\frac{1}{T_s} = \frac{1}{T_\lambda} + \frac{\lambda}{C_2} \ln(\varepsilon_\lambda)$ , siendo  $\lambda$  la longitud de onda a la que trabaja el termómetro.

- c) Considérese un termómetro que detecta un flujo espectral centrado alrededor de la longitud de onda  $\lambda = 0.65 \mu\text{m}$ . ¿Qué temperatura indicará el termómetro cuando esté enfocado hacia una superficie con  $\varepsilon_\lambda (\lambda = 0.65 \mu\text{m}) = 0.9$  y  $T_s = 1000 \text{ K}$ ? Verificar que, en este caso, la distribución de Wien es una aproximación razonable a la ley de Planck.
3. Un horno con una apertura de 20 mm de diámetro y poder emisorio  $3.72 \times 10^5 \text{ W/m}^2$  se utiliza para calibrar un medidor de flujo de calor con un área sensible de  $1.6 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ . ¿A qué distancia, medida en la normal a la apertura, debe colocarse el aparato para recibir una irradiación de  $1000 \text{ W/m}^2$ ? Si se gira  $20^\circ$  respecto a la normal, ¿cuál será la irradiación recibida?
4. De un horno cuyo interior se encuentra a 1500 K sale energía radiante a través de una apertura de 20 mm de diámetro. Una parte de la radiación es interceptada por un detector situado a 1 m de la apertura. El detector tiene un área de  $10^{-5} \text{ m}^2$  y se posiciona con la orientación indicada en la figura. Si no existe ningún tipo de material entre la apertura y el detector, ¿cuál es la potencia de la radiación captada por el detector?



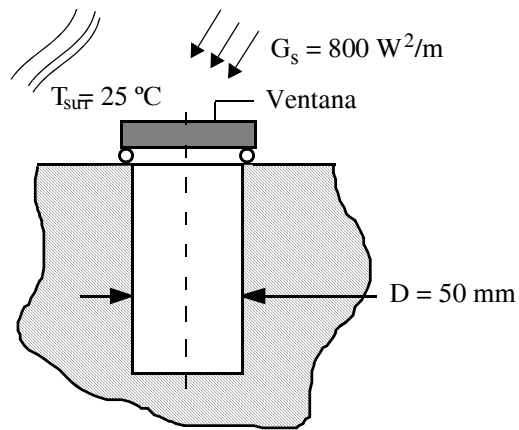
Si la apertura se cubre con un material difuso y semitransparente, cuya transmisividad espectral vale  $\tau_\lambda = 0.8$  para  $\lambda \leq 2 \mu\text{m}$  y  $\tau_\lambda = 0$  para  $\lambda > 2 \mu\text{m}$ , ¿qué potencia capta el detector?

---

**Problemas**

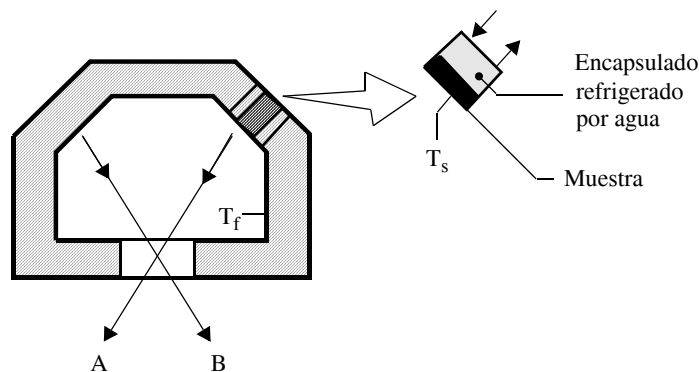
---

5. Una cavidad profunda de 50 mm de diámetro que puede considerarse como un cuerpo negro, se mantiene a  $250^{\circ}\text{C}$  expuesta a una irradiación solar de  $800\text{ W/m}^2$  mientras que los alrededores y el aire ambiental se encuentran a  $25^{\circ}\text{C}$ . Una ventana delgada de transmisividad y reflectividad espectral 0.9 y 0 respectivamente, para el intervalo espectral de 0.2 a  $4\text{ }\mu\text{m}$ , se coloca sobre la apertura de la cavidad. Para longitudes de onda superiores a  $4\text{ }\mu\text{m}$ , la ventana se comporta como un cuerpo gris, difuso y opaco de emisividad 0.95.



Suponiendo que el coeficiente de convección en la superficie superior de la ventana es  $10\text{ W/m}^2\text{ K}$ , determinar la temperatura de la ventana y la potencia necesaria para mantener la cavidad a  $250^{\circ}\text{C}$ .

6. En la figura se muestra un aparato para medir la reflectividad de los materiales.

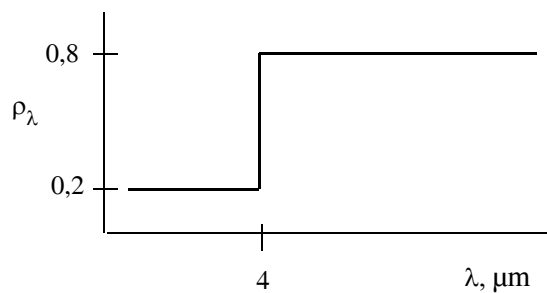


---

**Problemas**

---

Una muestra de 30 mm de diámetro a una temperatura  $T_s = 300$  K, refrigerada por agua, se instala al nivel de la pared de una cavidad de grandes dimensiones, cuyas paredes son grises y difusas con una emisividad de 0.8 y están a temperatura uniforme  $T_f = 1000$  K. En el fondo de la cavidad hay una pequeña apertura desde la cual se ven la muestra y las paredes de la cavidad. Supóngase una muestra opaca y difusa, cuya reflectividad espectral  $\rho_\lambda$  responde a la siguiente gráfica:



El coeficiente de transferencia de calor por convección entre la muestra y el aire de la cavidad, también a 1000 K, vale  $\bar{h} = 10$  W/m<sup>2</sup>K. Se pide:

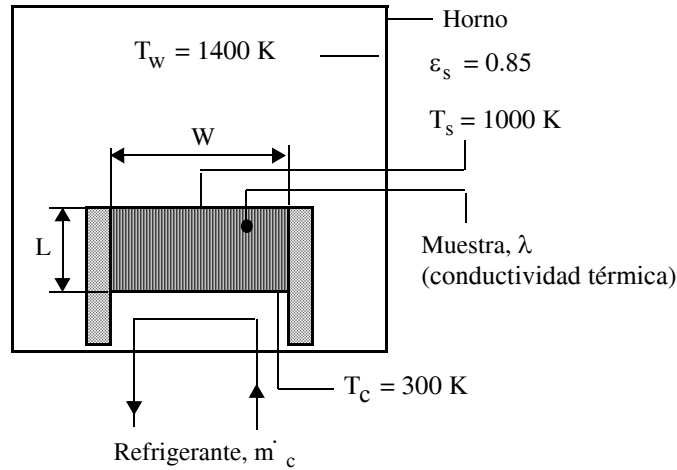
- Calcular la emisividad de la muestra.
  - Determinar el calor evacuado (W) por el refrigerante.
  - El cociente entre la radiación emitida en la dirección A y la radiación emitida en la dirección B será la reflectividad de la muestra. Explicar brevemente por qué.
- 7.** Un procedimiento para medir la conductividad térmica de sólidos a altas temperaturas consiste en colocar una muestra en el fondo de un horno de grandes dimensiones.

La muestra tiene un espesor  $L$  y se coloca en un recipiente cuadrado de lado  $W$ , cuya superficie lateral está aislada. Las paredes de la cavidad se mantienen a  $T_w$ , mientras que la superficie inferior de la muestra se mantiene a una temperatura mucho más baja,  $T_c$ , haciendo circular un refrigerante a través del portamuestras. La superficie de la muestra es gris y difusa con una emisividad  $\epsilon_s$  y su temperatura  $T_s$  se mide ópticamente.

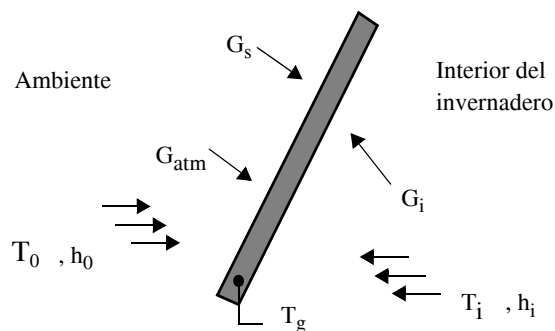
---

**Problemas**

---



- a) Despreciando los efectos de convección, obtener una expresión para evaluar la conductividad térmica de la muestra a partir de las variables medidas ( $T_w$ ,  $T_s$ ,  $T_c$ ,  $\epsilon_s$ ,  $L$ ), suponiendo estado estacionario. Si  $T_w = 1400$  K,  $T_s = 1000$  K,  $\epsilon_s = 0.85$ ,  $L = 0.015$  m. y  $T_c = 300$  K, ¿cuál es la conductividad de la muestra?
- b) Si  $W = 0.1$  m. y el refrigerante es agua con un caudal  $\dot{m}_c = 0.1$  Kg/s, ¿es razonable suponer que la temperatura de la superficie inferior de la muestra es uniforme?
- 8.** Una lámina delgada de vidrio se utiliza para construir el tejado de un invernadero y resulta irradiada según se ve en la figura.



Sobre la placa incide irradiación solar ( $G_s$ ), produciéndose también intercambio radiativo con la atmósfera ( $G_{atm}$ ) y el interior del invernadero ( $G_i$ ). Las irradiaciones  $G_i$  y  $G_{atm}$  están concentradas en la región IR lejana

---

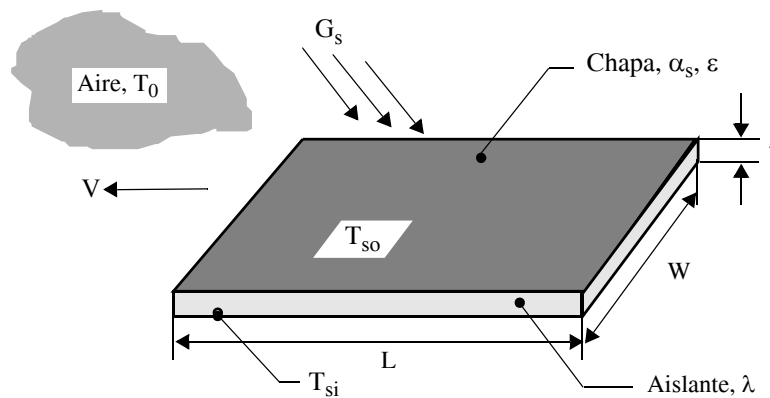
**Problemas**

---

( $\lambda > 8 \mu\text{m}$ ). Además, la placa intercambia calor por convección con el ambiente interior y exterior, y se puede considerar que es totalmente transparente ( $\tau_\lambda = 1$ ) para  $\lambda < 1 \mu\text{m}$  y totalmente opaco ( $\alpha_\lambda = 1$ ) para  $\lambda > 1 \mu\text{m}$ .

- Suponiendo estado estacionario, que todas las irradiaciones están uniformemente distribuidas sobre la superficie y que la lámina se encuentra a temperatura uniforme  $T_g$ , escribir el balance de energía adecuado para un área unidad de vidrio.
- Calcular la temperatura del aire en el invernadero  $T_i$ , si:  $T_g = 27^\circ\text{C}$ ,  $T_o = 24^\circ\text{C}$ ,  $\bar{h}_i = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $\bar{h}_o = 55 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $G_s = 1100 \text{ W/m}^2$ ,  $G_{\text{atm}} = 250 \text{ W/m}^2$ ,  $G_i = 440 \text{ W/m}^2$

9. El techo plano de la cámara frigorífica de un camión de reparto de alimentos mide  $L = 5 \text{ m}$  de longitud por  $W = 2 \text{ m}$  de anchura. Está formado por una chapa metálica delgada unida a una plancha aislante de espesor  $t = 25 \text{ mm}$  y conductividad térmica  $\lambda = 0.05 \text{ W/m K}$ . El camión se mueve a una velocidad  $V = 30 \text{ m/s}$  en un aire a  $T_o = 27^\circ\text{C}$ . La irradiación solar es  $G_s = 900 \text{ W/m}^2$  y la temperatura radiante efectiva del entorno es  $T_{\text{rad}} = 0^\circ\text{C}$ . La instalación frigorífica mantiene la temperatura de la superficie interior del techo  $T_{s,i}$  en  $-13^\circ\text{C}$ .



Hay que pintar el camión, para lo que se dispone de tres tipos de pinturas, con las siguientes características radiativas una vez secas ( $\alpha_s$  = absorptividad para la radiación solar,  $\epsilon$  = emisividad y absorptividad para la radiación infrarroja):

- $\alpha_s = 0.98 \quad \epsilon = 0.98$
- $\alpha_s = 0.26 \quad \epsilon = 0.90$
- $\alpha_s = 0.16 \quad \epsilon = 0.93$

---

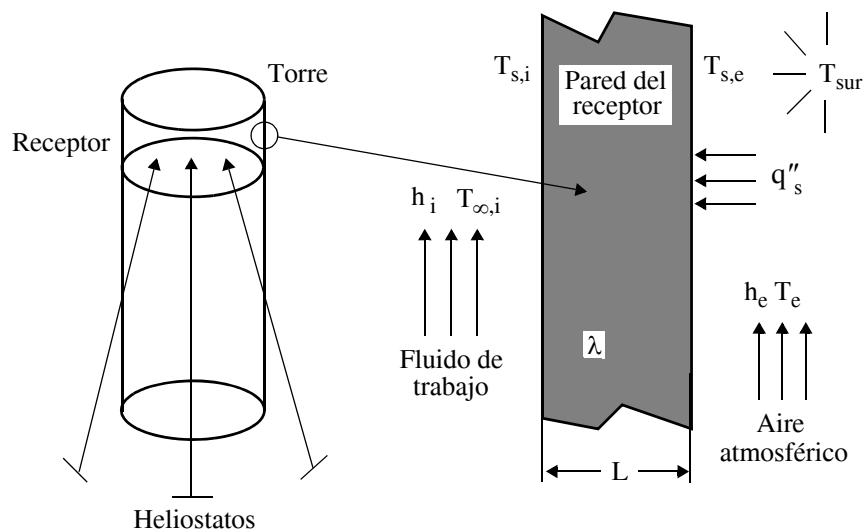
**Problemas**

---

Teniendo en cuenta la ganancia de calor a través del techo, decidir cuál es la mejor opción y explicar el motivo.

Una vez pintado el camión, calcular la ganancia de calor y la temperatura de la superficie exterior del techo  $T_{s,o}$ . La arista del techo de la cámara que enfrenta el aire es ligeramente saliente, lo que provoca turbulencia en toda la superficie. Las propiedades del aire pueden tomarse como  $\nu = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ;  $\lambda = 0.026 \text{ W/m}\cdot\text{K}$  y  $\text{Pr} = 0.7$ .

10. Para la acumulación de energía solar, existe el concepto de receptor centralizado, en el que un gran número de heliostatos (reflectores) concentran un flujo solar  $q''_s = 80 \text{ kW/m}^2$  sobre el receptor, situado en lo alto de una torre.



La pared del receptor está expuesta en su superficie exterior al flujo solar y al aire atmosférico, para el que  $T_e = 300 \text{ K}$  y  $\bar{h}_e = 25 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Esta superficie exterior es opaca y difusa, con una absorptividad espectral  $\alpha_\lambda = 0.9$  para  $\lambda < 3 \mu\text{m}$  y  $\alpha_\lambda = 0.2$  para  $\lambda > 3 \mu\text{m}$ . La superficie interior está en contacto con el fluido de trabajo (un líquido presurizado) a  $T_i = 700 \text{ K}$  y con  $\bar{h}_i = 1000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . La superficie exterior también está expuesta a un en-

---

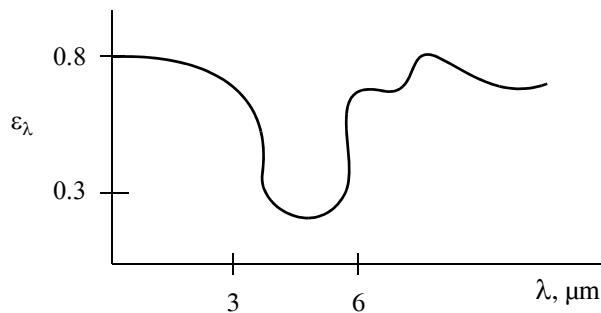
**Problemas**

---

torno de temperatura radiante efectiva  $T_{\text{sur}} = 300 \text{ K}$ . Si la pared está fabricada con un material de alta temperatura y conductividad térmica  $\lambda = 15 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ , ¿cuál es el espesor máximo  $L$  que se necesita para asegurar que la temperatura en la superficie exterior no sobrepasa  $T_{\text{s,e}} = 1000 \text{ K}$ ? ¿Cuánto vale el rendimiento de un receptor de ese espesor?

**11.** Elegir las frases que son ciertas referidas a la superficie difusa cuya emisividad espectral se representa en la figura:

1. La superficie puede considerarse gris siempre que su temperatura sea próxima a la del ambiente (300 K).
2. La superficie puede considerarse gris cuando está sometida a la irradiación solar.
3. Esta superficie nunca puede considerarse gris.
4. Cuando está sometida a la irradiación solar, la superficie puede considerarse gris si su temperatura es próxima a la del ambiente (300 K).



5. La superficie puede considerarse gris cuando todas las superficies que intercambian radiación (incluida ella misma) se encuentran a temperaturas inferiores a unos 300 K.
6. Todas las opciones (incluyendo esta misma) son falsas.

---

## CAPÍTULO 13

# Intercambio radiativo entre superficies

---

El intercambio de calor por radiación entre superficies, cuando el medio situado entre ambas no interacciona con la radiación, no es participativo, depende de los dos aspectos siguientes:

- La interacción radiación–materia (leyes del cuerpo negro, propiedades,...), que es el contenido del capítulo 12 sobre los Fundamentos de la Radiación Térmica.
- La posición relativa de ambas superficies (geometría). Para este aspecto se ha definido un concepto de amplio uso, explicado a continuación, y cuyo nombre es bastante intuitivo.

### El factor de vista

---

Se define como la fracción de radiación que abandona una superficie (i) y alcanza a otra (j). Se denota por  $F_{ij}$ .

La expresión que da  $F_{ij}$  se obtiene manejando las relaciones del capítulo anterior y estableciendo unas hipótesis de cálculo: las superficies emiten y reflejan difusamente; la radiosidad es uniforme. La última hipótesis se puede conseguir tomando superficies suficientemente pequeñas, la primera limita el concepto de factor de vista al caso de superficies difusas.

---

**Intercambio radiativo entre superficies**

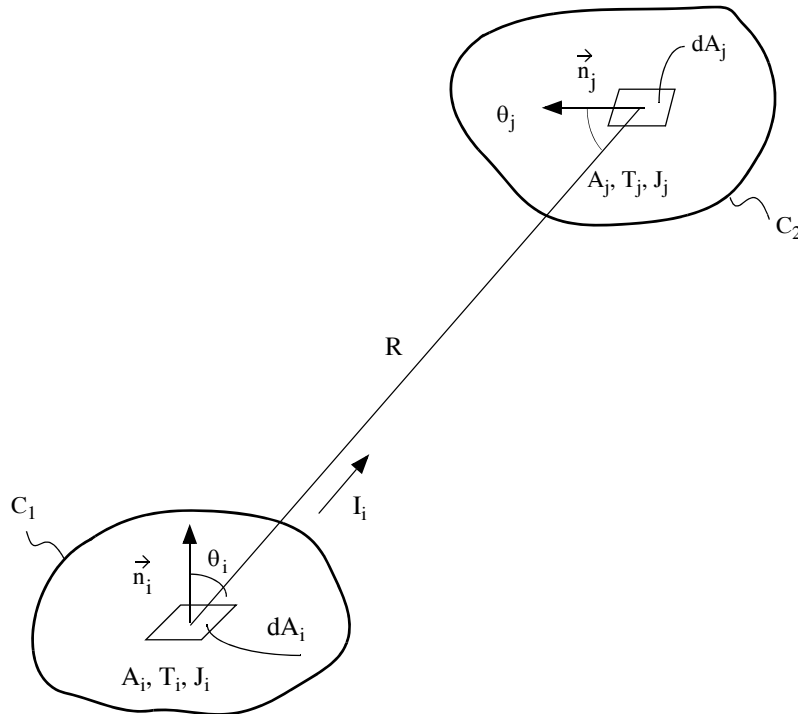
---

En la figura 13.1 el calor que parte de la superficie diferencial  $dA_i$  y alcanza  $dA_j$  viene dado por:

$$d^2q_{i \rightarrow j} = I_i dA_i \cos \theta_i d\omega_{j \rightarrow i} = I_i dA_i \cos \theta_i \frac{dA_j \cos \theta_j}{R^2}$$

---

**FIGURA 13.1** Factor de vista entre las superficies  $A_i$  y  $A_j$  según la definición de intensidad total, ec. (12.3).



El calor total que abandona la superficie  $i$  y alcanza la  $j$  se obtiene integrando la expresión anterior en las áreas  $A_i$  y  $A_j$

$$q_{i \rightarrow j} = \int_{A_i} \int_{A_j} I_i \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{R^2} dA_i dA_j \quad (13.1)$$

---

**El factor de vista**

---

Según las hipótesis de partida:  $I_i = \frac{J_i}{\pi}$  = constante a lo largo de  $A_i$ , luego

$$q_{i \rightarrow j} = J_i \iint_{A_i A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi R^2} dA_i dA_j \quad (13.2)$$

Por definición de factor de vista  $F_{ij} \equiv \frac{q_{i \rightarrow j}}{J_i A_i}$ , de donde, sustituyendo  $q_{i \rightarrow j}$  por la expresión (13.2) resulta

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \iint_{A_i A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi R^2} dA_i dA_j \quad (13.3a)$$

expresión puramente geométrica

Aplicando el teorema de Stokes, se puede convertir [1] la integral cuádruple (13.3a) en otra doble dada por la expresión (13.3b)

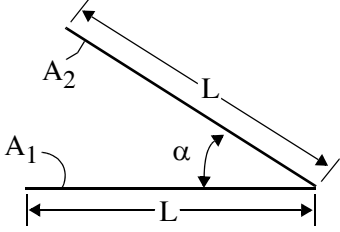
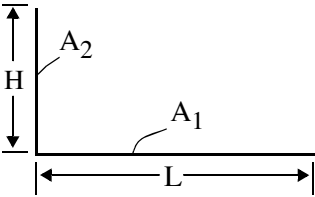
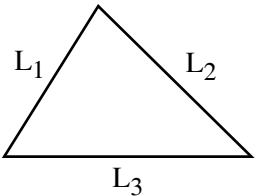
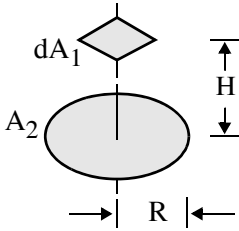
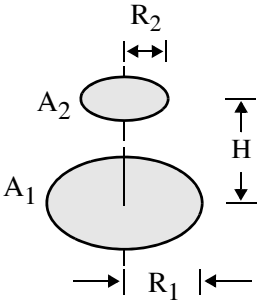
$$F_{12} = \frac{1}{2\pi A_1} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \ln R (dx_1 dx_2 + dy_1 dy_2 + dz_1 dz_2) \quad (13.3b)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son los contornos de las superficies  $A_1$  y  $A_2$  (ver figura 13.1), y  $(dx_1, dy_1, dz_1)$  y  $(dx_2, dy_2, dz_2)$  los incrementos de las coordenadas sobre  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente.

La obtención analítica de las integrales anteriores, (13.3a) y (13.3b), suele ser compleja, por lo que se suele recurrir a métodos aproximados como el de las cuerdas cruzadas [2] o a la integración numérica.

En la tabla 13.1 y las figuras 13.2 y 13.3 se muestran expresiones y curvas, respectivamente, para calcular los factores de vista de un conjunto de situaciones comunes. Mucha más información se recoge en las referencias [3], [4] y [5].

**TABLA 13.1** Factores de vista de ciertas geometrías comunes [6].

	<p>Dos placas infinitamente largas de anchura L, con una arista larga común:</p> $F_{12} = F_{21} = 1 - \sin \frac{\alpha}{2}$
	<p>Dos placas infinitamente largas de anchuras diferentes (H, L), con una arista larga común y formando un ángulo de 90° entre ellas:</p> $F_{12} = 1/2 [1 + x - (1 + x^2)^{1/2}]$ <p>donde <math>x = H/L</math>.</p>
	<p>Recinto de sección triangular formado por tres placas infinitamente largas de anchuras diferentes (<math>L_1, L_2, L_3</math>):</p> $F_{12} = \frac{L_1 + L_2 - L_3}{2L_1}$
	<p>Disco y área infinitesimal paralela colocada sobre el centro del disco:</p> $F_{12} = \frac{R^2}{H^2 + R^2}$
	<p>Discos paralelos coaxiales:</p> $F_{12} = \frac{1}{2} \left\{ X - \left[ X^2 - 4 \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}$ <p>donde <math>x_1 = \frac{R_1}{H}</math>, <math>x_2 = \frac{R_2}{H}</math>, y <math>X = 1 + \frac{1 + x_2^2}{x_1^2}</math></p>

**TABLA 13.1** Factores de vista de ciertas geometrías comunes [6].

	<p>Cilindro infinito paralelo a una placa infinita de anchura finita (<math>L_1 - L_2</math>):</p> $F_{12} = \frac{R}{L_1 - L_2} \left[ \arctan \left( \frac{L_1}{H} \right) - \arctan \left( \frac{L_2}{H} \right) \right]$ <p>Nota.- Las distancias <math>L_1</math> y <math>L_2</math> tienen signo, de manera que si el cilindro está situado sobre la placa una es positiva y la otra negativa.</p>
	<p>Dos cilindros infinitos paralelos:</p> $F_{12} = F_{21} = \frac{1}{\pi} \left[ (X^2 - 1)^{1/2} + \arcsin \left( \frac{1}{X} \right) - X \right]$ <p>donde <math>X = 1 + L/2R</math>.</p>
	<p>Fila de cilindros infinitos equidistantes paralela a una placa infinita<sup>a</sup>:</p> $F_{12} = 1 - (1 - x^2)^{1/2} + x \arctan \left( \frac{1 - x^2}{x^2} \right)^{1/2}$ <p>donde <math>x = D/L</math>.</p>
	<p>Esfera (<math>A_1</math>) y disco (<math>A_2</math>) coaxiales:</p> $F_{12} = 1/2 \left[ 1 - (1 + x^2)^{-1/2} \right]$ <p>donde <math>x = \frac{R_2}{H}</math>.</p>

a. El caso de dos filas de tubos paralelos a un plano infinito se puede encontrar en la ref. [2].

FIGURA 13.2 Factores de vista entre dos rectángulos paralelos y alineados [7].

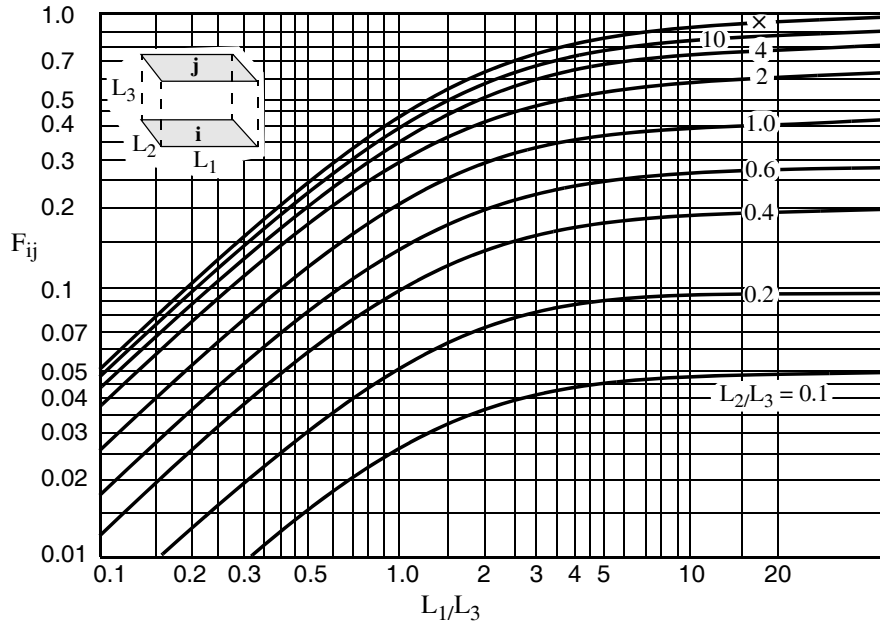
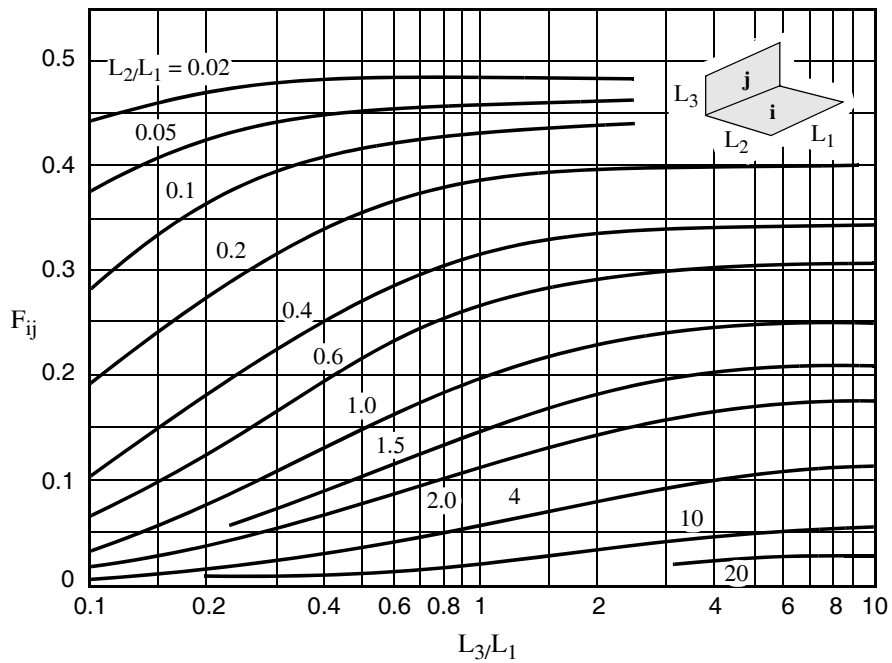


FIGURA 13.3 Factores de vista entre rectángulos perpendiculares con una arista común [7].



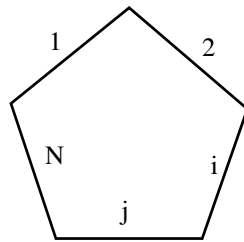
### Relaciones algebraicas de los factores de vista

En muchos casos se pueden evitar cálculos complicados para obtener los factores de vista (como es la realización de integrales) teniendo en cuenta que éstos cumplen ciertas relaciones algebraicas fácilmente obtenibles.

- 1. Relación de reciprocidad.** Se deduce inmediatamente de la ecuación (13.3) que se cumple

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \quad (13.4)$$

- 2.** Si la superficie es plana o convexa  $F_{ii} = 0$ . En general  $F_{ii} \neq 0$ .
- 3.** En un **recinto cerrado** se cumple la **regla de la suma**, por la propia definición de factor de vista.



$$\sum_{j=1}^N F_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (13.5)$$

**Nota:** Los recintos se cierran frecuentemente con la radiación **atmosférica**.

- 4.** ¿Cuál es el número de factores de vista independientes, y por tanto a calcular según la compleja integral obtenida anteriormente, en un recinto cerrado de N superficies? De las relaciones 1 y 3 se tiene que

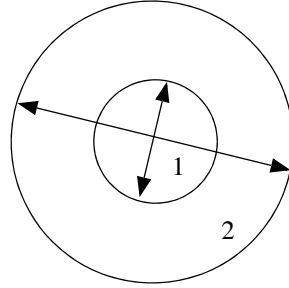
$$\left. \begin{array}{l} \text{En total hay } N^2 \text{ factores de vista en el recinto} \\ \text{Restricciones } \left\{ \begin{array}{l} N \text{ ecuaciones de la suma} \\ \frac{N(N-1)}{2} \text{ relaciones de reciprocidad} \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{A determinar} \\ \frac{N(N-1)}{2} \\ \text{factores de vista} \end{array}$$

Como en muchas ocasiones intervienen superficies planas o convexas, se podrá imponer  $F_{ii} = 0$  para alguna superficie  $i$  del recinto, reduciéndose más el número de factores de vista a calcular. Unos ejemplos que siguen permitirán aclarar más el uso de estas reglas.

**Ejemplos**

1. Dos esferas, la pequeña contenida en la grande

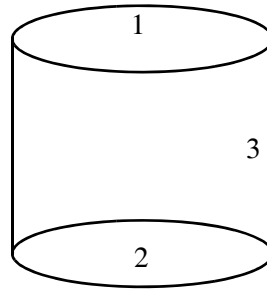
$$F_{11} = 0 \Rightarrow F_{12} = 1 \Rightarrow F_{21} = \frac{A_1}{A_2} F_{12} = \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \Rightarrow F_{22} = 1 - \frac{A_1}{A_2} = 1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$



2. Superficies internas de un cilindro

$$F_{11} = 0 \Rightarrow F_{13} = 1 - F_{12}$$

$F_{12}$  se puede calcular con la fórmula que se ofrece en la tabla 13.1.

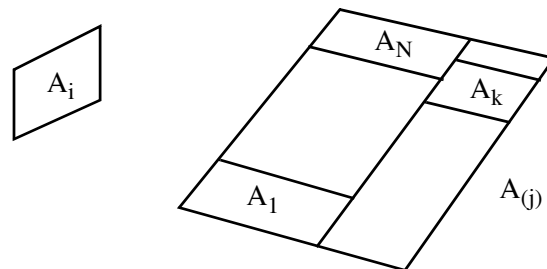


3. Superficie parcelada

Este ejemplo se pone principalmente para llamar la atención sobre el uso adecuado de las reglas algebraicas de los factores de vista. En la superficie  $A(j)$  de la figura 13.4 sólo se quiere estudiar el intercambio radiante entre una parte de ella (parcelas  $A_1, \dots, A_k, \dots, A_N$ ) y la superficie  $A_i$ . Para indicar que la superficie  $j$  está troceada (parcelada) se coloca el índice  $j$  entre paréntesis. El primer impulso al calcular el factor de vista entre la superficie  $(j)$  y la  $i$  sería poner

$$F_{(j)i} = \sum_{k=1}^N F_{ki}$$

**FIGURA 13.4** Factor de vista para una superficie parcelada.



---

### Intercambio entre cuerpos negros

---

Ésto supondría un uso incorrecto de la regla de la suma que llevaría a un cálculo erróneo (posiblemente muy erróneo) del intercambio radiativo entre  $i$  y  $(j)$ . La forma correcta, y no menos simple, de proceder es la siguiente.

$$F_{i(j)} = \sum_{k=1}^N F_{ik}$$

Multiplicando ambos miembros por  $A_i$ ,  $A_i F_{i(j)} = \sum_{k=1}^N A_i F_{ik}$ .

Por la relación de reciprocidad

$$A_j F_{(j)i} = \sum_{k=1}^N A_k F_{ki} \Rightarrow F_{(j)i} = \frac{\sum_{k=1}^N A_k F_{ki}}{\sum_{k=1}^N A_k}$$

totalmente distinta de la relación propuesta al principio.

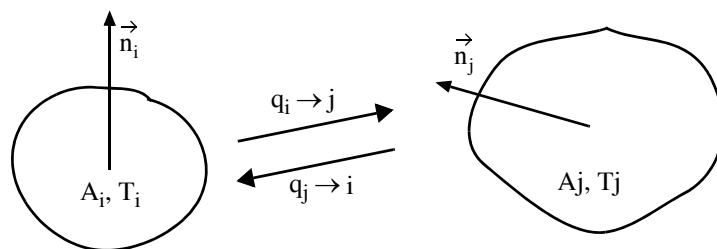
### Intercambio entre cuerpos negros

---

Se trata de calcular el calor **neto** intercambiado entre las superficies  $i$  y  $j$  de la figura 13.5, supuestas negras

$$q_{ij} = q_{i \rightarrow j} - q_{j \rightarrow i} \quad (13.6)$$

**FIGURA 13.5** Intercambio de calor entre dos superficies negras.



---

### Intercambio radiativo entre superficies

---

Según la definición de Factor de Vista

$$q_{i \rightarrow j} = A_i J_i F_{ij} \text{ y } q_{j \rightarrow i} = A_j J_j F_{ji} \quad (13.7)$$

Como  $A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$  y para un cuerpo negro  $J = \sigma T^4$ , de las ecuaciones (13.6) y (13.7) resulta

$$q_{ij} = A_i F_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4) \quad (13.8)$$

Si la superficie  $i$  intercambia calor con  $N$  superficies

$$q_i = \sum_{j=1}^N q_{ij} = \sum_{j=1}^N A_i F_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4) = A_i \sigma \sum_{j=1}^N F_{ij} (T_i^4 - T_j^4) = q_i \quad (13.9)$$

## El recinto cerrado de superficies difusas y grises

---

Cuando las superficies no son negras, existen reflexiones sucesivas de la radiación en las superficies que complican mucho el estudio del intercambio radiativo entre ellas. El problema se trata de forma adecuada mediante el concepto de **radiosidad** y un procedimiento basado en circuitos resistivos elaborado inicialmente por Poljak [8], [9] y posteriormente por Oppenheim [10] que lo amplió a recintos participativos. (Estos recintos son el objeto del capítulo siguiente).

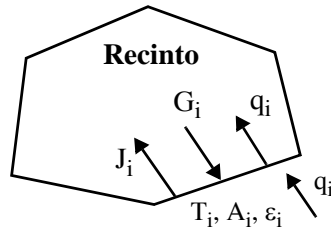
El procedimiento exige las siguientes hipótesis:

- Las superficies son difusas, grises y opacas. (Más adelante se plantea el caso de que alguna superficie no sea opaca).
- La temperatura y la irradiación son uniformes en cada una de ellas. (Para ello se eligen las superficies suficientemente pequeñas).

Si la situación es estacionaria el balance de energía de cada superficie viene dado por

$$q_i = A_i (E_i - \alpha_i G_i) = A_i (J_i - G_i) \quad (13.10)$$

**FIGURA 13.6** Intercambio de calor en un recinto de superficies opacas, difusas y grises.



**Importante:** Para que la situación sea estacionaria, si existe  $q_i \neq 0$  por radiación, debe haber un aporte idéntico por la otra cara de la superficie por el mecanismo que sea (conducción u otros).

Como  $J_i = E_i + \rho_i G_i = E_i + (1 - \alpha_i)G_i = \epsilon_i E_{n_i} + (1 - \epsilon_i)G_i$ , despejando  $G_i$

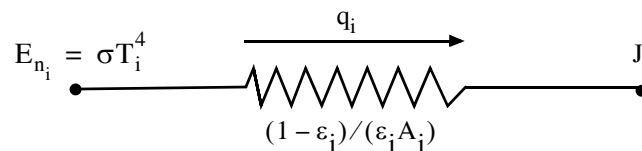
$$G_i = \frac{J_i - \epsilon_i E_{n_i}}{1 - \epsilon_i} \quad (13.11)$$

Sustituyendo esta expresión (13.11) de  $G_i$  en la ecuación (13.10) resulta

$$q_i = A_i \left( J_i - \frac{J_i - \epsilon_i E_{n_i}}{1 - \epsilon_i} \right) = \frac{E_{n_i} - J_i}{\left( \frac{1 - \epsilon_i}{\epsilon_i A_i} \right)} = q_i \quad (13.12)$$

La ecuación (13.12) sugiere la típica relación resistiva representada en la figura 13.7, siendo  $\frac{1 - \epsilon_i}{\epsilon_i A_i}$  la **resistencia radiativa de la superficie**. Esta expresión sugiere que la mayor resistencia al intercambio de calor por radiación la presentan los materiales de baja emisividad, que son en general los buenos conductores del calor. Por ello para apantallar la radiación térmica se utilizan superficies metálicas, denominadas escudos radiativos.

**FIGURA 13.7** Resistencia radiativa de una superficie.



---

**Intercambio radiativo entre superficies**

---

El procedimiento plantea a continuación la relación radiativa entre la superficie  $i$  y las otras superficies del recinto. Se parte de la siguiente expresión

$$A_i G_i = \sum_{j=1}^N A_j J_j F_{ji} = \sum_{j=1}^N A_i F_{ij} J_j \Rightarrow G_i = \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j \quad (13.13)$$

Sustituyendo esta expresión (13.13) para  $G_i$  en la ecuación (13.10)

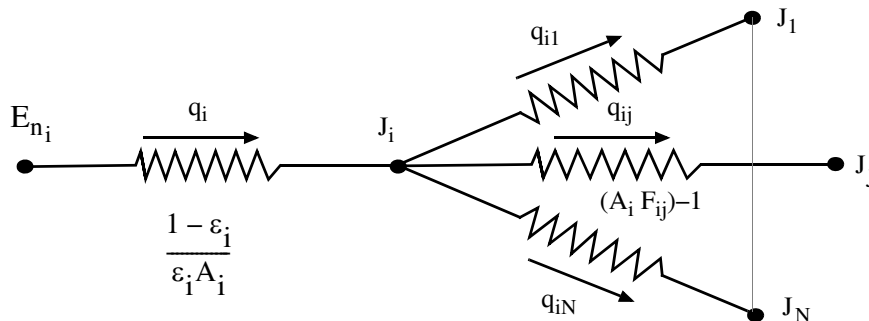
$$\begin{aligned} A_i \left( J_i - \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j \right) &= A_i \left( \sum_{j=1}^N F_{ij} J_i - \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^N A_i F_{ij} (J_i - J_j) = \sum_{j=1}^N q_{ij} \end{aligned}$$

Las relaciones  $q_{ij} = \frac{J_i - J_j}{\frac{1}{A_i F_{ij}}}$  también son resistivas, quedando el circuito com-

pleto de la manera representada en la figura 13.8, y siendo  $\frac{1}{A_i F_{ij}}$  las **resistencias espaciales o geométricas**.

---

**FIGURA 13.8** Representación resistiva del intercambio radiante entre superficies, según el método de Oppenheim.



---

### El recinto cerrado de superficies difusas y grises

---

Lo que resulta de este procedimiento es que para cada superficie (Nudo en el circuito de resistencias) aparece una ecuación en las radiosidades de uno de los dos tipos siguientes:

$$a) \quad \frac{\sigma T_i^4 - J_i}{\frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i A_i}} = \sum_{j=1}^N \frac{J_i - J_j}{(A_i F_{ij})^{-1}} \quad \text{si se conoce } T_i \quad (13.14a)$$

$$a) \quad q_i = \sum_{j=1}^N \frac{J_i - J_j}{(A_i F_{ij})^{-1}} \quad \text{si se conoce } q_i \quad (13.14b)$$

quedando un sistema de N ecuaciones lineales algebraicas cuyas N incógnitas son las radiosidades  $J_i$

$$\begin{cases} a_{11} J_1 + \dots + a_{1N} J_N = C_1 \\ \vdots \\ a_{N1} J_1 + \dots + a_{NN} J_N = C_N \end{cases} \quad (13.15)$$

Este sistema (13.15) se resuelve por cualquiera de los métodos matemáticos habituales.

Una vez determinadas las radiosidades se pueden obtener los valores de  $T_i$  o  $q_i$  de una de las ecuaciones (13.14a) ó (13.14b) según corresponda.

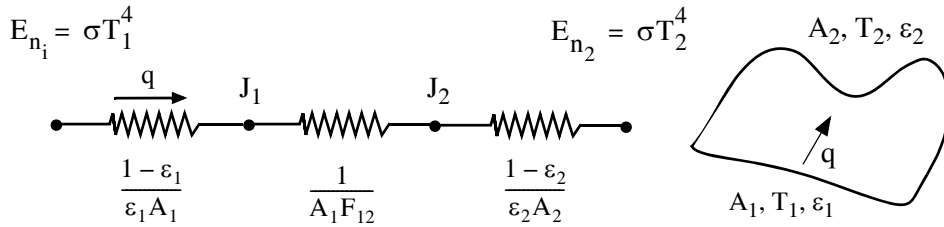
### Caso particular: El recinto de dos superficies

Su representación circuital es la de la figura 13.9, y la obtención del calor intercambiado entre ambas superficies es directo y viene dado por la ecuación (13.16)

$$q = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} \quad (13.16)$$

El cálculo todavía puede ser complicado debido a la presencia del factor de vista. A continuación se ofrece un conjunto de ejemplos de este caso, donde las fórmulas que dan el calor intercambiado, (13.17) a (13.20), se han obtenido sustituyendo en la ec. (13.16) el valor del factor de vista  $F_{12}$  de cada caso.

FIGURA 13.9 Intercambio radiante en un recinto cerrado de dos superficies.



Ejemplos de recintos de dos superficies

- Planos paralelos infinitos

$$q_{12} = \frac{A\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \quad (13.17)$$

- Dos cilindros infinitos, uno contenido dentro del otro.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$q_{12} = \frac{\sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \quad (13.18)$$

- Dos esferas, una contenida dentro de la otra.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

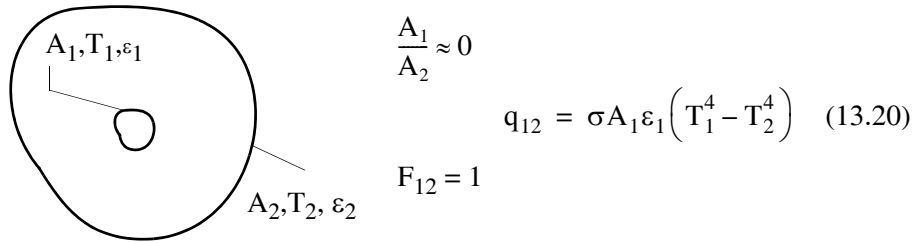
$$q_{12} = \frac{\sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} \quad (13.19)$$

---

**El recinto cerrado de superficies difusas y grises**

---

- Objeto pequeño y convexo dentro de una cavidad grande



Este resultado tiene un significado relacionado con el concepto de cavidad y cuerpo negro que es interesante meditar.

**Ejercicio con paredes semitransparentes**

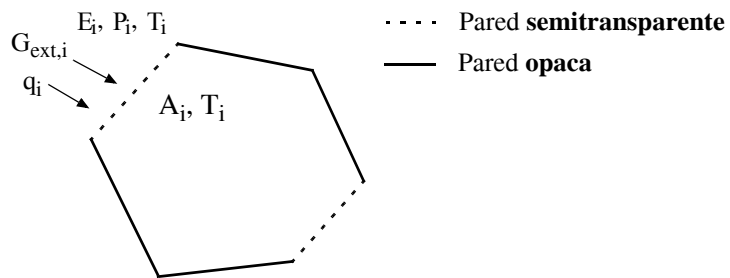
Si en el recinto cerrado existen paredes no opacas o semitransparentes (ventanas), según aparece en la figura 13.10, sus ecuaciones serán distintas de las (13.14). El objetivo de este ejercicio es obtener su ecuación para poder incluirlas en el sistema (13.15).

Considérese que sus propiedades vienen dadas por su emitancia  $E$ , su reflectancia  $P$  y su transmitancia  $T^*$ ; su comportamiento se puede considerar difuso (no depende de la dirección) y gris (no depende de  $\lambda$ ); y se conoce la irradiación exterior  $G_{ext,i}$  en las ventanas, también difusa.

La solución se puede encontrar en la referencia [9].

---

**FIGURA 13.10** Recinto cerrado con algunas paredes no opacas.




---

\*. El cambio de notación se justifica en el capítulo siguiente.

## Paredes refractarias. Superficies reirradiantes

El refractario es un material altamente resistente a condiciones térmicas duras (alta temperatura) que se utiliza en las paredes de equipos tales como hogares, hornos y similares.

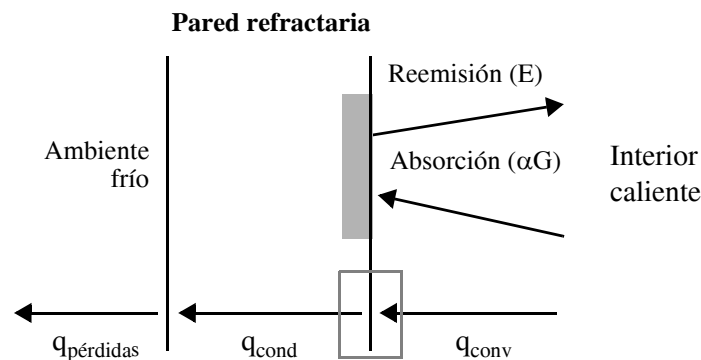
Su conductividad térmica es mayor que la de los aislantes por lo que al estar situados entre un entorno muy caliente y otro frío (el ambiente atmosférico) pierden una cierta cantidad de calor por conducción que pasa a través de ellos. El calor que pierden lo reciben del entorno caliente por radiación y convección. La hipótesis y el procedimiento que siguen, simplifican mucho su tratamiento cuando forman parte de un recinto radiativo.

La hipótesis simplificadora que es habitual hacer en el tratamiento radiante de una pared refractaria es que las pérdidas por conducción coinciden con el calor que reciben por convección, con lo que para la radiación exclusivamente, la superficie del refractario se considera adiabática

$$\boxed{q_{\text{cond}} \approx q_{\text{conv}}} \Rightarrow q_{\text{rad}} = 0 \quad (13.21)$$

Esta hipótesis es razonable debido a que en general la radiación incidente sobre las paredes refractarias es mucho mayor que la diferencia entre el calor recibido por convección y el perdido por conducción [2].

**FIGURA 13.11** Esquema del intercambio de calor en una pared refractaria.



Si la superficie refractaria es adiabática para la radiación, de la ecuación (13.10) se sigue que  $E = \alpha G$ , es decir, que reemite (reirradia) lo que absorbe, de ahí que reciba también el nombre de superficie reirradiante.

---

**Paredes refractarias. Superficies reirradiantes**

---

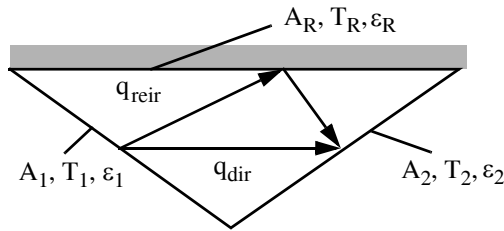
La forma de considerar matemáticamente una superficie refractaria (o reirradiante) en el método de las redes de Oppenheim es hacer  $q_i = 0$  en la ecuación (13.14b) para la superficie refractaria debiendo calcularse su temperatura.

**Caso particular**

Un caso que se puede resolver con sencillez a partir de su circuito resistivo es cuando se da intercambio de calor entre dos superficies con una tercera refractaria (figura 13.12). Este simple caso permite hacer un cálculo sencillo, aunque sea como primera aproximación, de equipos reales complicados como hornos donde existen básicamente tres tipos de superficies: las calefactoras (fuentes), las cargas (o sumideros) y las refractarias. Su circuito resistivo se muestra en la figura 13.13.

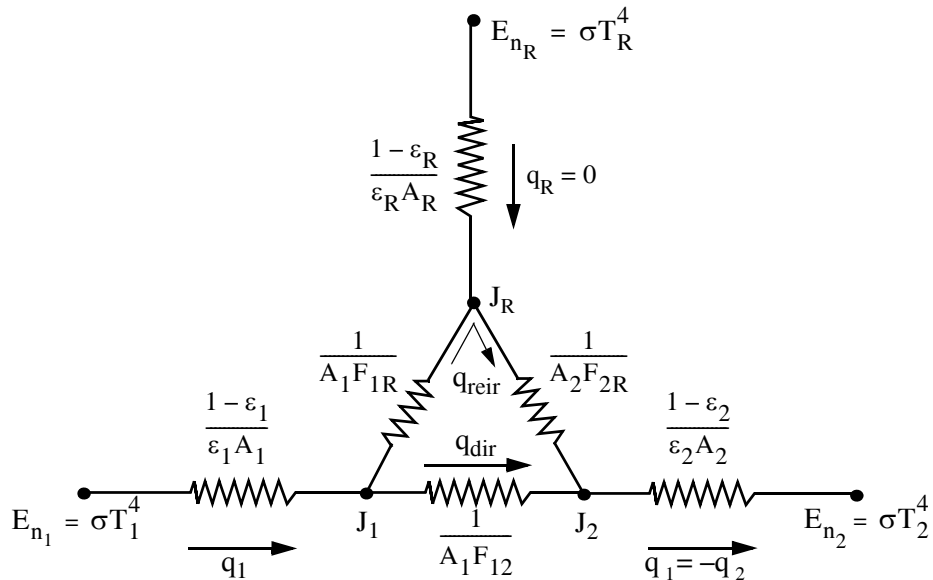
---

**FIGURA 13.12** Recinto radiante de tres superficies, siendo una refractaria (designada por el subíndice R).




---

**FIGURA 13.13** Circuito térmico radiativo del recinto de la figura 13.12.



---

**Intercambio radiativo entre superficies**

---

El calor intercambiado entre las superficies 1 y 2,  $q_1 = -q_2$ , tiene dos componentes:  $q_{\text{dir}}$ , radiación directa entre las superficies 1 y 2, y  $q_{\text{reir}}$ , radiación intercambiada entre dichas superficies a través del refractario.

Tal y como está el circuito, se puede obtener primero el calor total intercambiado y luego sus componentes. Los pasos serían

$$1. \quad q_1 = -q_2 = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12} + \left[ \frac{1}{A_1 F_{1R}} + \frac{1}{A_2 F_{2R}} \right]^{-1}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} \quad (13.22)$$

Obtenido  $q_1$  se puede obtener fácilmente  $J_1$  y  $J_2$ .

$$2. \quad J_1 = \sigma T_1^4 - q_1 \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} \quad ; \quad J_2 = \sigma T_2^4 + q_1 \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2} \quad (13.23)$$

$$3. \quad \frac{J_1 - J_R}{\frac{1}{A_1 F_{1R}}} = \frac{J_R - J_2}{\frac{1}{A_2 F_{2R}}} \quad \text{de donde se saca } J_R. \quad (13.24)$$

$$4. \quad q_{\text{reir}} = \frac{J_1 - J_R}{\frac{1}{A_1 F_{1R}}} \quad ; \quad q_{\text{dir}} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} \quad (13.25)$$

5. La temperatura del refractario sale de

$$\sigma T_R^4 = J_R \quad \Rightarrow \quad T_R = \left( \frac{J_R}{\sigma} \right)^{1/4}. \quad (13.26)$$

---

## Referencias

---

### Comentarios

La energía radiante que reirradia el refractario,  $J_R$ , tiene dos componentes: la reemisión,  $\varepsilon_R E_{n_R}$ , y la reflexión,  $(1 - \varepsilon_R) G_R$ . Como  $q_R = 0$ , de la ecuación (13.10) y de  $E_R = \varepsilon_R E_{n_R}$  resulta  $G_R = E_{n_R}$ . Por ello, la radiosidad de un refractario vale

$$J_R = \varepsilon_R E_{n_R} + (1 - \varepsilon_R) G_R = \varepsilon_R E_{n_R} + (1 - \varepsilon_R) E_{n_R} = E_{n_R} \quad (13.27)$$

La ecuación (13.27) parece indicar que un refractario se comporta como un cuerpo negro ( $J_R = E_{n_R}$ ) pero es importante reconocer que no lo es, porque emite menos que un cuerpo negro y refleja parte de la radiación incidente.

El comportamiento del refractario para el recinto parece independiente de su emisividad,  $\varepsilon_R$ , como se deduce de los desarrollos matemáticos anteriores, ecs. (13.22) a (13.26). Pero esto sucede solamente si se trata de recintos con todas sus superficies grises; si alguna de ellas no lo es, va a tratar de forma diferente la radiación que reemite el refractario (a su propia temperatura) que la que refleja procedente de otras superficies (a otras temperaturas), es decir, va a modificar la distribución espectral de la radiación que recibe y en el calor intercambiado aparecerá una dependencia de  $\varepsilon_R$ .

## Referencias

---

1. E. M. Sparrow  
*A New and Simpler Formulation for Radiative Angle Factors*  
Journal of Heat Transfer, vol. 85, p. 81, 1963.
2. H. C. Hottel  
*Transmisión calorífica por radiación. Cap. 4 del libro "Transmisión de calor" de W. H. McAdams*  
McGraw-Hill, México, 1978.
3. J. R. Howell  
*A Catalog of Radiation Configuration Factors*  
McGraw-Hill, New York, 1982.
4. H. C. Hottel, and A. Sarofim  
*Radiative Transfer*  
McGraw-Hill, New York, 1967.

---

**Intercambio radiativo entre superficies**

---

5. M. F. Modest  
*Radiative Heat Transfer*  
McGraw–Hill International, Singapore, 1993.
6. A. Bejan  
*Heat Transfer*  
Wiley, New York, 1993.
7. F. P. Incropera, and D. de Witt  
*Fundamentals of Heat and Mass Transfer*  
Wiley, Singapore, 1990.
8. G. Poljak  
*Analysis of Heat Interchange by Radiation between Diffuse Surfaces*  
Tech. Phys. USSR, vol. 1, p. 555, 1935.
9. R. Siegel, and J. R. Howell  
*Thermal Radiation Heat Transfer*  
McGraw–Hill – Hemisphere Publ. Corp., Washington, 1981.
10. Oppenheim, A. K.  
*Radiation Analysis by the Network Method*  
Transactions of the ASME, vol. 78, p. 725, 1956.

---

## Síntesis del capítulo

---

El intercambio radiante entre superficies, cuando son difusas (caso frecuente) y el medio entre ellas es no participativo, se calcula partiendo de que la intensidad no se modifica desde la superficie de partida hasta la de llegada y considerando dos tipos de factores:

1. Térmicos, que dan cuenta de la interacción radiación–materia y se calculan por las expresiones del capítulo 12 de Fundamentos de Radiación.
2. Geométricos, que dan cuenta de la posición relativa de ambas y se calculan a través de una magnitud llamada factor de vista, por su semejanza con los fenómenos de visión de un cuerpo por otro.

El factor de vista se determina

1. por relaciones algebraicas simples, si la situación lo permite.
2. buscando expresiones o valores en tablas o gráficas de la bibliografía (como las de la tabla 13.1 y de las figuras 13.2 y 13.3).
3. por realización de las integrales (13.3), habitualmente por métodos numéricos (hay otros: gráficos, ...).

El intercambio radiativo entre superficies negras es sencillo de calcular porque no refleja la radiación; lo único que puede complicar su cálculo es el factor de vista, si no es simple.

El intercambio radiativo entre superficies no negras se complica porque éstas reflejan la radiación. En un recinto con este tipo de superficies, la radiación se refleja indefinidamente y hacer su seguimiento puede ser complicado o, como mínimo, pesado. Para el caso de recintos con superficies opacas, difusas y grises, un procedimiento que usa el concepto de radiosidad permite reducir el problema a un circuito de resistencias o bien a un sistema de ecuaciones lineales (las ecuaciones de los nudos del circuito de resistencias).

---

**Síntesis del capítulo**

---

Un tipo de superficie muy habitual en aplicaciones con altas temperaturas (por encima de los  $600^{\circ}\text{C}$ ) son las llamadas refractarias. Estos materiales tienen como misión precisamente resistir las altas temperaturas.

Por una hipótesis de cálculo, basada en la experiencia, se las trata como adiabáticas para la radiación, es decir, reirradiantes.

---

## Cuestiones

---

1.  *Demostrar que el calor radiante que intercambia una superficie  $i$  con el resto de las superficies  $j$  que forman un recinto cerrado viene dado por la expresión  $q = \sum_i A_i F_{ij} (J_i - J_j)$  .*

2.  *Un cubo de mercurio sólido de 10 mm de lado, cuyas superficies exteriores pueden considerarse grises y difusas, está sujeto por un cordel en el interior de una gran cámara de vacío. Las paredes de la cámara se encuentran a 20°C de temperatura y el mercurio a su temperatura de fusión,  $T_{fus} = 234.3$  K. La densidad del mercurio es  $13.7 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, su emisividad 0.3 y su calor de fusión 11.3 kJ/kg.*

*Calcular el tiempo que costará fundirse al mercurio, suponiendo que en la cámara hay condiciones de ingravidez y por tanto al fundirse no cae, y que las propiedades radiativas y el área exterior del mercurio no varían al pasar a estado líquido.*

3.  *Esta cuestión parece de ciencia-ficción, pero se puede responder. Si por un accidente espacial un vertebrado de sangre caliente cuya temperatura corporal es de 37°C queda flotando en el espacio suficientemente alejado de cualquier foco térmico, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar la temperatura letal de 33°C, una vez que haya agotado sus reservas internas y por tanto no pueda generar energía térmica?*

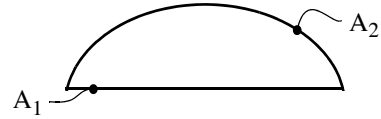
*Suponer que la temperatura del vertebrado se mantiene uniforme durante todo el tiempo y que sus datos termofísicos son: masa,  $m = 70$  kg; calor específico,  $c = 3 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$ ; emisividad de la piel,  $\varepsilon = 0.95$ ; área superficial,  $A = 2$  m<sup>2</sup>.*

---

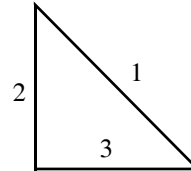
**Cuestiones**

---

4. Calcular los cuatro factores de vista  $F_{ij}$  en el conducto semicircular infinito de la figura.

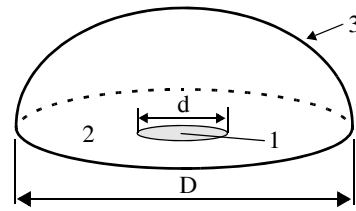


5. Calcular los nueve factores de vista entre las tres caras interiores de un prisma triangular de longitud infinita y cuya sección es un triángulo rectángulo isósceles.

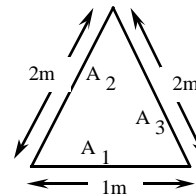


6. Demuestra que el factor de vista  $F_{12}$  entre dos esferas de radios  $R_1$  y  $R_2$  cuyos centros se encuentran a una distancia  $R$  suficientemente grande,  $R^2 \gg R_1^2, R_2^2$ ; vale aproximadamente  $R_2^2 / 4R^2$ .

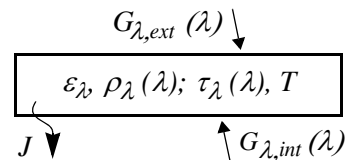
7. En el recinto cerrado semiesférico de la figura se presentan tres superficies, la semiesfera, un pequeño disco circular en su centro y el resto. Calcular los nueve factores de vista.



8. En la geometría bidimensional de la figura, calcular los nueve factores de vista.



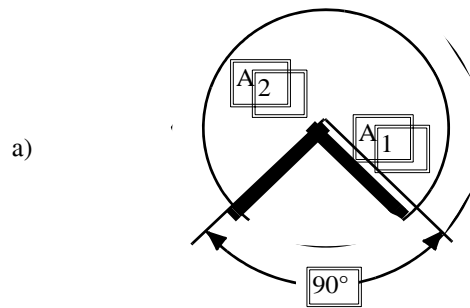
9. En la superficie semitransparente (no opaca) y dadas las funciones espectrales indicadas en la figura, dar la expresión que permite calcular la radiosidad **total**,  $J$ .



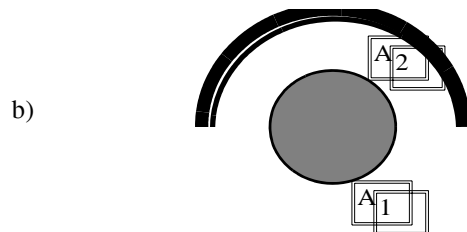
10. Demostrar que en una superficie refractaria se cumple la siguiente relación entre su temperatura y su radiosidad:  $T_R = (J_R/\sigma)^{1/4}$ .

# Problemas

1. Determinar  $F_{12}$  y  $F_{21}$  en las configuraciones siguientes, utilizando el teorema de reciprocidad y otras propiedades de los factores de vista.



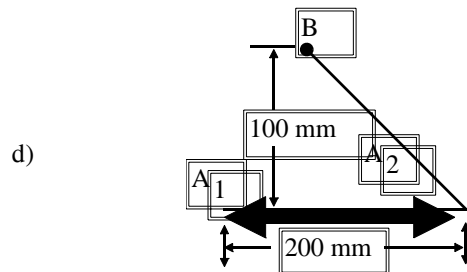
Conducto largo



Pequeña esfera de área  $A_1$  bajo una semiesfera concéntrica de área  $A_2 = 2A_1$

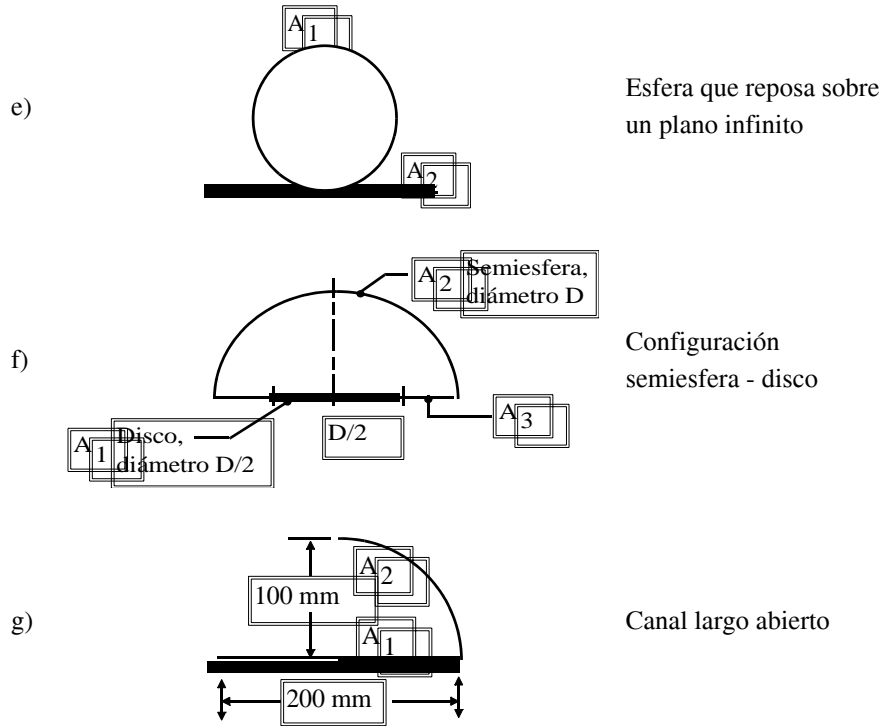


Conducto largo.  
Calcular también  $F_{22}$  en este caso

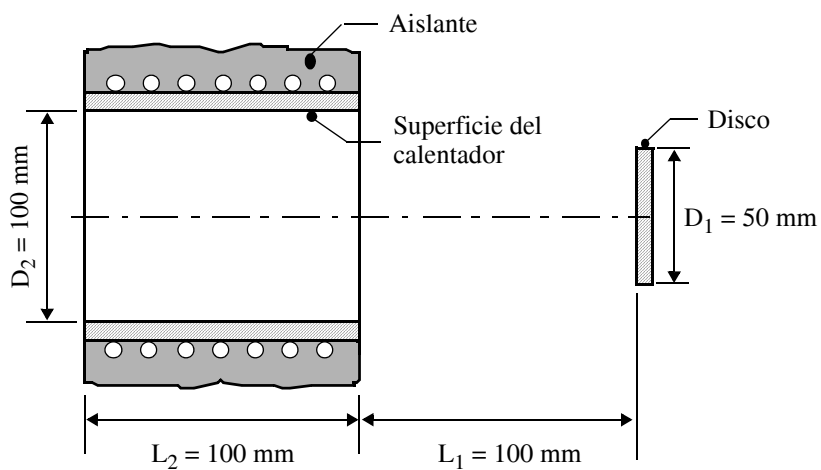


Placas inclinadas largas.  
(El punto B se encuentra justo encima del centro de  $A_1$ )

**Problemas**



2. Determinar la potencia radiativa emitida por el calentador tubular que incide en el disco. La superficie interior del calentador es negra y se encuentra a temperatura uniforme de 1000 K.

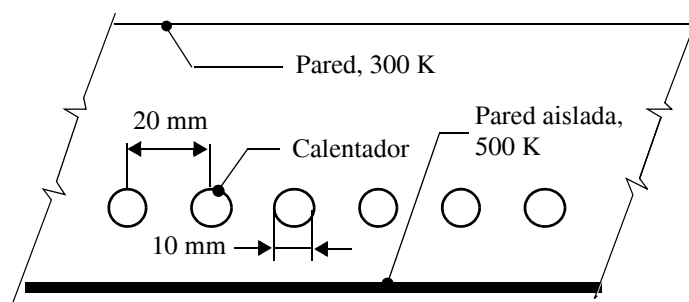


---

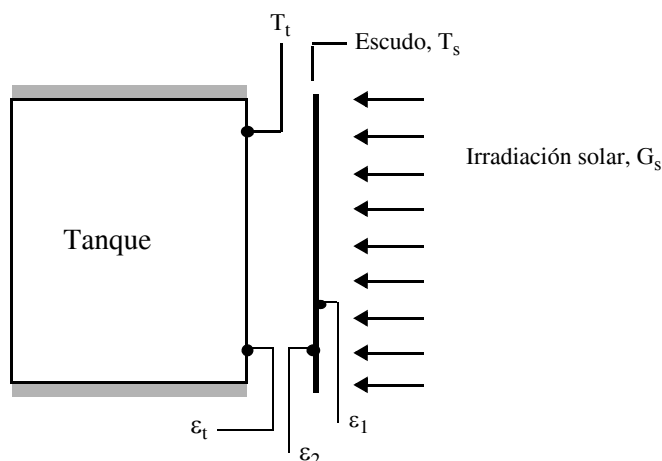
**Problemas**

---

3. Para mantener una temperatura de 500 K en la pared aislada de un horno se utiliza una fila de calentadores cilíndricos uniformemente espaciados. La pared opuesta a ella se encuentra a temperatura uniforme de 300 K. La pared aislada intercambia calor por convección con el aire a 450 K del interior del horno con un coeficiente de convección de  $200 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Suponiendo que tanto las paredes como los calentadores son cuerpos negros, estimar la temperatura a la que deben encontrarse los calentadores para que la pared aislada se mantenga efectivamente a 500 K.



4. El extremo de un depósito de líquido criogénico utilizado como propelente en el espacio exterior se protege de la radiación solar colocando un escudo metálico delgado delante del tanque. Suponiendo que el factor de visión  $F_{ts}$  entre el tanque y el escudo vale uno, que todas las superficies son grises y difusas y que los alrededores se encuentran a  $0 \text{ K}$ , encontrar la temperatura del escudo  $T_s$  y el flujo de calor ( $\text{W/m}^2$ ) que recibe el extremo del depósito.



DATOS:

$$T_t = 100 \text{ K}$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.05$$

$$\epsilon_t = 0.10$$

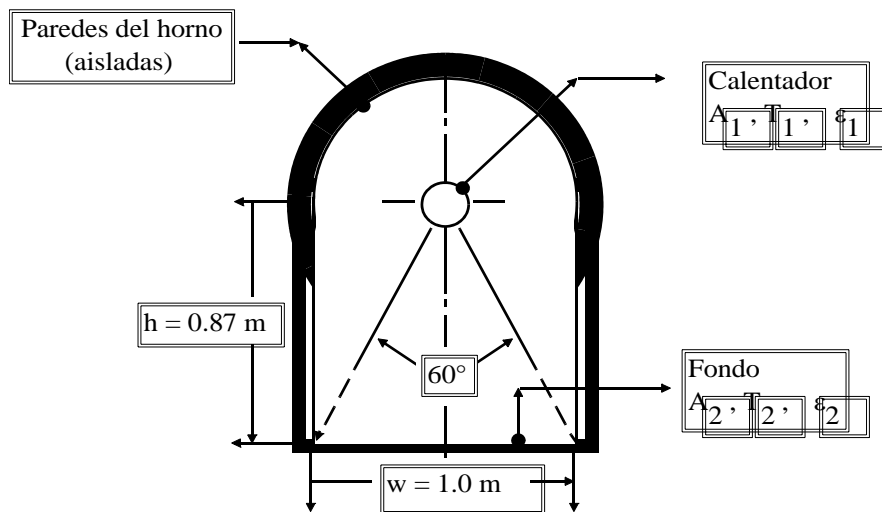
$$G_s = 1250 \text{ W/m}^2$$

---

**Problemas**

---

5. Un calentador cilíndrico largo, de diámetro  $D = 10 \text{ mm}$ , temperatura  $T_1 = 1500 \text{ K}$  y emisividad  $\varepsilon_1 = 1$  se utiliza en un horno tal y como se muestra en la figura. El fondo del horno ( $A_2$ ) es una superficie difusa y gris con  $\varepsilon_2 = 0.6$  que se mantiene a  $T_2 = 500 \text{ K}$ . Las paredes laterales y superior son de ladrillo aislante y refractario que puede considerarse como gris y difuso con  $\varepsilon = 0.9$ . La longitud del horno en la dirección perpendicular al dibujo (l) es muy larga comparada con su altura (h) y anchura (w).



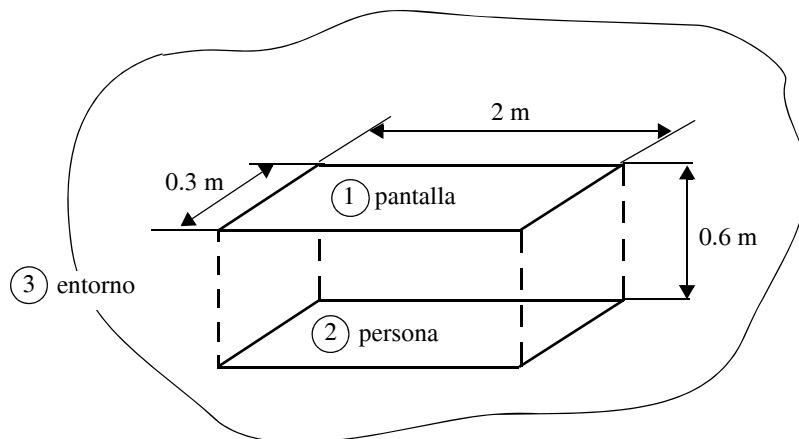
- Despreciando la convección y considerando isotermas las paredes del horno, determinar la potencia por unidad de longitud que debe suministrar el calentador para mantener en estado estacionario las condiciones de temperatura especificadas en el enunciado. Calcular la temperatura de las paredes del horno.
6. La cavidad de un crisol, que tiene forma de cilindro de  $75 \text{ mm}$  de diámetro y  $150 \text{ mm}$  de longitud, está abierta por uno de sus extremos al ambiente exterior a  $27^\circ\text{C}$ . La base y la superficie lateral pueden considerarse superficies grises con  $\varepsilon = 0.8$ , están perfectamente aisladas y se calientan con electricidad para mantenerlas a  $1650^\circ\text{C}$  y  $1350^\circ\text{C}$  respectivamente. ¿Cuál es la potencia eléctrica necesaria? A la vista del resultado ¿sería aceptable el cálculo suponiendo superficies negras?

---

**Problemas**

---

7. Un problema de intercambio radiativo puro se resuelve considerando  $N-1$  superficies difusas-grises isotermas. La  $N$ -ésima superficie es en realidad una abertura al ambiente, cuya temperatura radiante efectiva es  $T_N$ . ¿Por qué puede suponerse negra la superficie  $N$ ? Demuestra mediante las ecuaciones generales que su forma no influye en el resultado final, siempre que no interfiera la visión mútua de las restantes  $N-1$  superficies.
8. Un fluido criogénico circula por un tubo largo de 20 mm de diámetro, cuya superficie exterior difusa y gris con  $\epsilon_1 = 0.02$  y se encuentra a  $T_1 = 77$  K. Este tubo es concéntrico con otro mayor, de diámetro 50 mm, la superficie del cual está a  $T_2 = 300$  K y es difusa y gris con  $\epsilon_2 = 0.05$ . El espacio intermedio está vacío. Calcular el calor absorbido por el fluido por unidad de longitud. Si un delgado escudo de radiación (35 mm de diámetro y  $\epsilon_3 = 0.02$  en ambas caras) se inserta entre las superficies interior y exterior, calcular el cambio porcentual en absorción de calor por unidad de longitud.
9. Un equipo de infrarrojos está compuesto por una pantalla plana de  $0.3 \times 2$  m que se encuentra a 60 cm de la superficie de la persona que se expone a la radiación (considérese a la persona como otro plano de  $0.3 \times 2$  m), tal como indica la figura.



Si se suponen todas las superficies (pantalla, persona y resto del recinto) cuerpos negros a 100, 37 y 50°C respectivamente, calcular:

- a) Calor que absorbe la persona.

---

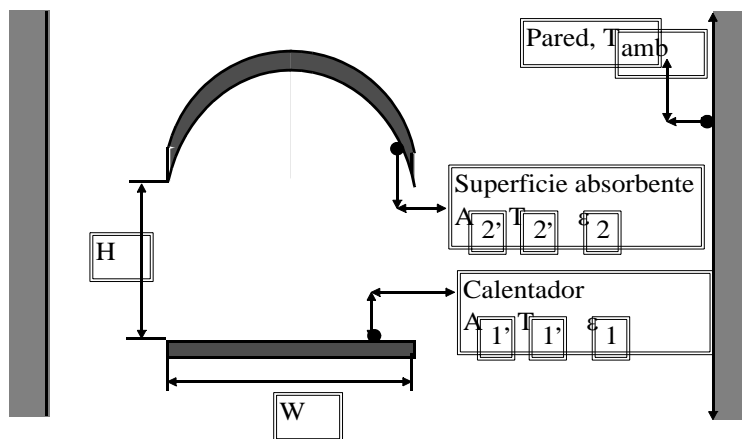
**Problemas**

---

- b) Distancia a la que debe separarse la pantalla para reducir en un 10% este calor.
- c) Distancia a la que debe separarse la pantalla para reducir en un 50% este calor.
- d) Mínimo calor que puede llegar a absorber la persona si se aleja la pantalla.

Considerar sólo intercambios por radiación térmica.

- 10.** Un recubrimiento curvo para colectores solares de área  $A_2 = 15 \text{ m}^2$  se somete, durante su proceso de fabricación, a un calentamiento utilizando para ello un calentador de infrarrojos de anchura  $W = 1 \text{ m}$ . La pieza (superficie absorbente) y el calentador tienen una longitud  $L = 10 \text{ m}$  y están separadas una distancia  $H = 1 \text{ m}$ , según se muestra en el esquema.



El calentador está a una temperatura  $T_1 = 1000 \text{ K}$  y tiene una emisividad  $\varepsilon_1 = 0.5$ , mientras que la superficie absorbente está a una temperatura  $T_2 = 600 \text{ K}$  y su emisividad vale  $\varepsilon_2 = 0.5$ . El sistema se encuentra en una habitación grande cuyas paredes están a una temperatura  $T_{\text{amb}} = 300 \text{ K}$ . ¿Cuál es la transferencia de calor neta hacia la superficie absorbente?

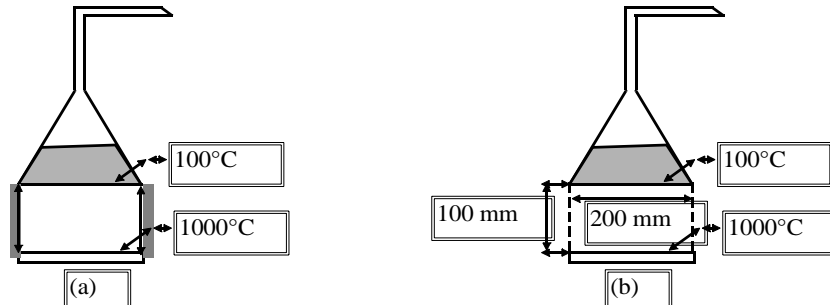
- 11.** En la figura se muestra un alambique para producir vapor, cuya base tiene 200 mm de diámetro, que se calienta por radiación. El calentador, que se mantiene a  $1000^\circ\text{C}$  y está separado 100 mm del fondo del alambique, tiene el mismo diámetro. Tanto el calentador como fondo pueden considerarse

---

**Problemas**

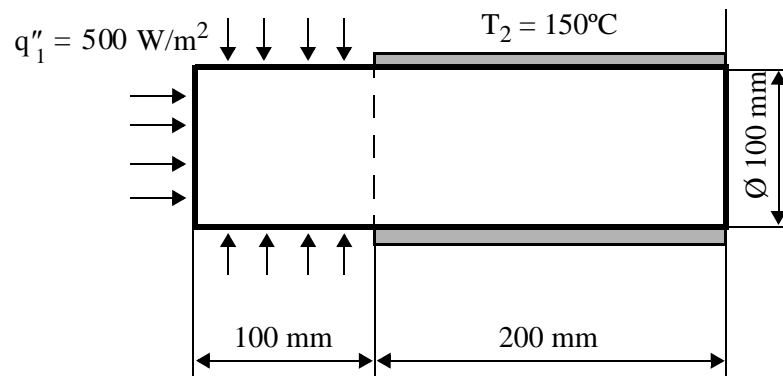
---

superficies negras. El dispositivo se encuentra en una habitación grande cuya temperatura ambiente son  $27^{\circ}\text{C}$ .



Calcular en que factor se incrementará la producción de vapor si los laterales cilíndricos se aíslan (figura a) en lugar de mantenerlos abiertos al ambiente (figura b). Despreciar todos los posibles efectos de convección.

- 12.** Se considera un taladro de  $100\text{ mm}$  de diámetro en una pieza de fundición que posee una emisividad de  $0.21$ , pudiéndose considerar opaca y gris. Los primeros  $200\text{ mm}$  desde la apertura se mantienen a  $T_2 = 150^{\circ}\text{C}$  y el resto con un flujo de calor  $q''_1 = 500\text{ W/m}^2$ , tal como se indica en la figura. Sin considerar convección ni radiación volumétrica del gas en el interior del taladro



Hallar:

- a) Los factores de visión  $F_{ij}$  entre todas las superficies de la cavidad.

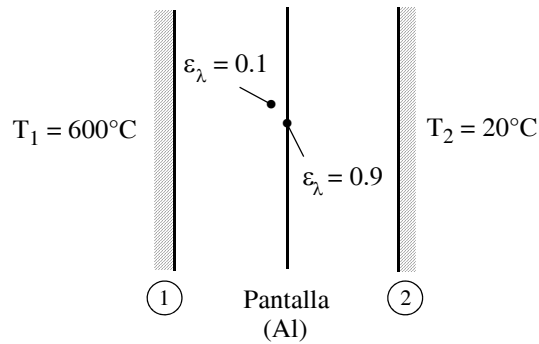
---

**Problemas**

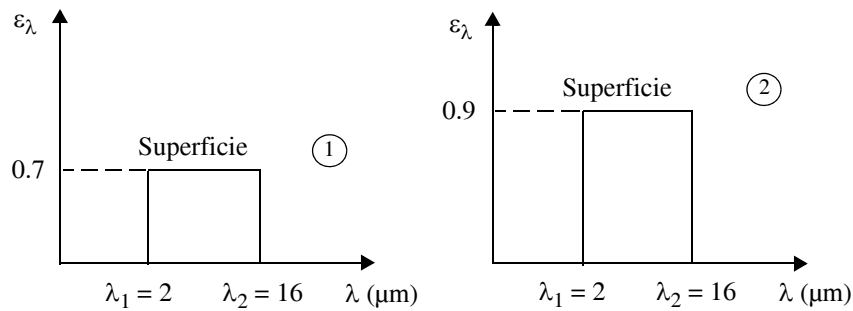

---

- b) Las radiosidades  $J_i$  de todas las superficies de la cavidad.
- c) El porcentaje de potencia radiante emergente de la superficie interior de la cavidad que escapa al medio ambiente.
- d) La temperatura de la superficie con flujo de calor constante  $q_1''$ .
- e) Plantear el sistema de ecuaciones para encontrar las radiosidades  $J'_i$ , si para la superficie a temperatura constante  $T_2$ , su emisividad es  $\epsilon_2^1 = 0.1$  para  $\lambda < 4 \mu\text{m}$ . y  $\epsilon_2^2 = 0.8$  para  $\lambda > 4 \mu\text{m}$ . Proponer un proceso de resolución.

**13.** Dos superficies metálicas se mantienen a 600 y 20°C respectivamente.



① y ② Planos paralelos e infinitos



- a) Hallar el calor neto intercambiado por radiación en la banda 2–16  $\mu\text{m}$ . entre las superficies 1 y 2 al interponer entre las mismas una chapa de

---

**Problemas**

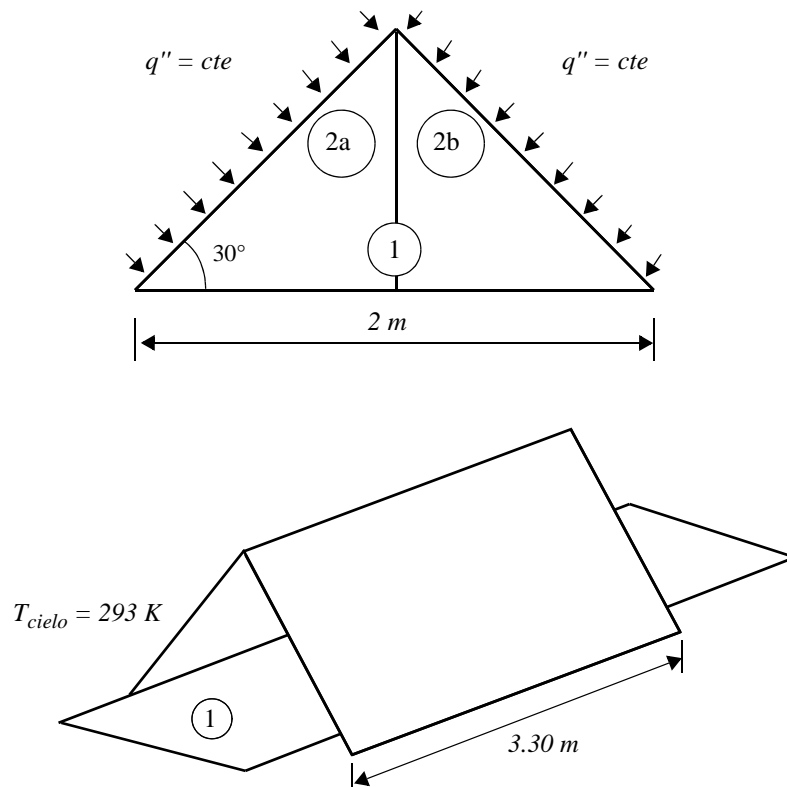
---

aluminio comercial de espesor despreciable (pantalla) con una emisividad hemisférica espectral  $\varepsilon_\lambda = 0.1$ . La pantalla se pinta sólo del lado encarado a la superficie 2, con el fin de obtener la emisividad  $\varepsilon_\lambda = 0.9$ .

- b) Hallar la temperatura de la pantalla.
- c) Hallar la radiosidad e irradiación de la superficie
- d) Hallar el calor neto intercambiado por radiación entre las superficies 1 y 2 sin pantalla interpuesta.

**Nota:** Al determinar la temperatura de la pantalla y a fin de facilitar el proceso de cálculo supóngase que en el resto del espectro no se intercambia energía radiante.

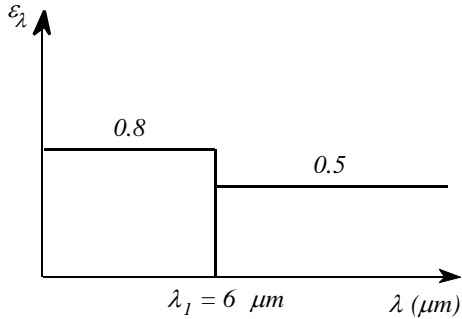
14. El túnel de calentamiento por radiación de la figura, consiste en un techo radiante y una cinta transportadora que desliza por su parte inferior



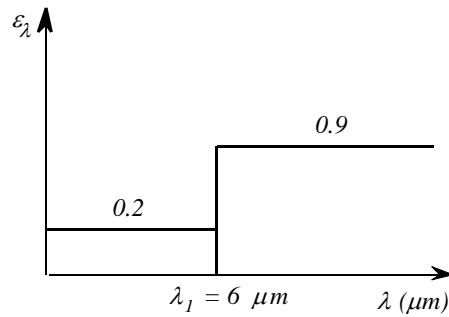
---

**Problemas**


---



Emisividad de la superficie con  $q'' = \text{cte}$



Emisividad de la superficie 1

**Datos**

Régimen estacionario. Superficies 1, 2a y 2b opacas

$$q'' = 2 \text{ kW/m}^2$$

$$T_1 = 430 \text{ K}$$

$$T_{\text{cielo}} = 293 \text{ K}$$

Factores de visión

$$F_{12a} = 0.470$$

$$F_{2a2b} = 0.116$$

Factores de radiación

$$F_{0-\lambda_1 T_{\text{cielo}}} = 0.03456$$

$$F_{0-\lambda_1 T_1} = 0.17872$$

- Encontrar los factores de visión de las superficies .
- Hallar los valores de la radiosidad totales para cada superficie .
- Supóngase para iniciar el proceso de resolución que  $T_{2a} = T_{2b} = 600 \text{ K}$ . Comprobar con el resultado final.
- Hallar los valores de la irradiación total para cada superficie.
- Potencia consumida por la cinta transportadora .
- Potencia neta que se escapa por los extremos abiertos del túnel.

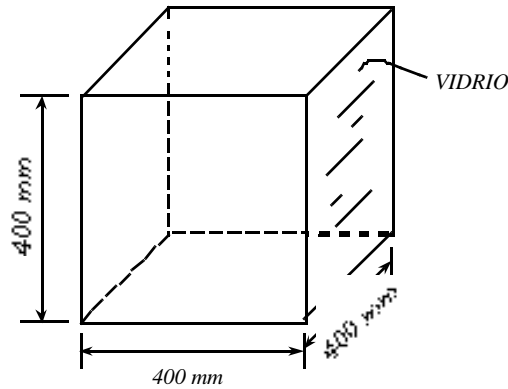
- 15.** Un horno doméstico convencional que trabaja a la máxima potencia puede asimilarse a un cubo con las dimensiones indicadas en la figura. Las superficies interiores laterales e inferior se encuentran perfectamente aisladas y

---

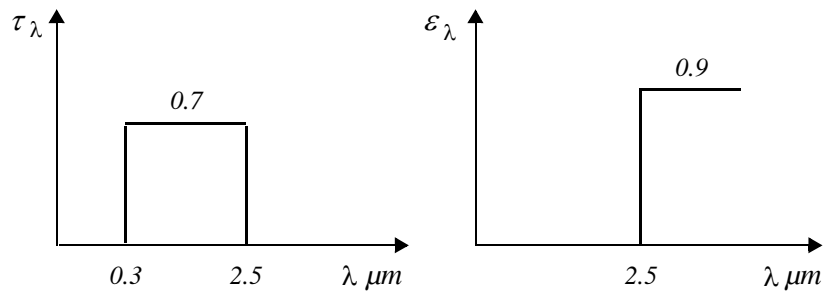
**Problemas**

---

se mantienen a una temperatura constante de  $300^{\circ}\text{C}$ . La superficie superior es calefactora de nicromo ( $\varepsilon = 1$ ) y se mantiene a  $700^{\circ}\text{C}$ .



La puerta es de vidrio (de espesor despreciable y de material difuso) y en la figura siguiente se indican las propiedades espectrales del vidrio.



La sala en donde se encuentra el horno está a una  $T_{\text{amb}} = 20^{\circ}\text{C}$ , considerando la constante de convección entre el vidrio y el aire exterior  $h_{\text{ext}} = 15\ \text{W/m}^2\text{K}$  y la convección entre el vidrio y el aire interior  $h_{\text{int}} = 0\ \text{W/m}^2\text{K}$ .

Establecido el régimen estacionario, y sin considerar la radiación volumétrica en el interior del horno, se pide:

- Potencia consumida por el horno.
- Temperatura del vidrio .
- Potencia de energía que se escapa al exterior del vidrio para cada uno de los mecanismos de transmisión que considere .

---

**Problemas**

---

- d) Indicar la energía incidente y la emergente en cada una de las caras interiores del horno.

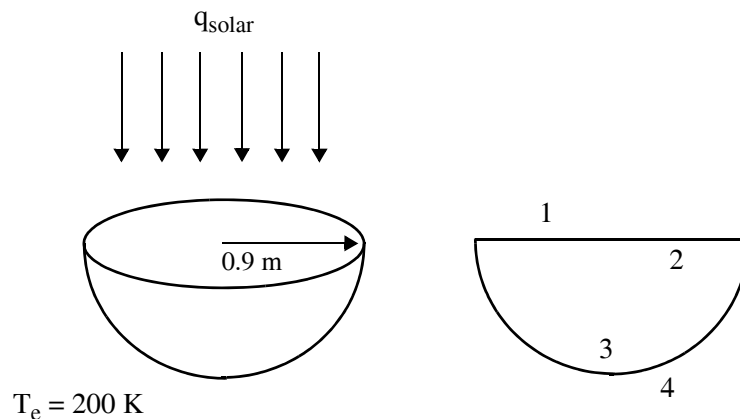
Resolver el problema para dos valores de la emisividad de las paredes laterales e inferior, a saber,  $\epsilon = 0.8$  y  $\epsilon = 0.2$ .

- 16.** Un satélite hueco que se encuentra en órbita terrestre consiste en un disco circular y un hemisferio acoplados. Esta orientado de forma que el disco mira en dirección perpendicular al sol, siendo esta irradiación de  $1353 \text{ W/m}^2$ . El entorno se encuentra a  $200 \text{ K}$  y las paredes del satélite son delgadas.

Todas las superficies son difusas.

Sus propiedades radiativas totales son:  $\alpha_{1,\text{solar}} = 0.85$ ;  $\epsilon_{1,\text{infrarrojo}} = 0.2$ ;  $\epsilon_2$  (gris) =  $0.88$ ;  $\epsilon_3$  (gris) =  $0.45$  y  $\epsilon_4$  (gris) =  $0.55$ . ¿Qué valores alcanzan  $T_1$  y  $T_4$ ?

**Nota:** para la resolución no subdividir las superficies.



- 17.** Se pretende mantener a  $400^\circ\text{C}$  un cilindro de diámetro  $D_1 = 300 \text{ mm}$ , pintado con una pintura especial, situado en el interior de otro cilindro de eje paralelo de diámetro  $D_2 = 600 \text{ mm}$  y que se encuentra a  $1000^\circ\text{C}$ , metalizado. Ambos cilindros se pueden considerar opacos.

Las reflectividades espectrales hemisféricas de las superficies son:

---

**Problemas**

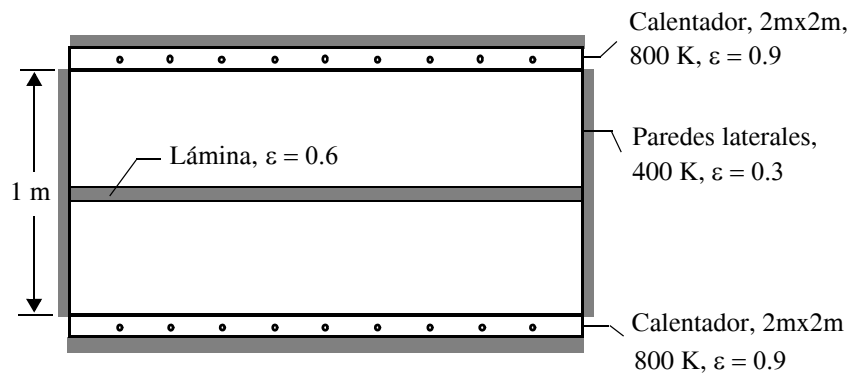
---

$\lambda_1 \div \lambda_2$ ( $\mu\text{m}$ )	Pintura especial	Metalizado
0 $\div$ 4	0.8	0.3
4 $\div$ 30	0.4	0.6
30 $\div$ $\infty$	0.0	0.8

Se pide:

- ¿Qué flujo de calor se debe disipar de la superficie pintada para mantener su temperatura a  $400^\circ\text{C}$ .
- Dibujar el espectro de emisión de las superficies enfrentadas de cada cilindro, señalando cual será el máximo poder emisivo y para que longitud de onda.
- ¿Es útil definir una emisividad media para cada superficie? Razonar la respuesta.

- 18.** Una caldera eléctrica posee dos conjuntos de calentadores (inferior y superior), usándose para tratar térmicamente el recubrimiento aplicado a las dos caras de una delgada lámina metálica situada en medio de ambos.



Los calentadores y la placa miden  $2 \times 2$  m y cada calentador está separado de la placa una distancia de 0.5 m. Los calentadores están perfectamente aislados en su parte posterior y poseen una emisividad de 0.9 en la superficie interior. La placa y las paredes laterales tienen emisividades de 0.6 y

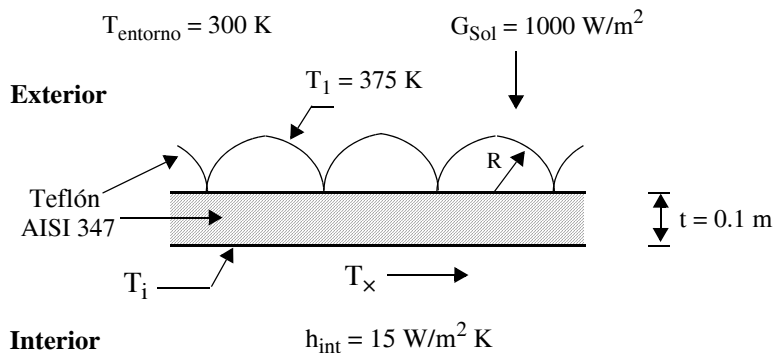
---

**Problemas**

---

0.3 respectivamente. Dibujar el circuito de radiación equivalente para este sistema, indicando adecuadamente todas las resistencias y potenciales. Para las condiciones que se muestran en la figura, calcular la potencia eléctrica requerida y la temperatura de la placa.

19. Se ha diseñado un sistema de captación solar consistente en unas cúpulas de teflón de espesor despreciable (ver figura) con forma semicilíndrica (radio  $R = 1$  m) sobre un soporte de acero inoxidable AISI 347 de espesor  $t = 0.1$  m.



- Si la irradiación solar incidente  $G_{\text{Sol}}$  sobre las cúpulas es de  $1000$  W/m<sup>2</sup>, encontrar el rendimiento de este captador.
- Calcular la temperatura del aire interior  $T_x$ .
- Calcular la temperatura interior  $T_i$ .

**Notas:**

- Las propiedades radiativas del Teflón necesarias tomarlas de las tablas a  $T = 500$  K, y para el AISI 347 a  $T = 600$  K.
- Las superficies pueden ser consideradas grises y difusas.
- En la cúpula se ha realizado alto vacío.

20. Se tiene un tubo de cobre de 22 mm de diámetro exterior, cuya superficie tiene una emisividad de 0.4 y se encuentra a una temperatura de  $150^\circ\text{C}$ , dicho tubo está situado en el centro de una media caña de aluminio pulido (se supone un coeficiente de reflexión unidad), cuyo radio es de 150 mm, por último se supone que dicho sistema está en un ambiente de  $20^\circ\text{C}$ .

---

**Problemas**

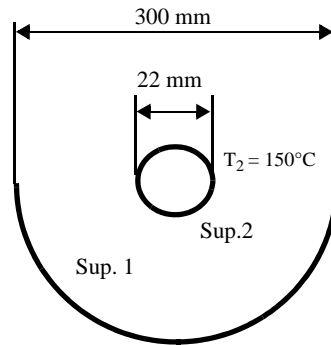
---

Se pregunta:

- a) Calcular el factor de visión desde la media caña (superficie 1) al ambiente.

Su resultado es:  $F_{1-\text{amb}} = \frac{2r_1 \sin\left(\arccos \frac{r_2}{r_1}\right) - 2r_2 \arccos \frac{r_2}{r_1}}{\pi r_1}$

- b) Calcular en dichas condiciones el calor que se comunica al ambiente.
- c) Si se intercala concentricamente al tubo, otro tubo de espesor despreciable, con emisividad 0.88 y de 38 mm de diámetro, calcular en estas condiciones cual es el calor perdido al ambiente.



---

**Problemas**

---

---

## CAPÍTULO 14

# Radiación volumétrica

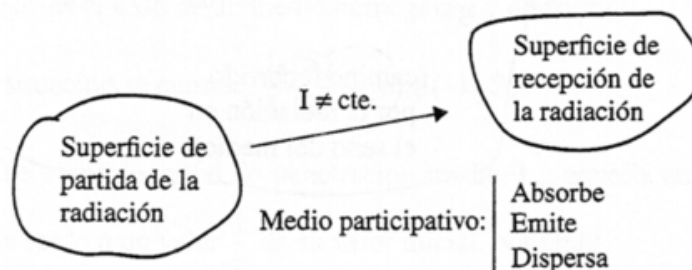
---

En este capítulo se estudian los medios que interactúan con la radiación, es decir, que la absorben, dispersan (en otras direcciones) y que emiten. El fenómeno se complica por dos motivos.

- a) Es necesario conocer el campo radiante en todo el volumen y por tanto conocer las siguientes magnitudes
  - Temperatura del medio en todo el volumen.
  - Propiedades del medio en todo el volumen.
  - Intensidad de la radiación en todo el volumen.
- b) La dependencia espectral es más fuerte que en el comportamiento de superficies, lo que obliga a tener más precaución con los promedios espectrales.

---

**FIGURA 14.1** Propagación de la radiación en un medio participativo.



---

## Radiación volumétrica

---

La diferencia básica de tipo matemático con el intercambio radiativo entre superficies radica en que ahora la intensidad de la radiación no permanece constante en su propagación a través del medio (figura 14.1), debido a la absorción, dispersión y emisión de radiación por el medio.

## La atenuación de la radiación en un medio participativo

---

Por el momento y por simplificar el análisis se ignora el fenómeno de **emisión**. La energía radiante se atenúa (reduce su intensidad) en el medio debido a los fenómenos de *absorción* y *dispersión*.

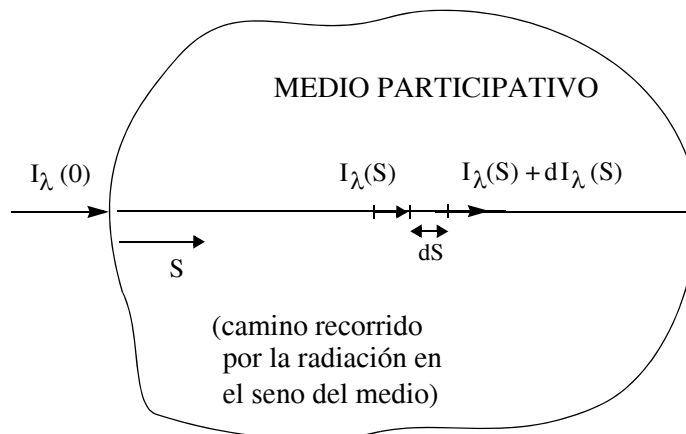
Considérese una radiación, de intensidad espectral  $I_\lambda$ , que atraviesa un material **atenuante** (**absorbente** y **dispersor**). La intensidad se va reduciendo conforme la radiación avanza por el camino  $S$ , según la siguiente ley obtenida experimentalmente [1]

$$\boxed{dI_\lambda = -k_\lambda I_\lambda dS} \quad (14.1)$$

donde  $k_\lambda$  ( $T$ ,  $p$ ,  $C_i$ ,  $\lambda$ ) es el coeficiente de atenuación;  $S$  el camino recorrido por la radiación; y  $C_i$  la composición química del medio. (Piénsese en las dimensiones de  $k_\lambda$ ).

---

**FIGURA 14.2** Atenuación de la radiación en un medio participativo.



Integrando la ecuación (14.1)

$$\begin{aligned} I_\lambda(S) &= I_\lambda(0) \exp \left[ - \int_0^S k_\lambda(S^*) dS^* \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{I_\lambda(S)}{I_\lambda(0)} &= \exp \left[ - \int_0^S k_\lambda(S^*) dS^* \right] = \tau'_\lambda \end{aligned} \quad (14.2)$$

**transmitancia**

se obtiene la llamada ley de Bouguer, o de Lambert–Beer, que viene a decir que la intensidad espectral se atenúa de forma aproximadamente exponencial.

### Componentes y magnitudes derivadas de $k_\lambda$

- *Componentes*

Como ya se ha comentado, la atenuación que sufre la radiación es debida a dos causas: la absorción parcial y la dispersión por los componentes materiales del medio. La existencia de ambos fenómenos se refleja en que  $k_\lambda$  contiene dos términos.

$$k_\lambda(\lambda, T, p, C_i) = a_\lambda(\lambda, T, p, C_i) + \sigma_\lambda(\lambda, T, p, C_i) \quad (14.3)$$

$a_\lambda$  : Coeficiente de absorción espectral

$\sigma_\lambda$  : Coeficiente de dispersión espectral

Estos términos se comentan posteriormente algo más.

- *Longitud de penetración media*

Aunque este concepto se puede aplicar al caso general de  $k_\lambda$  variable, se razona de forma más simple con el caso particular de  $k_\lambda$  constante a lo largo del camino  $S$  (es el caso de un medio homogéneo y uniforme).

En esa situación se cumple  $\frac{I_\lambda(S)}{I_\lambda(0)} = \exp(-k_\lambda S)$ .

Se define como longitud de penetración media,  $l_m$ , aquella en que la intensidad ha caído a un valor  $\frac{1}{e}$  de su valor inicial, por tanto

$$\exp(-k_\lambda l_m) = \frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{l_{m,\lambda} = \frac{1}{k_\lambda}} \quad (14.4)$$

Se pone el subíndice  $\lambda$  en  $l_m$  para indicar la dependencia espectral de este concepto, lo que significa que la penetración de la radiación en cada medio depende de su longitud de onda.

- *Espesor óptico*, de una capa de espesor geométrico  $S$ . Se define como

$$\beta_\lambda \equiv \int_0^S k_\lambda(S^*) dS^* \quad \text{adimensional} \quad (14.5)$$

#### Caso particular

$$k_\lambda = \text{Cte. (a lo largo de } S)$$

$$\beta_\lambda = k_\lambda S = \frac{S}{l_m} \quad (14.6)$$

Se denomina medio ópticamente grueso (en el límite, opaco) a aquél en el que se cumple  $\beta_\lambda \gg 1$  ( $l_m \ll S$ , muy pequeña penetración, gran atenuación) y medio ópticamente delgado al que satisface  $\beta_\lambda \ll 1$  ( $l_m \gg S$ , muy pequeña atenuación, gran penetración).

## **Coefficientes de absorción y dispersión**

### **1. Coeficiente de dispersión, $\sigma_\lambda$**

La dispersión es un fenómeno electromagnético complicado que se puede explicar por el modelo de choques (fotones – partículas del medio) y por una cierta área efectiva de dispersión  $dA_{d,\lambda}$  función de

- El número de partículas existentes.
- Su sección dispersiva  $s_\lambda$ .

Según se ve en la figura 14.3, al atravesar la radiación un camino  $dS$  en el seno del medio se encuentra con una cantidad de partículas  $N dA dS$  siendo  $N$  el número de partículas por unidad de volumen y  $dA$  el área recta del haz incidente. Si las partículas tienen una sección dispersante media  $\bar{s}_\lambda$ , el área de dispersión de todo el grupo de partículas del volumen diferencial vale

$$dA_{d,\lambda} = \bar{s}_\lambda N dA dS \quad (14.7)$$

---

**La atenuación de la radiación en un medio participativo**

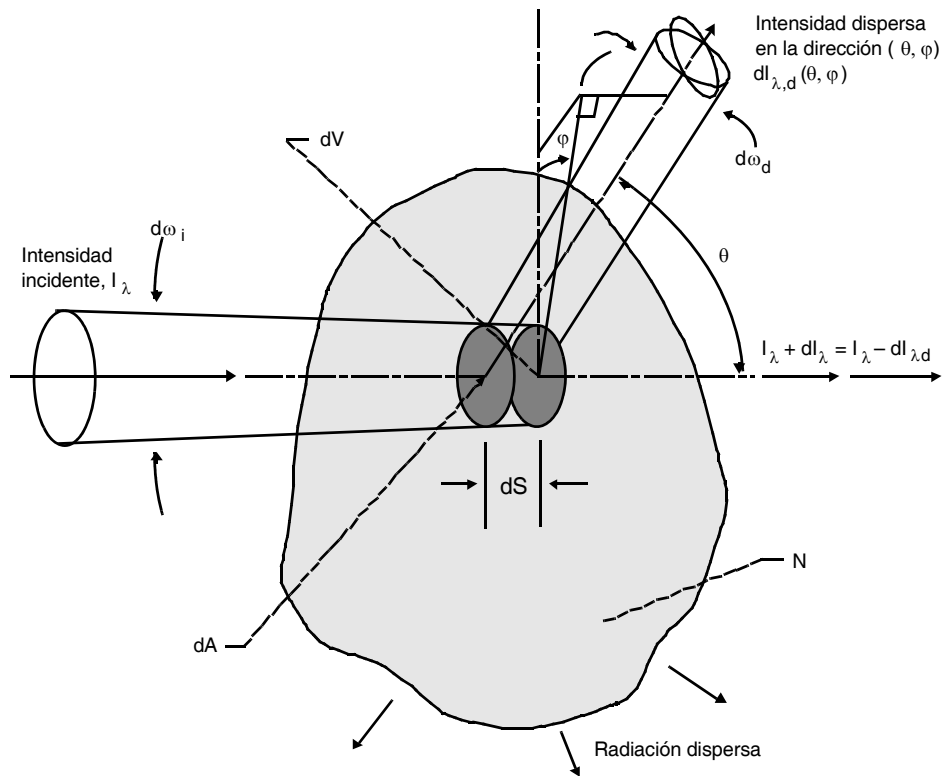
---

En el modelo de choques se tiene

$$\frac{dI_\lambda}{I_\lambda} = - \frac{dI_{\lambda,d}}{I_\lambda} = - \frac{dA_{d,\lambda}}{dA} \quad (14.8)$$

---

**FIGURA 14.3**      **Dispersión de la radiación en un medio atenuante.**



Sustituyendo en la ec. (14.8)  $dA_{d,\lambda}$  de la ec. (14.7) se tiene

$$- \frac{dI_\lambda}{I_\lambda} = \bar{s}_\lambda N dS. \quad (14.9)$$

Comparando la ec. (14.9) con la (14.1) y considerando solamente la dispersión como factor de atenuación ( $k_\lambda = \sigma_\lambda$ ), resulta

$$\sigma_\lambda = N \bar{s}_\lambda \quad (14.10)$$

Con los valores de  $N$  (densidad) y  $\bar{s}_\lambda$  para muchos casos habituales en medios donde sólo haya gases o partículas pequeñas (hollín) se cumple  $\sigma_\lambda \ll a_\lambda$ , por lo que se considerará de aquí en adelante que

$$\boxed{k_\lambda \cong a_\lambda} \quad (14.11)$$

salvo que se indique lo contrario. Sólo en el caso de que el medio contenga partículas de gran tamaño ( $\phi \gg \lambda$ ) es imprescindible tener presente la dispersión.

## 2. El coeficiente de absorción, $a_\lambda$

Este coeficiente se puede explicar por **modelos cuánticos complicados**, se puede definir la sección eficaz para la absorción  $(s_\lambda)_{\text{abs}}$  y existe una relación semejante a la (14.10), es decir

$$a_\lambda = N(\bar{s}_\lambda)_{\text{abs}} \quad (14.12)$$

El comportamiento de  $a_\lambda$  es fuertemente espectral (consúltese [1]) y sus valores se toman frecuentemente de otras ramas científicas como la espectroscopia, aunque en cálculos de ingeniería se tiende a evitar la dependencia espectral, cuando es posible, y a manejar otro tipo de propiedades no espectrales que se pueden obtener, por ejemplo, por medios experimentales.

## La ecuación del transporte radiativo

---

Un medio participativo no sólo absorbe y dispersa la radiación, sino que también emite. La ley básica que determina como se modifica la intensidad monocromática de un rayo al atravesar un camino  $S$  en un medio **no dispersivo** es  $dI_\lambda = dI_{\lambda,e} - a_\lambda I_\lambda dS$ , donde  $dI_{\lambda,e}$  es la radiación emitida por el camino  $dS$  del medio en la dirección de propagación  $S$ . Una ley de Kirchoff [2] semejante a la que se aplica a las superficies demuestra que  $dI_{\lambda,e} = a_\lambda I_{\lambda,n} dS$ , con lo que la ley de variación de la intensidad, llamada **ecuación del transporte radiativo** en un medio no dispersivo, queda de la sencilla forma siguiente

$$\boxed{\frac{dI_\lambda}{dS} = a_\lambda(I_{\lambda,n} - I_\lambda)} \quad (14.13)$$

Es importante, como se verá más adelante, conocer la energía radiante monocromática emitida por una masa de medio participativo por unidad de volumen. Se puede deducir fácilmente de lo anterior que

---

**La ecuación del transporte radiativo**

---

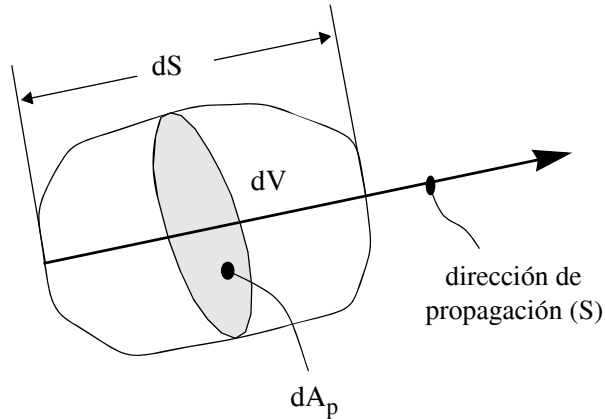
$$q''_{\lambda,e} \left( \frac{W}{m^3 \cdot \mu m} \right) = \frac{d^4 q_{\lambda,e}}{dV d\lambda} = \frac{\int dI_{\lambda,e} dA_p d\omega d\lambda}{dV d\lambda} = \frac{\int a_{\lambda} I_{\lambda,n} dS dA_p d\omega d\lambda}{dV d\lambda}$$

$$= \frac{a_{\lambda} I_{\lambda,n} dV d\lambda \int d\omega}{dV d\lambda} = \frac{4\pi}{dV d\lambda} = 4\pi a_{\lambda} I_{\lambda,n} = \boxed{4a_{\lambda} E_{\lambda,n} = q''_{\lambda,e}} \quad (14.14)$$

donde  $dA_p$  es el área proyectada por el volumen diferencial  $dV$  en la dirección de propagación (figura 14.4).

---

**FIGURA 14.4** Emisión en una determinada dirección S.



La energía total emitida por unidad de volumen será

$$q'''_e = 4 \int_0^{\infty} a_{\lambda} E_{\lambda,n}(\lambda, T) d\lambda \quad (4.15)$$

y si el gas es gris ( $a_{\lambda}$  independiente de  $\lambda$ ,  $a_{\lambda} = a$ ), valdrá

$$q'''_e = 4a\sigma T^4. \quad (14.16)$$

## Propiedades direccionales de los medios radiantes

La propiedad radiativa primordial de un medio no dispersivo es su coeficiente de absorción espectral,  $a_\lambda$ . Con él queda determinado el comportamiento radiante del medio. No obstante, los cálculos son complicados, y para simplificarlos se manejan unas propiedades globales del medio análogas a la emisividad, absorptividad, etc, pero de naturaleza diferente.

En superficies eran propiedades locales (de punto), en volúmenes son propiedades globales de masas radiantes termodinámicamente homogéneas ( $T$ ,  $p$  y  $C_i$  uniformes en su seno). Es lo que en Termodinámica se llaman propiedades extensivas (dependen del tamaño del sistema considerado) y deben recibir un nombre diferente (EMITANCIA, ABSORTANCIA y TRANSMITANCIA). No obstante, hay textos que les asignan el mismo nombre que a las propiedades de las superficies.

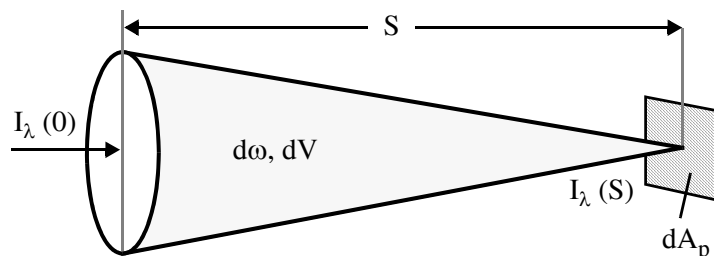
Se comienza con las propiedades más elementales, direccionales y espectrales, para integrar posteriormente y obtener otras más globales.

### Absortancia direccional en un medio termodinámicamente uniforme

Sea el elemento de volumen  $dV$  y de camino finito  $S$  y una radiación que incide sobre él  $I_\lambda(0)$ , según se indica en la figura 14.5. La intensidad incidente sobre un área  $dA_p$  normal al camino situada al final del mismo vale  $I_\lambda(S)$ , luego la reducción de energía en términos de intensidad es

$$I_\lambda(0) - I_\lambda(S) = I_\lambda(0) \left[ 1 - \exp(-a_\lambda S) \right] \quad (14.17)$$

**FIGURA 14.5** Camino finito,  $S$ , de la radiación en un volumen elemental,  $dV$ , de medio participativo para la determinación de las propiedades radiantes direccionales.



---

**Propiedades direccionales de los medios radiantes**

---

donde se ha considerado en la ley de atenuación de Lambert–Beer, ec. (14.2), que  $k_\lambda = a_\lambda(\lambda, T, p, C_i) = \text{cte}$ , al ser el elemento homogéneo.

Por analogía con la definición de absorptividad espectral direccional, se define la *absortancia espectral para un camino de longitud S* en un volumen de gas uniforme

$$\alpha_{\lambda\omega}(\lambda, T, p, C_i, S) \equiv \frac{I_\lambda(0) - I_\lambda(S)}{I_\lambda(0)} = \boxed{1 - \exp(-a_\lambda S) = \alpha_{\lambda\omega}} \quad (14.18)$$

La *absortancia total para un camino de longitud S* en un volumen de gas uniforme se define de la misma manera sobre las intensidades totales

$$\alpha_\omega(T, p, C_i, S) \equiv \frac{I(0) - I(S)}{I(0)} = \frac{\int_0^\infty I_\lambda(0)[1 - \exp(-a_\lambda S)]d\lambda}{\int_0^\infty I_\lambda(0)d\lambda} \quad (14.19)$$

**Emitancia direccional en un medio termodinámicamente uniforme**

Del hecho de que el coeficiente de emisión espectral es igual al de absorción espectral resulta directamente que la emitancia espectral direccional es igual a la absorptancia espectral direccional, es decir,

$$\boxed{\varepsilon_{\lambda\omega}(\lambda, T, p, C_i, S) = 1 - \exp(-a_\lambda S)} \quad (14.20)$$

que es la *emitancia espectral para un camino de longitud S* en un volumen de gas uniforme, definida como el cociente entre la intensidad espectral emitida por el elemento de la figura 14.7 y la que emitiría un cuerpo negro a las mismas longitud de onda y temperatura.

Es decir, la intensidad espectral incidente en  $dA_p$  (figura 14.7) procedente de la emisión de la masa de gas (medio participativo en general), viene dada por

$$I_\lambda(S) = \varepsilon_{\lambda\omega} I_{\lambda,n}(\lambda, T) = [1 - \exp(-a_\lambda S)] I_{\lambda,n}(\lambda, T)$$

La *emitancia total para el mismo camino* se obtiene como  $\alpha_\omega$ , es decir,

---

### Radiación volumétrica

---

$$\varepsilon_{\omega}(T, p, C_i, S) \equiv \frac{\int_0^{\infty} I_{\lambda}(S) d\lambda}{I_n(T)} = \frac{\int_0^{\infty} [1 - \exp(-a_{\lambda} S)] I_{\lambda, n}(\lambda, T) d\lambda}{\sigma T^4 / \pi} \quad (14.21)$$

Por tanto, la intensidad total incidente en  $dA_p$  correspondiente a la emisión del elemento vale

$$I(S) = \varepsilon_{\omega} \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

*Corolario:* Si el gas es gris ( $a_{\lambda}$  independiente de  $\lambda$ )  $\alpha_{\omega} = \varepsilon_{\omega}$ .

### Transmitancia direccional

En la hipótesis que se está considerando de ausencia de dispersión (equivalente a la reflexión estudiada en radiación superficial) la transmitancia se define por diferencia

$$\boxed{\tau_{\lambda\omega} = 1 - \alpha_{\lambda\omega}} \quad \boxed{\tau_{\omega} = 1 - \alpha_{\omega}} \quad (14.22a)$$

*Corolario:*  $\boxed{\tau_{\lambda\omega} = \exp(-a_{\lambda} S)}$  (14.22b)

---

## Propiedades hemisféricas de los medios radiantes

---

Trabajar con propiedades direccionales resulta muy inconveniente, especialmente en aplicaciones de Ingeniería, dado que allí las masas de gas radiando hacia el contorno (y recibiendo radiación de él) tendrán formas cualesquiera y serán finitos, a diferencia de los elementos infinitesimales y unidireccionales utilizados para definir las propiedades.

Como la consideración matemática de todas las direcciones (camino) es complicada, se utiliza el concepto de **longitud media (o equivalente) de haz**,  $L_e$ , que indica el camino promedio que recorre la radiación desde su origen hasta su destino. Esta magnitud,  $L_e$ , va a ocupar el lugar del camino  $S$  cuando se quiera calcular el intercambio radiativo entre una masa cualquiera del medio participativo y una cierta parte de su contorno.

El cálculo general de  $L_e$  es complicado pero se encuentra su valor en la bibliografía para la mayor parte de las geometrías habituales (ver Tabla 14.1).

**Propiedades hemisféricas de los medios radiantes**

**TABLA 14.1** Longitudes medias de haz en volúmenes finitos de gas.

GEOMETRÍA DEL VOLUMEN DE GAS	Dimensión característica	Longitud media de haz para espesor óptico nulo $a_{\lambda} L_e \rightarrow 0, L_{e,0}$	Longitud media de haz corregida para espesor óptico finito, $L_e$	$C = \frac{L_e}{L_{e,0}}$
Semiesfera radiando al centro de la base	Radio R	R	R	1
Esfera radiando a su superficie	Diámetro D	2/3 D	0.65 D	0.97
Cilindro circular de longitud infinita radiando a su superficie lateral	Diámetro D	D	0.95 D	0.95
Cilindro circular de longitud semiinfinita radiando a:				
Elemento en el centro de la base	Diámetro D	D	0.90 D	0.90
Toda la base	Diámetro D	0.81 D	0.65 D	0.80
Cilindro circular de longitud igual al diámetro radiando a:				
Centro de la base	Diámetro D	0.77 D	0.71 D	0.92 D
Toda la superficie	Diámetro D	2/3 D	0.60 D	0.90 D
Cilindro circular de longitud igual a dos diámetros radiando a:				
Base	Diámetro D	0.73 D	0.60 D	0.82
Superficie lateral	Diámetro D	0.82 D	0.76 D	0.93
Toda la superficie	Diámetro D	0.80 D	0.73 D	0.91
Cilindro circular de longitud igual a la mitad del diámetro radiando a:				
Base	Diámetro D	0.48 D	0.43 D	0.90
Superficie lateral	Diámetro D	0.52 D	0.46 D	0.88
Toda la superficie	Diámetro D	0.50 D	0.45 D	0.90
Cilindro de longitud infinita y sección semicircular radiando a un elemento en el centro de la base rectangular	Radio R		1.26 R	
Plancha infinita radiando a:				
Una cara	Espesor placa D	2 D	1.8 D	0.90
Ambas caras	Espesor placa D	2 D	1.8 D	0.90
Cubo radiando a una cara	Lado X	2/3 X	0.6 X	0.90
Paralelepípedos rectangulares radiando a la cara 1 x 4				
1 x 1 x 4 radiando a la cara 1 x 1	Lado más corto X	0.90 X	0.82 X	0.91
radiando a todas las caras		0.86 X	0.71 X	0.83
		0.89 X	0.81 X	0.91
1 x 2 x 6 radiando a la cara 2 x 6		1.18 X		
radiando a la cara 1 x 6		1.24 X		
radiando a la cara 1 x 2		1.18 X		
radiando a todas las caras		1.20 X		
Volumen de gas envolviendo un haz de tubos infinito.				
Disposición triangular equilátera:	Diámetro del tubo D, y espaciado entre los centros de los tubos, S			
S = 2 D		3.4 (S-D)	3.0 (S-D)	0.88
S = 3 D		4.45 (S-D)	3.8 (S-D)	0.85
Disposición cuadrada:				
S = 2 D		4.1 (S-D)	3.5 (S-D)	0.85

---

## Radiación volumétrica

---

Para los casos cuyo valor no se encuentra en la literatura científica se puede aproximar el valor de  $L_e$  por las siguientes expresiones:

1. Medio ópticamente delgado de volumen  $V$  encerrado por un contorno de área  $A$ ,

$$L_{e, o} \cong 4 \frac{V}{A}$$

2. Medio ópticamente no delgado de volumen  $V$  encerrado por un contorno de área  $A$ ,

$$L_e \cong 3.6 \frac{V}{A}$$

La demostración de ambas fórmulas se efectúa en el apartado siguiente sobre este concepto de *longitud media de haz* (ver ecuaciones (14.28) y (14.29)). Dicho apartado puede omitirse sin pérdida de continuidad.

En definitiva la emitancia o absorción hemisférica espectral de un medio homogéneo que radia (o que absorbe) hacia (o desde) una parte de su contorno viene dada por

$$\boxed{\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda = 1 - \exp(-a_\lambda L_e)} \quad (14.23)$$

## Base teórica del concepto de longitud media de haz

Para el que tenga interés en conocer de donde salen las expresiones indicadas más arriba, se le ofrece a continuación una exposición más detallada del concepto y elementos de cálculo de la longitud media de haz. El que no lo tenga, puede pasar directamente al apartado de las curvas de Hottel.

Se empieza considerando el caso simple, que enlaza bien con los pasos previos, de una semiesfera isoterma de gas a temperatura  $T$  radiando hacia su centro (área elemental  $dA_k$ ), bajo la hipótesis adicional de que la radiosidad del contorno es despreciable (el gas no recibe radiación del contorno) (Ejemplo: paredes frías y cubiertas de hollín de un hogar), según se representa en la figura 14.8.

El flujo de calor en el intervalo  $d\lambda$  que incide sobre  $dA_k$  procedente de la semiesfera, es decir, la irradiación vale

$$G_{\lambda, k} = \int_{2\pi} I_\lambda(R) \cos\theta d\omega = \int_{2\pi} I_{\lambda, n} [1 - \exp(-a_\lambda R)] \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi$$

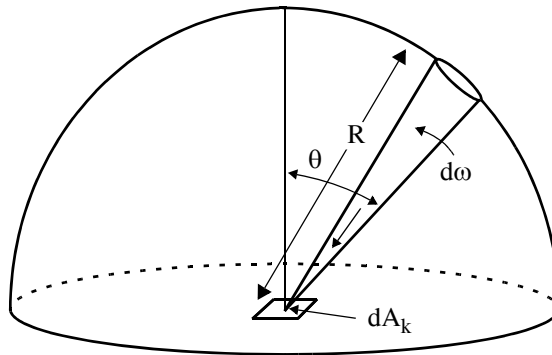
Efectuando la integral

$$\begin{aligned}
 G_{\lambda, k} &= \pi I_{\lambda, n}(\lambda, T) \left[ 1 - \exp(-a_{\lambda} R) \right] = \\
 &= \boxed{G_{\lambda, k} = \varepsilon_{\lambda \omega}(a_{\lambda} R) E_{\lambda, n}(\lambda, T)} \quad (14.24)
 \end{aligned}$$

La ecuación (14.24) es una forma muy sencilla de calcular la energía espectral que emite la masa de gas sobre un punto particular del contorno (en este caso su centro), que depende del radio óptico,  $a_{\lambda} R$ , de la semiesfera.

---

**FIGURA 14.6** Semiesfera de gas isoterma a temperatura  $T$  radiando hacia su centro.



Es muy deseable tener fórmulas igual de simples para otras geometrías y otros puntos, y por ello se define *la longitud media (o equivalente) de haz*,  $L_e$ , para

- Una geometría dada (volumen), y
- Una zona particular de su contorno, denotada por el subíndice  $k$

como *el radio de una semiesfera de gas, a la misma temperatura que el volumen considerado, que radía hacia su centro el mismo flujo de calor que el flujo de calor promedio que radia el volumen estudiado hacia la parte del contorno de interés*, luego según la ecuación (14.24)

$$G_{\lambda, k} = \varepsilon_{\lambda}(a_{\lambda} L_e) E_{\lambda, n}(T) = \left[ 1 - \exp(-a_{\lambda} L_e) \right] E_{\lambda, n} \quad (14.25)$$

El problema ahora es calcular  $L_e$  para una geometría cualquiera.

### Gas (medio) ópticamente delgado

La determinación de  $L_e$  es difícil en general, por lo que se parte de un caso particular sencillo que es el del medio ópticamente delgado, en el cual toda la energía que emite alcanzará el contorno, al no haber atenuación en su seno.

Sea pues un volumen  $V$  cualquiera de un medio isoterma, contenido en una superficie de área  $A$  cualquiera.

La energía que emite en un intervalo  $d\lambda$  es, según la ecuación (14.14)

$$dq_{\lambda,e} = 4a_\lambda E_{\lambda,n}(T) V d\lambda$$

y la irradiación promedio en el contorno es por tanto

$$G_\lambda = 4a_\lambda E_{\lambda,n} \frac{V}{A} \quad (14.26)$$

Como el medio es ópticamente delgado,  $a_\lambda L_e$  es pequeño y se puede desarrollar en serie la exponencial de la ecuación (14.25)

$$G_\lambda = \left[ 1 - \exp(-a_\lambda L_{e,0}) \right] E_{\lambda,n} \cong a_\lambda L_{e,0} E_{\lambda,n} \quad (14.27)^\dagger$$

Comparando las ecuaciones (14.26) y (14.27), resulta

$$L_{e,0} = 4 \frac{V}{A} \quad (14.28)$$

Se observa inmediatamente que el hecho de tratarse de un medio ópticamente delgado se indica, añadiendo el subíndice cero al símbolo de la longitud equivalente de haz,  $L_{e,0}$ .

### Ejemplos sencillos

1. Esfera de diámetro  $D$ , radiando a su superficie,  $L_{e,0} = \frac{2}{3} D$ .
2. Cilindro infinito de diámetro  $D$ , radiando a su superficie lateral,  $L_{e,0} = D$ .
3. Pared plana de gas, radiando a sus contornos separados una distancia  $L$ ,  $L_{e,0} = 2L$ .

---

†. Se ha suprimido el subíndice  $k$  de la irradiación  $G_\lambda$  debido a que ahora no se considera una parte determinada de la superficie sino toda ella.

### Gas (medio) ópticamente NO delgado

Existe un grupo de geometrías comunes, cuyo valor de  $L_e$  está calculado, y de los cuales se muestra una selección en la tabla 14.1.

Para las geometrías cuyo valor de  $L_e$  no se encuentra en la bibliografía se utiliza una aproximación obtenida al comparar  $L_e$  y  $L_{e,0}$  para los casos calculados, observándose que se mantiene una relación (Ver tabla 14.1)  $L_e / L_{e,0}$  cercana a 0.9.

Por ello para las geometrías cuyo valor de  $L_e$  se desconoce y es difícil de calcular, se puede aproximar

$$L_e \cong 0.90 L_{e,0} = \boxed{3.60 \frac{V}{A} = L_e} \quad (14.29)$$

para un volumen de gas que radie al conjunto de su contorno.

### Emitancia total hemisférica. Curvas de HOTTEL

---

Conviene tener presente que el aspecto más importante del concepto de longitud media de haz,  $L_e$ , es que separa la dependencia geométrica de la dependencia espectral. De manera que para obtener la irradiación total que alcanza a alguna parte de la superficie (denotada por el subíndice  $k$ ), no hay más que integrar en  $\lambda$  la ecuación (14.25) una vez determinado  $L_e$

$$G_k = \int_0^\infty [1 - \exp(-a_\lambda L_e)] E_{\lambda,n} d\lambda \quad (14.30)$$

Para mayor comodidad en el cálculo se define una emitancia **hemisférica total** de la manera siguiente

$$G_k \equiv \varepsilon E_n(T) = \varepsilon \sigma T^4 \quad (14.31)$$

Comparando las ecuaciones (14.30) y (14.31) se obtiene la expresión que da la emitancia total hemisférica de un volumen cualquiera de medio participativo (generalmente se tratará de un gas, pero no siempre), radiando a una determinada parte de su contorno

$$\varepsilon = \frac{\int_0^\infty [1 - \exp(-a_\lambda L_e)] E_{\lambda,n} d\lambda}{\sigma T^4} = f(T, L_e) \quad (14.32)$$

---

**Radiación volumétrica**

---

La expresión (14.32) toma una forma particular para cada gas, mezcla de gases u otro medio. Son famosas las llamadas curvas de Hottel [3], [4] para un amplio conjunto de gases entre los que se destacan las del  $\text{CO}_2$  y  $\text{H}_2\text{O}(\text{g})$  presentadas en las figuras 14.7 a 14.11. La presencia de la presión se debe a la dependencia de  $a_\lambda$  con la densidad y de ésta con  $p$ . Estas curvas son experimentales.

En las figuras 14.7 y 14.9 la variable independiente es la temperatura del gas; el parámetro es el producto de la presión parcial del gas considerado por la longitud media de haz. En ellas las líneas discontinuas corresponden a extrapolaciones y no a medidas, por lo que su incertidumbre es mayor que en las zonas continuas. En las otras tres figuras (14.8, 14.10 y 14.11) las variables y parámetros son las presiones (total o parcial) y sus productos por la longitud media de haz, según se indica en cada una de ellas.

---

**FIGURA 14.7** Emitancia total del  $\text{CO}_2$  en una mezcla con gases no absorbentes a la presión total de 1 atm.

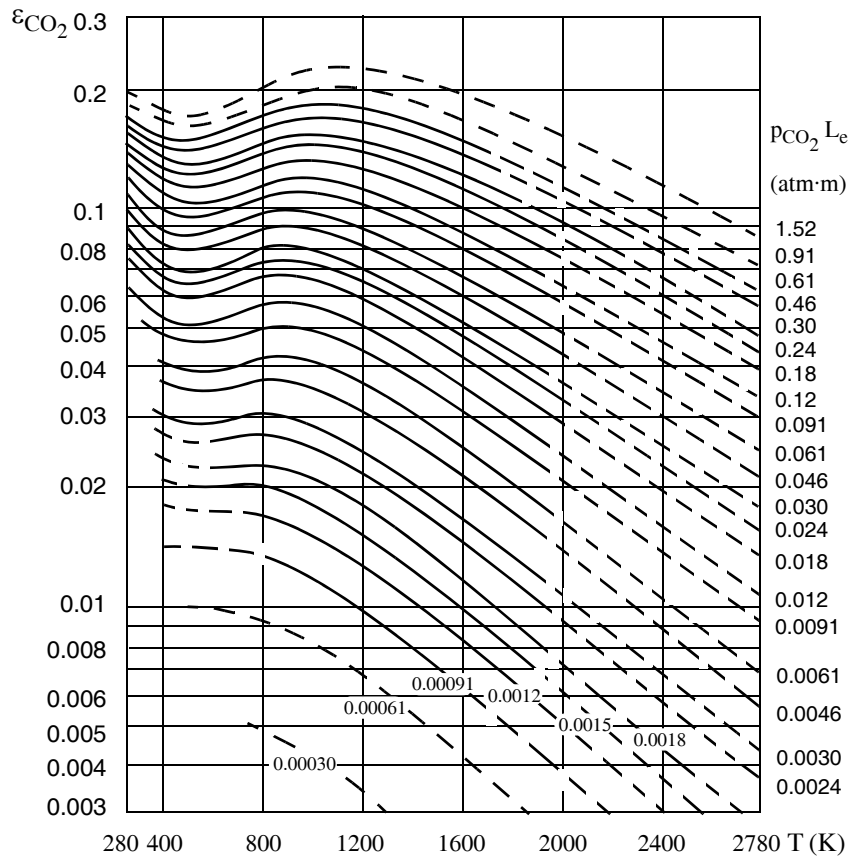


FIGURA 14.8 Corrección de  $\varepsilon_{\text{CO}_2}$  para valores de la presión total distintos de 1 atm.

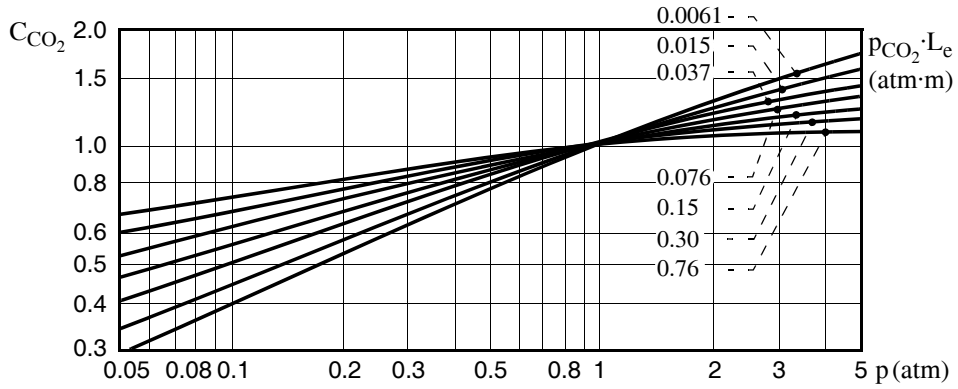
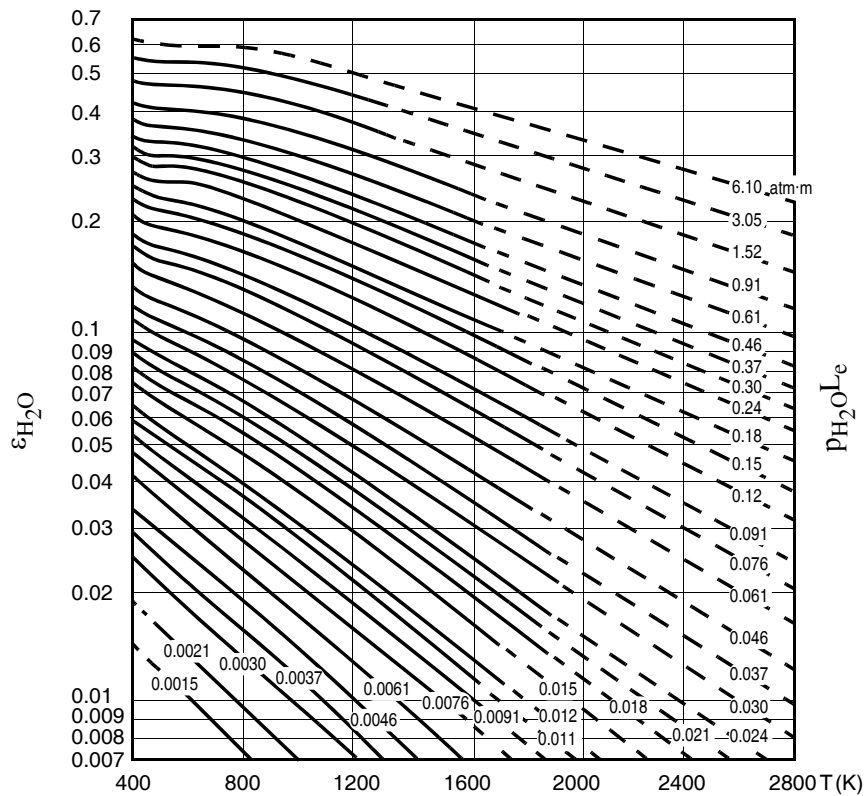
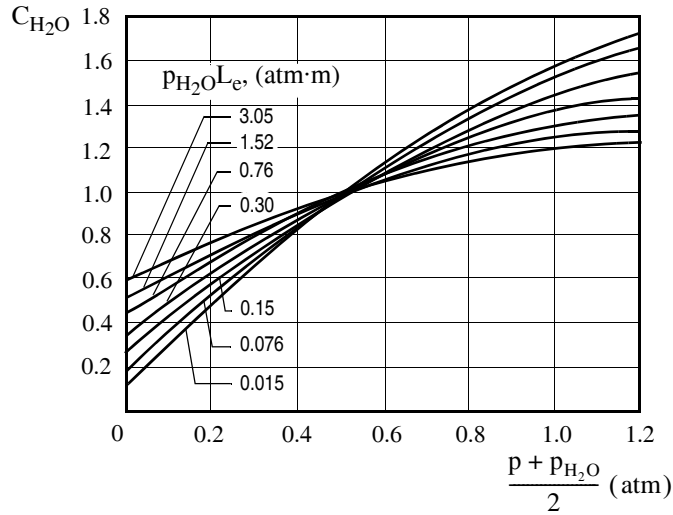


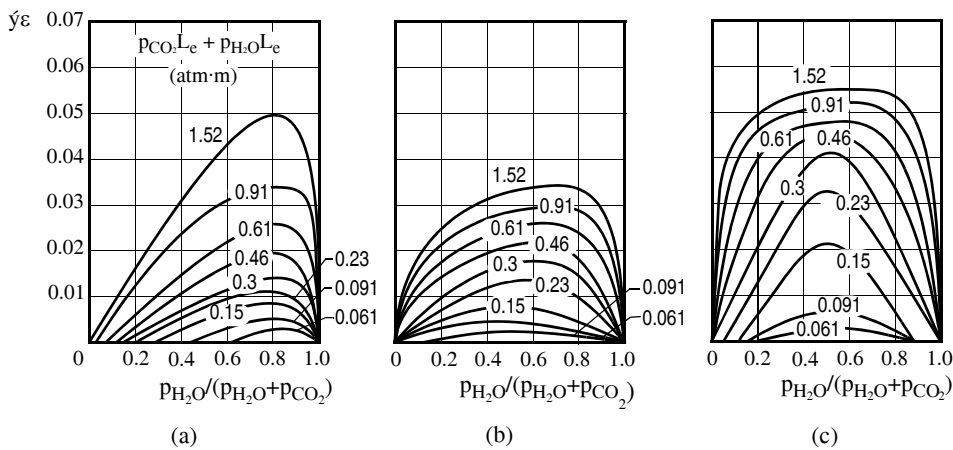
FIGURA 14.9 Emitancia del vapor de agua en una mezcla con gases no absorbentes a la presión total de 1 atm y con  $p_{\text{H}_2\text{O}} \rightarrow 0$ .



**FIGURA 14.10** Corrección de presión de la emitancia del vapor de agua para valores de  $p_{H_2O}$  y  $p$  distintos de 0 y 1 atm respectivamente.



**FIGURA 14.11** Corrección de la emitancia total debida al solapamiento espectral cuando están presentes el  $CO_2$  y el vapor de agua. a)  $T = 400$  K; b)  $T = 810$  K; c)  $T = 1200$  K.



La emitancia de una mezcla gaseosa que contenga como únicas especies radiantes  $CO_2$  y  $H_2O$  (componentes gaseosos principales para la radiación en los gases de combustión) viene dada por

$$\epsilon_g = C_{CO_2} \epsilon_{CO_2} + C_{H_2O} \epsilon_{H_2O} - \Delta \epsilon \quad (14.33)$$

---

### Intercambio radiativo entre un gas y su contorno, ambos isotermos

---

donde  $C_{\text{CO}_2}$  y  $C_{\text{H}_2\text{O}}$  son términos correctivos cuando la presión de la mezcla es distinta a un cierto valor, y  $\gamma\epsilon$  es el término de solapamiento espectral.

Este último término aparece siempre que existen mezclas de sustancias radiativamente activas. Efectivamente, si en un medio homogéneo a temperatura  $T$  existen dos constituyentes participativos con coeficientes de absorción  $a_{\lambda_1}$  y  $a_{\lambda_2}$ , se tiene

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^\infty E_{\lambda, n}(T) \left[ 1 - e^{-(a_{\lambda_1} + a_{\lambda_2})L_e} \right] d\lambda = \\ &= \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^\infty E_{\lambda, n}(T) \left[ \left( 1 - e^{-a_{\lambda_1}L_e} \right) + \left( 1 - e^{-a_{\lambda_2}L_e} \right) - \left( 1 - e^{-a_{\lambda_1}L_e} \right) \left( 1 - e^{-a_{\lambda_2}L_e} \right) \right] d\lambda = \\ &= \epsilon_1 + \epsilon_2 - \Delta\epsilon\end{aligned}\quad (14.34)$$

siendo  $\Delta\epsilon = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^\infty E_{\lambda, n}(T) \left[ \left( 1 - e^{-a_{\lambda_1}L_e} \right) \left( 1 - e^{-a_{\lambda_2}L_e} \right) \right] d\lambda$  (14.35)

---

### Intercambio radiativo entre un gas y su contorno, ambos isotermos

---

De todo el desarrollo anterior resulta que para calcular el calor que **emite** una masa de gas radiante hacia su contorno, si el gas es isotermo, hay que utilizar la expresión

$$q = GA = A\epsilon_g \sigma T_g^4 \quad (14.36)$$

siendo  $\epsilon_g$  la emitancia de la masa de gas. El problema se reduce a:

1. Calcular, en función de la geometría,  $L_e$ .
2. Conocido  $L_e$ , calcular  $\epsilon_g$  con información semejante a las curvas de Hottel.

No hay que olvidar que los cálculos anteriores se han efectuado considerando que las paredes radiaban una cantidad despreciable. Para incorporar el efecto de la radiación de las paredes se empieza, por sencillez, considerando que las paredes son negras. (La consideración de la reflexión complica enormemente los cálculos).

**Intercambio radiante entre una masa isoterma de gas y su contorno isoterma y negro**

Hottel da la siguiente expresión para el flujo de calor promedio intercambiado entre gas y recinto

$$q'' = \sigma \left[ \epsilon_g T_g^4 - \alpha_{gs} T_s^4 \right] \quad (14.37)$$

donde  $\alpha_{gs} = \alpha_g(T_s)$  es la absorptancia hemisférica total del gas para la radiación emitida por las paredes (a temperatura  $T_s$ ), dada por las expresiones (14.38).

$$\alpha_{gs} = \alpha_{CO_2} + \alpha_{H_2O} - \gamma \alpha \quad (14.38a)$$

donde [3]

$$\alpha_{CO_2} = C_{CO_2} \epsilon_{CO_2}^+ \left( \frac{T_g}{T_s} \right)^{0.65} \quad (14.38b)$$

$$\alpha_{H_2O} = C_{H_2O} \epsilon_{H_2O}^+ \left( \frac{T_g}{T_s} \right)^{0.45} \quad (14.38c)$$

obteniéndose  $\epsilon_i^+$  de las gráficas (14.9) a (14.12) con la variable  $T_s$  y el parámetro

$$\left( P_i L_e \frac{T_s}{T_g} \right) \quad i = CO_2, H_2O$$

$$y \quad \Delta \alpha = (\Delta \epsilon)_a T_s \quad (14.38d)$$

**Cálculo aproximado cuando el recinto es gris pero de alta emisividad ( $\epsilon_s > 0.8$ )**

El caso general de paredes no negras se aborda más adelante, pero de momento se puede aproximar el proceso de reflexión en unas paredes isotermas no negras recordando que en el caso de una cavidad isoterma con un medio no participativo (o el vacío) las paredes se comportan como negras aunque el material de las paredes sea de emisividad menor que la unidad. Es decir, el hecho de que una superficie isoterma forme un recinto aumenta su emisividad efectiva.

---

### Comportamiento radiante de un gas con partículas. Llamas

---

En consecuencia, se propone [3] la siguiente aproximación para el caso de que dentro del recinto o cavidad exista un medio participativo con el que las paredes intercambien radiación.

$$q'' = \frac{\epsilon_s + 1}{2} \sigma [\epsilon_g T_g^4 - \alpha_{gs} T_s^4] \quad (14.39)$$

Esta aproximación es tanto peor cuanto más se alejan las paredes del comportamiento del cuerpo negro. Para esos casos ( $\epsilon_s < 0.8$ ) hay que utilizar otros procedimientos más generales, como el que se presenta al final del capítulo.

---

### Comportamiento radiante de un gas con partículas. Llamas

---

La aplicación más importante de gas radiante es el de los gases de combustión en el hogar de una caldera, horno u otro equipo térmico similar.

En esos casos, además de las especies gaseosas presentes ( $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ , etc) existen en suspensión partículas sólidas o líquidas que contribuyen mucho más que las componentes gaseosas al comportamiento radiante del medio.

Estas partículas son principalmente:

- Hollín
- Partículas combustibles (sólidas o gotas)
- Cenizas

y su presencia se da principalmente en la zona de la llama químicamente activa, aunque las cenizas están presentes en todo el recinto ocupado por los gases

Estas partículas se pueden agrupar en dos grupos, según su tamaño (relativo a  $\lambda$ ) expresado por su diámetro  $\phi$ , supuestas esféricas.

- Pequeñas ( $\phi \ll \lambda$ ) : Hollín
- Grandes ( $\phi \gg \lambda$ ) : Partículas de otro tipo (combustibles, cenizas, ...).

#### Hollín

Es un producto intermedio de la combustión, formado básicamente por carbono, a consecuencia del craqueo de los hidrocarburos del combustible. A las altas temperaturas de los productos de la combustión emiten con un espectro continuo en el visible y el infrarrojo, produciendo la luminosidad de las llamas.

---

## Radiación volumétrica

---

Es tan grande e importante el aumento de la emitancia de las llamas debido a la presencia del hollín, y por tanto el calor cedido a la carga que frecuentemente se favorece esta presencia de forma local o temporal.

La determinación de la contribución del hollín a la radiación de las llamas exige conocer:

- Su distribución en el espacio y tiempo, que depende de forma compleja de muchos fenómenos (cinética química, aerodinámica, ...)
- Sus propiedades radiantes, de las que se habla a continuación.

### Propiedades radiantes del hollín

En las llamas habituales, las partículas de hollín tienen diámetros en el intervalo  $50\text{Å} < \phi < 3000\text{Å}$  y como  $1\mu\text{m} = 10^4 \text{Å} < \lambda$ , resulta  $\phi \ll \lambda$ . El tamaño de estas partículas hace que, a efectos de la radiación, se aplique la llamada teoría de Mie, que en el límite de menores tamaños relativos ( $\phi/\lambda$ ) converge a los resultados de la llamada teoría de Rayleigh [5], [6]. De estos modelos teóricos se obtienen dos conclusiones principales.

La primera es que para este tipo de partículas la sección eficaz para la dispersión  $(S_\lambda)_{\text{disp}}$  es proporcional a  $(\phi/\lambda)^4$  y para la absorción  $(S_\lambda)_{\text{abs}}$  es proporcional a  $(\phi/\lambda)$  [1], y como, en general,  $\phi \ll \lambda$  resulta que  $(\bar{S}_\lambda)_{\text{disp}} \ll (\bar{S}_\lambda)_{\text{abs}}$  y, aplicando las fórmulas (14.10) y (14.12), se obtiene  $\sigma_\lambda \ll a_\lambda$ . Por tanto se puede despreciar la dispersión, como ya se había anticipado anteriormente para partículas pequeñas.

En estas condiciones la emitancia espectral hemisférica viene dada por la expresión (14.23) y el problema se reduce a conocer  $a_\lambda$ . La segunda consecuencia [3], [5], [6] es que el coeficiente de absorción espectral del hollín es aproximadamente inversamente proporcional a la longitud de onda según la relación

$$a_\lambda = \frac{f_v K}{\lambda} \quad (14.40)$$

donde  $f_v$  es la concentración volumétrica de hollín (volumen promedio de partículas de hollín por unidad de volumen) y  $K$  es una constante adimensional que se ha determinado experimentalmente para algunos combustibles [3], obteniéndose valores entre 3.7 y 7.5 para carbones y entre 6.3 y 14 para combustibles petrolíferos. Hottel y Sarofim [3] proponen un valor medio de 7.2. Posteriormente [22] propusieron  $K = 5.034$

No obstante, experimentalmente se ha observado con más detalle que  $a_\lambda$  no es siempre inversamente proporcional a  $\lambda$ , sino que más bien depende de  $\lambda^{-b}$  donde  $b$  es un

parámetro que toma un valor variable entre 0.7 y 2.2 dependiendo principalmente de la cantidad de hidrógeno presente en el hollín y en menor medida del tamaño de las partículas de hollín [6]. Según otros autores [7], la dependencia es todavía más compleja al ser el exponente  $b$  una función de la longitud de onda.

La emitancia total hemisférica se obtiene según la fórmula (14.32), a partir de la emitancia espectral del hollín

$$\varepsilon_h = \frac{\int_0^\infty [1 - \exp(-a_\lambda L_e)] E_{\lambda, n}(T_h) d\lambda}{\sigma T_h^4}$$

siendo  $T_h$  la temperatura a la que se encuentra el hollín. Introduciendo la expresión (14.40) y la aproximación de Wien a la ley de Planck se obtiene [3]

$$\varepsilon_h = 1 - \frac{1}{\left[1 + \frac{CKL_e}{C_2} T_h\right]^4} \quad (14.41)$$

siendo  $C_2$  la segunda constante de la ley de Planck, y  $CKL_e$  el llamado poder de absorción de la llama.

La expresión anterior se representa gráficamente en la figura 14.12, ofrecida por Hottel y Broughton [8].

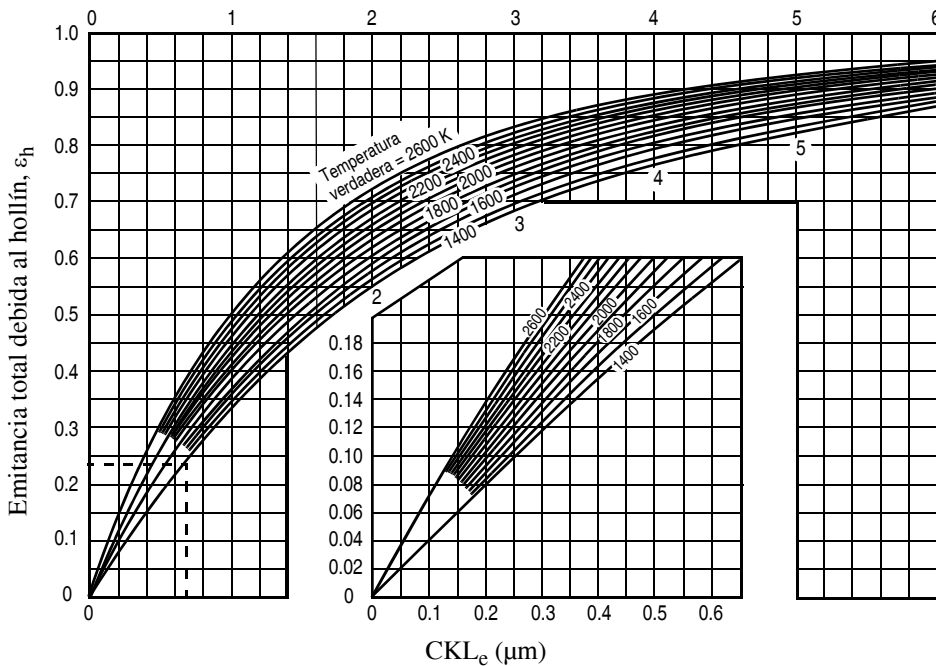
Análogamente la absorptancia total hemisférica debida al hollín de la radiación procedente de una fuente negra o gris a una temperatura  $T_s$  se obtiene de la integral

$$\alpha_h = \frac{\int_0^\infty [1 - \exp(-a_\lambda L_e)] E_{\lambda, n}(T_s) d\lambda}{\sigma T_s^4}$$

obteniéndose

$$\alpha_h = 1 - \frac{1}{\left[1 + \frac{CKL_e}{C_2} T_s\right]^4} \quad (14.42)$$

FIGURA 14.12 Emitancia total de llama debido al hollín [8].



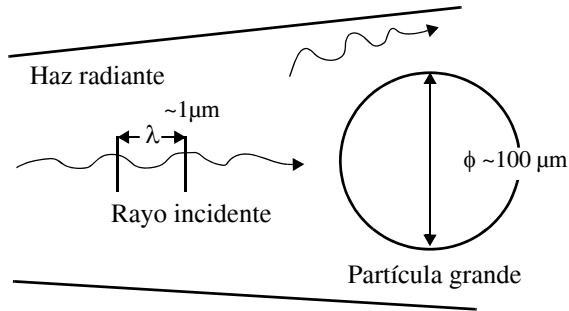
**Grandes partículas**

En el seno de una llama pueden existir, además del hollín, otras partículas mucho mayores,  $50 \mu\text{m} < \phi < 200 \mu\text{m}$ , como partículas sólidas de carbón, gotas de combustibles líquidos, cenizas volantes, etc. En este tipo de partículas la dispersión es un fenómeno importante que no se puede despreciar y su comportamiento es complejo [6], [9].

Desde el punto de vista de la absorción, una consideración que se suele encontrar en la bibliografía [3] es considerar cada partícula individual negra, es decir, que absorbe toda la radiación que incide sobre ella (ver figura 14.13). Por tanto el cálculo se reduce a un cociente geométrico entre el área de intercepción de las partículas,  $dA_i$ , y el que ocupa el haz,  $dA$ :  $-\frac{dI}{I} = \frac{dA_i}{dA}$ .

Si el área promedio que proyecta cada partícula del haz es  $\bar{A}_p$  (área geométrica ahora) y su concentración (número de partículas por unidad de volumen) es  $N$  y el área que ocupa el haz  $dA$ , el área de intercepción que se encuentra el haz al recorrer un camino  $dS$  es  $dA_i = \bar{A}_p N dA dS$ , con lo cual  $dI/I = -N\bar{A}_p dS$ .

FIGURA 14.13 Interacción entre la radiación térmica y las grandes partículas.



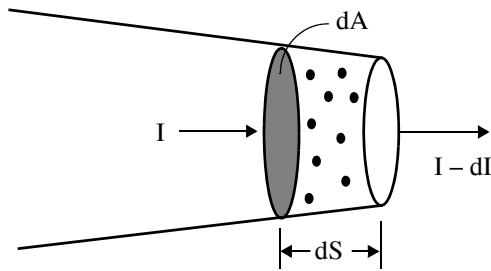
Luego, según la ley de decaimiento exponencial, ecuación (14.1), el coeficiente de absorción espectral de este tipo de partículas es independiente de  $x$

$$a = N\bar{A}_p \quad (14.43)$$

Por tanto, su emitancia y absortancia (totales y espectrales, coincidentes) hemisféricas valen

$$\varepsilon_{NP} = \alpha_{NP} = 1 - \exp(-N\bar{A}_p L_e) \quad (14.44)$$

FIGURA 14.14 Bases geométricas para el cálculo del coeficiente de absorción de las partículas grandes.



**Caso particular:** Si las partículas son convexas y no se hacen sombra, hay una relación entre el área proyectada y su área superficial,  $A_s$

$$A_p = \frac{A_s}{4} \Rightarrow \bar{A}_p = \frac{\bar{A}_s}{4}$$

**Emitancia de una llama real**

De la misma manera que entre el CO<sub>2</sub> y el H<sub>2</sub>O hay una interferencia radiativa (el solapamiento espectral), existe también en general entre todos los componentes radiantes de una llama, de manera que la emitancia global de la llama debida al efecto de todas las especies radiantes presentes se calcula con una fórmula semejante a la (14.34)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ll} &= \frac{1}{\sigma T_{ll}^4} \int_0^{\infty} E_{\lambda, n}(\lambda, T_{ll}) \left[ 1 - e^{-\left(a_{\lambda_{CO_2}} + a_{\lambda_{H_2O}} + a_{\lambda_h} + a_{\lambda_{NP}}\right)L_e} \right] d\lambda = \\ &= \boxed{\varepsilon_{CO_2} + \varepsilon_{H_2O} + \varepsilon_h + \varepsilon_{NP} - \Delta\varepsilon = \varepsilon_{ll}}\end{aligned}\quad (14.45)$$

siendo  $\Delta\varepsilon$  el término de solapamiento espectral y  $T_{ll}$  la temperatura de la llama supuesta isoterma.

---

**Intercambio radiante en situaciones no isotermas**

---

En una aplicación real, tanto el contorno como el medio pueden presentar variaciones apreciables de la temperatura que no se pueden ignorar a la hora de calcular el calor intercambiado entre ambos.

Casos especialmente importantes son:

- Hogares de Generadores de Fluidos Térmicos.
- Hornos de Tratamientos diversos.
- Cámaras de combustión de motores, turbinas, etc.

Para abordar el cálculo de estas situaciones se utilizan otros modelos más complejos que los vistos hasta ahora como son:

- De una zona de gas (combustor bien agitado) y varias zonas de superficie.
- De horno largo.
- Zonal (Hottel).
- De Monte-Carlo.
- De flujo.
- Híbridos.

Existe abundante bibliografía sobre todos estos métodos, pero como recopilación especialmente interesante son recomendables las referencias [6] y [10]. El estu-

dio de tan siquiera unos pocos de estos modelos desbordaría ampliamente los objetivos de este texto; por ello se va a presentar exclusivamente uno de ellos, elegido por su sencillez conceptual, su generalidad y su exactitud. Se trata del método de zonas de Hottel.

### Método de las zonas de HOTTEL

Este método tiene su origen en un artículo de Hottel y Cohen [11] y se basa en dos elementos clave:

1. División del recinto en un conjunto de volúmenes finitos (zonas de volumen) y de su contorno en un conjunto de zonas de superficie finitas, de tamaño tal que se consideran isotermas. (Figura 14.15).

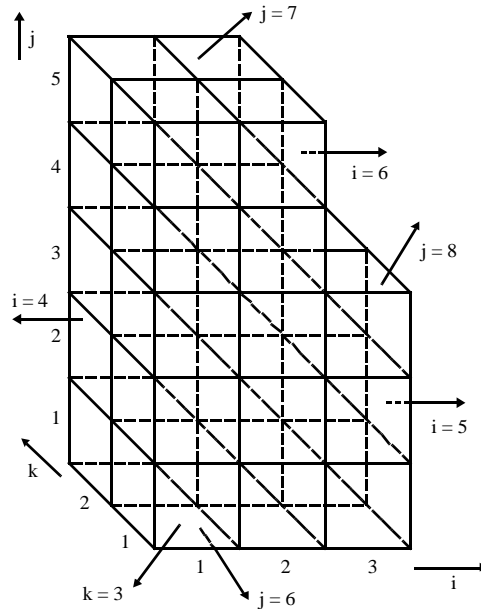
2. El gas es gris,  $a_\lambda = Cte = a$ ; así como las superficies del contorno.

y consiste en establecer un balance de energía TÉRMICA en cada una de las zonas establecidas.

Obviamente los balances difieren en contenido entre una zona de volumen y otra de superficie.

---

**FIGURA 14.15** Recinto dividido en zonas según el método de Hottel (tomado de la ref. [12])



**Balance de energía en una zona de volumen, V**

Cualitativamente, los términos que intervienen en el balance térmico de una zona de volumen en una cámara de combustión, según se indica en la figura 14.16, son los siguientes:

Energía radiante absorbida procedente de todas las zonas de superficie y volumen

—

Emisión de radiación desde V

+

Aporte de calor por convección y difusión

+

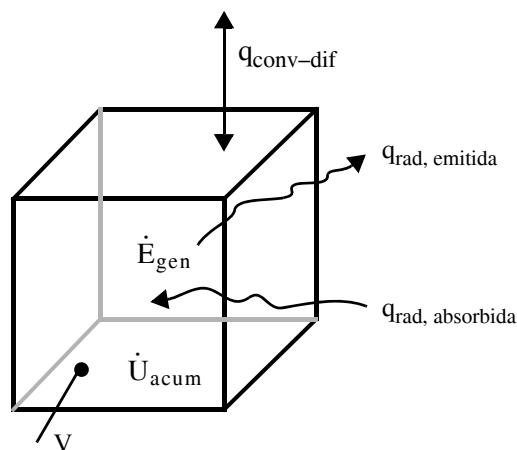
Energía térmica generada por la combustión

||

Acumulación de energía térmica en V

---

**FIGURA 14.16** Términos del balance de energía en una zona de volumen.



**Balance de energía en una zona de superficie, S**

En las zonas de superficie el balance contiene menos términos, como se observa en la figura 14.17.

Energía radiante absorbida en S procedente de todas las zonas de volumen y superficie

—

Energía radiante emitida por S

+

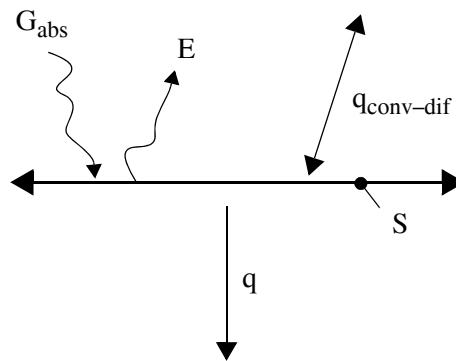
Aporte de calor por convección y difusión

=

Aporte neto de calor a través de S

---

**FIGURA 14.17** Términos del balance de energía en una zona de superficie.



De todos los términos que aparecen en ambos balances, la Radiación Volumétrica estudia **sólo** los **intercambios radiantes**, que **es lo que se desarrolla a continuación**.

Los otros términos exigen información de otras ramas de la Ciencia y la Técnica, como son la Mecánica de Fluidos (Aerodinámica, movimiento de los gases en el Hogar), Cinética Química, Termodinámica (Ecuaciones térmicas de los gases), Convección (ya estudiada, ...).

**Evaluación de los términos de intercambio radiante entre zonas.**

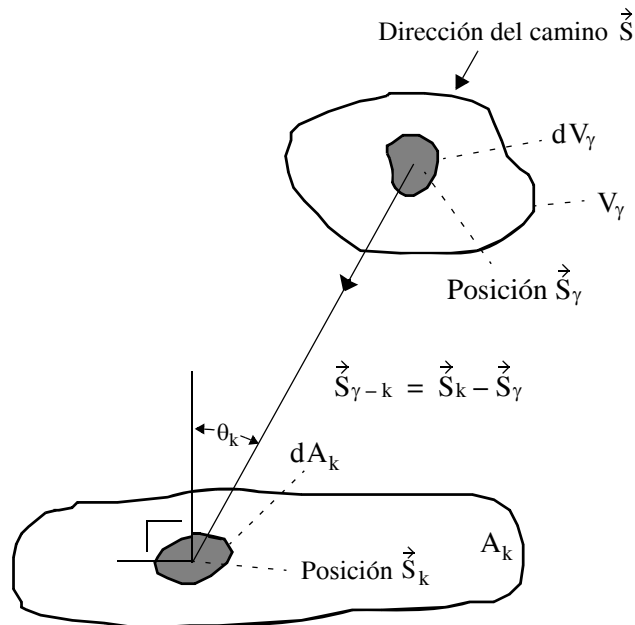
**Áreas de intercambio directo**

Se trata, en primer lugar, de calcular qué cantidad de radiación originada en una cualquiera de las zonas alcanza directamente a otra cualquiera, ignorando de momento las reflexiones en las paredes. En este apartado se sigue básicamente el desarrollo de la referencia [1].

Debido a la distinta naturaleza de las zonas de volumen y superficie, el tratamiento es algo diferente en ambas. En las primeras se considera la radiación *emitida* (si es zona de origen de la radiación) o *absorbida* (si es zona de destino de la radiación), mientras que en las segundas se considera la radiación que abandona la superficie, *radiosidad*, (si es zona de origen de la radiación) o que incide sobre ella, *irradiación* (si es zona de destino). Para ello se estudian las cuatro situaciones posibles:

1ª) de zona de <b>volumen</b> a zona de <b>superficie</b>	2ª) de zona de <b>superficie</b> a zona de <b>superficie</b>
3ª) de zona de <b>superficie</b> a zona de <b>volumen</b>	4ª) de zona de <b>volumen</b> a zona de <b>volumen</b>

**FIGURA 14.18** Radiación que parte de una zona de volumen para alcanzar otra de superficie.



**Primera situación**

En la figura 14.18 se tiene la representación gráfica para el estudio de la primera situación considerada, donde se va a calcular la cantidad de energía radiante que se **emite** en el volumen  $V_\gamma$  y **alcanza** la superficie  $A_k$ .

Se parte del cálculo para elementos diferenciales  $dV_\gamma$  y  $dA_k$  y luego se integra.

El cálculo se basa en el producto:

radiación emitida por  $dV_\gamma \times$  transmitancia entre  $\vec{S}_\gamma$  y  $\vec{S}_k$

w Como un elemento de volumen gris emite por unidad de volumen  $4a\sigma T_\gamma^4 dV_\gamma$  (ec. (14.16)), la radiación emitida por  $dV_\gamma$  en la dirección  $\vec{S}_{\gamma-k}$  (por unidad de ángulo sólido) será:  $a\frac{\sigma T_\gamma^4}{\pi} dV_\gamma$  (W/sr).

w El ángulo sólido subtendido por  $dA_k$  desde  $dV_\gamma$  es  $\frac{dA_k \cos \theta_k}{S_{\gamma k}^2}$  (sr).

w Y la transmitancia entre  $\vec{S}_\gamma$  y  $\vec{S}_k$  viene dada por

$$\tau_\omega(\vec{S}_{\gamma k}) = \exp(-aS_{\gamma k}), \quad S_{\gamma k} = |\vec{S}_k - \vec{S}_\gamma|$$

Por tanto el calor que procede (se emite) de  $dV_\gamma$  y alcanza  $dA_k$ , vale :

$$dq_{\gamma k} = \left( a\frac{\sigma T_\gamma^4}{\pi} dV_\gamma \right) \left( \frac{dA_k \cos \theta_k}{S_{\gamma k}^2} \right) \exp(-aS_{\gamma k})$$

El calor radiante total que se emite en toda la zona de volumen  $V_\gamma$  y alcanza  $A_k$  se obtiene integrando

$$q_{\gamma k} = \int_{V_\gamma} \int_{A_k} dq_{\gamma k} = \frac{a\sigma T_\gamma^4}{\pi} \int_{V_\gamma} \int_{A_k} \frac{\cos \theta_k \exp(-aS_{\gamma k})}{S_{\gamma k}^2} dA_k dV_\gamma \quad (14.46)$$

---

## Radiación volumétrica

---

pudiéndose agrupar los distintos términos de la ec. (14.-46) en dos tipos de factores:

w Factor térmico:  $\sigma T_\gamma^4$

w Factor geométrico:  $\overline{g_\gamma s_k} \equiv \frac{a}{\pi} \int_{V_\gamma} \int_{A_k} \frac{\cos \theta_k \exp(-aS_{\gamma k})}{S_{\gamma k}^2} dA_k dV_\gamma$  (14.47)

A este factor geométrico se le denomina **área de intercambio directo gas-superficie** (piénsese en sus dimensiones).

De esta manera la expresión que da el calor emitido por la zona de volumen  $V_\gamma$  que alcanza la superficie  $A_k$  es muy sencilla

$$\boxed{q_{\gamma k} = \overline{g_\gamma s_k} \sigma T_\gamma^4} \quad (14.48)$$

### Segunda situación

Intercambio radiante entre superficies, o sea, radiación que parte de una zona superficial,  $A_j$ , y alcanza a otra,  $A_k$ .

Para el cálculo que sigue debe suponerse que las superficies **emiten** y **reflejan difusamente** y sigue el mismo procedimiento de cálculo que en el caso anterior. Es decir, se subdividen ambas superficies en elementos diferenciales,  $dA_j$  y  $dA_k$ , y posteriormente se integra (ver figura 14.19).

w La radiación que abandona,  $dA_j$  en la dirección  $\vec{S}_{j-k}$ , por unidad de ángulo sólido viene dada por:

$$\frac{J_j}{\pi} dA_j \cos \theta_j \quad \left( \frac{W}{sr} \right)$$

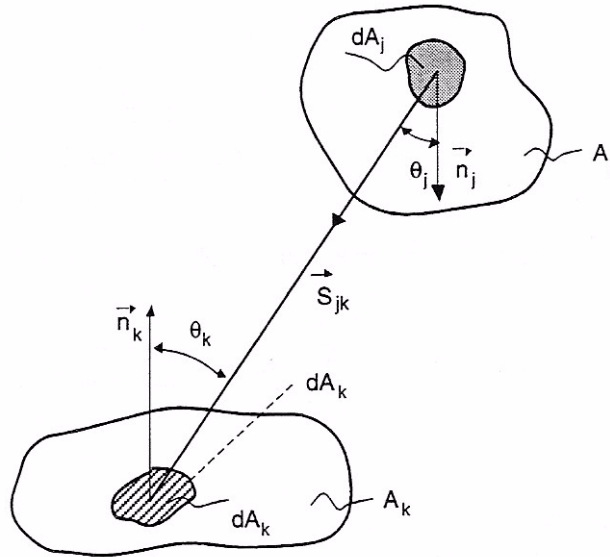
w El ángulo sólido subtendido por  $dA_k$  desde  $dA_j$  es:

$$\frac{dA_k \cos \theta_k}{S_{jk}^2} \quad (sr)$$

w Y la transmitancia entre los puntos  $\vec{S}_j$  y  $\vec{S}_k$  vale:

$$\tau_\omega(S_{jk}) = \exp(-aS_{jk}) \quad , \quad S_{jk} = |\vec{S}_k - \vec{S}_j|$$

**FIGURA 14.19** Radiación que parte de una zona de superficie para alcanzar otra de superficie.



Multiplicando los tres factores e integrando se obtiene

$$q_{jk} = J_j \int_{A_k} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_j \cos \theta_k}{\pi S_{jk}^2} \exp(-a S_{jk}) dA_j dA_k \quad (14.49)$$

Como antes se tiene

w Factor térmico:  $J_j$

w Factor geométrico:  $\int_{A_k} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_j \cos \theta_k}{\pi S_{jk}^2} \exp(-a S_{jk}) dA_j dA_k \equiv \overline{s_j s_k}$  (14.50)

Al factor geométrico se le denomina **área de intercambio directo superficie-superficie**. (Este área está relacionada con el factor de vista  $F_{jk}$  y es sencillo de encontrar su relación (ver la ec. (13.3a)).

Resulta:  $q_{jk} = \overline{s_j s_k} J_j$  (14.51)

---

**Radiación volumétrica**

---

Sumando las ecuaciones (14.48) y (14.51) se obtiene el calor radiante **que incide** sobre una zona de superficie

$$q_{i,k} = \sum_{j=1}^N \overline{s_j s_k} J_j + \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \overline{g_{\gamma} s_k} \sigma T_{\gamma}^4 \quad (14.52)$$

donde N es el número de zonas de superficie en que se ha dividido el recinto y  $\Gamma$  el de zonas de volumen.

Es decir la irradiación recibida en el área  $A_k$  vale

$$G_k \equiv \frac{q_{i,k}}{A_k} = \frac{1}{A_k} \left( \sum_{j=1}^N \overline{s_j s_k} J_j + \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \overline{g_{\gamma} s_k} \sigma T_{\gamma}^4 \right) \quad (14.52b)$$

**Tercera situación**

Radiación que procede de una zona de superficie y se absorbe en una zona de volumen. Esta situación es la que aparece en la figura 14.18, pero invirtiendo el sentido de la radiación, ahora de  $A_k$  hacia  $V_{\gamma}$ .

El cálculo contiene los siguientes términos:

w Radiación que abandona  $dA_k$  en dirección  $dV_{\gamma}$ , por unidad de ángulo sólido:  $(J_k/4) dA_k \cos \theta_k$ , (W/sr).

w Transmitancia entre  $\vec{S}_k$  y  $\vec{S}_{\gamma}$ :  $\tau_{\omega}(S_{k\gamma}) = \exp(-aS_{k\gamma})$ .

w Ángulo sólido que subtende  $dV_{\gamma}$  desde  $dA_k$ :  $\frac{dA_p}{S_{k\gamma}^2}$  (sr), donde  $dA_p = \frac{dV_{\gamma}}{dS}$

es el área proyectada por  $dV_{\gamma}$  en la dirección  $\vec{S}_{k\gamma}$  y  $dS$  es el camino recorrido por la radiación en la misma dirección al atravesar  $dV_{\gamma}$ .

w Fracción de energía radiante absorbida al atravesar  $dV_{\gamma}$ :  $adS$  (ley de atenuación exponencial).

Multiplicando los cuatro factores e **integrando** resulta:

$$\begin{aligned}
 q_{k\gamma} &= \int_{V_\gamma} \int_{A_k} \left( \frac{J_k \cos \theta_k}{\pi} dA_k \right) \exp(-aS_{k\gamma}) \left( \frac{dA_p}{S_{k\gamma}^2} \right) (adS) = \\
 &= J_k \boxed{\frac{a}{\pi} \int_{V_\gamma} \int_{A_k} \frac{\cos \theta_k \exp(-aS_{k\gamma})}{S_{k\gamma}^2} dA_k dV_\gamma} \quad (14.53)
 \end{aligned}$$

Al factor enmarcado en la ecuación (14.53) se le denomina **área de intercambio directo superficie-gas**,  $\overline{s_k g_\gamma}$ , y cumple la relación de simetría siguiente:  $\overline{s_k g_\gamma} = \overline{g_\gamma s_k}$ .

Así pues  $\boxed{q_{k\gamma} = \overline{s_k g_\gamma} J_k}$  (14.54)

#### Cuarta situación

Radiación absorbida en una zona de volumen emitida por otra zona de volumen.

Términos del cálculo:

w Radiación emitida por el elemento de volumen  $dV_{\gamma^*}$  por unidad de ángulo sólido, en la dirección  $\vec{S}_{\gamma^*} - \vec{S}_\gamma$ :  $a \frac{\sigma T_{\gamma^*}^4}{\pi} dV_{\gamma^*}$  (W/sr).

w Los otros tres términos son iguales que en la situación tercera, por lo que

$$q_{\gamma^*\gamma} = \sigma T_{\gamma^*}^4 \boxed{\frac{a^2}{\pi} \int_{V_\gamma} \int_{V_{\gamma^*}} \frac{\exp(-aS_{\gamma^*\gamma})}{S_{\gamma^*\gamma}^2} dV_{\gamma^*} dV_\gamma} \quad (14.55)$$

Al factor en el recuadro de la ec. (14.55) se le denomina **área de intercambio directo gas-gas**,  $\overline{g_{\gamma^*} g_\gamma}$ .

Luego  $\boxed{q_{\gamma^*\gamma} = \overline{g_{\gamma^*} g_\gamma} \sigma T_{\gamma^*}^4}$  (14.56)

---

## Radiación volumétrica

---

Por tanto, el calor radiante **absorbido** en una zona de volumen es

$$q_{\text{abs}, \gamma} = \sum_{k=1}^N \overline{s_k g_{\gamma}} J_k + \sum_{\gamma^*=1}^{\Gamma} \overline{g_{\gamma^*} g_{\gamma}} \sigma T_{\gamma^*}^4 \quad (14.57)$$

El aspecto matemático más complicado del método zonal es la determinación de las áreas de intercambio directo debido al cálculo de las integrales cuadrúples que aparecen en las expresiones (14.47), (14.50), (14.53) y (14.55). En caso de necesidad estas integrales pueden resolverse por cuadratura numérica [13], pero en algunos casos se encuentran ya obtenidas en la bibliografía; la relación más completa aparece en la referencia [3]; en la [14] se dan expresiones sencillas para zonas cúbicas y cuadradas y en la [15] para zonas rectangulares y esferas.

### Áreas de intercambio total

Para la aplicación del método en los casos prácticos lo que interesa es relacionar los calores intercambiados por radiación entre las zonas con sus temperaturas; esto no se puede hacer con las áreas de intercambio directo previamente calculadas, ya que allí no se considera la radiación emitida por las superficies (relacionada directamente con su temperatura) sino su radiosidad (resultado de su emisión y de la radiación recibida; y ésta a su vez procede de la radiación emitida en todas las zonas y reflejada en las paredes del recinto) que no se puede relacionar directamente con su temperatura.

Para manejar el problema con claridad y sencillez deben utilizarse otro tipo de áreas que incluyan el efecto de la reflexión en las paredes. Estos nuevos factores geométricos se denominan áreas de intercambio total.

El procedimiento matemático para pasar de las áreas de intercambio directo a las de intercambio total es conceptualmente sencillo pero algo largo, por lo que sólo se presentan los resultados. Los desarrollos matemáticos se pueden encontrar en la referencia [16]. La forma más cómoda y compacta de manejar y de relacionar ambas áreas de intercambio radiativo es mediante la representación matricial. Así resulta

$$\overline{SS} = \varepsilon A \cdot \mathbf{R} \cdot \overline{ss} \cdot \varepsilon \quad (14.58)$$

$$\overline{SG} = \varepsilon A \cdot \mathbf{R} \cdot \overline{sg} \quad ; \quad \overline{GS} = (\overline{SG})^T \quad (14.59)$$

$$\overline{GG} = \overline{gs} \cdot \rho \cdot \mathbf{R} \cdot \overline{sg} + \overline{gg} \quad (14.60)$$

---

### Intercambio radiante en situaciones no isotermas

---

donde  $\overline{SS}$ ,  $\overline{SG}$ ,  $\overline{GS}$  y  $\overline{GG}$  son las matrices de las áreas de intercambio total.

$\overline{ss}$ ,  $\overline{sg}$ ,  $\overline{gs}$  y  $\overline{gg}$  son las matrices de las áreas de intercambio directo.

$\mathbf{R} = [\mathbf{A} - \overline{ss} \cdot \rho]^{-1}$  es la matriz que da cuenta de las reflexiones en las superficies.

$\varepsilon\mathbf{A}$ ,  $\varepsilon_i\mathbf{A}$  y  $\rho$  son matrices diagonales cuyas componentes diagonales son  $\varepsilon_i$ ,  $A_i$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $A_i$  y  $\rho_i$  siendo  $i$  el índice de las zonas de superficie.

### Relaciones algebraicas de las áreas de intercambio

Como se ha observado, la obtención de los valores numéricos de las áreas de intercambio radiante no es simple, ya que exige realizar complicadas integrales en las áreas directas y cálculo matricial en las totales. Este tipo de cálculo es habitualmente numérico y es conveniente disponer de algún medio de comprobar la bondad de los resultados.

Uno de los medios más importantes para contrastar la calidad de los valores obtenidos es a través de las llamadas reglas de la suma, análogas a las de los factores de vista en radiación superficial, que surgen simplemente de imponer que cuando todas las temperaturas del recinto sean iguales el calor neto intercambiado por radiación por cualquier zona es nulo. En ese caso resultan las siguientes relaciones

$$A_i = \sum_{j=1}^N \overline{s_i s_j} + \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \overline{s_i g_{\gamma}} \quad (14.61)$$

$$4aV_{\gamma} = \sum_{j=1}^N \overline{g_{\gamma} s_j} + \sum_{\gamma^*=1}^{\Gamma} \overline{g_{\gamma} g_{\gamma^*}} \quad (14.62)$$

$$\varepsilon_i A_i = \sum_{j=1}^N \overline{S_i S_j} + \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \overline{S_i G_{\gamma}} \quad (14.63)$$

$$4aV_{\gamma} = \sum_{j=1}^N \overline{G_{\gamma} S_j} + \sum_{\gamma^*=1}^{\Gamma} \overline{G_{\gamma} G_{\gamma^*}} \quad (14.64)$$

Si estas reglas no se cumplen, al aplicar el método surgirán errores en los balances de energía o no se encontrará la solución.

**Representación de un gas real como una suma ponderada de gases grises**

En la realidad ningún gas real es gris con lo que la utilidad del método queda condicionada a la posibilidad de poder representar a un gas real por medio de un conjunto debidamente ponderado de gases grises.

Hottel y Cohen [11], al toparse con esta dificultad presuponen que la emitancia o absorptancia de un gas real se puede escribir de la forma

$$\varepsilon_g = \sum_{i=0}^I \beta_i (1 - e^{-a_i L_e}) \quad (14.65)$$

con  $a_i = \text{Cte.}$  y  $\beta_i > 0$ ,  $\sum_{i=0}^I \beta_i = 1$ .

Es decir se está forzando a que el gas real sea representado por una suma ponderada de gases grises (a efectos de la radiación), siendo:

- $\beta_i$  : los coeficientes de peso
- $a_i$  : los coeficientes de absorción

Si los valores reales (experimentales) de  $\varepsilon_g$  se pueden ajustar bien a la suma de curvas dada por la ecuación (14.65) la representación es buena.

**IMPORTANTE:**  $a_i$  y  $\beta_i$  no son propiedades termofísicas reales de ningún gas. Se obtienen por ajuste y representan las propiedades termofísicas de los gases grises ficticios que aparecen, cuya suma ponderada representa a un gas real.

En el año 1976, Truelove [17] propuso una variante de la expresión de Hottel, separando la contribución de los componentes gaseosos de la llama por un lado y los del hollín por otro, para la emitancia y la absorptancia totales de los productos de combustión (gases más hollín) de los combustibles más habituales, los derivados del petróleo (tipo gasóleo, donde  $p_{H_2O}/p_{CO_2} \cong 1$ ) y los gaseosos (tipo gas natural, donde  $p_{H_2O}/p_{CO_2} \cong 2$ ),

$$\varepsilon, \alpha = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \beta_{i,j}(T) \left\{ 1 - \exp \left\{ - \left[ a_{g,i} (p_{H_2O} + p_{CO_2}) + a_{h,j} C_h \right] L_e \right\} \right\} \quad (14.66)$$

---

**Intercambio radiante en situaciones no isotermas**

---

donde  $p_{H_2O}$  y  $p_{CO_2}$  son las presiones parciales del  $H_2O$  y del  $CO_2$  en los gases (atm),  $C_h$  la concentración del hollín ( $kg/m^3$ ),  $T$  la temperatura de la fuente emisora de la radiación,  $a_{g,i}$  y  $a_{h,j}$  los coeficientes de absorción de los componentes grises de los gases radiantes ( $CO_2$  y  $H_2O$ ) y del hollín, respectivamente, y  $\beta_{i,j}$  los coeficientes de peso que dependen linealmente de la temperatura, según  $\beta_{i,j} = b_{1,i,j} + b_{2,i,j} T$  ( $T$  debe ir en K).

Así pues la dependencia de la temperatura queda, afortunadamente, concentrada en el valor de los coeficientes de  $\beta_{ij}$ , y los coeficientes de absorción dependen, como se ve, de la concentración de las especies químicas radiantes ( $CO_2$ ,  $H_2O$  y hollín).

**TABLA 14.2** Valores de los componentes de los cuatro coeficientes ( $b_{1,i,j}$ ,  $b_{2,i,j}$ ,  $a_{g,i}$  y  $a_{h,j}$ ), en la fórmula de Truelove, ec. (14.66).

i	j	$b_1$	$b_2 \times 10^3 \text{ (K}^{-1}\text{)}$	$a_{g,i} \text{ (m}^{-1} \text{ atm}^{-1}\text{)}$	$a_{h,j} \text{ (m}^{-1} \text{ (kg m}^{-3}\text{)}^{-1}\text{)}$
Productos de combustión de combustibles petrolíferos ( $p_{H_2O}/p_{CO_2} = 1$ )					
1	1	0.717	-0.2964	0.0	350
1	2	-0.231	0.3861	0.0	1780
2	1	0.459	-0.1787	2.5	350
2	2	-0.078	0.1391	2.5	1780
3	1	0.120	-0.0499	109.0	350
3	2	0.013	-0.0002	109.0	1780
Productos de combustión del gas natural ( $p_{H_2O}/p_{CO_2} = 2$ )					
1	1	0.632	-0.2619	0.0	350
1	2	-0.195	0.3332	0.0	1780
2	1	0.488	-0.1896	1.88	350
2	2	-0.098	0.1844	1.88	1780
3	1	0.176	-0.0735	68.8	350
3	2	-0.003	0.0074	68.8	1780

Otra descomposición en gases grises semejante a la de Truelove pero con sólo tres componentes se presenta en la referencia [18], mientras que en las referencias [19] y [20] aparecen expresiones algo más sofisticadas.

Aparece ahora el concepto de área de flujo dirigido, al tener que ponderarse las áreas de intercambio directo por los coeficientes de peso correspondientes a la temperatura

---

## Radiación volumétrica

---

de cada zona emisora, y rompiéndose la simetría anteriormente existente. Esquemáticamente la situación es

**Antes:**  $\overline{S_k G_\gamma} = \overline{G_\gamma S_k}$  Gas gris

**Ahora:** 
$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{G_\gamma S_k} = \sum_{i=0}^I \beta_i(T_\gamma) \overline{G_\gamma S_k}(a_i) \quad (14.67) \\ \overline{S_k G_\gamma} = \sum_{i=0}^I \beta_i(T_k) \overline{S_k G_\gamma}(a_i) \quad (14.68) \end{array} \right. \text{Gas real } \left( = \sum \beta_i \cdot \text{Gases grises} \right)$$

$$\boxed{\overline{S_k G_\gamma}(a_i) = \overline{G_\gamma S_k}(a_i) \quad ; \quad \overline{G_\gamma S_k} \neq \overline{S_k G_\gamma}}$$

Por sencillez se han omitido los dobles índices de Truelove y se ha utilizado sólo uno, como planteaba Hottel.

## Intercambio neto de calor radiante entre zonas

Finalmente el calor neto que intercambia cada zona por radiación viene dado por

$$q_i = \left( \sum_{j \neq i} \overline{S_i S_j} + \sum_{\gamma=1}^I \overline{S_i G_\gamma} \right) \sigma T_i^4 - \left( \sum_{j \neq i} \overline{S_j S_i} \sigma T_j^4 + \sum_{\gamma=1}^I \overline{G_\gamma S_i} \sigma T_\gamma^4 \right) \quad (14.69)$$

y 
$$q_\gamma = \left( \sum_{j=1}^N \overline{G_\gamma S_j} + \sum_{\gamma^* \neq \gamma} \overline{G_\gamma G_{\gamma^*}} \right) \sigma T_\gamma^4 - \left( \sum_{j=1}^N \overline{S_j G_\gamma} \sigma T_j^4 + \sum_{\gamma^* \neq \gamma} \overline{G_{\gamma^*} G_\gamma} \sigma T_{\gamma^*}^4 \right) \quad (14.70)$$

para las zonas de superficie y volumen respectivamente. Esta forma de las ecuaciones del intercambio radiativo entre zonas es la más clara y aparece formulada en la referencia [21]; en el artículo inicial de Hottel y Cohen [11] y en otros que se ciñen a él, como las referencias [12], [16] y otras muchas se hace una formulación bastante más confusa de las mismas, particularmente de la ecuación (14.70) del calor que intercambia por radiación cada zona de gas con el resto.

## Referencias

---

1. R. Siegel, and J. R. Howell  
*Thermal Radiation Heat Transfer*  
McGraw-Hill – Hemisphere Publ. Corp., Washington, 1981.
2. H. R. Lewis  
*Einstein's Derivation of Planck's Radiation Law*  
American Journal of Physics, vol. 41, p. 38, 1973.
3. H. C. Hottel, and A. Sarofim  
*Radiative Transfer*  
McGraw-Hill, New York, 1967.
4. H. C. Hottel  
*Transmisión calorífica por radiación. Cap. 4 del libro "Transmisión de calor" de W. H. McAdams*  
McGraw-Hill, México, 1978.
5. C. L. Tien, and S. C. Lee  
*Flame Radiation*  
Progress in Energy Combustion Science, vol. 8, p. 41, 1982.
6. M. F. Modest  
*Radiative Heat Transfer*  
McGraw-Hill International Editions, Singapore, 1993.
7. R. G. Siddall, and I. A. McGrath  
*The Emissivity of Luminous Flames*  
9th International Symposium on Combustion, Academic Press, New York, p. 102, 1963.
8. H. C. Hottel, and F. C. Broughton  
Industrial Engineering Chem. Anal. Ed., vol. 4, p. 166, 1932.
9. Blokh  
*Heat Transfer in Steam Boiler Furnaces*  
Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1988.
10. R. Viskanta, and M. P. Mengüç  
*Radiation Heat Transfer in Combustion Systems*  
Progress in Energy Combustion Science, vol. 13, p. 97, 1987.
11. H. C. Hottel, and E. S. Cohen  
*Radiant Heat Exchange in a Gas-Filled Enclosure: Allowance for Nonuniformity of Gas Temperature*  
AIChE Journal, vol. 4, p. 3, 1958.

---

**Radiación volumétrica**

---

12. F. R. Steward, and H. K. Gürüz  
*Mathematical Simulation of and Industrial Boiler by the Zone Method of Analysis. Heat Transfer in Flames*, N. H. Afgan and J. M. Beer (eds.), chap. 3  
Halsted Press, Washington, 1974.
13. A. Martínez y A. Gil  
*Simulador matemático integral del transporte en hogares (SMITH)*  
Proyecto Fin de Carrera, CPS Ingenieros de Zaragoza, 1995.
14. R. J. Tucker  
*Direct Exchange Areas for Calculating Radiation Transfer in Rectangular Furnaces*  
Journal of Heat Transfer, vol. 108, p. 707, 1986.
15. R. V. Dunkle  
*Geometric Mean Beam Lengths for Radiant Heat-Transfer Calculations*  
Journal of Heat Transfer, vol. 86, p. 75, 1964.
16. J. M. Rhine, and R. J. Tucker  
*Modelling of Gas-Fired Furnaces and Boilers*  
British Gas – McGraw Hill, London, 1991.
17. J. S. Truelove  
*A Mixed Grey Gas Model for Flame Radiation*  
United Kingdom Atomic Energy Authority Report AERE-R-8494, Harwell, 1976.
18. T. R. Johnson, and J. M. Beer  
*The Zone Method Analysis of Radiant Heat Transfer: A Model for Luminous Radiation*  
Fourth Symposium on Flames and Industry, British Flame Research Committee and The Institute of Fuel, paper 4, p. 37, 1972.
19. P. B. Taylor, and P. J. Foster  
*The Total Emissivities of Luminous and Non Luminous Flames*  
International Journal of heat and Mass Transfer, vol. 17, p. 1591, 1974.
20. T. F. Smith, Z. F. Shen, and J. N. Friedman  
*Evaluation of Coefficients for the Weighted Sum of Gray Gases Model*  
Journal of Heat Transfer, vol. 104, p. 602, 1982.
21. T. R. Johnson, and J. M. Beer  
*Radiative Heat Transfer in Furnaces: Further Development of the Zone Method of Analysis*  
Fourteenth International Symposium on Combustion, Pittsburgh, p. 639, 1972.
22. A. Sarofim and H. C. Hottel  
*Radiative transfer in combustion chambers: influence of alternative fuels*  
Proc. 6<sup>th</sup> Int. Heat Transfer Conf., vol. 6, Hemisphere, Washington, 1978

---

## Síntesis del capítulo

---

- Cuando un **medio** es **participativo**, la diferencia que aparece con el caso de medio no participativo estriba en que ahora **la intensidad se modifica** (puede aumentar o disminuir) desde que abandona una superficie hasta que alcanza otra.

Esta variación es la que aparece en la **ecuación fundamental** de la radiación volumétrica, la **ecuación del transporte radiativo** (ec. (14.13) para un medio no dispersivo; la de un medio dispersivo se complica al incluir los términos de dispersión y se ha omitido). La forma en que se trata esta variación da lugar a los diferentes y diversos métodos de cálculo, para manejar la radiación volumétrica.

- El **espesor óptico** de un medio da una idea de lo que modifica la radiación que lo atraviesa; a mayor espesor mayor interacción radiación–medio. Esta magnitud suele depender fuertemente de la longitud de onda, sobre todo si el medio es un gas, y viene dado como el producto de coeficiente de atenuación por el espesor geométrico del medio que atraviesa la radiación.
- La forma más simple de manejar un medio participativo es definiendo **propiedades** similares a las de las superficies pero distintas: emitancia, absorptancia y transmitancia. El uso de estas propiedades exige masas radiantes termodinámicamente homogéneas.

En la bibliografía se encuentra información para determinar el valor de estas propiedades para ciertos medios. Son famosas las **curvas de Hottel** para el CO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O y otros gases.

- Cuando los medios no son isotermos, hay que recurrir a métodos más complicados para calcular los intercambios radiativos. En el texto se presenta uno de los más reconocidos por su sencillez, precisión y potencia: el **método de las zonas de Hottel**.

El método zonal se basa, como el MDF visto en conducción, en dividir el recinto (medio y contorno que lo encierra) en trozos finitos llamados zonas, sobre las cuales se realizan balances finitos de energía.

---

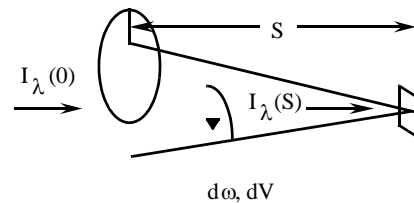
## Cuestiones

---

- 1.
- a) Definir matemáticamente el espesor óptico  $\beta_\lambda$  de una capa de un medio participativo de coeficiente de atenuación espectral  $k_\lambda$  y espesor  $S$ .
  - b) ¿A qué se reduce esta expresión cuando  $k_\lambda$  es constante, en términos de la distancia de penetración media?
  - c) En este último caso decir cómo se llama el medio cuando  $\beta_\lambda$  toma uno de los dos valores extremos (muy pequeño y muy grande).

2. En un medio cuyo espesor óptico es muy grande, los intercambios radiativos serán ¿superficiales o volumétricos?, ¿por qué?

3. En el ángulo sólido diferencial de la figura, correspondiente a un medio gaseoso uniforme, absorbente de la radiación con coeficiente de absorción espectral  $a_\lambda$  ¿cuál es la expresión que da la absorbancia y la transmitancia espectral para el camino de longitud  $S$ ?



4. Justificar por qué en las curvas de Hottel que dan la emitancia total de ciertos gases ( $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  y otros),  $\varepsilon$  depende de la temperatura del gas  $T_g$  y del producto de su presión parcial por la longitud equivalente o media de haz,  $pL_e$ .
5. Según Hottel, la fórmula que da la emitancia  $\varepsilon$  de una mezcla de  $\text{CO}_2$  y  $\text{H}_2\text{O}$  es

$$\varepsilon = C_{\text{CO}_2} \varepsilon_{\text{CO}_2} + C_{\text{H}_2\text{O}} \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} - \gamma \varepsilon$$

Explicar breve, pero rigurosamente, el significado de cada término.

---

**Cuestiones**

---

6. La longitud media, o equivalente, de haz de un gas ópticamente delgado radiando a todo su contorno vale

a)  $4 \frac{V}{A}$

b)  $3.5 \frac{V}{A}$

c)  $3.6 \frac{V}{A}$

d)  $\frac{2}{3} \frac{V}{A}$

siendo  $V$  el volumen ocupado por el gas y  $A$  el área de su contorno.

7. Cuando se quiere determinar la longitud media (o equivalente) de haz de un volumen  $V$  cualquiera de gas radiante confinado en una superficie de área  $A$ , puede emplearse la fórmula siguiente:

a)  $L_e = \frac{V}{A}$

b)  $L_e = 4 \frac{V}{A}$

c)  $L_e = L_{e,0}$

d)  $L_e = 3.6 \frac{V}{A}$

8. Calcular aproximadamente la longitud media de haz,  $L_e$ , de un gas encerrado en un cilindro infinito de diámetro  $D$ .

9. En una llama existe una concentración  $C$  de gotas líquidas esféricas cuyos tamaños están en el rango  $50 \mu\text{m} \leq \phi \leq 200 \mu\text{m}$ . Si no se hacen sombra unas a otras, ¿cuál es la expresión matemática que da el coeficiente de absorción espectral del medio debido a estas partículas?

10. Rodear con un círculo la expresión que da correctamente el calor radiante (en vatios) emitido en un ancho de banda diferencial  $d\lambda$  por una masa isoterma de gas contenida en un volumen diferencial  $dV$ .

a)  $dq_{\lambda,e} = 4a_{\lambda} E_{\lambda,b} dV d\lambda$

b)  $dq_{\lambda,e} = 4 a_{\lambda} E_{\lambda,b} d\lambda$

c)  $dq_{\lambda,e} = a_{\lambda} E_{\lambda,b} dV d\lambda$

d)  $dq_{\lambda,e} = a_{\lambda} E_{\lambda,b} dV$

---

**Cuestiones**

---

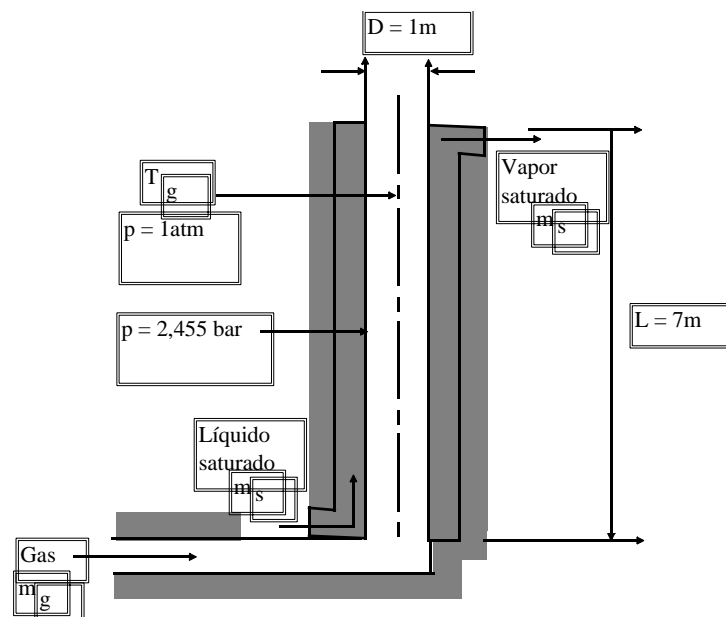
11. Calcular el calor emitido (en vatios) por una masa de gas gris de volumen  $V = 10 \text{ cm}^3$  a una temperatura  $T = 1200^\circ\text{C}$  y con un coeficiente de absorción espectral  $a = 0.3 \text{ m}^{-1}$ .
12. En el centro de una esfera hueca de 1 m de diámetro se encuentra una esfera de gas caliente de 1 dm de diámetro a  $1200^\circ\text{C}$  de temperatura. Si este gas se puede considerar gris con un coeficiente de absorción  $a = 0.1 \text{ m}^{-1}$ , calcular el flujo de calor que llega a la superficie interior de la esfera grande procedente de la pequeña. Considerar a la pequeña esfera de gas como un medio ópticamente delgado,  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ .
13. ¿Cuál es la característica radiativa que define un gas como gris?
14. En el método de las zonas de Hottel, indicar con claridad cuál es la diferencia existente entre las magnitudes  $\overline{G_\gamma S_k}$  y  $\overrightarrow{G_\gamma S_k}$ . En concreto, ¿qué nombre recibe y qué significa cada una de ellas?
15. Escribir el balance de energía en una zona de volumen según el método de las zonas de Hottel, indicando los términos radiativos con sus fórmulas respectivas y los demás términos de manera puramente cualitativa.

---

## Problemas

---

1. La cámara de combustión de una turbina puede aproximarse como un tubo largo de 0.4 m de diámetro. Los gases de combustión se encuentran a una presión de 1 atm y a una temperatura de  $1000^{\circ}\text{C}$ , mientras que la temperatura superficial de la cámara son  $500^{\circ}\text{C}$ . Si los gases de combustión contienen  $\text{CO}_2$  y vapor de agua, ambos con una fracción molar de 0.15 ¿cuál es el intercambio radiativo neto entre el gas y la superficie de la cámara? La superficie de la cámara puede considerarse como un cuerpo negro.
2. El calor residual de un gas de alto horno se recupera haciéndolo pasar por un tubo metálico vertical que se refrigera introduciendo agua líquida saturada por un conducto anular dispuesto a tal efecto.



La longitud y diámetro del tubo son 7 y 1 m respectivamente. La superficie interior es negra. El gas está a presión atmosférica, con presiones parciales de  $\text{CO}_2$  y  $\text{H}_2\text{O}$  vapor de 0.1 y 0.2 atm. respectivamente. Su temperatura media

---

**Problemas**

---

puede tomarse como 1400 K. El caudal de gas es  $\dot{m}_g = 2$  kg/s. Si la presión del agua es de 2.455 bar, estimar el caudal necesario para producir la conversión completa del líquido saturado a vapor saturado. Calcular la disminución de temperatura de los humos. Las propiedades del gas pueden aproximarse por  $\mu = 530 \times 10^{-7}$  kg/m s;  $k = 0.091$  W/m K;  $Pr = 0,7$  y  $c_p = 1207$  J/kg K.

3. Un gas compuesto de un 15% en volumen de vapor de agua y un 65% de  $N_2$ , a una presión de 3 atmósferas y temperatura 1273 K, se introduce entre dos superficies negras paralelas separadas 0.7 m. La temperatura de esas superficies es de 473 K y 773 K. Calcular la transferencia de calor por radiación hacia dichas superficies.
4. Mediante un pirómetro óptico se han determinado las temperaturas roja y verde de una llama luminosa, resultando  $T_R = 1750$  K y  $T_V = 1770$  K. Determinar:
  - a) La temperatura verdadera de la llama luminosa.
  - b) La emitancia de la llama luminosa debida al hollín.
  - c) El flujo neto y calor intercambiado entre una llama tres veces mayor, de igual naturaleza, y las paredes que la rodean, que pueden considerarse superficies negras a 1700 K.
5. Calcular las áreas de intercambio radiante en un horno modelizado con una zona de gas, una superficie fría (la carga) y el resto paredes refractarias. El horno es un cubo de 2 m. de lado, siendo la pared fría una de sus caras de emisividad 0.8 mientras que las paredes refractarias tienen una emisividad de 0.9. Considerar que el gas es gris con un coeficiente de absorción de  $0.34 \text{ m}^{-1}$ .
6. Repetir el problema 1 considerando que las paredes de la cámara tienen una emisividad de 0.75.
7. Calcular la cantidad de calor transmitido por radiación desde un gas a los tubos de un precalentador, si el gas se encuentra a  $950^\circ \text{C}$ , mientras que los tubos permanecen a  $500^\circ \text{C}$ , siendo su emisividad  $\epsilon = 0.8$ . Los tubos están

---

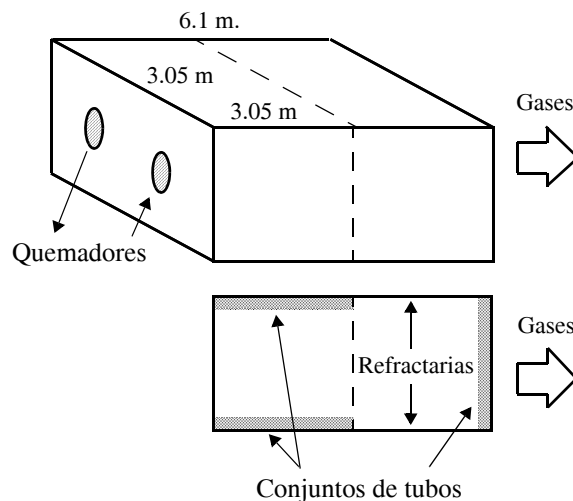
**Problemas**

---

en disposición triangular equilátera a distancia entre centros  $2D$ , siendo el diámetro externo de los tubos  $D = 4.63$  cm. El gas contiene 12% de  $\text{CO}_2$  y 5% de  $\text{H}_2\text{O}$ . La presión total de los gases es de 2 atm.

8. Un horno rectangular de dimensiones  $3.05 \times 3.05 \times 6.1$  m, posee los quemadores en una cara refractaria, en la primera mitad. En la primera mitad de las cuatro paredes laterales se encuentra un conjunto de tubos de 0.1 m de diámetro, siendo la distancia entre sus centros de 0.2 m. y la segunda mitad está formada por superficies refractarias. Los gases de combustión salen a través de un conjunto de tubos situados en la cara opuesta a los quemadores.

El combustible empleado  $(\text{CH}_2)_x$  se quema con un 20% de exceso de aire produciendo 7270 kW.



El fluido que circula dentro de los tubos es un sumidero de calor que mantiene las superficies del tubo que se encuentran en el lado del gas (superior exterior) a una temperatura de 922 K. El coeficiente de convección del gas tanto para las superficies refractarias como para las paredes de los tubos es de  $11 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ .

Se supone que tanto los tubos como las paredes refractarias son superficies grises con emisividad 0.8 y 0.5 respectivamente.

Los productos de la combustión contienen un 11.03% de  $\text{CO}_2$ , 11.03% de  $\text{H}_2\text{O}$ , 3.3% de  $\text{O}_2$  y 74.6% de  $\text{N}_2$  y fluyen a una velocidad de 379 kmol/h.

---

**Problemas**

---

siendo su calor específico molar medio para un rango de temperaturas entre 15°C y la temperatura a la que se encuentra el gas de:

$$c_{pGC} = 25.18 + 73 \times 10^{-2} T - 5.31 \times 10^{-6} T^2 + 6.23 \times 10^{-10} T^3 \text{ kJ/kmol K}$$

Obtener el calor cedido a los tubos de las paredes laterales y a los situados en la zona de salida de los gases de combustión y las temperaturas de las paredes refractarias y del gas.

---

## CAPÍTULO 15

# Transferencia de calor multimodo

---

### Problemas

1. Formular las pérdidas totales por radiación y convección desde una tubería indefinidamente larga de diámetro  $D$  que se encuentra a una temperatura  $T_s$  en su superficie exterior. Esta puede suponerse difusa y gris de emisividad  $\epsilon_s$ . El ambiente está a una temperatura  $T_a < T_s$  y el coeficiente de convección es  $h$ . Para el caso  $T_a = 27^\circ\text{C}$ ,  $T_s = 67^\circ\text{C}$ ,  $\epsilon_s = 0.75$  y  $D = 0.5$  m. Estimar el orden de magnitud de la fuga de calor por radiación frente a la debida a la convección natural ( $h = 5$   $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$ ).
2. Un calentador de aire consiste en un tubo semicircular en el que la superficie plana se mantiene a  $1000$  K y la superficie semicilíndrica está bien aislada. El radio es  $20$  mm y ambas superficies tienen una emisividad de  $0.8$ . Si a través del tubo fluyen  $0.01$  kg/s de aire atmosférico a una temperatura  $T_m = 400$  K, ¿cuánta potencia por unidad de longitud debe suministrarse a la superficie plana para mantener su temperatura? ¿A qué temperatura está la superficie aislada?
3. La ventanilla trasera de un automóvil tiene un espesor  $L = 8$  mm y una altura  $H = 0.5$  m y contiene una red tupida de conductores eléctricos cuyo efecto es prácticamente equivalente a un calentamiento volumétrico

constante ( $q''$  ( $\text{W}/\text{m}^2$ )). En determinadas condiciones, la superficie interior de la ventana está en contacto con aire a  $10^\circ\text{C}$ , mientras que la exterior está expuesta al aire ambiental a  $-10^\circ\text{C}$  y a un entorno térmico muy frío de temperatura efectiva  $-33^\circ\text{C}$ . El aire se mueve en flujo paralelo sobre la superficie a una velocidad de  $20 \text{ m/s}$ . Determinar el calentamiento volumétrico necesario para mantener la superficie interior a  $T_{s,i} = 15^\circ\text{C}$ .

4. Se instala un termómetro en un conducto de gran diámetro para medir la temperatura  $T_a$  del aire que circula por el interior a velocidad  $V$ . El termómetro es un cilíndrico de cristal de diámetro  $D$  y emisividad superficial  $\epsilon_g$ . La temperatura de la superficie interior del conducto  $T_s$  es una cantidad conocida inferior a  $T_a$ . Desarrollar una expresión que permita calcular  $T_a$  conociendo la temperatura  $T$  que mide el termómetro. Aplicarla al caso en que  $T = 45^\circ\text{C}$ ,  $T_s = 35^\circ\text{C}$ ,  $p = 1 \text{ atm}$ ,  $V = 5 \text{ m/s}$ ,  $D = 3 \text{ mm}$  y  $\epsilon_g = 0.95$ .

5. La distribución espectral de la radiación emitida por el filamento de una bombilla de  $60 \text{ W}$  puede aproximarse por la de un cuerpo negro a  $2900 \text{ K}$ . Si las propiedades radiativas del cristal de la bombilla son:

$$\tau_\lambda = 1; \alpha_\lambda = 0 \text{ para } 0 < \lambda < 1 \mu\text{m}$$

$$\tau_\lambda = 0; \alpha_\lambda = 1 \text{ para } \lambda > 1 \mu\text{m}$$

¿Qué fracción de la radiación emitida se transmite al ambiente? Despreciando las pérdidas por conducción a través del casquillo, ¿cuál será la temperatura del cristal (que puede aproximarse a una esfera de  $50 \text{ mm}$  de diámetro) si la bombilla está en una habitación cuyas paredes y el aire tienen una temperatura de  $20^\circ\text{C}$ ?

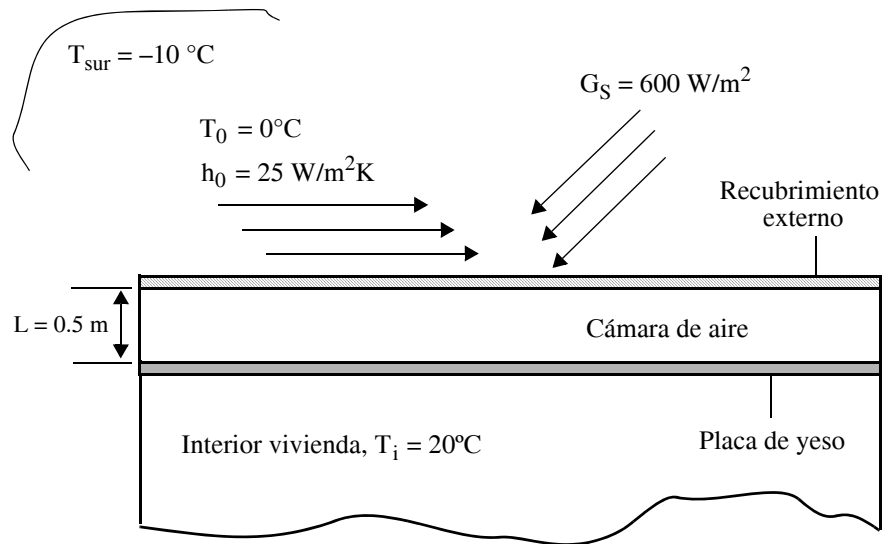
6. Para el diseño de sistemas de calefacción en edificios es necesario realizar una estimación de las pérdidas de calor a través de paredes y techos. Con este fin se desea estimar las pérdidas de calor a través del tejado de una vivienda de  $70 \text{ m}^2$  de planta ( $7 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ ) cuyo esquema se muestra en la figura, y en las condiciones ambientales especificadas.

El tejado de la vivienda consta de una placa de yeso y un recubrimiento externo, separados una distancia de  $0.5 \text{ m}$ . Entre ambas superficies se encuentra una cámara de aire estanca, utilizada como aislante. El recubrimiento externo es de un material opaco especial para zonas frías cuya absorptividad vale  $\alpha_\lambda = 0.6\{0 < \lambda < 4 \mu\text{m}\}$   $\alpha_\lambda = 0.2\{4 \mu\text{m} < \lambda\}$

---

**Problemas**

---



En el interior de la vivienda hay aire en reposo a  $20^\circ\text{C}$ . En el exterior se establecen las siguientes condiciones:

- Viento a  $0^\circ\text{C}$ , que produce un coeficiente de convección  $h_0 = 25 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ .
- Temperatura del cielo,  $T_{\text{sur}} = -10^\circ\text{C}$
- Irradiación solar,  $G_s = 600 \text{ W/m}^2$ .

Se pide:

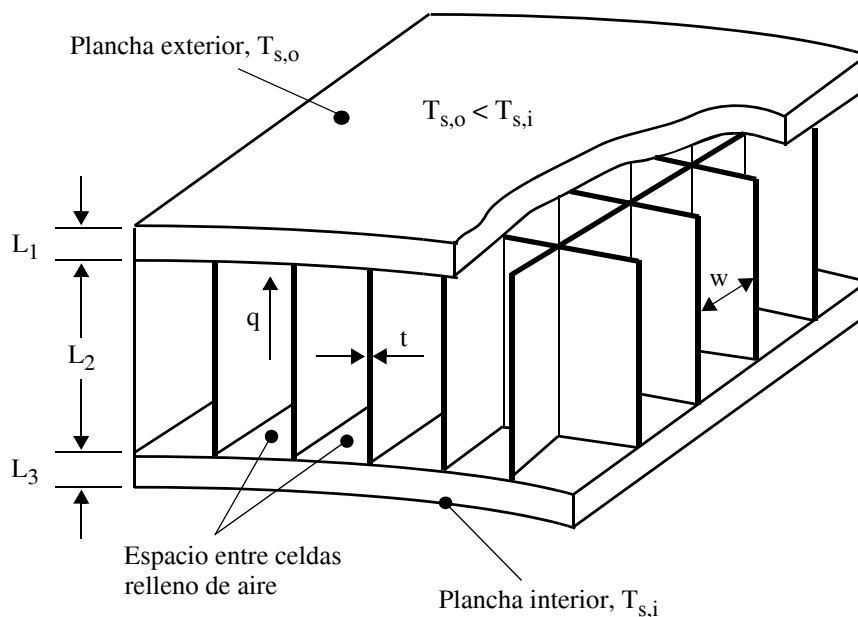
- Calcular las pérdidas de calor a través del tejado en estado estacionario y en las condiciones ambientales especificadas.
- Plantear las ecuaciones en caso de considerarse también intercambio radiativo en la cámara de aire.

**Datos:**

Propiedades del aire:  $\nu = 14.377 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ;  $\alpha = 20.25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$   
 $\lambda = 24.94 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}\cdot\text{K}$ ;  $\text{Pr} = 0.711$ ;  $\beta = 0.004 \text{ K}^{-1}$

**Ayuda:** Para calcular  $\text{Ra}_L$  utilizar  $\Delta T = 5 \text{ K}$  como primera aproximación.

7. Durante el proceso de soldadura por arco del aluminio se desprenden pequeñas gotas de metal fundido. Calcular la velocidad inicial de enfriamiento de una gota de 0.5 mm de diámetro a una temperatura inicial de 1700 K y con una velocidad inicial de 1 m/s si el aire está a 300 K. Para el aluminio líquido a 1700 K se calcula que  $\rho = 2100 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_p = 1100 \text{ J/kg K}$ ,  $\lambda = 200 \text{ W/m K}$ ,  $\varepsilon = 0.20$ . No desestimar el efecto radiativo en la gota.
8. Se considera el material compuesto mostrado en la figura con el fin de aislar térmicamente un tejado. Las planchas exterior e interior son de conglomerado de baja densidad de espesores  $L_1 = L_3 = 12.5 \text{ mm}$  y su conductividad térmica  $\lambda_1 = 0.078 \text{ W/m K}$  y el relleno en forma de panal se construye con conglomerado de alta densidad de conductividad térmica  $\lambda_2 = 0.170 \text{ W/m K}$ . Las celdas son paralelepípedos de longitud  $L_2 = 50 \text{ mm}$ , lado  $W = 10 \text{ mm}$  y espesor de pared  $e = 2 \text{ mm}$ . La emisividad de las dos planchas es aproximadamente  $\varepsilon = 0.85$  y las celdas están llenas de aire a la presión de 1 atm. Para estimar su eficacia como material aislante, calcúlese la resistencia térmica bajo condiciones de trabajo representativas dadas por unas temperaturas en las caras interior y exterior de  $25^\circ\text{C}$  y  $-10^\circ\text{C}$  respectivamente.



---

## APÉNDICE A

# Dimensiones, unidades y constantes físicas

---

### Dimensiones

Una buena mayoría de magnitudes físicas tienen dimensiones y deben expresarse siempre como el producto de un valor numérico por una unidad. Las operaciones con magnitudes físicas siguen las reglas del álgebra, tanto en sus valores numéricos como en sus unidades; por lo tanto cuando se hace una representación gráfica o tabular de unas magnitudes físicas frente a otras presentando un conjunto de valores numéricos, la forma rigurosa de entenderlos y presentarlos es como el cociente de las magnitudes físicas por sus unidades correspondientes [1]. De la misma manera debe hacerse cuando los valores numéricos de la tabla o figura son múltiplos o submúltiplos de las unidades utilizadas.

El criterio anterior es seguido en el texto alternativamente con el criterio ampliamente difundido de indicar las unidades entre paréntesis o corchetes.

### Unidades

---

Como sistema de unidades se utiliza en este texto el sistema internacional (SI). Este sistema, cuyo nombre fue acordado en la 11ª Conferencia General de Pesos y Medidas (CGPM) celebrada en 1960, va siendo progresivamente adoptado por todos los países y se considera la base para la normalización universal de las unidades de medida [2].

---

**Dimensiones, unidades y constantes físicas**

---

El Sistema Internacional tiene tres clases de unidades: básicas, suplementarias y derivadas.

Las básicas son siete que, por convenio, se consideran dimensionalmente independientes y sobre las cuales está construido todo el SI. Se presentan en la tabla A.1.

---

**TABLA A.1** Unidades básicas del SI.

Magnitud	Nombre de la unidad	Símbolo de la unidad
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

De estas siete magnitudes fundamentales sólo es innecesaria la intensidad luminosa para la disciplina de transmisión de calor.

Las unidades suplementarias son las que figuran en la tabla A.2

---

**TABLA A.2** Unidades suplementarias del SI.

Magnitud	Nombre de la unidad	Símbolo de la unidad
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	estereoradián	sr

Estas dos magnitudes físicas se derivan de las básicas, ya que el ángulo plano es el cociente de dos longitudes y el ángulo sólido el cociente entre un área y una longitud al cuadrado. No obstante la CGPM ha dejado abierta la posibilidad de manejarlas como unidades adimensionales derivadas o como unidades propias.

Las unidades derivadas se forman por combinación de las unidades básicas y suplementarias y de las otras unidades derivadas. La mayor parte de ellas se expresan

---

## Unidades

---

como una combinación matemática de las otras mediante los operadores de multiplicación, división y exponenciación. Por ejemplo las unidades de la velocidad son m/s o  $\text{ms}^{-1}$ . Sin embargo hay un grupo especial que tiene nombres propios aprobados por el CGPM que aparecen listados en la tabla A.3.

---

**TABLA A.3** Unidades derivadas del SI con nombres propios.

Magnitud	Nombre internacional de la unidad	Nombre español de la unidad	Símbolo	Definición
Frecuencia	hertz	hercio	Hz	$\text{s}^{-1}$
Fuerza	newton	newton	N	$\text{kg m/s}^2$
Presión, esfuerzo	pascal	pascal	Pa	$\text{N/m}^2$
Energía, trabajo	joule	julio	J	N m
Potencia	watt	vatio	W	J/s
Carga eléctrica, cantidad de electricidad	coulomb	culombio	C	A s
Potencial eléctrico, fuerza electromotriz	volt	voltio	V	J/C
Capacitancia eléctrica	farad	faradio	F	C/V
Resistencia eléctrica	ohm	ohmio	$\Omega$	V/A
Conductancia eléctrica	siemens	siemens	S	$\Omega^{-1}$
Flujo magnético	weber	weber	Wb	V s
Densidad de flujo magnético	tesla	tesla	T	$\text{Wb/m}^2$
Inductancia	henry	henrio	H	$\text{Wb/A}$
Flujo luminoso	lumen	lumen	lm	cd sr
Iluminancia	lux	lux	lx	$\text{lm/m}^2$
Temperatura Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ )	grado Celsius	grado Celsius	$^{\circ}\text{C}$	$1^{\circ}\text{C} = 1 \text{ K}^{\text{a}}$

- a. Temperatura Celsius  $T-T_0$ , donde T se expresa en kelvins y  $T_0 = 273.15 \text{ K}$ . La unidad *grado Celsius* es igual a la unidad *kelvin*.

Finalmente, cabe mencionar como otras unidades las de de la tabla A.4

**TABLA A.4** Otras unidades.

Magnitud	Nombre de la unidad	Símbolo	Equivalencia
Presión	bar	bar	$10^5$ Pa
Energía (calor)	caloría	cal	4.18 J <sup>a</sup>

- a. Un valor más preciso de la caloría no puede darse sin especificar de qué tipo de caloría se trata. Existen, al menos cinco tipos y definiciones de caloría, cuyos valores oscilan entre los 4.182 J para la caloría a 20°C y los 4.190 J de la caloría media. Los tipos más habituales son la caloría termoquímica, igual a 4.184 J, y la caloría internacional, igual a 4.187 J, adoptada esta última en la 5ª Conferencia Internacional sobre propiedades del vapor de agua celebrada en 1956.

Es evidente la necesidad de eliminar el uso de esta confusa unidad, pero se ha mencionado por el profundo arraigo que tiene en la ingeniería industrial española.

## Múltiplos y submúltiplos del Sistema Internacional

Dado que muy frecuentemente el valor de las magnitudes físicas es un número muy grande o muy pequeño de veces de las unidades del SI, es habitual uso de múltiplos o submúltiplos de estas unidades a los que se ha dado un nombre en forma de prefijo y un símbolo. En la tabla A.5 aparecen los más utilizados.

**TABLA A.5** Múltiplos de unidades del Sistema Internacional

Factor	Prefijo	Símbolo
$10^{18}$	exa	E
$10^{15}$	peta	P
$10^{12}$	tera	T
$10^9$	giga	G
$10^6$	mega	M
$10^3$	kilo	k
$10^2$	hecto	h
10	deca	da
$10^{-1}$	deci	d
$10^{-2}$	centi	c
$10^{-3}$	mili	m
$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-12}$	pico	p
$10^{-15}$	femto	f
$10^{-18}$	ato	a

## Constantes universales

---

Existe un conjunto de magnitudes físicas de valor constante y cuyo uso es continuado en las disciplinas científicas y técnicas. En la tabla A.6 se listan aquéllas de importancia en Transferencia de Calor.

---

**TABLA A.6**

Definición	Valor
Constante universal de los gases ideales	$R = 8.314 \text{ kJ/kmol}\cdot\text{K}$ $= 1.9872 \text{ cal/mol}\cdot\text{K}$
Constante de Boltzmann	$k = 1.38054 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Constante de Planck	$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$
Número de Avogadro	$N = 6.022 \times 10^{23} \text{ moléculas/mol}$
Constante de Stefan–Boltzman	$\sigma = 5.669 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\cdot\text{K}^4$
Presión atmosférica	$P_{\text{atm}} = 0.101325 \text{ MPa}$ $= 1.01325 \text{ bar}$
Punto de congelación del agua a 1 atm	$T_{\text{ice}} = 0^\circ\text{C} = 273.15 \text{ K}$
Aceleración de la gravedad	$g = 9.807 \text{ m/s}^2$
Mol	1 mol = muestra que contiene $6.022 \times 10^{23}$ entidades elementales (por ejemplo moléculas)

## **Referencias**

---

1. R. Mayhew  
*Use of Physical Quantities, Units, Mathematics, and Nomenclature in Heat Transfer Publications*  
Experimental Heat Transfer, vol. 2, p. 149, 1989.
2. ASTM Standard for metric practice  
*Report E380-82*  
American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1982.

## APÉNDICE B

# Propiedades termofísicas de la materia

**TABLA B.1** Propiedades termofísicas de sólidos metálicos a 300 K [1]–[5].

Metal (composición en %)	$T_{PF}$	$\rho$	$c$	$\lambda$	$a$
	K	kg/m <sup>3</sup>	J/kg K	W/m K	10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s
Aceros al carbón					
AISI 1010 (0.1 C, 0.4 Mn)		7830	434	63.9	18.8
AISI 1042 recocido (0.42 C, 0.64 Mn, 0.063 Ni, 0.13 Cu)		7840	460	50	13.9
AISI 4130 endurecido y templado (0.3 C, 0.5 Mn, 0.3 Si, 0.95 Cr, 0.5 Mo)		7840	460	43	11.9
Aceros inoxidables					
AISI 302 (18–8) (0.15 C, 2 Mn, 1 Si, 16–18 Cr, 6–8 Ni)	1670	8055	480	15.1	3.91
AISI 304 (0.08 C, 2 Mn, 1 Si, 18–20 Cr, 8–10 Ni)		7900	477	14.9	3.95
AISI 316 (0.08 C, 2 Mn, 1 Si, 16–18 Cr, 10–14 Ni, 2–3 Mo)		8238	468	13.4	3.48
AISI 410 (0.15 C, 1 Mn, 1 Si, 11.5–13 Cr)		7770	460	25	7.00
Aluminio					
Puro	933	2702	903	237	97.1
Duraluminio (4.4 Cu, 1.0 Mg, 0.75 Mn, 0.4 Si)	775	2770	875	174	71.8
Aleación 195, fundida (4.5 Cu)		2790	883	168	68.2
Cadmio	594	8650	231	96.8	48.4
Circonio					
Puro	2125	6570	278	22.7	12.4
Circaloy-4 (1.2–1.75 Sn, 0.18–0.24 Fe, 0.07–0.13 Cr)		6560	285	14.22	7.60

**Propiedades termofísicas de la materia**

**TABLA B.1** Propiedades termofísicas de sólidos metálicos a 300 K [1]–[5].

<b>Metal (composición en %)</b>	$\frac{a_{TPF}}{K}$	$\frac{\rho}{kg/m^3}$	$\frac{c}{J/kg K}$	$\frac{\lambda}{W/m K}$	$\frac{a}{10^{-6} m^2/s}$
Cobre					
Puro	1358	8933	385	401	117
Tenaz electrolítico (Cu + Ag 99.90 mínimo)		8950	385	386	112
Bronce comercial (90 Cu, 10 Al)	1293	8800	420	52	14.1
Latón (70 Cu, 30 Zn)	1188	8530	380	111	34.2
Plata alemana (62 Cu, 15 Ni, 22 Zn)		8618	394	24.9	7.33
Constantán (60 Cu, 40 Ni)		8922	410	22.7	6.12
Constantán (55 Cu, 45 Ni)	1493	8920	384	23	6.71
Estaño	505	7310	227	66.6	40.1
Hierro					
Puro	1808	7870	444	80.4	22.8
Armco (99.75 puro)		7870	447	72.7	20.7
FUNDIDO (5 C)		7272	420	52	17
Magnesio	923	1740	1020	156	87.9
Puro					
Níquel					
Puro	1726	8900	444	90.9	23.0
Inconel-X-750 (73 Ni, 15.5 Cr, 1 Nb, 2.5 Ti, 0.7 Al, 7 Fe)	1665	8510	439	11.7	3.13
Nicromo (80 Ni, 20 Cr)	1672	8400	444	13.4	3.40
Hasteloy B (38 Mo, 5 Fe)		9240	381	12.2	3.47
Cromel (90 Ni, 10 Cr)		8500		19	
Alumel (95 Ni, 2 Mn, 2 Al, 1 Si)		8600		31	
Oro	1337.5	19300	129	318	127
Paladio	1827	12020	244	71.8	24.5
Plata	1235	10500	237	429	172.4
Platino					
Puro	2045	21450	133	71.6	25.1
60 Pt–40 Rh	1800	16630	162	47	17.4
Plomo	601	11340	129	35.3	24.1
Silicio	1685	2330	712	148	89.2
Titanio					
Puro	1933	4500	522	21.9	9.32
Ti–6 Al–4V		4420	610	5.8	2.15
Ti–2 Al–2 Mn		4510	466	8.4	4.0
Tungsteno	3660	19300	132	174	68.3
Zinc	693	7140	389	116	41.8

a: Temperatura de fusión.

**Apéndice B**

**TABLA B.2** Metales sólidos: variación de la conductividad térmica  $\lambda$  (W/m K) con la temperatura (para la composición de los metales véase la tabla B.1 [1], [2]).

Metal	Temperatura/K								
	200	300	400	500	600	800	1000	1200	1500
Aceros al carbón									
AISI 1010		64	59	54	49	39	31		
AISI 1042		52	50	48	45	37	29	26	30
AISI 4130		43	42	41	40	37	31	27	31
Aceros inoxidables									
AISI 302		15	17	19	20	23	25		
AISI 304	13	15	17	18	20	23	25		
AISI 316		13	15	17	18	21	24		
AISI 410	25	25	26	27	27	29			
Aluminio									
Puro	237	237	240	236	231	218			
Duraluminio	138	174	187	188					
Aleación 195 fundida		168	174	180	185				
Circonio									
Puro	25.2	22.7	21.6	21	20.7	21.6	23.7	26	28.8
Circaloy-4	13.3	14.2	15.2	16.2	17.2	19.2	21.2	23.2	
Cobre									
Puro	413	401	393	386	379	366	352	339	
Bronce comercial	42	52	52	55	59				
Latón	95	111	137	143	146	150			
Estaño	73	67	62	60					
Hierro									
Armco	81	73	66	59	53	42	32	29	31
Moldeado		51	44	39	36	27	23		
Magnesio									
Puro	159	156	153	151	149	146			
Níquel									
Puro	107	91	80	72	66	68	72	76	83
Inconel-X-750	10.3	11.7	13.5	15.1	17	20.5	24	27.6	33
Nicromo		13	14	16	17	21			
Oro	323	317	311	304	298	284	270	255	
Plata	430	429	425	419	412	396	379	361	
Platino	73	72	72	72	73	76	79	83	90
Plomo	37	35	34	33	31				
Titanio									
Puro	25	22	20	20	19	19	21	22	25
Ti-6Al-4V		5.8							
Tungsteno	185	174	159	146	137	125	118	112	106

---

**Propiedades termofísicas de la materia**


---

**TABLA B.3** Metales sólidos: variación del calor específico  $c$  (J/kg K) con la temperatura (para la composición de los metales véase la tabla B.1) [1], [2].

Metal	Temperatura/K								
	200	300	400	500	600	800	1000	1200	1500
Aceros al carbón									
AISI 1010		434	487	520	559	685	1168		
AISI 1042			500	530	570	700	1430		
AISI 4130			500	530	570	690	840		
Aceros inoxidables									
AISI 302		480	512	531	559	585	606		
AISI 304	402	477	515	539	557	582	611	640	682
AISI 316		468	504	528	550	576	602		
AISI 410		460							
Aluminio Puro	798	903	949	996	1033	1146			
Circonio Puro	264	278	300	312	322	342	362	344	344
Circaloy-4			300	314	327	348	369		
Cobre Puro	356	385	397	412	417	433	451	480	
Bronce comercial	785	420	460	500	545				
Latón	360	380	395	410	425				
Estaño	215	227	243						
Hierro Armco	384	447	490	530	574	680	975	609	634
Magnesio Puro	934	1024	1074	1170	1170	1267			
Níquel Puro	383	444	485	500	512	530	562	594	616
Inconel-X-750	372	439	473	490	510	546	626		
Nicromo			480	500	525	545			
Oro	124	129	131	133	135	140	145	155	
Plata	225	232	239	244	250	262	277	292	
Platino	125	133	136	139	141	146	152	157	165
Plomo	125	129	132	136	142				
Titanio Puro	465	522	551	572	591	633	675	680	686
Ti-6Al-4V		610							
Tungsteno	122	132	137	140	142	145	148	152	157

**Apéndice B**

**TABLA B.4** Propiedades termofísicas de dieléctricos sólidos [1], [2], [4].

<b>Dieléctrico</b>	<b>T</b> <b>K</b>	<b>ρ</b> <b>kg/m<sup>3</sup></b>	<b>c</b> <b>J/ kg K</b>	<b>λ</b> <b>W/m K</b>	<b>a</b> <b>10<sup>-6</sup> m<sup>2</sup>/s</b>
Agua sólida					
Hielo	273	917	2040	2.25	1.20
Nieve	273	110		0.049	
		500		0.190	
Escarcha	117-160			* (nota)	
Algodón	300	80	1300	0.06	0.58
Baquelita	300	1270	1590	0.230	0.11
Carbono					
Diamante (tipo IIb)	300	3250	510	1350	810
Grafito ATJ-S	300	1810	1300	98	42
	1000		1926	55	16
	2000		2139	38	9.8
	3000		2180	33	8.4
Carburo de silicio	300	3160	675	490	230
	400		880		
	600		1050		
	800		1135		
	1000		1195	87	23.0
	1200		1243	58	14.8
	1500		1310	30	7.25
Celulosa o pasta de papel	300	45	—	0.04	—
Dióxido de silicio SiO <sub>2</sub>					
Cristalino (cuarzo)		2650			
λ en la dirección paralela al eje c	200			16.4	
	300		745	10.4	5.3
	400		885	7.6	3.2
	600		1075	5.0	1.7
λ en la dirección perpendicular al eje c	200			9.5	
	300		745	6.2	3.1
	400		885	4.7	2.0
	600		1075	3.4	1.2
Policristalino (vidrio de sílice fundido)	300	2220	745	1.38	0.83
	400		905	1.51	0.75
	600		1040	1.75	0.75
	800		1105	2.17	0.88
	1000		1155	2.87	1.11
	1200		1195	4.0	1.51
Dióxido de titanio TiO <sub>2</sub> (rutilo)	300	4157	710	8.4	2.8
	600		880	5.0	1.4
	1200		945	3.3	0.84
Fibra epóxica grafitada (25% del volumen)		1400			
λ en la dirección paralela a las fibras	100		337	5.7	12.1
	200		640	8.7	9.7
	300		935	11.1	8.5
	400		1220	13.0	7.6
λ en la dirección perpendicular a las fibras	100		337	0.46	0.97
	200		640	0.68	0.76
	300		935	0.87	0.66
	400		1220	1.1	0.64

---

**Propiedades termofísicas de la materia**


---

**TABLA B.4** Propiedades termofísicas de dieléctricos sólidos [1], [2], [4].

Dieléctrico	T	$\rho$	c	$\lambda$	a	
	K	kg/m <sup>3</sup>	J/ kg K	W/m K	10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s	
Grafito pirolítico $\lambda$ en la dirección paralela a las capas  $\lambda$ en la dirección perpendicular a las capas	300	2210	709	1950	1240	
	600		1406	892	287	
	1000		1793	534	135	
	2000		2043	262	58	
	300		709	5.7	4.1	
	600		1406	2.68	2.1	
	1000		1793	1.60	1.67	
	2000		2043	0.81	1.51	
Lana de oveja	300	100	1720	0.036	0.21	
Óxido de aluminio Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> Zafiro Alúmina	300	3970	765	46	15.2	
	300		765	36	11.9	
	400		940	26.4	7.1	
	600		1110	15.8	3.6	
	1000		1225	7.85	1.6	
	1500			5.66		
Óxido de uranio UO <sub>2</sub>	300	10 890	240	7.9	3.0	
	500		265	6.0	2.1	
	1000		305	3.9	1.2	
	1500		325	2.6	0.79	
	2000		355	2.3	0.59	
	2500		405	2.5	0.57	
Papel	300	930	1340	0.18	0.144	
Pirocerámica (Corning 9606)	300	2600	808	3.98	1.89	
	400		908	3.64	1.54	
	600		1038	3.28	1.22	
	800		1122	3.08	1.06	
	1000		1197	2.96	0.951	
	1200		1264	2.87	0.873	
	1500		1498	2.79	0.716	
Plásticos	Acetato de celulosa	300	1300	1510	0.24	0.12
	Neopreno	300	1250	1930	0.19	0.079
	Fenólico, relleno	300	1760	1260	0.50	0.23
	Poliamida (nylon)	300	1140	1670	0.24	0.13
	Polietileno (alta densidad)	300	960	2090	0.33	0.16
	Polipropileno	300	1170	1930	0.17	0.075
	Cloruro de polivinilo	300	1714	1050	0.092	0.051
	Teflón	300	2200	1050	0.35	0.15
		400			0.45	0.19

$$* \frac{\lambda}{\text{W/m k}} = -0.1038 + 9.114 \times 10^{-4} \frac{T}{\text{K}}$$

**Apéndice B**

**TABLA B.5** Propiedades termofísicas de aislantes y materiales de construcción [1], [2], [4], [5].

Material	T	$\rho$	c	$\lambda$	a
	K	kg/m <sup>3</sup>	J/kg K	W/m K	10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s
Asfalto	300	2120	920	0.70	0.36
Caucho					
Duro (ebonita)	300	1150	2010	0.16	0.069
Neopreno	300	1250	1930	0.19	0.079
Espuma rígida	260			0.028	
	280			0.030	
	300	70		0.032	
	320			0.034	
Cemento mortero	300	1860	780	0.72	0.496
Corcho	300	160	1680	0.043	0.16
Fibra de vidrio, bloque de láminas delgadas	300	16	835	0.046	3.4
	300	40		0.035	
	260			0.029	
	280			0.033	
	300	28		0.038	
	320			0.043	
	340			0.048	
	360			0.054	
	380			0.060	
	400			0.066	
Hormigón					
Mezcla de piedra 1-2-4	300	2100	880	1.4	0.75
Ladrillo					
B&W K-28 aislante	600			0.03	
	1300			0.04	
Cromo	400	3110	835	2.3	0.92
	800			2.5	
	1200			2.0	
Arcilla refractaria	400	2645	960	0.9	0.35
	800			1.4	
	1200			1.7	
	1600			1.8	
Común	300	1920	835	0.72	0.45
De fachada	300	2083		1.3	
Maderas					
Roble en la dirección paralela al grano	300	820	2400	0.35	0.18
en la dirección perpendicular al grano	300	820	2400	0.21	0.11
Pino blanco en la direcc. paralela al grano	300	500	2800	0.24	0.17
en la dirección perpendicular al grano	300	500	2800	0.10	0.071
Tableros de madera dura (roble)	300	720	1255	0.16	0.18
Tableros de madera blanda (pino, abeto)	300	510	1380	0.12	0.17

---

**Propiedades termofísicas de la materia**


---

**TABLA B.5** Propiedades termofísicas de aislantes y materiales de construcción [1], [2], [4], [5].

Material	T	$\rho$	c	$\lambda$	a			
	K	kg/m <sup>3</sup>	J/kg K	W/m K	10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s			
Magnesia (85%)	300	270		0.062				
	350			0.068				
	400			0.073				
	450			0.078				
	500			0.082				
Papel de asbesto laminado y corrugado de cuatro hojas	300	190		0.078				
	320			0.085				
	340			0.091				
	360			0.097				
	380			0.101				
	de ocho hojas	300	300			0.068		
		320				0.073		
		340				0.077		
		360				0.080		
		380				0.083		
Poliestireno rígido	240	30-60	1210	0.023				
	260			0.024				
	280			0.026				
	300			0.028				
	320			0.030				
Poliuretano, espuma rígida	300	70		0.026				
Tierra	300	1500	1900	1.0	0.35			
	300	1900	2200	2.0	0.5			
Vermiculita expandida	240	122		0.058				
	260			0.061				
	280			0.064				
	300			0.069				
	320			0.074				
	240	80		0.052				
				260		0.056		
				280		0.059		
				300		0.063		
				320		500		0.068
								0.190
Vidrio	300	2700	840	0.78	0.344			
	300	2225	835	1.4		0.754		
	240	145		0.048				
	260			0.051				
	280			0.054				
	300			0.058				
	320			0.063				
	340			0.067				
Yeso	300	800	—	0.17	—			

**Apéndice B**

**TABLA B.6** Propiedades termofísicas de gases a presión atmosférica [2].

Gas	T	$\rho$	$c_p$	$\mu$	$\nu$	$\lambda$	a	Pr
	K	kg/m <sup>3</sup>	kJ/kg K	10 <sup>-7</sup> Pa·s	10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s	10 <sup>-3</sup> W/m·K	10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s	
Aire	100	3.5562	1.032	71.1	2.00	9.34	2.54	0.786
	150	2.3364	1.012	103.4	4.426	13.8	5.84	0.758
	200	1.7458	1.007	132.5	7.590	18.1	10.3	0.737
	250	1.3947	1.006	159.6	11.44	22.3	15.9	0.720
	300	1.1614	1.007	184.6	15.89	26.3	22.5	0.707
	350	0.9959	1.009	208.2	20.92	30.0	29.9	0.700
	400	0.8711	1.014	230.1	26.41	33.8	38.3	0.690
	450	0.7740	1.021	250.7	32.39	37.3	47.2	0.686
	500	0.6964	1.030	270.1	38.79	40.7	56.7	0.684
	550	0.6329	1.040	288.4	45.57	43.9	66.7	0.683
	600	0.5804	1.051	305.8	52.69	46.9	76.9	0.685
	650	0.5356	1.063	322.5	60.21	49.7	87.3	0.690
	700	0.4975	1.075	338.8	68.10	52.4	98.0	0.695
	750	0.4643	1.087	354.6	76.37	54.9	109	0.702
	800	0.4354	1.099	369.8	84.93	57.3	120	0.709
	850	0.4097	1.110	384.3	93.80	59.6	131	0.716
	900	0.3868	1.121	398.1	102.9	62.0	143	0.720
	950	0.3666	1.131	411.3	112.2	64.3	155	0.723
	1000	0.3482	1.141	424.4	121.9	66.7	168	0.726
	1100	0.3166	1.159	449	141.8	71.5	195	0.728
	1200	0.2902	1.175	473	162.9	76.3	224	0.728
	1300	0.2679	1.189	496	185.1	82	238	0.719
	1400	0.2488	1.207	530	213	91	303	0.703
	1500	0.2322	1.230	557	240	100	350	0.685
	1600	0.2177	1.248	584	268	106	390	0.688
	1700	0.2049	1.267	611	298	113	435	0.685
	1800	0.1935	1.286	637	329	120	482	0.683
	1900	0.1833	1.307	663	362	128	534	0.677
	2000	0.1741	1.337	689	396	137	589	0.672
	2100	0.1658	1.372	715	431	147	646	0.667
2200	0.1582	1.417	740	468	160	714	0.655	
2300	0.1513	1.478	766	506	175	783	0.647	
2400	0.1448	1.558	792	547	196	869	0.630	
2500	0.1389	1.665	818	589	222	960	0.613	
3000	0.1135	2.726	955	841	486	1570	0.536	
Dióxido de carbono (CO <sub>2</sub> )	280	1.9022	0.830	140	7.36	15.20	9.63	0.765
	300	1.7730	0.851	149	8.40	16.55	11.0	0.766
	320	1.6609	0.872	156	9.39	18.05	12.5	0.754
	340	1.5618	0.891	165	10.6	19.70	14.2	0.746
	360	1.4743	0.908	173	11.7	21.2	15.8	0.741
	380	1.3961	0.926	181	13.0	22.75	17.6	0.737
	400	1.3257	0.942	190	14.3	24.3	19.5	0.737
	450	1.1782	0.981	210	17.8	28.3	24.5	0.728
	500	1.0594	1.02	231	21.8	32.5	30.1	0.725
	550	0.9625	1.05	251	26.1	36.6	36.2	0.721
	600	0.8826	1.08	270	30.6	40.7	42.7	0.717
	650	0.8143	1.10	288	35.4	44.5	49.7	0.712
	700	0.7564	1.13	305	40.3	48.1	56.3	0.717
	750	0.7057	1.15	321	45.5	51.7	63.7	0.714
	800	0.6614	1.17	337	51.0	55.1	71.2	0.716

**Propiedades termofísicas de la materia**

**TABLA B.6** Propiedades termofísicas de gases a presión atmosférica [2].

Gas	T	$\rho$	$c_p$	$\mu$	$\nu$	$\lambda$	a	Pr
	K	kg/m <sup>3</sup>	kJ/kg K	10 <sup>-7</sup> Pa·s	10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s	10 <sup>-3</sup> W/m·K	10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s	
Monóxido de carbono (CO)	200	1.6888	1.045	127	7.52	17.0	9.63	0.781
	220	1.5341	1.044	137	8.93	19.0	11.9	0.753
	240	1.4055	1.043	147	10.5	20.6	14.1	0.744
	260	1.2967	1.043	157	12.1	22.1	16.3	0.741
	280	1.2038	1.042	166	13.8	23.6	18.8	0.733
	300	1.1233	1.043	175	15.6	25.0	21.3	0.730
	320	1.0529	1.043	184	17.5	26.3	23.9	0.730
	340	0.9909	1.044	193	19.5	27.8	26.9	0.725
	360	0.9357	1.045	202	21.6	29.1	29.8	0.725
	380	0.8864	1.047	210	23.7	30.5	32.9	0.729
	400	0.8421	1.049	218	25.9	31.8	36.0	0.719
	450	0.7483	1.055	237	31.7	35.0	44.3	0.714
	500	0.67352	1.065	254	37.7	38.1	53.1	0.710
	550	0.61226	1.076	271	44.3	41.1	62.4	0.710
	600	0.56126	1.088	286	51.0	44.0	72.1	0.707
	650	0.51806	1.101	301	58.1	47.0	82.4	0.705
	700	0.48102	1.114	315	65.5	50.0	93.3	0.702
750	0.44899	1.127	329	73.3	52.8	104	0.702	
800	0.42095	1.140	343	81.5	55.5	116	0.705	
Helio (He)	100	0.4871	5.193	96.3	19.8	73.0	28.9	0.686
	120	0.4060	5.193	107	26.4	81.9	38.8	0.679
	140	0.3481	5.193	118	33.9	90.7	50.2	0.676
	160	—	5.193	129	—	99.2	—	—
	180	0.2708	5.193	139	51.3	107.2	76.2	0.673
	200	—	5.193	150	—	115.1	—	—
	220	0.2216	5.193	160	72.2	123.1	107	0.675
	240	—	5.193	170	—	130	—	—
	260	0.1875	5.193	180	96.0	137	141	0.682
	280	—	5.193	190	—	145	—	—
	300	0.1625	5.193	199	122	152	180	0.680
	350	—	5.193	221	—	170	—	—
	400	0.1219	5.193	243	199	187	295	0.675
	450	—	5.193	263	—	204	—	—
	500	0.09754	5.193	283	290	220	434	0.668
	550	—	5.193	—	—	—	—	—
	600	—	5.193	320	—	252	—	—
	650	—	5.193	332	—	264	—	—
	700	0.06969	5.193	350	502	278	768	0.654
	750	—	5.193	364	—	291	—	—
800	—	5.193	382	—	304	—	—	
900	—	5.193	414	—	330	—	—	
1000	0.04879	5.193	446	914	354	1400	0.654	

**Apéndice B**

**TABLA B.6** Propiedades termofísicas de gases a presión atmosférica [2].

Gas	T	$\rho$	$c_p$	$\mu$	$\nu$	$\lambda$	$\alpha$	Pr
	K	kg/m <sup>3</sup>	kJ/kg K	10 <sup>-7</sup> Pa·s	10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s	10 <sup>-3</sup> W/m·K	10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s	
Nitrógeno (N <sub>2</sub> )	100	3.4388	1.070	68.8	2.00	9.58	2.60	0.768
	150	2.2594	1.050	100.6	4.45	13.9	5.86	0.759
	200	1.6883	1.043	129.2	7.65	18.3	10.4	0.736
	250	1.3488	1.042	154.9	11.48	22.2	15.8	0.727
	300	1.1233	1.041	178.2	15.86	25.9	22.1	0.716
	350	0.9625	1.042	200.0	20.78	29.3	29.2	0.711
	400	0.8425	1.045	220.4	26.16	32.7	37.1	0.704
	450	0.7485	1.050	239.6	32.01	35.8	45.6	0.703
	500	0.6739	1.056	257.7	38.24	38.9	54.7	0.700
	550	0.6124	1.065	274.7	44.86	41.7	63.9	0.702
	600	0.5615	1.075	290.8	51.79	44.6	73.9	0.701
	700	0.4812	1.098	321.0	66.71	49.9	94.4	0.706
	800	0.4211	1.22	349.1	82.90	54.8	116	0.715
	900	0.3743	1.146	375.3	100.3	59.7	139	0.721
	1000	0.3368	1.167	399.9	118.7	64.7	165	0.721
1100	0.3062	1.187	423.2	138.2	70.0	193	0.718	
1200	0.2807	1.204	445.3	158.6	75.8	224	0.707	
1300	0.2591	1.219	466.2	179.9	81.0	256	0.701	
Oxígeno (O <sub>2</sub> )	100	3.945	0.962	76.4	1.94	9.25	2.44	0.796
	150	2.585	0.921	114.8	4.44	13.8	5.80	0.766
	200	1.930	0.915	147.5	7.64	18.3	10.4	0.737
	250	1.542	0.915	178.6	11.58	22.6	16.0	0.723
	300	1.284	0.920	207.2	16.14	26.8	22.7	0.711
	350	1.100	0.929	233.5	21.23	29.6	29.0	0.733
	400	0.9620	0.942	258.2	26.84	33.0	36.4	0.737
	450	0.8554	0.956	281.4	32.90	36.3	44.4	0.741
	500	0.7698	0.972	303.3	39.40	41.2	55.1	0.716
	550	0.6998	0.988	324.0	46.30	44.1	63.8	0.726
	600	0.6414	1.003	343.7	53.59	47.3	73.5	0.729
	700	0.5498	1.031	380.8	69.26	52.8	93.1	0.744
	800	0.4810	1.054	415.2	86.32	58.9	116	0.743
	900	0.4275	1.074	447.2	104.6	64.9	141	0.740
	1000	0.3848	1.090	477.0	124.0	71.0	169	0.733
1100	0.3498	1.103	505.5	144.5	75.8	196	0.736	
1200	0.3206	1.115	532.5	166.1	81.9	229	0.725	
1300	0.2960	1.125	588.4	188.6	87.1	262	0.721	
Vapor de agua (sobrecalentado)	380	0.5863	2.060	127.1	21.68	24.6	20.4	1.06
	400	0.5542	2.014	134.4	24.25	26.1	23.4	1.04
	450	0.4902	1.980	152.5	31.11	29.9	30.8	1.01
	500	0.4405	1.985	170.4	38.68	33.9	38.8	0.998
	550	0.4005	1.997	188.4	47.04	37.9	47.4	0.993
	600	0.3652	2.026	206.7	56.60	42.2	57.0	0.993
	650	0.3380	2.056	224.7	66.48	46.4	66.8	0.996
	700	0.3140	2.085	242.6	77.26	50.5	77.1	1.00
	750	0.2931	2.119	260.4	88.84	54.9	88.4	1.00
	800	0.2739	2.152	278.6	101.7	59.2	100	1.01
	850	0.2579	2.186	296.9	115.1	63.7	113	1.02

TABLA B.7 Propiedades termofísicas del agua saturada [2].

Temp. (K)	Presión (bar)	Volumen específico (m <sup>3</sup> /kg)		Entalpia de vaporización (kJ/kg)	Calor específico a presión constante (kJ/kg K)		Viscosidad dinámica (10 <sup>-6</sup> Pa s)		Conductividad térmica (10 <sup>-3</sup> W/m K)		Número de Prandtl		Tensión superficial (10 <sup>-3</sup> N/m)	Coeficiente de dilatación isobarc (10 <sup>-6</sup> K <sup>-1</sup> )	Temp. (K)
		v <sub>f</sub> ·10 <sup>3</sup>	v <sub>g</sub>		h <sub>fg</sub>	c <sub>p,f</sub>	c <sub>p,g</sub>	μ	μ <sub>g</sub>	λ <sub>f</sub>	λ <sub>g</sub>	Pr <sub>f</sub>			
273.15	0.00611	1.000	206.3	2502	4.217	1.854	1750	8.02	569	18.2	12.99	0.815	75.5	-68.05	273.15
275	0.00697	1.000	181.7	2497	4.211	1.855	1652	8.09	574	18.3	12.22	0.817	75.3	-32.74	275
280	0.00990	1.000	130.4	2485	4.198	1.858	1422	8.29	582	18.6	10.26	0.825	74.8	46.04	280
285	0.01387	1.000	99.4	2473	4.189	1.861	1225	8.49	590	18.9	8.81	0.833	74.3	114.1	285
290	0.01917	1.001	69.7	2461	4.184	1.864	1080	8.69	598	19.3	7.56	0.841	73.7	174.0	290
295	0.02617	1.002	51.94	2449	4.181	1.868	959	8.89	606	19.5	6.62	0.849	72.7	227.5	295
300	0.03531	1.003	39.13	2438	4.179	1.872	855	9.09	613	19.6	5.83	0.857	71.7	276.1	300
305	0.04712	1.005	27.90	2426	4.178	1.877	769	9.29	620	20.1	5.20	0.865	70.9	320.6	305
310	0.06221	1.007	22.93	2414	4.178	1.882	695	9.49	628	20.4	4.62	0.873	70.0	361.9	310
315	0.08132	1.009	17.82	2402	4.179	1.888	631	9.69	634	20.7	4.16	0.883	69.2	400.4	315
320	0.1053	1.011	13.98	2390	4.180	1.895	577	9.89	640	21.0	3.77	0.894	68.3	436.7	320
325	0.1351	1.013	11.06	2378	4.182	1.903	528	10.09	645	21.3	3.42	0.901	67.5	471.2	325
330	0.1719	1.016	8.82	2366	4.184	1.911	489	10.29	650	21.7	3.15	0.908	66.6	504.0	330
335	0.2167	1.018	7.09	2354	4.186	1.920	453	10.49	656	22.0	2.88	0.916	65.8	535.5	335
340	0.2713	1.021	5.74	2342	4.188	1.930	420	10.69	660	22.3	2.66	0.925	64.9	566.0	340
345	0.3372	1.024	4.683	2329	4.191	1.941	389	10.89	668	22.6	2.45	0.933	64.1	595.4	345
350	0.4163	1.027	3.846	2317	4.195	1.954	365	11.09	668	23.0	2.29	0.942	63.2	624.2	350
355	0.5100	1.030	3.180	2304	4.199	1.968	343	11.29	671	23.3	2.14	0.951	62.3	652.3	355
360	0.6209	1.034	2.645	2291	4.203	1.983	324	11.49	674	23.7	2.02	0.960	61.4	697.9	360
365	0.7514	1.038	2.212	2278	4.209	1.999	306	11.69	677	24.1	1.91	0.969	60.5	707.1	365
370	0.9040	1.041	1.861	2265	4.214	2.017	289	11.89	679	24.5	1.80	0.978	59.5	728.7	370
373.15	1.0133	1.044	1.679	2257	4.217	2.029	279	12.02	680	24.8	1.76	0.984	58.9	750.1	373.15
375	1.0815	1.045	1.574	2252	4.220	2.036	274	12.09	681	24.9	1.70	0.987	58.6	761	375
380	1.2869	1.049	1.337	2239	4.226	2.057	260	12.29	683	25.4	1.61	0.999	57.6	788	380
385	1.5233	1.053	1.142	2225	4.232	2.080	248	12.49	685	25.8	1.53	1.004	56.6	814	385
390	1.794	1.058	0.980	2212	4.239	2.104	237	12.69	686	26.3	1.47	1.013	55.6	841	390
400	2.455	1.067	0.731	2183	4.256	2.158	217	13.05	688	27.2	1.34	1.033	53.6	896	400
410	3.302	1.077	0.553	2153	4.278	2.221	200	13.42	688	28.2	1.24	1.054	51.5	952	410
420	4.370	1.088	0.425	2123	4.302	2.291	185	13.79	688	29.8	1.16	1.075	49.4	1010	420
430	5.699	1.099	0.331	2091	4.331	2.369	173	14.14	685	30.4	1.09	1.10	47.2	—	430

**TABLA B.7** Propiedades termofísicas del agua saturada [2].

Temp. (K)	Presión (bar)	Volumen específico (m <sup>3</sup> /kg)		Entalpia de vaporización (kJ/kg)	Calor específico a presión constante (kJ/kg K)		Viscosidad dinámica (10 <sup>-6</sup> Pa s)		Conductividad térmica (10 <sup>-3</sup> W/m K)		Número de Prandtl		Tensión superficial (10 <sup>-3</sup> N/m)	Coeficiente de dilatación isobaro (10 <sup>-6</sup> K <sup>-1</sup> )	Temp. (K)
		v <sub>f</sub> ·10 <sup>3</sup>	v <sub>g</sub>		c <sub>p,f</sub>	c <sub>p,g</sub>	μ <sub>f</sub>	μ <sub>g</sub>	λ <sub>f</sub>	λ <sub>g</sub>	Pr <sub>f</sub>	Pr <sub>g</sub>			
440	7.333	1.110	0.261	2059	4.36	2.46	162	14.50	682	31.7	1.04	1.12	45.1	—	440
450	9.319	1.123	0.208	2024	4.40	2.56	152	14.85	678	33.1	0.99	1.14	42.9	—	450
460	11.71	1.137	0.167	1989	4.44	2.68	143	15.19	673	34.6	0.95	1.17	40.7	—	460
470	14.55	1.152	0.136	1951	4.48	2.79	136	15.54	667	36.3	0.92	1.20	38.5	—	470
480	17.90	1.167	0.111	1912	4.53	2.94	129	15.88	660	38.1	0.89	1.23	36.2	—	480
490	21.83	1.184	0.0922	1870	4.59	3.10	124	16.23	651	40.1	0.87	1.25	33.9	—	490
500	26.40	1.203	0.0766	1825	4.66	3.27	118	16.59	642	42.3	0.86	1.28	31.6	—	500
510	31.66	1.222	0.0631	1779	4.74	3.47	113	16.95	631	44.7	0.85	1.31	29.3	—	510
520	37.70	1.244	0.0525	1730	4.84	3.70	108	17.33	621	47.5	0.84	1.35	26.9	—	520
530	44.58	1.268	0.0445	1679	4.95	3.96	104	17.72	608	50.6	0.85	1.39	24.5	—	530
540	52.38	1.294	0.0375	1622	5.08	4.27	101	18.1	594	54.0	0.86	1.43	22.1	—	540
550	61.19	1.323	0.0317	1564	5.24	4.64	97	18.6	580	58.3	0.87	1.47	19.7	—	550
560	71.08	1.355	0.0269	1499	5.43	5.09	94	19.1	563	63.7	0.90	1.52	17.3	—	560
570	82.16	1.392	0.0228	1429	5.68	5.67	91	19.7	548	76.7	0.94	1.59	15.0	—	570
580	94.51	1.433	0.0193	1353	6.00	6.40	88	20.4	528	76.7	0.99	1.68	12.8	—	580
590	108.3	1.482	0.0163	1274	6.41	7.35	84	21.5	513	84.1	1.05	1.84	10.5	—	590
600	123.5	1.541	0.0137	1176	7.00	8.75	81	22.7	497	92.9	1.14	2.15	8.4	—	600
610	137.3	1.612	0.0115	1088	7.85	11.1	77	24.1	467	103	1.30	2.60	6.3	—	610
620	159.1	1.705	0.0094	941	9.35	15.4	72	25.9	444	114	1.52	3.46	4.5	—	620
625	169.1	1.778	0.0085	858	10.6	18.3	70	27.0	430	121	1.65	4.20	3.5	—	625
630	179.7	1.856	0.0075	781	12.6	22.1	67	28.0	412	130	2.0	4.8	2.6	—	630
635	190.9	1.935	0.0066	683	16.4	27.6	64	30.0	382	141	2.7	6.0	1.5	—	635
640	202.7	2.075	0.0057	560	26	42	59	32.0	367	155	4.2	9.6	0.8	—	640
645	215.2	2.351	0.0045	361	90	—	54	37.0	331	178	12	26	0.1	—	645
647.3 <sup>a</sup>	221.2	3.170	0.0032	0	x	x	45	45.0	238	238	x	x	0.0	—	647.3 <sup>a</sup>

a: Temperatura crítica.

**Propiedades termofísicas de la materia**

**TABLA B.8** Propiedades termofísicas del refrigerante 12 (diclorodifluorometano) saturado [6].

Temp. (°C)	Presión (Mpa)	Densidad (kg/m³)		Volumen específico (m³/kg)		Entalpía específica (kJ/kg)		Calor específico a presión cte. c <sub>p</sub> [kJ/(kg K)]		c <sub>p</sub> /c <sub>v</sub>	Viscosidad (μPa s)		Conductividad térmica [mW/(m K)]		Tensión superficial (mN/m) σ <sub>l</sub>	Temp. (°C)
		Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	Vapor		Líquido	Vapor	Líquido	Vapor		
-90.00	0.00288	1652.4	4.3671	121.33	310.39	0.835	0.470	1.176	—	—	—	—	—	—	24.91	-90.00
-80.00	0.00623	1626.0	2.1227	129.72	314.99	0.843	0.487	1.171	—	—	—	—	—	—	23.35	-80.00
-70.00	0.01235	1599.2	1.1226	138.19	319.69	0.850	0.504	1.168	569.0	—	—	—	—	—	21.82	-70.00
-60.00	0.02272	1572.0	0.63710	146.72	324.44	0.856	0.521	1.166	508.9	8.78	99.8	5.50	—	—	20.30	-60.00
-50.00	0.03925	1544.3	0.38362	155.32	329.23	0.863	0.537	1.165	453.8	9.39	95.9	6.02	18.81	—	—	-50.00
-45.00	0.05053	1530.3	0.30346	159.66	331.63	0.868	0.546	1.166	428.3	9.68	94.0	6.27	18.08	—	—	-45.00
-40.00	0.06426	1516.1	0.24281	164.01	334.03	0.873	0.554	1.166	404.2	9.95	92.1	6.52	17.35	—	—	-40.00
-35.00	0.08077	1501.7	0.19633	168.40	336.42	0.878	0.563	1.167	381.5	10.22	90.2	6.78	16.63	—	—	-35.00
-30.00	0.10044	1487.2	0.16029	172.81	338.81	0.884	0.572	1.169	360.2	10.48	88.3	7.03	15.91	—	—	-30.00
-29.80 <sup>a</sup>	0.10132	1486.6	0.15899	172.99	338.90	0.884	0.572	1.169	359.4	10.49	88.2	7.04	15.88	—	—	-29.80
-28.80	0.10929	1481.4	0.14817	174.58	339.76	0.886	0.575	1.170	352.1	10.58	87.5	7.13	15.62	—	—	-28.80
-26.00	0.11872	1475.5	0.13716	176.35	340.70	0.888	0.579	1.171	344.1	10.68	86.8	7.23	15.34	—	—	-26.00
-24.00	0.12876	1469.6	0.12714	178.14	341.65	0.891	0.583	1.172	336.4	10.79	86.0	7.33	15.06	—	—	-24.00
-22.00	0.13949	1463.6	0.11800	179.93	342.59	0.894	0.586	1.173	328.8	10.89	85.3	7.43	14.78	—	—	-22.00
-20.00	0.15088	1457.6	0.10965	181.72	343.53	0.896	0.590	1.174	321.5	10.99	84.5	7.53	14.50	—	—	-20.00
-18.00	0.16296	1451.6	0.10202	183.52	344.46	0.899	0.594	1.175	314.3	11.09	83.8	7.63	14.22	—	—	-18.00
-16.00	0.17578	1445.5	0.09503	185.32	345.39	0.902	0.598	1.177	307.3	11.18	83.0	7.73	13.94	—	—	-16.00
-14.00	0.18937	1439.4	0.08862	187.14	346.32	0.905	0.602	1.178	300.5	11.28	82.3	7.84	—	—	—	-14.00
-12.00	0.20374	1433.3	0.08273	188.95	347.25	0.908	0.606	1.180	293.9	11.38	81.5	7.94	—	—	—	-12.00
-10.00	0.21893	1427.1	0.07731	190.78	348.17	0.911	0.611	1.181	287.5	11.48	80.8	8.04	—	—	—	-10.00
-8.00	0.23498	1420.9	0.07233	192.61	349.08	0.915	0.615	1.183	281.2	11.58	80.1	8.15	—	—	—	-8.00
-6.00	0.25190	1414.7	0.06773	194.45	349.99	0.918	0.619	1.185	275.1	11.68	79.3	8.25	—	—	—	-6.00
-4.00	0.26974	1408.3	0.06348	196.29	350.89	0.921	0.624	1.187	269.2	11.78	78.6	8.36	—	—	—	-4.00
-2.00	0.28851	1402.0	0.05956	198.14	351.79	0.925	0.628	1.189	263.4	11.89	77.8	8.47	—	—	—	-2.00
0.00	0.30827	1395.6	0.05593	200.00	352.68	0.928	0.633	1.192	257.8	11.99	77.1	8.57	—	—	—	0.00
2.00	0.32902	1389.2	0.05256	201.87	353.57	0.932	0.638	1.194	252.3	12.09	76.4	8.68	—	—	—	2.00
4.00	0.35082	1382.7	0.04944	203.74	354.45	0.936	0.643	1.197	246.9	12.20	75.6	8.79	—	—	—	4.00
6.00	0.37368	1376.1	0.04654	205.62	355.32	0.940	0.648	1.200	241.7	12.30	74.9	8.90	—	—	—	6.00
8.00	0.39765	1369.5	0.04384	207.51	356.19	0.944	0.653	1.203	236.7	12.41	74.2	9.02	—	—	—	8.00
10.00	0.42276	1362.8	0.04134	209.41	357.05	0.948	0.658	1.206	231.8	12.52	73.5	9.13	—	—	—	10.00
12.00	0.44903	1356.1	0.03900	211.31	357.90	0.953	0.664	1.209	227.0	12.62	72.7	9.24	—	—	—	12.00
14.00	0.47651	1349.3	0.03682	213.23	358.75	0.957	0.669	1.213	222.3	12.74	72.0	9.36	—	—	—	14.00
16.00	0.50523	1342.5	0.03479	215.15	359.58	0.962	0.675	1.216	217.8	12.85	71.3	9.48	—	—	—	16.00
18.00	0.53521	1335.5	0.03289	217.09	360.41	0.966	0.681	1.220	213.3	12.96	70.6	9.60	—	—	—	18.00
20.00	0.56651	1328.6	0.03111	219.03	361.23	0.971	0.687	1.224	209.0	13.08	69.8	9.72	—	—	—	20.00
22.00	0.59914	1321.5	0.02945	220.98	362.04	0.976	0.693	1.229	204.8	13.20	69.1	9.84	—	—	—	22.00
24.00	0.63315	1314.4	0.02789	222.94	362.83	0.981	0.700	1.233	200.7	13.32	68.4	9.96	—	—	—	24.00
26.00	0.66857	1307.2	0.02643	224.92	363.62	0.987	0.707	1.238	196.8	13.44	67.7	10.09	—	—	—	26.00
28.00	0.70544	1299.9	0.02505	226.90	364.40	0.992	0.714	1.244	192.9	13.57	67.0	10.21	—	—	—	28.00
30.00	0.74379	1292.5	0.02376	228.89	365.16	0.998	0.721	1.249	189.1	13.70	66.3	10.34	—	—	—	30.00
32.00	0.78366	1285.0	0.02255	230.90	365.92	1.004	0.728	1.255	185.4	13.83	65.5	10.47	—	—	—	32.00
34.00	0.82509	1277.4	0.02141	232.91	366.66	1.010	0.736	1.262	181.9	13.96	64.8	10.60	—	—	—	34.00
36.00	0.86811	1269.8	0.02034	234.94	367.39	1.017	0.744	1.268	178.4	14.10	64.1	10.74	—	—	—	36.00
38.00	0.91277	1262.0	0.01932	236.98	368.10	1.023	0.753	1.276	175.0	14.24	63.4	10.87	—	—	—	38.00
40.00	0.95909	1254.2	0.01837	239.03	368.81	1.030	0.762	1.283	171.6	14.38	62.7	11.01	—	—	—	40.00
42.00	1.0071	1246.2	0.01747	241.10	369.49	1.038	0.771	1.292	168.4	14.53	62.0	11.15	—	—	—	42.00
44.00	1.0569	1238.1	0.01661	243.18	370.16	1.045	0.780	1.300	165.3	14.68	61.3	11.29	—	—	—	44.00
46.00	1.1085	1229.8	0.01581	245.27	370.82	1.053	0.791	1.310	162.2	14.83	60.6	11.44	—	—	—	46.00
48.00	1.1618	1221.5	0.01505	247.38	371.45	1.062	0.801	1.320	159.2	14.99	59.9	11.58	—	—	—	48.00
50.00	1.2171	1213.0	0.01432	249.51	372.07	1.071	0.812	1.331	156.3	15.15	59.2	11.73	—	—	—	50.00
52.00	1.2742	1204.3	0.01364	251.65	372.67	1.080	0.824	1.342	153.4	15.31	58.5	11.88	—	—	—	52.00
54.00	1.3333	1195.6	0.01299	253.80	373.25	1.090	0.837	1.355	150.7	15.48	57.8	12.04	—	—	—	54.00
56.00	1.3944	1186.6	0.01237	255.97	373.81	1.100	0.850	1.369	148.0	15.65	57.1	12.20	—	—	—	56.00
58.00	1.4575	1177.5	0.01179	258.16	374.35	1.111	0.865	1.383	145.3	15.83	56.4	12.35	—	—	—	58.00
60.00	1.5227	1168.2	0.01123	260.37	374.86	1.123	0.880	1.399	142.7	16.01	55.7	12.52	—	—	—	60.00
62.00	1.5901	1158.7	0.01070	262.60	375.35	1.135	0.896	1.417	140.2	16.19	55.0	12.68	—	—	—	62.00
64.00	1.6595	1149.0	0.01020	264.85	375.81	1.148	0.914	1.436	137.8	16.38	54.4	12.85	—	—	—	64.00
66.00	1.7312	1139.0	0.00972	267.12	376.24	1.163	0.933	1.456	135.4	16.58	53.7	13.02	—	—	—	66.00
68.00	1.8052	1128.9	0.00926	269.42	376.64	1.178	0.954	1.479	133.1	16.78	53.0	13.19	—	—	—	68.00
70.00	1.8814	1118.5	0.00882	271.73	377.01	1.194	0.977	1.505	—	—	—	—	—	—	—	70.00
75.00	2.0825	1091.2	0.00781	277.65	377.77	1.242	1.043	1.581	—	—	—	—	—	—	—	75.00
80.00	2.2991	1061.8	0.00690	283.75	378.26	1.303	1.131	1.683	—	—	—	—	—	—	—	80.00
85.00	2.5322	1029.7	0.00607	290.09	378.40	1.384	1.251	1.825	—	—	—	—	—	—	—	85.00
90.00	2.7829	994.2	0.00532	296.73	378.10	1.496	1.427	2.037	—	—	—	—	—	—	—	90.00
95.00	3.0524	953.9	0.00462	303.76	377.16	1.669	1.712	2.383	—	—	—	—	—	—	—	95.00
100.00	3.3425	906.3	0.00395	311.38	375.26	1.977	2.252	3.039	—	—	—	—	—	—	—	100.00
105.00	3.8555	845.3	0.00328	320.04	371.60	2.741	3.643	4.716	—	—	—	—	—	—	—	105.00
110.00	3.9958	741.7	0.00248	331.90	362.83	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	110.00
111.78 <sup>b</sup>	4.1249	564.6	0.00177	347.39	347.39	×	×	×	—	—	×	×	0.00	—	—	111.78

a: punto de ebullición; b: punto crítico.

**Apéndice B**

**TABLA B.9** Propiedades termofísicas del Refrigerante 134a (1,1,1,2-tetrafluoroetano) saturado [6].

Temp. (°C)	Presión (Mpa)	Densidad (kg/m³)	Volumen específico (m³/kg)	Entalpia específica (kJ/kg)		Calor específico a presión cte. c <sub>p</sub> [kJ/(kg K)]		c <sub>p</sub> /c <sub>v</sub>	Viscosidad (μPa s)		Conductividad térmica [mW/(m K)]		Tensión superficial (mN/m) σ <sub>l</sub>	Temp. (°C)
				Líquido	Vapor	Líquido	Vapor		Líquido	Vapor	Líquido	Vapor		
-103.30 <sup>a</sup>	0.00039	1591.2	35.263	71.89	335.07	1.147	0.585	1.163	2186.6	6.63	—	—	28.15	-103.30
-100.00	0.00056	1581.9	25.039	75.71	337.00	1.168	0.592	1.161	1958.2	6.76	—	—	27.56	-100.00
-90.00	0.00153	1553.9	9.7191	87.59	342.94	1.201	0.614	1.155	1445.6	7.16	—	—	25.81	-90.00
-80.00	0.00369	1526.2	4.2504	99.65	349.03	1.215	0.637	1.151	1109.9	7.57	—	—	24.11	-80.00
-70.00	0.00801	1498.6	2.0528	111.78	355.23	1.215	0.660	1.148	879.6	7.97	125.8	—	22.44	-70.00
-60.00	0.01594	1471.0	1.0770	123.96	361.51	1.220	0.685	1.146	715.4	8.38	121.1	—	20.81	-60.00
-50.00	0.02948	1443.1	0.60560	136.21	367.83	1.229	0.712	1.146	594.3	8.79	116.5	7.12	19.22	-50.00
-40.00	0.05122	1414.8	0.36095	148.57	374.16	1.243	0.740	1.148	502.2	9.20	111.9	8.19	17.66	-40.00
-30.00	0.08436	1385.9	0.22596	161.10	380.45	1.260	0.771	1.152	430.4	9.62	107.3	9.16	16.13	-30.00
-28.00	0.09268	1380.0	0.20682	163.62	381.70	1.264	0.778	1.153	418.0	9.71	106.3	9.35	15.83	-28.00
-26.07 <sup>b</sup>	0.10132	1374.3	0.19016	166.07	382.90	1.268	0.784	1.154	406.4	9.79	105.4	9.52	15.54	-26.07
-26.00	0.10164	1374.1	0.18961	166.16	382.94	1.268	0.785	1.154	406.0	9.79	105.4	9.53	15.53	-26.00
-24.00	0.11127	1368.2	0.17410	168.70	384.19	1.273	0.791	1.155	394.6	9.88	104.5	9.71	15.23	-24.00
-22.00	0.12160	1362.2	0.16010	171.26	385.43	1.277	0.798	1.156	383.6	9.96	103.6	9.89	14.93	-22.00
-20.00	0.13268	1356.2	0.14744	173.82	386.66	1.282	0.805	1.157	373.1	10.05	102.6	10.07	14.63	-20.00
-18.00	0.14454	1350.2	0.13597	176.39	387.89	1.286	0.812	1.159	363.0	10.14	101.7	10.24	14.33	-18.00
-16.00	0.15721	1344.1	0.12556	178.97	389.11	1.291	0.820	1.160	353.3	10.22	100.8	10.42	14.04	-16.00
-14.00	0.17074	1338.0	0.11610	181.56	390.33	1.296	0.827	1.162	344.0	10.31	99.9	10.59	13.74	-14.00
-12.00	0.18516	1331.8	0.10749	184.16	391.55	1.301	0.835	1.164	335.0	10.40	99.0	10.76	13.45	-12.00
-10.00	0.20052	1325.6	0.09963	186.78	392.75	1.306	0.842	1.166	326.3	10.49	98.0	10.93	13.16	-10.00
-8.00	0.21684	1319.3	0.09246	189.40	393.95	1.312	0.850	1.168	318.0	10.58	97.1	11.10	12.87	-8.00
-6.00	0.23418	1313.0	0.08591	192.03	395.15	1.317	0.858	1.170	309.9	10.67	96.2	11.28	12.58	-6.00
-4.00	0.25257	1306.6	0.07991	194.68	396.33	1.323	0.866	1.172	302.2	10.76	95.3	11.45	12.29	-4.00
-2.00	0.27206	1300.2	0.07440	197.33	397.51	1.329	0.875	1.175	294.7	10.85	94.3	11.62	12.00	-2.00
0.00	0.29269	1293.7	0.06935	200.00	398.68	1.335	0.883	1.178	287.4	10.94	93.4	11.79	11.71	0.00
2.00	0.31450	1287.1	0.06470	202.68	399.84	1.341	0.892	1.180	280.4	11.03	92.5	11.96	11.43	2.00
4.00	0.33755	1280.5	0.06042	205.37	401.00	1.347	0.901	1.183	273.6	11.13	91.6	12.13	11.14	4.00
6.00	0.36186	1273.8	0.05648	208.08	402.14	1.353	0.910	1.187	267.0	11.22	90.7	12.31	10.86	6.00
8.00	0.38749	1267.0	0.05284	210.80	403.27	1.360	0.920	1.190	260.6	11.32	89.7	12.48	10.58	8.00
10.00	0.41449	1260.2	0.04948	213.53	404.40	1.367	0.930	1.193	254.3	11.42	88.8	12.66	10.30	10.00
12.00	0.44289	1253.3	0.04636	216.27	405.51	1.374	0.939	1.197	248.3	11.52	87.9	12.84	10.02	12.00
14.00	0.47276	1246.3	0.04348	219.03	406.61	1.381	0.950	1.201	242.5	11.62	87.0	13.02	9.74	14.00
16.00	0.50413	1239.3	0.04081	221.80	407.70	1.388	0.960	1.206	236.8	11.72	86.0	13.20	9.47	16.00
18.00	0.53706	1232.1	0.03833	224.59	408.78	1.396	0.971	1.210	231.2	11.82	85.1	13.39	9.19	18.00
20.00	0.57159	1224.9	0.03603	227.40	409.84	1.404	0.982	1.215	225.8	11.92	84.2	13.57	8.92	20.00
22.00	0.60777	1217.5	0.03388	230.21	410.89	1.412	0.994	1.220	220.5	12.03	83.3	13.76	8.65	22.00
24.00	0.64566	1210.1	0.03189	233.05	411.93	1.420	1.006	1.226	215.4	12.14	82.4	13.96	8.38	24.00
26.00	0.68531	1202.6	0.03003	235.90	412.95	1.429	1.018	1.231	210.4	12.25	81.4	14.15	8.11	26.00
28.00	0.72676	1194.9	0.02829	238.77	413.95	1.438	1.031	1.238	205.5	12.36	80.5	14.35	7.84	28.00
30.00	0.77008	1187.2	0.02667	241.65	414.94	1.447	1.044	1.244	200.7	12.48	79.6	14.56	7.57	30.00
32.00	0.81530	1179.3	0.02516	244.55	415.90	1.457	1.058	1.251	196.0	12.60	78.7	14.76	7.31	32.00
34.00	0.86250	1171.3	0.02374	247.47	416.85	1.467	1.073	1.259	191.4	12.72	77.7	14.97	7.05	34.00
36.00	0.91172	1163.2	0.02241	250.41	417.78	1.478	1.088	1.267	186.9	12.84	76.8	15.19	6.78	36.00
38.00	0.96301	1154.9	0.02116	253.37	418.69	1.489	1.104	1.276	182.5	12.97	75.9	15.41	6.52	38.00
40.00	1.0165	1146.5	0.01999	256.35	419.58	1.500	1.120	1.285	178.2	13.10	75.0	15.64	6.27	40.00
42.00	1.0721	1137.9	0.01890	259.35	420.44	1.513	1.138	1.295	174.0	13.24	74.1	15.86	6.01	42.00
44.00	1.1300	1129.2	0.01786	262.38	421.28	1.525	1.156	1.306	169.8	13.38	73.1	16.10	5.76	44.00
46.00	1.1901	1120.3	0.01689	265.42	422.09	1.539	1.175	1.318	165.7	13.52	72.2	16.34	5.51	46.00
48.00	1.2527	1111.3	0.01598	268.49	422.88	1.553	1.196	1.331	161.7	13.67	71.3	16.59	5.26	48.00
50.00	1.3177	1102.0	0.01511	271.59	423.63	1.569	1.218	1.345	157.7	13.83	70.4	16.84	5.01	50.00
52.00	1.3852	1092.6	0.01430	274.71	424.35	1.585	1.241	1.360	153.8	13.99	69.5	17.10	4.76	52.00
54.00	1.4553	1082.9	0.01353	277.86	425.03	1.602	1.266	1.377	149.9	14.16	68.5	17.36	4.52	54.00
56.00	1.5280	1073.0	0.01280	281.04	425.68	1.621	1.293	1.395	146.1	14.33	67.6	17.63	4.28	56.00
58.00	1.6033	1062.8	0.01212	284.25	426.29	1.641	1.322	1.416	142.3	14.51	66.7	17.91	4.04	58.00
60.00	1.6815	1052.4	0.01146	287.49	426.86	1.663	1.354	1.438	138.6	14.71	65.8	18.19	3.81	60.00
62.00	1.7625	1041.7	0.01085	290.77	427.37	1.686	1.388	1.463	134.9	14.91	64.9	18.48	3.57	62.00
64.00	1.8464	1030.7	0.01026	294.08	427.84	1.712	1.426	1.490	131.2	15.12	63.9	18.78	3.34	64.00
66.00	1.9334	1019.4	0.00970	297.44	428.25	1.740	1.468	1.522	127.5	15.35	63.0	19.09	3.12	66.00
68.00	2.0234	1007.7	0.00917	300.84	428.61	1.772	1.515	1.557	123.9	15.59	62.1	19.40	2.89	68.00
70.00	2.1165	995.6	0.00867	304.29	428.89	1.806	1.567	1.597	120.3	15.85	61.2	19.72	2.67	70.00
72.00	2.2130	983.1	0.00818	307.79	429.10	1.846	1.626	1.642	116.7	16.12	60.3	20.05	2.46	72.00
74.00	2.3127	970.0	0.00772	311.34	429.23	1.890	1.693	1.695	113.1	16.41	59.3	20.39	2.24	74.00
76.00	2.4159	956.5	0.00728	314.96	429.27	1.941	1.770	1.757	109.4	16.73	58.4	20.74	2.03	76.00
78.00	2.5227	942.3	0.00686	318.65	429.20	2.000	1.861	1.830	105.8	17.08	57.5	21.09	1.83	78.00
80.00	2.6331	927.4	0.00646	322.41	429.02	2.069	1.967	1.917	102.1	17.46	56.6	21.46	1.63	80.00
85.00	2.9259	886.2	0.00550	332.27	427.91	2.313	2.348	2.231	92.7	18.59	54.3	22.41	1.15	85.00
90.00	3.2445	836.9	0.00461	343.01	425.48	2.766	3.064	2.832	82.6	20.15	—	—	0.72	90.00
95.00	3.5916	771.6	0.00374	355.43	420.60	3.961</								

**Propiedades termofísicas de la materia**

**TABLA B.10** Propiedades termofísicas del Refrigerante 717 (Amoníaco) saturado [6].

Temp. (°C)	Presión (Mpa)	Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	Volumen específico (m <sup>3</sup> /kg)	Entalpía específica (kJ/kg)		Calor específico a presión cte. c <sub>p</sub> [kJ/(kg K)]		c <sub>p</sub> /c <sub>v</sub>	Viscosidad (μPa s)		Conductividad térmica [mW/(m K)]		Tensión superficial (mN/m)	Temp. (°C)
				Líquido	Vapor	Líquido	Vapor		Líquido	Vapor	Líquido	Vapor		
-77.66 <sup>a</sup>	0.00604	733.9	15.732	-147.36	1342.85	—	1.988	1.335	505.8	6.86	—	12.83	—	-77.66
-70.00	0.01089	725.3	9.0520	-111.74	1357.04	—	2.008	1.337	460.4	7.06	—	13.65	42.44	-70.00
-60.00	0.02185	713.9	4.7166	-67.67	1375.00	—	2.047	1.341	391.8	7.33	—	14.68	40.17	-60.00
-50.00	0.04081	702.0	2.6300	-24.17	1392.17	—	2.102	1.346	333.1	7.61	—	15.72	37.91	-50.00
-40.00	0.07168	689.9	1.5535	19.60	1408.41	4.396	2.175	1.352	287.0	7.90	601.4	16.79	35.65	-40.00
-38.00	0.07970	687.4	1.4068	28.41	1411.54	4.406	2.192	1.353	279.1	7.96	597.3	16.99	35.20	-38.00
-36.00	0.08844	684.9	1.2765	37.24	1414.62	4.417	2.210	1.355	271.5	8.02	593.2	17.20	34.76	-36.00
-34.00	0.09795	682.5	1.1603	46.09	1417.66	4.427	2.229	1.356	264.3	8.08	589.1	17.41	34.31	-34.00
-33.33 <sup>b</sup>	0.10133	681.6	1.1241	49.08	1418.67	4.430	2.235	1.357	261.9	8.10	587.8	17.48	34.16	-33.33
-32.00	0.10826	680.0	1.0566	54.97	1420.65	4.437	2.248	1.358	257.4	8.13	585.1	17.62	33.86	-32.00
-30.00	0.11944	677.5	0.96377	63.86	1423.60	4.448	2.268	1.360	250.7	8.19	581.0	17.83	33.41	-30.00
-28.00	0.13153	675.0	0.88062	72.78	1426.51	4.458	2.289	1.361	244.4	8.25	576.9	18.04	32.97	-28.00
-26.00	0.14459	672.5	0.80595	81.72	1429.36	4.469	2.310	1.363	238.3	8.31	572.9	18.26	32.52	-26.00
-24.00	0.15866	670.0	0.73877	90.68	1432.17	4.479	2.332	1.365	232.4	8.37	568.8	18.49	32.07	-24.00
-22.00	0.17382	667.4	0.67822	99.66	1434.93	4.490	2.355	1.368	226.8	8.43	564.8	18.72	31.63	-22.00
-20.00	0.19011	664.9	0.62356	108.67	1437.64	4.501	2.379	1.370	221.3	8.49	560.7	18.96	31.18	-20.00
-18.00	0.20760	662.3	0.57413	117.69	1440.30	4.512	2.404	1.372	216.1	8.55	556.7	19.21	30.74	-18.00
-16.00	0.22634	659.8	0.52936	126.74	1442.91	4.523	2.429	1.375	211.0	8.61	552.6	19.47	30.29	-16.00
-14.00	0.24640	657.2	0.48874	135.82	1445.47	4.534	2.455	1.377	206.1	8.67	548.6	19.74	29.85	-14.00
-12.00	0.26785	654.6	0.45182	144.91	1447.97	4.545	2.482	1.380	201.4	8.73	544.5	20.01	29.41	-12.00
-10.00	0.29075	652.0	0.41823	154.03	1450.42	4.556	2.510	1.383	196.8	8.79	540.5	20.29	28.97	-10.00
-8.00	0.31517	649.3	0.38761	163.18	1452.81	4.568	2.538	1.386	192.3	8.85	536.5	20.59	28.52	-8.00
-6.00	0.34117	646.7	0.35966	172.35	1455.15	4.580	2.567	1.389	188.0	8.91	532.4	20.89	28.08	-6.00
-4.00	0.36882	644.0	0.33411	181.54	1457.43	4.592	2.597	1.393	183.8	8.97	528.3	21.20	27.64	-4.00
-2.00	0.39821	641.3	0.31073	190.76	1459.65	4.604	2.628	1.396	179.7	9.03	524.3	21.51	27.20	-2.00
0.00	0.42941	638.6	0.28929	200.00	1461.81	4.617	2.660	1.400	175.8	9.09	520.2	21.84	26.76	0.00
2.00	0.46248	635.9	0.26962	209.27	1463.91	4.630	2.692	1.404	171.9	9.15	516.2	22.17	26.32	2.00
4.00	0.49749	633.2	0.25154	218.57	1465.94	4.643	2.726	1.408	168.2	9.21	512.1	22.50	25.88	4.00
6.00	0.53454	630.4	0.23491	227.89	1467.91	4.656	2.760	1.413	164.6	9.27	508.0	22.85	25.45	6.00
8.00	0.57370	627.6	0.21959	237.24	1469.82	4.670	2.795	1.417	161.0	9.33	503.9	23.19	25.01	8.00
10.00	0.61504	624.8	0.20545	246.62	1471.66	4.683	2.831	1.422	157.6	9.40	499.8	23.55	24.57	10.00
12.00	0.65865	622.0	0.19240	256.03	1473.43	4.696	2.868	1.427	154.2	9.46	495.7	23.90	24.14	12.00
14.00	0.70461	619.1	0.18034	265.46	1475.13	4.712	2.906	1.433	150.9	9.52	491.6	24.27	23.70	14.00
16.00	0.75301	616.2	0.16917	274.93	1476.75	4.727	2.945	1.439	147.8	9.58	487.5	24.63	23.27	16.00
18.00	0.80392	613.3	0.15882	284.43	1478.30	4.742	2.985	1.445	144.6	9.64	483.3	25.00	22.83	18.00
20.00	0.85744	610.4	0.14923	293.96	1479.78	4.758	3.027	1.451	141.6	9.71	479.2	25.38	22.40	20.00
22.00	0.91364	607.5	0.14032	303.52	1481.18	4.774	3.069	1.458	138.7	9.77	475.0	25.75	21.96	22.00
24.00	0.97262	604.5	0.13204	313.11	1482.49	4.791	3.113	1.465	135.8	9.83	470.9	26.13	21.53	24.00
26.00	1.0345	601.5	0.12434	322.73	1483.72	4.808	3.158	1.473	133.0	9.90	466.7	26.52	21.10	26.00
28.00	1.0993	598.4	0.11717	332.39	1484.87	4.825	3.204	1.481	130.3	9.96	462.5	26.92	20.67	28.00
30.00	1.1671	595.4	0.11048	342.08	1485.93	4.843	3.252	1.489	127.6	10.02	458.3	27.30	20.24	30.00
32.00	1.2381	592.3	0.10424	351.81	1486.90	4.862	3.301	1.498	125.0	10.09	454.1	27.70	19.81	32.00
34.00	1.3123	589.1	0.09842	361.58	1487.78	4.881	3.352	1.507	122.5	10.15	449.9	28.10	19.38	34.00
36.00	1.3898	586.0	0.09297	371.38	1488.56	4.901	3.405	1.517	120.0	10.22	445.6	28.51	18.95	36.00
38.00	1.4708	582.8	0.08788	381.23	1489.24	4.922	3.459	1.527	117.6	10.29	441.4	28.92	18.53	38.00
40.00	1.5553	579.5	0.08311	391.11	1489.02	4.943	3.516	1.538	115.2	10.35	437.1	29.34	18.10	40.00
42.00	1.6434	576.3	0.07864	401.03	1490.30	4.966	3.574	1.549	112.9	10.42	432.8	29.76	17.68	42.00
44.00	1.7352	573.0	0.07445	411.00	1490.67	4.989	3.635	1.562	110.7	10.49	428.5	30.20	17.25	44.00
46.00	1.8308	569.7	0.07051	421.01	1490.92	5.013	3.698	1.574	108.5	10.56	424.2	30.64	16.83	46.00
48.00	1.9303	566.3	0.06682	431.07	1491.07	5.039	3.764	1.588	106.4	10.63	419.9	31.09	16.40	48.00
50.00	2.0339	562.9	0.06334	441.18	1491.09	5.066	3.832	1.602	104.3	10.70	415.6	31.54	15.98	50.00
52.00	2.1415	559.4	0.06007	451.33	1491.00	5.095	3.903	1.617	102.2	10.78	411.2	32.01	15.56	52.00
54.00	2.2534	555.9	0.05699	461.54	1490.78	5.124	3.977	1.633	100.2	10.85	406.8	32.49	15.14	54.00
56.00	2.3696	552.4	0.05409	471.80	1490.43	5.156	4.055	1.650	98.3	10.93	402.4	32.98	14.72	56.00
58.00	2.4903	548.8	0.05136	482.12	1489.94	5.190	4.136	1.668	96.4	11.00	398.0	33.49	14.30	58.00
60.00	2.6154	545.2	0.04878	492.50	1489.32	5.225	4.221	1.687	94.5	11.08	393.6	34.00	13.88	60.00
62.00	2.7452	541.5	0.04634	502.94	1488.55	5.263	4.310	1.707	92.7	11.16	389.1	34.54	13.47	62.00
64.00	2.8798	537.7	0.04404	513.45	1487.63	5.303	4.404	1.728	90.9	11.24	384.6	35.09	13.05	64.00
66.00	3.0193	534.0	0.04186	524.03	1486.56	5.346	4.502	1.751	89.1	11.32	380.1	35.66	12.64	66.00
68.00	3.1637	530.1	0.03980	534.68	1485.33	5.392	4.606	1.775	87.4	11.41	375.6	36.25	12.22	68.00
70.00	3.3133	526.2	0.03785	545.41	1483.94	5.441	4.716	1.801	85.7	11.50	371.0	36.86	11.81	70.00
75.00	3.7103	516.1	0.03340	572.62	1479.67	5.581	5.019	1.874	81.5	11.73	359.4	38.49	10.79	75.00
80.00	4.1418	505.6	0.02949	600.44	1474.20	5.749	5.374	1.960	77.6	11.98	347.6	40.29	9.77	80.00
85.00	4.6099	494.5	0.02605	628.97	1467.38	5.955	5.794	2.064	73.7	12.26	335.6	42.31	8.76	85.00
90.00	5.1167	482.8	0.02299	658.36	1459.01	6.211	6.302	2.192	70.0	12.56	323.1	44.57	7.76	90.00
95.00	5.6643	470.3	0.02027	688.77	1448.84	6.535	6.933	2.353	66.4	12.91	310.2	47.15	6.77	95.00
100.00	6.2553	456.9	0.01783	720.44	1436.53	6.959	7.739	2.562	62.7	13.31	296.8	50.11	5.79	100.00
105.00	6.8922	442.2												

## Apéndice B

**TABLA B.11** Propiedades termofísicas de fluidos orgánicos para intercambio de calor [7].

Fluido <sup>a</sup>	Intervalo de temperaturas de uso (°C)		Propiedades del líquido a 315°C				
	Líquido	Vapor	Presión de vapor <sup>b</sup> (bar)	$\frac{\lambda}{\text{W/m K}}$	$\frac{\rho}{\text{kg/m}^3}$	$\frac{c_p}{\text{J/kg K}}$	$\frac{\mu}{10^{-4} (\text{Pa s})}$
Dowtherm A (Dow Chemical)	15/400	260/400	3.12	0.106	789.5	2422	1.9
Dowtherm J (Dow Chemical)	-75/315	180/315	12.03	0.108	568.0	3017	1.0
Syltherm 860 (Dow Corning)	-40/400	—	4.46	0.090	672.8	2050	4.3
Caloria HT 43 (Exxon)	-10/315	—	8.60	0.0796	711.5	2929	4.0
Texatherm (Texaco)	-15/315	—	11.36	0.111	679.2	2929	5.4
Mobiltherm 600 (Mobil Oil)	-15/315	—	15.49	0.104	757.7	2929	4.5
Marlotherm S (Chemische Werke Hüls)	-20/350	—	10.25	0.111	814.5	2544	3.8
Therm S 600 (Nippon Steel Chemical)	-40/375	—	1.79	0.0984	768.2	2615	3.22
Agua			106.20				

a: Los fluidos listados son marcas comerciales registradas.

b: La principal cualidad de estos líquidos orgánicos como fluidos térmicos es su baja presión de vapor.

**TABLA B.12** Propiedades termofísicas del fluido térmico Therminol 60 de la compañía Monsanto en estado de líquido saturado [1].

	$T$ K	$\frac{\lambda}{\text{W/m K}}$	$\frac{\rho}{\text{kg/m}^3}$	$\frac{c_p}{\text{J/kg K}}$	$\frac{\mu}{10^{-4} \text{ Pa s}}$	$\frac{\nu}{10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}}$	Pr
Punto de fusión 205 K	230	0.132	1040	1380	6210	597	6490
	250	0.131	1030	1460	686	66.6	765
	300	0.129	995	1640	63.8	6.41	81.1
	350	0.125	960	1820	21.5	2.24	31.3
Punto de ebullición 561 K al 10%	400	0.120	924	1990	10.8	1.17	17.9
	450	0.115	888	2160	6.62	0.745	12.4
	500	0.108	849	2320	4.59	0.541	9.86
	550	0.100	808	2470	3.47	0.429	8.57

**Propiedades termofísicas de la materia**

**TABLA B.13** Propiedades termofísicas de soluciones acuosas de etilenglicol a diversas concentraciones [1], [6].

$T$ K	Porcentaje de glicol por masa (punto de congelación)				
	20 (263.7 K)	30 (257.6 K)	40 (248.7 K)	50 (237.6 K)	60 (213.2 K)
Conductividad térmica $\lambda$ (W/m K)					
250	—	—	0.456	0.425	0.400
260	—	0.488	0.456	0.423	0.397
270	0.513	0.488	0.456	0.422	0.394
280	0.519	0.491	0.456	0.419	0.393
290	0.522	0.493	0.456	0.418	0.389
300	0.525	0.494	0.456	0.418	0.388
310	0.531	0.495	0.456	0.417	0.385
320	0.538	0.497	0.456	0.416	0.381
Densidad $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )					
250	—	—	1069.0	1084.0	1098.5
260	—	1051.6	1066.0	1080.5	1094.0
270	1034.1	1048.1	1061.5	1076.0	1089.0
280	1031.1	1044.1	1057.0	1071.0	1085.0
290	1026.6	1039.1	1052.1	1066.0	1079.0
300	1022.6	1035.6	1047.1	1060.5	1073.0
310	1018.6	1031.1	1043.1	1054.1	1066.5
320	1014.1	1025.6	1037.1	1048.1	1060.0
Calor específico $c_p$ (J/kg K)					
250	—	—	—	3480	3260
260	—	—	3710	3490	3300
270	4050	3930	3720	3510	3330
280	4030	3920	3740	3550	3360
290	4020	3930	3750	3570	3400
300	4010	3940	3760	3600	3430
310	4010	3950	3780	3620	3460
320	4020	3960	3800	3650	3500
Viscosidad dinámica $\mu$ (10 <sup>-3</sup> Pa s)					
250	—	—	—	29.0	45.0
260	—	—	11.2	16.2	20.0
270	3.6	5.0	7.0	9.5	14.1
280	2.4	3.4	4.9	6.2	8.8
290	1.8	2.3	3.1	4.1	5.6
300	1.4	1.8	2.3	3.0	4.0
310	1.1	1.4	1.8	2.3	3.0
320	0.9	1.1	1.5	1.8	2.4

**Apéndice B**

**TABLA B.14** Propiedades termofísicas de líquidos dieléctricos saturados [1], [2], [5]. [6].

Líquido saturado	T	$\lambda$	$\rho$	$c_p$	$\mu$	$\beta$
	K	W/m K	kg/m <sup>3</sup>	J/kg K	10 <sup>-4</sup> Pa s	10 <sup>-3</sup> K <sup>-1</sup>
Aceite de motor SAE 50 sin usar	280	0.147	895	1810	21900	0.70
	290	0.146	889	1850	10900	0.70
	300	0.1445	883	1900	5030	0.70
	310	0.1435	877	1950	2500	0.70
	320	0.1425	871	1990	1370	0.70
	330	0.1415	865	2030	796	0.70
	340	0.1405	859	2070	515	0.70
	350	0.139	854	2120	350	0.70
	360	0.138	848	2160	255	0.70
	370	0.137	842	2200	189	0.70
	380	0.136	837	2250	147	0.70
	390	0.135	832	2290	112	0.70
	400	0.134	826	2330	88.4	0.70
	410	0.133	820	2380	71.3	0.70
420	0.132	815	2420	57.9	0.70	
Amoníaco  Punto de fusión normal: 195 K Punto de ebullición normal: 240 K Entalpía de vaporización en el punto de ebullición normal: 1.37×10 <sup>6</sup> J/kg	223	—	702	—	3.33	
	233	0.601	690	4396	2.87	
	240	0.588	682	4430	2.62	
	250	0.567	670	4490	2.29	
	260	0.546	656	4540	2.04	
	270	0.526	642	4598	1.82	
	280	0.506	629	4663	1.63	
	290	0.485	615	4734	1.45	
	300	0.464	600	4816	1.31	
	310	0.443	584	4912	1.19	
320	0.422	568	5026	1.07		
Dióxido de carbono  Temperatura de sublimación a presión atmosférica: 195 K	220	0.176	1165	1988	2.43	
	230	0.163	1128	1994	2.07	
	240	0.151	1088	2035	1.77	
	250	0.139	1045	2112	1.51	
	260	0.126	1000	2238	1.30	
	270	0.114	945	2447	1.11	
	280	0.102	883	2826	0.922	
	290	0.091	803	3703	0.732	
	301	0.076	656	11413	0.050	

**Propiedades termofísicas de la materia**

**TABLA B.14** Propiedades termofísicas de líquidos dieléctricos saturados [1], [2], [5], [6].

Líquido saturado	T	$\lambda$	$\rho$	$c_p$	$\mu$	$\beta$
	K	W/m K	kg/m <sup>3</sup>	J/kg K	10 <sup>-4</sup> Pa s	10 <sup>-3</sup> K <sup>-1</sup>
Etilen-glicol, C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> (OH) <sub>2</sub>	273	0.242	1130	2294	651	0.65
	280	0.244	1125	2323	420	0.65
	290	0.248	1118	2368	247	0.65
	300	0.252	1111	2415	157	0.65
	310	0.255	1103	2460	107	0.65
	320	0.258	1096	2505	75.7	0.65
	330	0.260	1089	2549	56.1	0.65
	340	0.261	1083	2592	43.1	0.65
	350	0.261	1079	2637	34.2	0.65
	360	0.261	1074	2682	27.8	0.65
	370	0.262	1066	2728	22.8	0.65
373	0.263	1058	2742	21.5	0.65	
Glicerina, C <sub>3</sub> H <sub>5</sub> (OH) <sub>3</sub>	273	0.282	1276	2261	106035	0.47
	283	0.284	1270	2319	38100	0.47
	293	0.286	1264	2386	14915	0.48
	303	0.286	1258	2445	6290	0.48
	313	0.286	1252	2512	2754	0.49
	323	0.287	1244	2583	1866	0.50
Nitrógeno Punto de fusión normal: 63.3 K Punto de ebullición normal: 77.4 K Entalpía de vaporización en el punto de ebullición normal, 0.200×10 <sup>6</sup> J/kg	70	0.151	841	2025	2.17	
	77.4	0.137	809	2060	1.62	
	80	0.132	796	2070	1.48	
	90	0.114	746	2130	1.10	
	100	0.097	689	2310	0.87	
	110	0.080	620	2710	0.71	
	120	0.063	525	4350	0.48	
Oxígeno Punto de fusión normal: 55 K Punto de ebullición normal: 90 K Entalpía de vaporización en el punto de ebullición normal, 0.213×10 <sup>6</sup> J/kg	60	0.19	1280	1660	5.89	
	70	0.17	1220	1666	3.78	
	80	0.16	1190	1679	2.50	
	90	0.15	1140	1694	1.60	
	100	0.14	1110	1717	1.22	

**TABLA B.15** Propiedades termofísicas de líquidos metálicos saturados [1], [2], [8].

Metal líquido	T K	$\lambda$ W/m K	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$c_p$ J/kg K	$\mu$ 10 <sup>-4</sup> Pa·s	$\nu$ 10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s	Pr	$\beta$ 10 <sup>-3</sup> K <sup>-1</sup>
Plomo	650	16.7	10530	158	23.9	0.227	0.023	
Punto de fusión normal: 600.6 K	700	17.5	10470	156	21.1	0.202	0.019	
Punto de ebullición normal: 2013.15 K	800	19.0	10350	155	17.2	0.166	0.014	
Entalpía de vaporización en el punto de ebullición normal: 862 kJ/kg	900	20.4	10230	155	14.9	0.146	0.011	
Litio	500	43.7	514	4340	5.31	1.033	0.053	
Punto de fusión normal: 453.7K	600	46.1	503	4230	4.26	0.847	0.039	
Punto de ebullición normal: 1615 K	700	48.4	493	4190	3.58	0.726	0.031	
Entalpía de vaporización en el punto de ebullición normal: 19.30×10 <sup>3</sup> kJ/kg	800	50.7	483	4170	3.10	0.642	0.025	
	900	52.9	473	4160	2.75	0.581	0.022	
Mercurio	300	8.54	13530	140	15.2	0.112	0.025	0.181
Punto de fusión 234.3 K	400	9.8	13287	136.5	11.7	0.0882	0.0163	0.181
Punto de ebullición normal: 630.1 K	500	11.0	13048	135.3	10.07	0.077	0.0125	0.182
Entalpía de vaporización en el punto de ebullición normal: 295 kJ/kg	600	11.95	12809	135.5	9.11	0.071	0.0103	0.187
Potasio	400	48.0	814	805	4.13	0.507	0.0693	
Punto de fusión normal: 336.4 K	500	45.2	790	785	3.01	0.381	0.00523	
Punto de ebullición normal: 1032.2 K	600	42.3	767	771	2.38	0.310	0.00434	
Entalpía de vaporización en el punto de ebullición normal: 1925 kJ/kg	700	39.4	743	762	1.98	0.266	0.00383	
	800	36.5	720	761	1.71	0.237	0.00357	
	900	33.6	696	769	1.51	0.217	0.00346	
Sodio	500	80.0	897	1335	4.24	0.473	0.0071	
Punto de fusión normal: 371K	600	75.4	874	1300	3.28	0.375	0.0056	
Punto de ebullición normal: 1151.2 K	700	70.7	850	1270	2.69	0.316	0.0048	
Entalpía de vaporización en el punto de ebullición normal: 3.89×10 <sup>3</sup> kJ/kg	800	64.9	826	1260	2.30	0.278	0.0045	
	900	61.4	802	1255	2.02	0.252	0.0041	
	1000	56.7	779	1260	1.81	0.232	0.0040	
	1100	52.1	755	1270	1.65	0.218	0.0040	

Propiedades radiativas

**TABLA B.16** Absortividades espectrales a la temperatura ambiente y a un ángulo de incidencia de 25° respecto a la normal (para los materiales no conductores  $\alpha(25^\circ) \cong \alpha(\text{hemisférica})$ ) [1].

	Longitud de onda, $\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )										
	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.6	0.7	0.8	1.0	1.5	2.0
Metales brillantes:											
Aluminio	0.05	0.05	0.07	0.07	0.08	0.11	0.12	0.14	0.08	0.04	0.035
Cromo	0.52	0.48	0.43	0.40	0.39	0.37	0.37	0.37	0.40	0.34	0.26
Cobre					0.53	0.23	0.14	0.10	0.06	0.032	0.029
Oro	0.80	0.78	0.75	0.74	0.60	0.17	0.11	0.08	0.043	0.034	0.027
Acero inoxidable		0.61	0.57	0.54	0.53	0.49	0.46	0.44	0.34	0.28	0.25
Titanio	0.71	0.65	0.59	0.56	0.53	0.48	0.47	0.43	0.44	0.40	0.34
Pinturas y recubrimientos:											
Terciopelo negro 3M	0.97	→	→	→	→	→	→	→	→	→	0.96
Aluminio anodizado duro	0.95	0.94	0.93	→	→	→	→	→	0.92	0.90	0.85
Titanio anodizado					0.53	0.48	0.48	0.48	0.50	0.50	0.52
Pintura epóxica blanca			0.60	0.12	0.10	0.15	0.21	0.09	0.08	0.30	0.43
Alúmina flameada	0.60	0.48	0.34	0.29	0.27	0.24	0.23	0.23	0.25	0.32	0.51
Pintura de aluminio			0.25	0.25	0.25	0.26	0.29	0.31	0.28	0.25	0.23

	Longitud de onda, $\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )										
	3	4	5	6	8	10	12	15	20	30	40
Metales brillantes:											
Aluminio	0.029	0.026	0.023	0.021	0.019	0.018	0.017	0.015	0.014	0.013	0.012
Cromo	0.19	0.145	0.110	0.088	0.078	0.065	0.059	0.05	0.047	0.036	0.030
Cobre	0.029	0.022	0.021	0.020	0.020	0.018	0.018	0.018	0.018		
Oro	0.025	0.023	0.023	0.022	0.022	0.020	0.020	0.020	0.020		
Acero inoxidable	0.20	0.17	0.15	0.14	0.12	0.11	0.10	0.09	0.077	0.062	0.053
Titanio	0.29	0.24	0.22	0.20	0.17	0.15	0.14	0.13	0.11	0.09	0.08
Pinturas y recubrimientos:											
Terciopelo negro 3M	0.96	0.96	0.95	0.96	0.91	0.95	0.95	0.94	0.94	0.97	0.97
Aluminio anodizado duro	0.92	0.74	0.70	0.83	0.96	0.98	0.84	0.83	0.80	0.80	
Titanio anodizado	0.89	0.76	0.76	0.82	0.83	0.90	0.91	0.88	0.85		
Pintura epóxica blanca	0.93	0.90	0.90	0.91	0.93	0.91	0.93	0.90	0.84	0.81	0.80
Alúmina flameada	0.73	0.53	0.62	0.88	0.98	0.98	0.74	0.79	0.75		
Pintura de aluminio	0.23	0.23	0.22	0.22	0.26	0.22	0.21	0.20	0.19		

**TABLA B.17** Propiedades espectrales de vidrios con incidencia de la radiación entre 0° y 45°.

	Longitud de onda, $\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )													
	0.3	0.35	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0 →
Vidrio de ventana (float)														
Transmitancia (espesor de 1.9 mm)	0.00	0.86	0.90	0.92	0.92	0.90	0.87	0.85	0.84	0.87	0.89	0.40	0.42	0.00
Transmitancia (espesor de 3.8 mm)	0.00	0.83	0.90	0.92	0.91	0.88	0.84	0.80	0.79	0.82	0.86	0.21	0.21	0.00
Reflectancia	Se puede tomar aproximadamente 0.1 para todas las longitudes de onda													
Vidrio termorreflectante														
Transmitancia	0.00	0.20	0.60	0.68	0.73	0.78	0.66	0.65	0.65	0.30	0.12	0.0	0.00	0.00
Reflectancia	0.14	0.16	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.18	0.11	0.27	0.51	0.72	0.76	0.78

**Apéndice B**

**TABLA B.18** Emisividad total, normal (n) o hemisférica (h), de metales sólidos a diversas temperaturas y en diversas condiciones superficiales [1], [2], [5].

Metal	T (K)											
	100	200	300	400	600	800	1000	1200	1500	2000	2500	3600
Acero inoxidable												
Pulido (n)			0.17	0.17	0.19	0.23	0.30					
Limpio (n)			0.22	0.22	0.24	0.28	0.35					
Ligeramente oxidado (n)						0.33	0.40					
Fuertemente oxidado (n)						0.67	0.70	0.76				
AISI 347 oxidado (n)					0.87	0.88	0.89	0.90				
Aluminio												
Muy pulido, película (h)	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06							
Hoja, brillante (h)	0.06	0.06	0.07	0.07								
Anodizado (h)			0.82	0.76								
Cobre												
Muy pulido (h)			0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04				
Oxidado (h)					0.50	0.58	0.80					
Cromo												
Pulido (n)	0.05	0.07	0.10	0.12	0.14							
Estaño												
Pulido (n)			0.05									
Hierro												
Electrolítico, muy pulido (n)				0.05	0.06							
Forjado y pulido (h)			0.29									
Forjado y mate (h)			0.91									
Fundido y torneado (n)			0.44									
Galvanizado brillante (n)			0.23									
Galvanizado gris (n)			0.28									
Herrumbroso (h)			0.83									
Oxidado (n)				0.74								
Plancha de fundición (n)			0.81									
Níquel												
Pulido (h)					0.09	0.11	0.14	0.17				
Oxidado (h)					0.40	0.49	0.57					
Latón												
Muy pulido (n)					0.03							
Oxidado (n)				0.60	0.60	0.60						
Oro												
Muy pulido o película (h)	0.01	0.02	0.03	0.03	0.04	0.05	0.06					
Hoja, brillante (h)	0.06	0.07	0.07									
Plata												
Pulida (h)			0.02	0.02	0.03	0.05	0.08					
Platino												
Pulido (h)						0.10	0.13	0.15	0.18			
Plomo												
Gris, oxidado (n)			0.28	0.63	0.63							
Puro, pulido (n)					0.08							
Tungsteno												
Pulido (h)							0.10	0.13	0.18	0.25	0.29	
Filamento (h)												0.39
Zinc												
Oxidado (n)					0.11							
Pulido (n)				0.05	0.06							

**TABLA B.19** Emisividad total, normal (n) o hemisférica (h), de materiales no metálicos [1], [2], [5].

Material	Temperatura (K)	Emisividad $\epsilon$
Agua (h)	300	0.96
Arcilla cocida (n)	350	0.91
Arena (h)	300	0.90
Asfalto (h)	300	0.88
Barro		
Esmaltado (h)	300	0.90
Mate (h)	300	0.93
Carbón (h)	300	0.78
Carbono		
Filamento (n)	1325–1675	0.53
Negro de humo (h)	300	0.92
Carburo de silicio (n)	600 1000 1500	0.87 0.87 0.85
Caucho (h)	300	0.88
Cerámicas		
Alfarería satinada (n)	300	0.90
Alfarería mate (n)	300	0.93
Porcelana (n)	300	0.92
Hielo		
Liso (h)	300	0.97
Cristalizado (h)	300	0.96
Escarcha (h)	300	0.99
Hormigón (h)	300	0.93
Materiales de construcción		
Asbestos (h)	300	0.93–0.96
Ladrillo rojo (h)	300	0.93–0.96
Madera (h)	300	0.82–0.92
Yeso (h)	300	0.90–0.92
Mica (n)	300	0.75
Nieve recién caída (h)	273	0.82

**TABLA B.19** Emisividad total, normal (n) o hemisférica (h), de materiales no metálicos [1], [2], [5].

Material	Temperatura (K)	Emisividad $\epsilon$
Óxido de aluminio (n)	600	0.69
	1000	0.55
	1500	0.41
Papel blanco (h)	300	0.86
Piel humana (h)	300	0.95
Pizarra (h)	300	0.85
Refractarios		
Ladrillos aislantes de caolín (n)	800	0.70
	1200	0.57
	1400	0.47
	1600	0.53
Ladrillos de alúmina (n)	800	0.40
	1000	0.33
	1400	0.28
	1600	0.33
Ladrillos de magnesia (n)	800	0.45
	1000	0.36
	1400	0.31
	1600	0.40
Ropa (h)	300	0.75–0.90
Teflon (h)	300	0.85
	400	0.87
	500	0.92
Tierra (h)	300	0.93–0.96
Rocas (h)	300	0.88–0.95
Vegetación (h)	300	0.92–0.96
Vidrio Pyrex (n)	300	0.82
	600	0.80
	1000	0.71
	1200	0.62

---

**Propiedades termofísicas de la materia**


---

**TABLA B.20** Comportamiento radiante de algunos materiales respecto de la radiación solar [1], [2].

Material	$\alpha_s$	$\varepsilon$ (a 300 K)	$\tau_s$
Chapa galvanizada			
Nuevo	0.65	0.13	
Oxidado, sometido a la intemperie	0.80	0.28	
Metales revestidos de			
Sulfuro negro	0.92	0.10	
Óxido de cobalto negro	0.93	0.30	
Óxido de níquel negro	0.92	0.08	
Cromo negro	0.87	0.09	
Pinturas			
Negras			
óptica de Parson	0.97	0.95	
silicona de alta temperatura	0.94	0.90	
epóxica	0.95	0.87	
esmalte calentado a 400°C		0.80	
barniz oscuro		0.89	
de aceite		0.92–0.96	
Blancas			
resina acrílica	0.26	0.90	
óxido de zinc	0.16	0.92	
epóxica	0.25	0.85	
Vidrio			
Float	0.1	0.84	0.80
de baja emisividad	0.21	0.14	0.56

## Referencias

---

Las relaciones de este apéndice se han elaborado a partir de información extraída de las siguientes fuentes:

1. A. F. Mills  
*Transferencia de calor*  
Irwin, Madrid, 1995.
2. F. P. Incropera, and D. de Witt  
*Fundamentals of Heat and Mass Transfer*  
Wiley, New York, 1990.
3. Goodfellow Catalogue  
Goodfellow Cambridge Limited, 1996
4. A. Bejan  
*Heat Transfer*  
Wiley, New York, 1993.
5. N. Ozisik  
*Heat Transfer. A Basic Approach*  
McGraw-Hill, New York, 1985.
6. American Society of Heating, Refrigerating and Air Conditioning Engineers  
*ASHRAE Handbook of Fundamentals*  
ASHRAE, Atlanta, 1993.
7. W. F. Seifert  
*Matching the Fluid with the Process*  
Chemical Engineering, feb. 1989, p. 99.
8. N. B. Vargaftik  
*Handbook of physical properties of liquids and gases*  
Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1975.



---

## APÉNDICE C

# Cálculo de pérdidas de carga

---

### Pérdidas de carga en conductos

La pérdida de carga por unidad de longitud en un tubo o conducto se suele calcular a través del llamado factor de fricción de Darcy  $f$  con la expresión

$$\frac{dp}{dx} = -f \frac{\frac{1}{2} \rho V^2}{D_h} \phi$$

donde  $V$  es la velocidad del fluido,  $\rho$  su densidad,  $D_h$  el diámetro hidráulico del tubo, y  $\phi$  un factor de corrección para flujo no isoterma dado por las expresiones  $0.91 (\mu_s/\mu)^{0.25}$  para  $Re < 2100$  y  $0.98 (\mu_s/\mu)^{0.14}$  para  $Re > 2100$ .  $\mu$  se calcula a la temperatura promedio del fluido en el tubo y  $\mu_s$  a la temperatura promedio de la pared del tubo.

A continuación se ofrecen expresiones para la determinación de  $f$  en el caso de fluido isoterma.

### Régimen laminar $Re < 2000$

$$f = \frac{C}{Re} \tag{C.1}$$

---




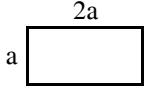

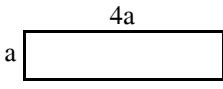
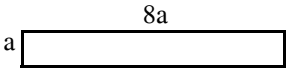
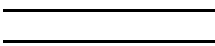
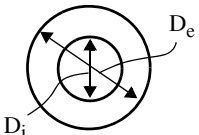
**Cálculo de pérdidas de carga**


---

donde  $Re = \frac{VD_h}{\nu}$  y  $D_h$  es el diámetro hidráulico definido como  $D_h \equiv \frac{4A_c}{P}$ ,  $A_c$  es la sección del conducto y  $P$  el perímetro húmedo.  $C$  toma un valor numérico que depende de la forma de la sección del tubo según se ve en la tabla C.1.

---

**TABLA C.1** Valor de la constante  $C$  en la ecuación (C.1) [1], [2].

Sección		C	
Triángulo equilátero		53.2	
Cuadrada		56.9	
Hexagonal		60.22	
Rectangular		62.19	
Circular		64	
Rectangular		72.9	
Rectangular		82.34	
Canal estrecho		96	
Anillos		$D_i/D_e$	
		0.1	89.4
		0.2	92.35
		0.4	94.7
		0.6	95.6
§ 0.8	96.0		

**Régimen turbulento,  $Re > 4000$** 

El número de Reynolds se define igual que en el régimen laminar

a) Tubos lisos

$$3000 < Re < 2 \times 10^4 \quad f = 0.316 Re^{-1/4} \quad (C.2)$$

$$10^4 < Re < 5 \times 10^6 \quad f = (0.790 \ln Re - 1.64)^{-2} \quad (C.3)$$

La ecuación (C.2) es la famosa expresión de Blasius [3] y la (C.3) se conoce como fórmula de Filonenko [4], [5].

b) Tubos rugosos

En el límite completamente rugoso

$$f = \left[ 0.87 \ln \left( \frac{D}{k} \right) + 1.14 \right]^{-2} \quad (C.4)$$

llamada fórmula de Prandtl y von Karman [6], [7].  $k$  es la rugosidad de la pared del tubo; valores típicos de esta magnitud aparecen en la tabla C.2.

El caso general lo cubre la fórmula de Colebrook [6]

$$\frac{1}{f^{1/2}} = -2.0 \log \left( \frac{2.51}{f^{1/2} Re} + \frac{k/D}{3.71} \right) \quad (C.5)$$

donde  $f$  se da de forma implícita. Una fórmula explícita la da Techo [6], [8]

$$f = \left[ -0.8685 \ln \left( \frac{1.964 \ln Re - 3.8215}{Re} + \frac{k/D}{3.71} \right) \right]^{-2} \quad (C.6)$$

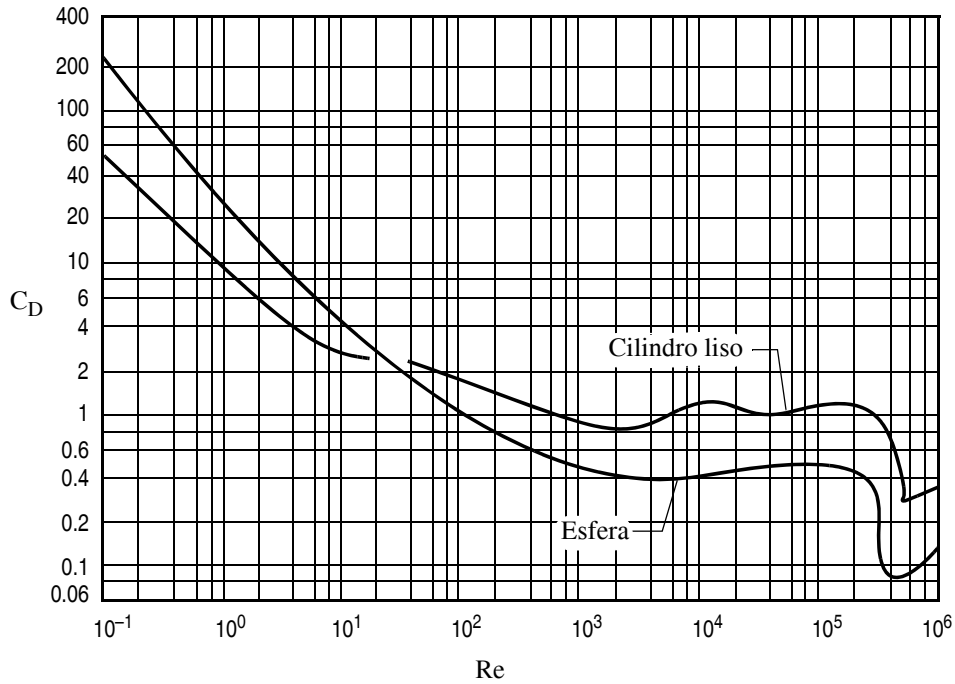
**TABLA C.2** Rugosidades de los materiales utilizados habitualmente en conductos [2], [6], [7].

Material	k/mm
Vidrio	liso ( $k = 0$ )
Plomo, cobre y latón	0.0015
Acero estirado nuevo usado (limpio) ligeramente corroído severamente corroído	0.04 (0.02–0.1) 0.15–0.20 hasta 0.4 hasta 3.0
Acero comercial, hierro forjado	0.05
Acero galvanizado	0.15
Fundición nuevo corroído con incrustaciones	0.26 1.0–1.5 1.5–4.0
Acero remachado	0.9 (0.5–10)
Madera cepillada serrada	0.2 0.7
Hormigón acabado suave basto	0.3–0.8 1.2–3.0

### Fuerza de arrastre sobre objetos sumergidos en un fluido

Esta fuerza viene dada por la expresión  $F_D = C_D A_f \frac{1}{2} \rho V^2$  donde  $C_D$  es el coeficiente de arrastre, que es función del número de Reynolds como se ve en la figura C.1 para los casos de un cilindro y una esfera de diámetro  $D$ ;  $A_f$  es el área frontal que ofrece el cuerpo sumergido al fluido;  $V$  es la velocidad de avance del fluido aguas arriba del objeto,  $\rho$  es la densidad del fluido, y el número de Reynolds se define de la forma habitual (ver capítulo 7) como  $Re \equiv VD/\nu$ .

FIGURA C.1 Coeficiente de arrastre de un cilindro liso y una esfera [9], [10].



### Pérdida de carga en banco de tubos

Para el caso de bancos de tubos lisos, la pérdida de carga se puede calcular con la fórmula (C.7) propuesta por Grimison [11]

$$\Delta p = f N_L \left( \frac{1}{2} \rho V_{\max}^2 \right) \quad (C.7)$$

donde  $N_L$  es el número de columnas de tubos en la dirección de avance del fluido;  $V_{\max}$  la velocidad máxima de paso del fluido por el banco (ver el capítulo de convección forzada exterior) y  $\rho$  su densidad;  $f$  es el factor de pérdida de carga dado por las expresiones (C.8) y (C.9) para tubos alineados y alternados respectivamente [12]

$$f = \left[ 0.176 + \frac{0.32 S_L/D}{(S_T/D - 1)^{0.43 + 1.13D/S_L}} \right] Re^{-0.15} \quad (C.8)$$

$$f = \left[ 1 + \frac{0.47}{\left( \left( S_T/D \right) - 1 \right)^{1.08}} \right] \text{Re}^{-0.16} \quad (\text{C.9})$$

donde  $S_T$  y  $S_L$  son las distancias entre los centros de los tubos en la dirección perpendicular y paralela al flujo respectivamente (ver figura 7.8),  $D$  es el diámetro exterior de los tubos y el número de Reynolds se define según se vió en el capítulo 7 para los bancos de tubos, o sea,

$$\text{Re} \equiv \frac{V_{\max} D}{\nu}$$

### **Pérdida de carga en intercambiadores de calor**

Es imposible ofrecer fórmulas sencillas para casos generales. La pérdida de carga depende de cada geometría particular y debe buscarse la forma de calcularla en la bibliografía especializada. Para el caso particular de intercambiadores compactos, en el capítulo de convección forzada exterior se muestran unas figuras con el valor del factor de pérdida de carga  $f$ , y muchos más casos se encuentran en las referencias [13] y [14].

Para intercambiadores de carcasa y tubos, la pérdida de carga del fluido que circula por la carcasa puede evaluarse con las expresiones propuestas por Donohue [15]. Este autor considera las pérdidas de carga al pasar el fluido por las ventanas de los deflectores y las que experimenta el fluido al pasar entre los tubos. Las ventanas considera que se comportan como orificios con coeficientes de descarga de valor aproximadamente 0.7 y comparando con datos experimentales obtiene la expresión [16]

$$\Delta p = 1.085 \rho V_{\max}^2 \quad (\text{C.10})$$

para la pérdida de carga en cada ventana, donde  $V_{\max}$  es la velocidad de paso del fluido por el área libre de la ventana, es decir, el área de la ventana menos la de la sección de los tubos que la atraviesan.

En cuanto a los trechos entre dos deflectores contiguos, Donohue propone la ecuación (C.7) para cada uno de ellos con el factor de fricción  $f$  dado por las expresiones (C.11)

$$\text{Re} \equiv \frac{V_{\max} D}{\nu} < 100 \quad f = \frac{60}{\left(\frac{S_T}{D} - 1\right) \text{Re}} \quad (\text{C.11a})$$

$$500 < \text{Re} < 30000 \quad f = \frac{3}{\left(\frac{S_T}{D} - 1\right)^{0.2} \text{Re}^{0.2}} \quad (\text{C.11b})$$

siendo  $V_{\max}$  la velocidad máxima de paso entre tubos en el centro de la carcasa según se define en el capítulo 7 para los bancos de tubos.

Por tanto, la pérdida total de carga del fluido que circula por la carcasa se obtiene sumando las pérdidas de carga de cada ventana (ecuación C.10) por el número de ventanas existentes en el intercambiador y las pérdidas de carga entre deflectores (ecuación C.11) por el número de trechos existentes.

### **Variación de la presión en intercambiadores de calor debido a cambios apreciables de densidad del fluido**

No hay que confundir la pérdida de carga con la variación de presión de un fluido al pasar por un equipo. La primera es una disminución de presión irreversible, y por tanto irre recuperable, debido a la fricción y otros fenómenos irreversibles que experimenta el fluido al circular; pero además el fluido puede variar su presión, aumentándola o disminuyéndola, debido a otras causas.

Una de esas causas es una variación de la densidad del fluido que, por la ecuación de continuidad, modifica su velocidad, es decir, lo acelera o decelera. En ese caso la contribución a la variación de la presión del fluido viene dada por la expresión

$$\Delta p = p_e - p_s = \frac{1}{2}(\rho V^2)_s - \frac{1}{2}(\rho V^2)_e = \frac{1}{2} \dot{m}^2 \left( \frac{1}{\rho_s A_s} - \frac{1}{\rho_e A_e} \right)$$

donde e y s indican respectivamente la entrada y salida;  $\rho$  la densidad del fluido,  $V$  su velocidad y  $\dot{m}$  su caudal másico;  $A$  es el área de paso del fluido.

Si, como es frecuente, las secciones de entrada y salida del fluido al intercambiador de calor son iguales, resulta  $A_s = A_e = A$

$$\Delta p = \frac{1}{2} G^2 \left( \frac{1}{\rho_s} - \frac{1}{\rho_e} \right), \text{ donde } G \text{ es el flujo másico, } G \equiv \frac{\dot{m}}{A}.$$

---

## Cálculo de pérdidas de carga

---

Este término de variación de presión es sólo apreciable cuando la variación de la densidad es significativa.

De la misma manera se calcularía la variación de presión debida a una variación de altura,  $\Delta p = g(\rho_s z_s - \rho_e z_e)$ .

## Potencia de bombeo

Para que un fluido circule por un equipo con un cierto caudal  $\dot{m}$  debe superar la variación de presión  $\Delta p$  que experimenta el fluido al pasar por dicho equipo. Si el fluido realiza un circuito cerrado después de pasar por todos los equipos de una instalación, caso habitual, el único incremento de presión que debe proporcionar el equipo de impulsión (compresor, bomba,...) es el debido a las pérdidas de carga que sufre el fluido al pasar por todo el circuito.

Si el equipo de impulsión tiene un rendimiento isoentrópico  $\eta$ , la potencia de la impulsión en una bomba adiabática viene dada por

$$\dot{W} = \frac{\dot{m}\Delta p}{\eta\rho}$$

para un fluido incompresible (líquidos) y en un compresor adiabático por

$$\dot{W} = \frac{\dot{m}c_p T_e}{\eta} \left[ \left( \frac{p_s}{p_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

para gases ideales, donde  $T_e$  es la temperatura de entrada del gas al compresor o ventilador,  $p_e$  y  $p_s$  las presiones de entrada y salida al mismo,  $\gamma$  el cociente  $c_p/c_v$  y tomándose  $c_p$  constante.

## Referencias

---

1. R. K. Shah, and A. L. London  
*Thermal Boundary Conditions and Some Solutions for Laminar Duct Flow Forced Convection*  
Journal of Heat Transfer, vol. 96, p. 159, 1974.

---

## Apéndice C

---

2. F. M. White  
*Mecánica de fluidos*  
McGraw–Hill, México, 1988.
3. Blasius  
*Der Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten*  
Mitt. Forschungsarbeiten VDI, Heft 131, 1913.
4. V. Gnielinski  
*New Equations for Heat and Mass Transfer in Turbulent Pipe and Channel Flow*  
International Chemical Engineering, vol. 16, p. 359, 1976.
5. M. N. Ozisik  
*Heat Transfer. A Basic Approach*  
McGraw–Hill, New York, 1985.
6. Nederlandse Gasunie  
*Physical Properties of Natural Gases*  
Nederlandse Gasunie, Groningen, 1988.
7. A. Bejan  
*Heat Transfer*  
Wiley, New York, 1993.
8. R. Techo, R. R. Tickner, and R. E. James  
*An Accurate Equation for the Computation of the Friction Factor for Smooth Pipes from the Reynolds Number*  
Journal of Applied Mechanics, June 1965, p. 443.
9. H. Schlichting  
*Boundary Layer Theory*  
McGraw–Hill, New York, 1979.
10. F. P. Incropera, and D. de Witt  
*Fundamentals of Heat and Mass Transfer*  
Wiley, New York, 1990.
11. E. D. Grimison  
*Correlation and Utilization of New Data on Flow Resistance and Heat Transfer for Cross Flow Over Tube Banks*  
Transactions of ASME, vol. 59, p. 583, 1937.
12. M. Jakob  
*Heat Transfer and Flow Resistance in Cross Flow of Gases Over Tube Banks (Discussion)*  
Transactions of ASME, vol. 60, p. 381, 1938.
13. W. M. Kays, and A. L. London  
*Compact Heat Exchangers*  
McGraw–Hill, New York, 1984.

---

**Cálculo de pérdidas de carga**

---

14. W. M. Kays, and M. E. Crawford  
*Convective Heat and Mass Transfer*  
McGraw-Hill, Singapore, 1993.
15. D. A. Donohue  
*Heat Transfer and Pressure Drop in Heat Exchangers*  
Industrial and Engineering Chemistry, vol. 41, p. 2499, 1949.
16. E. Costa Novella y otros  
*Ingeniería Química, vol. 3. Flujo de fluidos*  
Alhambra Universidad, Madrid, 1985.

---

## APÉNDICE D

### Dimensiones comerciales de tubos para intercambiadores de calor

---

TABLA D.1

Medidas	Diámetro exterior (mm)	Espesor mínimo (mm)
5/8" BWG 18 16 14 12	15.87	1.25 1.65 2.11 2.77
3/4" BWG 18 16 14 12	19.05	1.25 1.65 2.11 2.77
1" BWG 18 16 14 12	25.40	1.25 1.65 2.11 2.77
1 1/4" BWG 16 14 12	31.75	1.65 2.11 2.77
1 1/2" BWG 14 12	38.10	2.11 2.77
2" BWG 12	50.80	2.77

---

**Dimensiones comerciales de tubos para intercambiadores de calor**

---

---

## APÉNDICE E

# Funciones matemáticas de uso en transmisión de calor

---

## Funciones de Bessel

---

**TABLA E.1** Función de Bessel de primera especie y orden cero,  $J_0(x)$ .

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	1.0000	0.9975	0.9900	0.9776	0.9604	0.9385	0.9120	0.8812	0.8463	0.8075
1.	0.7652	0.7196	0.6711	0.6201	0.5669	0.5118	0.4554	0.3980	0.3400	0.2818
2.	0.2239	0.1666	0.1104	0.0555	0.0025	-0.0484	-0.0968	-0.1424	-0.1850	-0.2243
3.	-0.2601	-0.2921	-0.3202	-0.3443	-0.3643	-0.3801	-0.3918	-0.3992	-0.4026	-0.4018
4.	-0.3971	-0.3887	-0.3766	-0.3610	-0.3423	-0.3205	-0.2961	-0.2693	-0.2404	-0.2097
5.	-0.1776	-0.1443	-0.1103	-0.0758	-0.0412	-0.0068	0.0270	0.0599	0.0917	0.1220
6.	0.1506	0.1773	0.2017	0.2238	0.2433	0.2601	0.2740	0.2851	0.2931	0.2981
7.	0.3001	0.2991	0.2951	0.2882	0.2786	0.2663	0.2516	0.2346	0.2154	0.1944
8.	0.1717	0.1475	0.1222	0.0960	0.0692	0.0419	0.0146	-0.0125	-0.0392	-0.0653
9.	-0.0903	-0.1142	-0.1367	-0.1577	-0.1768	-0.1939	-0.2090	-0.2218	-0.2323	-0.2403

**NOTA.**— La presentación de las tablas E.1 a E.8 es la utilizada en la referencia [1], donde el argumento de la función tiene su parte entera (de 0 a 9) escrita en la primera columna y el primer decimal en la primera línea.

Ampliación de esta información con un mayor rango del argumento se puede encontrar en la referencia [2].

---

**Funciones matemáticas de uso en transmisión de calor**

---

**TABLA E.2** Función de Bessel de primera especie y orden uno,  $J_1(x)$ .

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	0.0000	0.0499	0.0995	0.1483	0.1960	0.2423	0.2867	0.3290	0.3688	0.4059
1.	0.4401	0.4709	0.4983	0.5220	0.5419	0.5579	0.5699	0.5778	0.5815	0.5812
2.	0.5767	0.5683	0.5560	0.5399	0.5202	0.4971	0.4708	0.4416	0.4097	0.3754
3.	0.3391	0.3009	0.2613	0.2207	0.1792	0.1374	0.0955	0.0538	0.0128	-0.0272
4.	-0.0660	-0.1033	-0.1386	-0.1719	-0.2028	-0.2311	-0.2566	-0.2791	-0.2985	-0.3147
5.	-0.3276	-0.3371	-0.3432	-0.3460	-0.3453	-0.3414	-0.3343	-0.3241	-0.3110	-0.2951
6.	-0.2767	-0.2559	-0.2329	-0.2081	-0.1816	-0.1538	-0.1250	-0.0953	-0.0652	-0.0349
7.	-0.0047	0.0252	0.0543	0.0826	0.1096	0.1352	0.1592	0.1813	0.2014	0.2192
8.	0.2346	0.2476	0.2580	0.2657	0.2708	0.2731	0.2728	0.2697	0.2641	0.2559
9.	0.2453	0.2324	0.2174	0.2004	0.1816	0.1613	0.1395	0.1166	0.0928	0.0684

**TABLA E.3** Función de Bessel de segunda especie y orden cero,  $Y_0(x)$ .

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	-x	-1.5342	-1.0811	-0.8073	-0.6060	-0.4445	-0.3085	-0.1907	-0.0868	0.0056
1.	0.0883	0.1622	0.2281	0.2865	0.3379	0.3824	0.4204	0.4520	0.4774	0.4968
2.	0.5104	0.5183	0.5208	0.5181	0.5104	0.4981	0.4813	0.4605	0.4359	0.4079
3.	0.3769	0.3431	0.3071	0.2691	0.2296	0.1890	0.1477	0.1061	0.0645	0.0234
4.	-0.0169	-0.0561	-0.0938	-0.1296	-0.1633	-0.1947	-0.2235	-0.2494	-0.2723	-0.2921
5.	-0.3085	-0.3216	-0.3313	-0.3374	-0.3402	-0.3395	-0.3354	-0.3282	-0.3177	-0.3044
6.	-0.2882	-0.2694	-0.2483	-0.2251	-0.1999	-0.1732	-0.1452	-0.1162	-0.0864	-0.0563
7.	-0.0259	0.0042	0.0339	0.0628	0.0907	0.1173	0.1424	0.1658	0.1872	0.2065
8.	0.2235	0.2381	0.2501	0.2595	0.2662	0.2702	0.2715	0.2700	0.2659	0.2592
9.	0.2499	0.2383	0.2245	0.2086	0.1907	0.1712	0.1502	0.1279	0.1045	0.0804

**TABLA E.4** Función de Bessel de segunda especie y orden uno,  $Y_1(x)$ .

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	-x	-6.4590	-3.3238	-2.2931	-1.7809	-1.4715	-1.2604	-1.1032	-0.9781	-0.8731
1.	-0.7812	-0.6981	-0.6211	-0.5485	-0.4791	-0.4123	-0.3476	-0.2847	-0.2237	-0.1644
2.	-0.1070	-0.0517	0.0015	0.0523	0.1005	0.1459	0.1884	0.2276	0.2635	0.2959
3.	0.3247	0.3496	0.3707	0.3879	0.4010	0.4102	0.4154	0.4167	0.4141	0.4078
4.	0.3979	0.3846	0.3680	0.3484	0.3260	0.3010	0.2737	0.2445	0.2136	0.1812
5.	0.1479	0.1137	0.0792	0.0445	0.0101	-0.0238	-0.0568	-0.0887	-0.1192	-0.1481
6.	-0.1750	-0.1998	-0.2223	-0.2422	-0.2596	-0.2741	-0.2857	-0.2945	-0.3002	-0.3029
7.	-0.3027	-0.2995	-0.2934	-0.2846	-0.2731	-0.2591	-0.2428	-0.2243	-0.2039	-0.1817
8.	-0.1581	-0.1331	-0.1072	-0.0806	-0.0535	-0.0262	0.0011	0.0280	0.0544	0.0799
9.	0.1043	0.1275	0.1491	0.1691	0.1871	0.2032	0.2171	0.2287	0.2379	0.2447

**Apéndice E**

**TABLA E.5** Función modificada de Bessel de primera especie y orden cero,  $I_0(x)$ .

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	1.000	1.003	1.010	1.023	1.040	1.063	1.092	1.126	1.167	1.213
1.	1.266	1.326	1.394	1.469	1.553	1.647	1.750	1.864	1.990	2.128
2.	2.280	2.446	2.629	2.830	3.049	3.290	3.553	3.842	4.157	4.503
3.	4.881	5.294	5.747	6.243	6.785	7.378	8.028	8.739	9.517	10.37
4.	11.30	12.32	13.44	14.67	16.01	17.48	19.09	20.86	22.79	24.91
5.	27.24	29.79	32.58	35.65	39.01	42.69	46.74	51.17	56.04	61.38
6.	67.23	73.66	80.72	88.46	96.96	106.3	116.5	127.8	140.1	153.7
7.	168.6	185.0	202.9	222.7	244.3	268.2	294.3	323.1	354.7	389.4
8.	427.6	469.5	515.6	566.3	621.9	683.2	750.5	824.4	905.8	995.2
9.	1094	1202	1321	1451	1595	1753	1927	2119	2329	2561

**TABLA E.6** Función modificada de Bessel de primera especie y orden uno,  $I_1(x)$ .

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	0.0	0.0501	0.1005	0.1517	0.2040	0.2579	0.3137	0.3719	0.4329	0.4971
1.	0.5652	0.6375	0.7147	0.7973	0.8861	0.9817	1.085	1.196	1.317	1.448
2.	1.591	1.745	1.914	2.098	2.298	2.517	2.755	3.016	3.301	3.613
3.	3.953	4.326	4.734	5.181	5.670	6.206	6.793	7.436	8.140	8.913
4.	9.759	10.69	11.71	12.82	14.05	15.39	16.86	18.48	20.25	22.20
5.	24.34	26.68	29.25	32.08	35.18	38.59	42.33	46.44	50.95	55.90
6.	61.34	67.32	73.89	81.10	89.03	97.74	107.3	117.8	129.4	142.1
7.	156.0	171.4	188.3	206.8	227.2	249.6	274.2	301.3	331.1	363.9
8.	399.9	439.5	483.0	531.0	583.7	641.6	705.4	775.5	852.7	937.5
9.	1031	1134	1247	1371	1508	1658	1824	2006	2207	2428

**TABLA E.7** Función modificada de Bessel de segunda especie y orden cero,  $K_0(x)$ .<sup>a</sup>

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	∞	2.4271	1.7527	1.3725	1.1145	0.9244	0.7775	0.6605	0.5653	0.4867
1.	0.4210	0.3656	0.3185	0.2782	0.2437	0.2138	0.1880	0.1655	0.1459	0.1288
2.	0.1139	0.1008	0.08927	0.07914	0.07022	0.06235	0.05540	0.04926	0.04382	0.03901
3.	0.03474	0.03095	0.02759	0.02461	0.02196	0.01960	0.01750	0.01563	0.01397	0.01248
4.	0.01116	0.0 <sup>2</sup> 9980	0.0 <sup>2</sup> 8927	0.0 <sup>2</sup> 7988	0.0 <sup>2</sup> 7149	0.0 <sup>2</sup> 6400	0.0 <sup>2</sup> 5730	0.0 <sup>2</sup> 5132	0.0 <sup>2</sup> 4597	0.0 <sup>2</sup> 4119
5.	0.0 <sup>2</sup> 3691	0.0 <sup>2</sup> 3308	0.0 <sup>2</sup> 2966	0.0 <sup>2</sup> 2659	0.0 <sup>2</sup> 2385	0.0 <sup>2</sup> 2139	0.0 <sup>2</sup> 1918	0.0 <sup>2</sup> 1721	0.0 <sup>2</sup> 1544	0.0 <sup>2</sup> 1386
6.	0.0 <sup>2</sup> 1244	0.0 <sup>2</sup> 1117	0.0 <sup>2</sup> 1003	0.0 <sup>3</sup> 9001	0.0 <sup>3</sup> 8083	0.0 <sup>3</sup> 7259	0.0 <sup>3</sup> 6520	0.0 <sup>3</sup> 5857	0.0 <sup>3</sup> 5262	0.0 <sup>3</sup> 4728
7.	0.0 <sup>3</sup> 4248	0.0 <sup>3</sup> 3817	0.0 <sup>3</sup> 3431	0.0 <sup>3</sup> 3084	0.0 <sup>3</sup> 2772	0.0 <sup>3</sup> 2492	0.0 <sup>3</sup> 2240	0.0 <sup>3</sup> 2014	0.0 <sup>3</sup> 1811	0.0 <sup>3</sup> 1629
8.	0.0 <sup>3</sup> 1465	0.0 <sup>3</sup> 1317	0.0 <sup>3</sup> 1185	0.0 <sup>3</sup> 1066	0.0 <sup>4</sup> 9588	0.0 <sup>4</sup> 8626	0.0 <sup>4</sup> 7761	0.0 <sup>4</sup> 6983	0.0 <sup>4</sup> 6283	0.0 <sup>4</sup> 5654
9.	0.0 <sup>4</sup> 5088	0.0 <sup>4</sup> 4579	0.0 <sup>4</sup> 4121	0.0 <sup>4</sup> 3710	0.0 <sup>4</sup> 3339	0.0 <sup>4</sup> 3006	0.0 <sup>4</sup> 2706	0.0 <sup>4</sup> 2436	0.0 <sup>4</sup> 2193	0.0 <sup>4</sup> 1975

a: Los exponentes 2, 3 ó 4 que aparecen en algunos valores de la función es una manera abreviada de indicar el número de ceros existente a la izquierda de la parte decimal.

---

**Funciones matemáticas de uso en transmisión de calor**

---

**TABLA E.8** Función modificada de Bessel de segunda especie y orden uno,  $K_1(x)$ .

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	x	9.8538	4.7760	3.0560	2.1844	1.6564	1.3028	1.0503	0.8618	0.7165
1.	0.6019	0.5098	0.4346	0.3725	0.3208	0.2774	0.2406	0.2094	0.1826	0.1597
2.	0.1399	0.1227	0.1079	0.09498	0.08372	0.07389	0.06528	0.05774	0.05111	0.04529
3.	0.04016	0.03563	0.03164	0.02812	0.02500	0.02224	0.01979	0.01763	0.01571	0.01400
4.	0.01248	0.01114	0.0 <sup>2</sup> 9938	0.0 <sup>2</sup> 8872	0.0 <sup>2</sup> 7923	0.0 <sup>2</sup> 7078	0.0 <sup>2</sup> 6325	0.0 <sup>2</sup> 5654	0.0 <sup>2</sup> 5055	0.0 <sup>2</sup> 4521
5.	0.0 <sup>2</sup> 4045	0.0 <sup>2</sup> 3619	0.0 <sup>2</sup> 3239	0.0 <sup>2</sup> 2900	0.0 <sup>2</sup> 2597	0.0 <sup>2</sup> 2326	0.0 <sup>2</sup> 2083	0.0 <sup>2</sup> 1866	0.0 <sup>2</sup> 1673	0.0 <sup>2</sup> 1499
6.	0.0 <sup>2</sup> 1344	0.0 <sup>2</sup> 1205	0.0 <sup>2</sup> 1081	0.0 <sup>3</sup> 9691	0.0 <sup>3</sup> 8693	0.0 <sup>3</sup> 7799	0.0 <sup>3</sup> 6998	0.0 <sup>3</sup> 6280	0.0 <sup>3</sup> 5636	0.0 <sup>3</sup> 5059
7.	0.0 <sup>3</sup> 4542	0.0 <sup>3</sup> 4078	0.0 <sup>3</sup> 3662	0.0 <sup>3</sup> 3288	0.0 <sup>3</sup> 2953	0.0 <sup>3</sup> 2653	0.0 <sup>3</sup> 2383	0.0 <sup>3</sup> 2141	0.0 <sup>3</sup> 1924	0.0 <sup>3</sup> 1729
8.	0.0 <sup>3</sup> 1554	0.0 <sup>3</sup> 1396	0.0 <sup>3</sup> 1255	0.0 <sup>3</sup> 1128	0.0 <sup>3</sup> 1014	0.0 <sup>4</sup> 9120	0.0 <sup>4</sup> 8200	0.0 <sup>4</sup> 7374	0.0 <sup>4</sup> 6631	0.0 <sup>4</sup> 5964
9.	0.0 <sup>4</sup> 5364	0.0 <sup>4</sup> 4825	0.0 <sup>4</sup> 4340	0.0 <sup>4</sup> 3904	0.0 <sup>4</sup> 3512	0.0 <sup>4</sup> 3160	0.0 <sup>4</sup> 2843	0.0 <sup>4</sup> 2559	0.0 <sup>4</sup> 2302	0.0 <sup>4</sup> 2072

## Función error de Gauss

---

**TABLA E.9** Función error de Gauss.

w	erf w	w	erf w	w	erf w
0.00	0.00000	0.36	0.38933	1.04	0.85865
0.02	0.02256	0.38	0.40901	1.08	0.87333
0.04	0.04511	0.40	0.42839	1.12	0.88679
0.06	0.06762	0.44	0.46622	1.16	0.89910
0.08	0.09008	0.48	0.50275	1.20	0.91031
0.10	0.11246	0.52	0.53790	1.30	0.93401
0.12	0.13476	0.56	0.57162	1.40	0.95228
0.14	0.15695	0.60	0.60386	1.50	0.96611
0.16	0.17901	0.64	0.63459	1.60	0.97635
0.18	0.20094	0.68	0.66378	1.70	0.98379
0.20	0.22270	0.72	0.69143	1.80	0.98909
0.22	0.24430	0.76	0.71754	1.90	0.99279
0.24	0.26570	0.80	0.74210	2.00	0.99532
0.26	0.28690	0.84	0.76514	2.20	0.99814
0.28	0.30788	0.88	0.78669	2.40	0.99931
0.30	0.32863	0.92	0.80677	2.60	0.99976
0.32	0.34913	0.96	0.82542	2.80	0.99992
0.34	0.36936	1.00	0.84270	3.00	0.99998

---

## Apéndice E

---

La función error de Gauss se define como

$$\operatorname{erf} w \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^w e^{-v^2} dv$$

y la función error complementaria es

$$\operatorname{erfc} w \equiv 1 - \operatorname{erf} w$$

---

## Transformadas de Laplace

---

**TABLA E.10** Propiedades principales de la transformada de Laplace.

Función original, $f(t)$	Función transformada, $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$
$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
$af(at)$	$F(s/a)$
$\begin{matrix} 0 & t < a \\ f(t-a) & t > a \end{matrix}$	$e^{-as} F(s)$
$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
$\int_0^t f(u) du$	$\frac{F(s)}{s}$
$f * g = \int_0^t f(u)g(t-u) du$	$F(s)G(s)$

**TABLA E.11** Tabla de algunas transformadas de Laplace.

$c$ : constante	$c/s$
$t^n$ , $n = 1, 2, 3, \dots$	$n!/s^{n+1}$
$e^{at}$	$1/(s - a)$
$te^{at}$	$1/(s - a)^2$
$\sin wt$	$w/(s^2 + w^2)$
$\cos wt$	$s/(s^2 + w^2)$
$\sinh kt$	$k/(s^2 - k^2)$
$\cosh kt$	$s/(s^2 - k^2)$
$1/\sqrt{t}$	$\sqrt{\pi}/2\sqrt{s^3}$
$\sqrt{t}$	$\sqrt{\pi}/\sqrt{s}$
$e^{at} \sin wt$	$w/[(s - a)^2 + w^2]$
$e^{at} \cos wt$	$(s - a)/[(s - a)^2 + w^2]$
$\operatorname{erf}(a\sqrt{t})$	$a/s\sqrt{s^2 + a^2}$
$\operatorname{erfc}(a/2\sqrt{t})$	$e^{-a\sqrt{s}}/s$
$t^{k-1}$ , $k > 0$	$\Gamma(k)/s^k$
$J_0(at)$	$1/\sqrt{s^2 + a^2}$
$I_0(at)$	$1/\sqrt{s^2 - a^2}$
$(\sin wt)/t$	$\operatorname{arc tan}(w/s)$
$t \sinh kt$	$2ks/(s^2 - k^2)^2$
$t \cosh kt$	$(s^2 + k^2)/(s^2 - k^2)^2$

## Referencias

---

1. M. R. Spiegel  
*Manual de fórmulas y tablas matemáticas*  
McGraw–Hill, Colección Schaum, México, 1970.
2. M. Abramowitz, and I. A. Stegun  
*Handbook of Mathematical Functions*  
Dover Publications, New York, 1970.



---

# Soluciones de algunos problemas propuestos

---

## Capítulo 3: Conducción unidimensional y estacionaria

1. b)  $q''_0 = 2833.3 \text{ W/m}^2$
2. b)  $q = 3745.13 \text{ W}$   
 $T_1 = 173.8 \text{ }^\circ\text{C}$   
 $T_2 = 151.1 \text{ }^\circ\text{C}$
3. b)  $q = 4213.86 \text{ W}$   
c)  $0.46 \%$   
d)  $Q = 63316 \text{ kWh} = 227.93 \text{ MJ}$
4.  $T_i = 7.7 \text{ }^\circ\text{C}; T_o = 4.9 \text{ }^\circ\text{C}$
5. a)  $T(x) = 600 - 124.2080 \ln(x/25 \times 10^{-3})$   
b)  $q = 5.78 \text{ kW}$
6.  $t = 15.07 \times 10^{-3} \text{ m}$

7. a) 
$$T(r) = \frac{q'''r_1^2}{4\lambda_1} \left( 1 - \frac{r^2}{r_1^2} \right) + T_i \quad 0 \leq r \leq r_1$$
$$T(r) = q'''\pi r_1^2 \left( \frac{\ln(r_2/r)}{2\pi\lambda_2} + \frac{1}{h\pi D_2} \right) + T_f \quad r_1 \leq r \leq r_2$$
  
b)  $T_i = 150.8 \text{ }^\circ\text{C}; T_e = 130 \text{ }^\circ\text{C}$

---

**Soluciones de algunos problemas propuestos**

---

8.  $\lambda_2 = 0.062 \text{ W/m K}$

9. 1416 %

10. a)  $q_a = 12.8 \text{ W}$

b)  $q' = 2913.42 \text{ W/m}$

11. b)  $P = 1.63 \text{ W}$

12. a)  $q_{\max} = 6.108 \text{ W}$

b)  $q_{\text{aletas}}/q_{\max} = 75.36 \%$

13. a)  $T_i = 127.1 \text{ }^\circ\text{C}$

b)  $T_i = 115.6 \text{ }^\circ\text{C}$

c)  $T_b = 105.1 \text{ }^\circ\text{C}$

14. La e.d.o.  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{2h}{\lambda e} \theta + q''_0 = 0$  en  $0 < x < \omega_1$

con las siguientes condiciones de contorno:

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=\omega_1} = \sqrt{\frac{2h}{\lambda e}} \theta(\omega_1)$$

15.  $\Delta T_{\text{err}} = 0.725 \text{ }^\circ\text{C}$

16. a)  $T_{\max} = 63.6 \text{ }^\circ\text{C}$

b)  $q' = 160 \text{ W/m}$

**Capítulo 4: Conducción multidimensional y estacionaria**

1. a)  $\theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi w}{L}\right)} \quad \theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$

b)  $T(1, 0.5) = 94.5 \text{ }^\circ\text{C}$ . Error < 1% con sólo 3 términos.

---

**Solución de problemas propuestos**

---

2. error = -0.076 %

3.  $T_1 = 100.96 \text{ }^\circ\text{C}$

4.  $q = 88.63 \text{ W}$

5.  $q' = \lambda r \frac{T_1 - T_2}{r}$

6. a)  $T_{m-1,n} + T_{m,n-1} + \left[ \frac{h\Delta x}{\lambda} \right] T_f - \left[ 2 + \frac{h\Delta x}{\lambda} \right] T_{m,n} = 0$

b)  $T_{m-1,n} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n} = 0$

7.  $T_1 + T_3 + 1.29 T_2 + 2.35 T_5 - 5.64 T_0 = 0$

$T_6 + 1.65 T_5 + 8.87 T_5 - 11.52 T_4 = 0$

8. a)  $T_{m+1,n} + T_{m,n-1} + \sqrt{2}BiT_f - (2 + \sqrt{2}Bi)T_{m,n} = 0$

b)  $T_{m+1,n} + q''_0 \frac{\Delta x}{\lambda} + \sqrt{2}BiT_f - (1 + \sqrt{2}Bi)T_{m,n} = 0$

9.  $\frac{1}{2}(T_1 + T_3) + \frac{1}{1 + \frac{\lambda_B}{\lambda_A}} \cdot T_2 + \frac{1}{1 + \frac{\lambda_A}{\lambda_B}} \cdot T_4 - (2 \cdot T_0) = 0$

11.  $T_1 = 118.75 \text{ }^\circ\text{C}$

$T_2 = 156.25 \text{ }^\circ\text{C}$

$T_3 = 168.75 \text{ }^\circ\text{C}$

$T_4 = 206.25 \text{ }^\circ\text{C}$

12.  $T_1 = 101.5 \text{ }^\circ\text{C}$  (EES)

$T_2 = 95.9 \text{ }^\circ\text{C}$

$T_3 = 75.4 \text{ }^\circ\text{C}$

$T_4 = 124.9 \text{ }^\circ\text{C}$

$T_5 = 117.1 \text{ }^\circ\text{C}$

$T_6 = 89.4 \text{ }^\circ\text{C}$

---

**Soluciones de algunos problemas propuestos**

---

13.  $T_1 = 489.30 \text{ }^\circ\text{C}$   
 $T_2 = 485.15 \text{ }^\circ\text{C}$   
 $T_3 = 472.07 \text{ }^\circ\text{C}$   
 $T_4 = 462.01 \text{ }^\circ\text{C}$   
 $T_5 = 436.95 \text{ }^\circ\text{C}$   
 $T_6 = 418.74 \text{ }^\circ\text{C}$   
 $T_7 = 356.99 \text{ }^\circ\text{C}$   
 $T_8 = 339.05 \text{ }^\circ\text{C}$   
 $q' = 883 \text{ W/m}$

14. Opción (2)

**Capítulo 5: Conducción Transitoria**

1. b)  $T = 64.189 \text{ }^\circ\text{C}$
2.  $q''' = 340 \text{ kW/m}^3$
3. a)  $t = 641.8 \text{ s}$  (*tabla 5.1, al igual que el resto de problemas de este capítulo*)  
b)  $T = 709.7 \text{ K}$   
c)  $t = 2024.6 \text{ s}$   
 $T = 756.4 \text{ K}$
4.  $t = 423.5 \text{ s}$  (7 min 4 s)
5. a)  $t = 11.92 \text{ s}$   
b)  $T = -0.88^\circ \text{C}$   
c)  $Q = -3.405 \text{ J}$
6.  $Q = 497.77 \text{ kJ/m}^2$
7.  $x_m = 1.29 \text{ m}$
9.  $T(0,0,180) = 404.7 \text{ K}$   
 $T(r_0, 0, 180) = 364.9 \text{ K}$   
 $T(0, L, 180) = 346.8 \text{ K}$

---

**Solución de problemas propuestos**

---

10. a)  $\tau = 0.9917 \text{ s}$

b)  $t = 5.12 \text{ s}$

11. a)  $T = 257^\circ \text{ C}$

12. a)  $t = 97.12 \text{ s}$

b)  $T(t_a) = 335^\circ \text{ C}$ ,  $T(t_b) = 36^\circ \text{ C}$

c)  $Q = 564.16 \text{ J}$

13. a)  $T_0 = 43^\circ \text{ C}$

b)  $q' = -7.35 \text{ kW/m}^2$

c)  $Q = -27.6 \text{ MJ/m}$

14. a)  $T_f = 4.63^\circ \text{ C}$ ;  $Q = 33 \text{ kJ}$

b)  $T_f = 20.4^\circ \text{ C}$ ;  $Q = 24.7 \text{ kJ}$

15.  $Q = 6.464 \text{ kJ}$

16. a)  $T(0, t=50 \text{ min}) = 168.7^\circ \text{ C}$

b)  $T(L_1, L_2, L_3, t=50 \text{ min}) = 50^\circ \text{ C}$

17.  $T_m^{p+1} - T_m^p = F_0(T_{m-1}^p - T_{m+1}^p) + (1 - 2F_0)T_m^p - S(T_m^p)^4 + C$  con

$$F_0 = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \quad S = \frac{4\sigma\epsilon\Delta t}{\rho CD} \quad C = S \cdot T_{\text{air}}^4 + \frac{16I^2\rho_e\Delta t}{\rho C\pi^2 D^4}$$

18.  $T_0 = 59^\circ \text{ C}$

$T_1 = 56.3^\circ \text{ C}$

$T_2 = 48.1^\circ \text{ C}$

$T_3 = 35.6^\circ \text{ C}$

19.  $T_3(3 \text{ min}; p=6) = 121.6^\circ \text{ C}$

20.  $T_0(3 \text{ min}; p=9) = 123.9^\circ \text{ C}$

## Capítulo 6: Fundamentos de Convección del Calor

1.  $h = 40 \text{ W/m}^2 \text{ K}$

## Capítulo 7: Convección forzada exterior

2.  $\bar{h} = 124.17 \text{ W/m}^2 \text{ K}$

3.  $\bar{h} = 394.5 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  (Hilpert);  $354.1 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  (Zuckauskas);  $333.2 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  (Churchill & Bernstein) (EES)

4.  $\bar{h}_{\text{exp}} = 102 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ ,  $h_{\text{teo}} = 102.9 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  (Zuckauskas);  $86.75 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  (Hilpert) o  $94.61 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  (Churchill & Bernstein) (EES)

5.  $T_{\infty} = 452 \text{ K}$

6.  $q = 10.28 \text{ W}$

7. a)  $q = 54.23 \text{ kW}$

b)  $\Delta p = 561 \text{ Pa}$

8. a)  $\bar{h} = 135.2 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  (Zuckauskas);  $144.3 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  (Grimison) (EES)

b)  $q' = 19.03 \text{ kW/m}$  (Zuckauskas)

c)  $\Delta p = 254.1 \text{ Pa}$

10.  $L = 3.44 \text{ m}$

11.  $q = 65.6 \text{ kW}$

12.  $T_D = 54.7 \text{ }^{\circ}\text{C}$

13. a)  $\bar{h} = 8795.44 \text{ W/m}^2 \text{ K}$

b)  $\frac{Q}{V} = 58363 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}$

14.  $T(0,0,15 \text{ mm}, 3 \text{ min}) = 348.6 \text{ K}$

**Capítulo 8: Convección forzada interior**

1. a)  $\bar{h} = 366 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  (Hausen)  
b)  $T_{m,s} = 68.9 \text{ }^\circ\text{C}$   
c)  $T_{m,s} (30 \text{ m}) = 87.7 \text{ }^\circ\text{C}$

3. a)

$$T_{m,s} = T_s + (T_{m,e} - T_s) \exp\left(\frac{-L}{R'C}\right) \quad R' = \frac{1}{\bar{\alpha}\pi D} + \frac{\ln\left(\frac{D+2t}{D}\right)}{2\pi\lambda_a} + \frac{\ln\left(\frac{4z}{D+2t}\right)}{2\pi\lambda_s}$$

- b)  $T_{m,s} = 110.9 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $q = 9.09 \text{ MW}$

4. a)  $T_{m,s} = 87.8 \text{ }^\circ\text{C}$   
b)  $q = 24.5 \text{ W}$

5. a)  $L = 2.5 \text{ m}$   
b)  $T_{s,i} = 388.1 \text{ }^\circ\text{C}$

6. a)  $q = 1.31 \text{ kW}$ ;  $\bar{h} = 38.7 \text{ W/m}^2 \text{ K}$   
b)  $h (6 \text{ m}) = 11.6 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ ,  $q'' (6 \text{ m}) = 304.3 \text{ W/m}^2$ ;  $T_s (6 \text{ m}) = 50.7 \text{ }^\circ\text{C}$

8.  $T_{m,s} = 544.43 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $T_{s,s} = 243.35 \text{ }^\circ\text{C}$  (Dittus-Boelter) (EES)

9. a)  $L = 6.655 \text{ m}$  (EES)  
b)  $T_s = 121.94 \text{ }^\circ\text{C}$

10. a)  $L = 4.869 \text{ m}$  (EES)  
b)  $L' = 9.098 \text{ m}$

11. a)  $L = 8.9 \text{ m}$   
b)  $T(r_0, L) = 52 \text{ }^\circ\text{C}$

12. a)  $T_{a,2} = 704.5 \text{ K}$  (EES)  
b)  $T_{s,2} = 1084.1 \text{ K}$   
 $T_{s,1} = 679.8 \text{ K}$   
 $T_{e,2} = 704.5 \text{ K}$

---

**Soluciones de algunos problemas propuestos**

---

13.  $t = 9.794 \text{ mm}$  (EES)

14. a)  $\dot{m} = 0.0687 \text{ kg/s}$  (EES)

b)  $L = 6.782 \text{ m}$

c)  $S = 6.948 \text{ cm}$

15.  $q' = 2.69 \text{ kW/m}$

**Capítulo 9: Convección natural**

2.  $T_s = 421 \text{ K}$

3. a)  $\bar{h} = 6.45 \text{ W/m}^2 \text{ K}$

b)  $\bar{h} = 4.37 \text{ W/m}^2 \text{ K}$

c)  $\bar{h} = 3.22 \text{ W/m}^2 \text{ K}$

4. a)  $q' = 100.5 \text{ W/m}$  ( $\lambda_{ef}$ );  $105.5 \text{ W/m}$  (tablas)

b)  $q' = 111.3 \text{ W/m}$

5.  $S_{opt} = 7.4 \text{ mm}$

8. a)  $T_s = 29.8 \text{ }^\circ\text{C}$

b)  $q' = 39 \text{ W/m}$

c)  $\Delta T' = 0.11 \text{ K/m}$

9. a)  $L = 3.39 \text{ m}$

b)  $\dot{m} = 0.0275 \text{ kg/s}$

13.  $\overline{Nu} = 4.36$

**Capítulo 10: Convección bifásica**

1.  $\dot{m}' = 1.1332 \times 10^{-3} \text{ kg/s m}$

---

**Solución de problemas propuestos**

---

2. a)  $\dot{m} = 25.3 \text{ kg/h}$   
b)  $q = 16.0 \text{ kW}$
3.  $T_s = 78.6 \text{ }^\circ\text{C}$
4. a)  $\dot{m}' = 0.0164 \text{ kg/s m}$   
b)  $q' = 39.9 \text{ kW/m}$
5.  $\dot{m}' = 0.00111 \text{ kg/s m}$
6.  $\dot{m}' = 0.154 \text{ kg/s m}$
7. a)  $h = 38564.4 \text{ W/m}^2 \text{ K}$   
b)  $C_{sf} = 0.005$
9. a)  $q = 2.9 \text{ W}$   
b)  $T_s = 67.81 \text{ }^\circ\text{C}$  ( $\Delta T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ )
10. a)  $T_s = 199.6 \text{ }^\circ\text{C}$   
b)  $\bar{h}_{BF} = 6894 \text{ W/m}^2 \text{ K}$
12.  $q = 3083 \text{ W}$
13.  $I = 217 \text{ A}$

**Capítulo 11: Intercambiadores de calor**

2. a)  $L = 130 \text{ m}$   
b)  $\bar{h} = 2193 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  (Gnielinsky)  
c)  $q = 692.5 \text{ kW}$ ;  $T_{c,s} = 87.3 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $T_{f,s} = 85.1 \text{ }^\circ\text{C}$   
d) 25%
3. a)  $\bar{U} = 1996 \text{ W/m}^2 \text{ K}$   
b)  $T_{f,s} = 33.9^\circ \text{C}$   
c)  $\dot{m} = 0.56 \text{ kg/s}$

---

**Soluciones de algunos problemas propuestos**

---

4.  $L = 54.4 \text{ m}$  (13.6 m/paso)
5. a)  $A = 11.111 \text{ m}^2$   
b)  $\dot{m} = 1994 \text{ kg/s}$
7. a)  $A = 53.30 \text{ m}^2$  (EES)  
b)  $A = 57.30 \text{ m}^2$
8. a)  $T_{f,s} = 36 \text{ }^\circ\text{C}$   
b)  $L = 4.186 \text{ m}$
10. a)  $n^\circ \text{ tubos} = 36$  (EES)  
b)  $n^\circ \text{ pasos} = 2$ ;  $L_{\text{paso}} = 1.521 \text{ m}$
11. NO ( $T_{s,\text{min}} = 107.55 \text{ }^\circ\text{C} < 110 \text{ }^\circ\text{C}$ ) (EES)
12. a)  $U_c = 97.4 \text{ W/m}^2 \text{ K}$   
b)  $V = 0.0375 \text{ m}^3$
15. a)  $U \approx 75 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}$  (despreciando resistencias no dominantes)  
b)  $T_{f,s} = 375 \text{ K}$ ;  $T_{c,s} = 500 \text{ K}$  (con la aprox. anterior)
20. Los ingenieros de planta ( $R_{e,c,\text{op}}/R_{e,c,\text{dis}} = 4.41$ )

**Capítulo 12: Radiación. Fundamentos**

1. a)  $I_{12} = I_{13} = I_{14} = I_n = 7000 \text{ W/m}^2 \text{ sr}$   
b)  $w_{21} = 3.46 \times 10^{-3} \text{ sr}$ ;  $w_{31} = 4.00 \times 10^{-3} \text{ sr}$ ;  $w_{41} = 4.00 \times 10^{-3} \text{ sr}$   
c)  $q_{12} = 12.1 \times 10^{-3} \text{ W}$ ;  $q_{13} = 28.0 \times 10^{-3} \text{ W}$ ;  $q_{14} = 19.8 \times 10^{-3} \text{ W}$
2. a)  $T_\lambda < T_s$   
b)  $\frac{1}{T_s} = \frac{1}{T_\lambda} + \frac{\lambda}{C_2} \ln \varepsilon_\lambda$

---

**Solución de problemas propuestos**

---

- c)  $T = 995.3 \text{ K}$
- d)  $\varepsilon_\lambda = \frac{T_\lambda}{T_s}$       y       $T_s = \frac{T_\lambda}{\varepsilon_\lambda}$
3. a)  $R = 19.29 \text{ cm}$   
b)  $G_{20^\circ} = 939.7 \text{ W/m}^2$
4. a)  $q = 1.76 \times 10^{-4} \text{ W}$   
b)  $q = 3.85 \times 10^{-5} \text{ W}$
5. a)  $T_v = 412 \text{ K}$   
b)  $q = 3.5 \text{ W}$
7. a)  $\lambda = 2.93 \text{ W/m K}$   
b)  $\Delta T = 3.3 \text{ }^\circ\text{C}$  (razonable)
8. a)  $(\alpha_{\text{atm}} G_{\text{atm}} + \alpha_s G_s + \alpha_i G_i) + h_i(T_{\infty, i} - T_g) = h_o(T_g - T_{\infty, o}) + 2\varepsilon E_b(T_g)$   
b)  $T_i = 31^\circ\text{C}$
9. a) opción c  
b)  $T_{\text{so}} = 298.96 \text{ K}$ ;  $q = 776.25 \text{ W}$  (EES)
10. a)  $L = 0.129 \text{ m}$   
b)  $\eta = 39.1\%$

**Capítulo 13: Intercambio radiativo entre superficies**

1. a)  $F_{12} = 1$ ;  $F_{21} = 4/3\pi$   
b)  $F_{12} = 1/2$ ;  $F_{21} = 1/4$   
c)  $F_{12} = 1$ ;  $F_{21} = 2/\pi$   
d)  $F_{12} = 1/2$ ;  $F_{21} = \sqrt{2}/2$   
e)  $F_{12} = 1/2$ ;  $F_{21} = 0$   
f)  $F_{12} = 1$ ;  $F_{21} = 1/8$   
g)  $F_{12} = 1/2$ ;  $F_{21} = 2/\pi$

---

### Soluciones de algunos problemas propuestos

---

2.  $q = 14.9 \text{ W}$
3.  $T_c = 801.2 \text{ K}$
4. a)  $T_s = 338.2 \text{ K}$   
b)  $q'' = 25.4 \text{ W/m}^2$
5.  $T_3 = 733 \text{ K}$
6. a)  $q = 1833.47 \text{ W (EES)}$   
b)  $\Delta q = 5.13\%$  entre gris y negro
8. a)  $q = -0.4988 \text{ W/m (EES)}$   
b) 50% ganancia
10.  $q_2 = -30.44 \text{ kW}$
11. 82.2%
16.  $T_1 = 438.0 \text{ K}; T_4 = 341.8 \text{ K}$

### Capítulo 14: Radiación Volumétrica

1.  $q'' = 17536 \text{ W/m}^2$  (Hottel);  $= 19.43 \text{ kW/m}^2$  (Truelove)
3.  $q_1'' = 50.0 \text{ kW/m}^2; q_2'' = 70.25 \text{ kW/m}^2$
6.  $q'' = 16785 \text{ W/m}^2$  (Hottel);  $= 17980 \text{ W/m}^2$  (Truelove)

### Capítulo 15: Transferencia de calor multimodo

4.  $T_a = 45.54^\circ \text{ C}$  (0.54 °C superior a la T medida)
5. a)  $\tau = 0.25$   
b)  $T_c = 513 \text{ K}$