FUNCIONES ELÍPTICAS

POR D. LAURO CLARIANA Y RICART

Catedrático de la Universidad de Barcelona

Con ser tantos los puntos de vista que se conocen hoy para emprender el estudio de las funciones elípticas, siendo alguno de ellos difíciles y expuestos á desconfianza por no justificar suficientemente los autores sus principios, causa es sin duda de que permanezcan desgraciadamente estos conocimientos bastante desconocidos.

Podríamos decir que en los tiempos actuales no tanto interesa inventar como saber ordenar la materia científica, á fin de vulgarizarla y hacerla agradable, sobre todo en nuestro país.

Este es el fin que nos ha impulsado á escribir este artículo para que se vea que las consideraciones de Briot y Jordan son las que procuran con más rapidez y claridad el conocimiento de las funciones elípticas λ, μ, ν, junto con sus propiedades.

Empezaremos por el estudio de las funciones de Jacobi. La función principal es

$$\Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{nz+n^2a} .$$

El desarrollo de esta función puede expresarse por:

$$\begin{array}{l}
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e^{2^2a} + \frac{2z}{1} e^{2^2a} + \frac{2^2z^2}{1.2} e^{2^2a} + \ldots\ldots\\
e^{a} + \frac{z}{1} e^{a} + \frac{z^2}{1.2} e^{a} + \ldots\ldots\\
1 + 0 + 0 + \ldots\ldots\\
e^{a} - \frac{z}{1} e^{a} + \frac{z^2}{1.2} e^{a} \ldots\ldots\\
e^{2^2a} - \frac{2z}{1} e^{2^2a} + \frac{2^2z^2}{1.2} e^{2^2a} \ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Sumando en forma de columnas, designando los coeficientes de z por μ_1, μ_2, μ_3 . . . . . tendremos

$$\Theta(z) = \mu_0 + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \ldots\ldots ,$$

fácilmente se comprende por el desarrollo que precede que

$$\mu_1 = \mu_3 = \ldots\ldots = 0.$$

Luego

$$\Theta(z) = \mu_0 + \mu_2 z^2 + \ldots\ldots$$

de donde se deduce que

$$\Theta(-z) = \Theta(z),$$

y por consiguiente que la función Θ es par.

—La función Θ es simplemente periódica.

En efecto, considerando $e^{nz + n^2 a}$, si cambiamos z, en $z + 2\pi i$, se obtiene

$$e^{nz + 2\pi n i + n^2 a} = e^{nz + n^2 a} (\cos 2\pi n + i \operatorname{sen} 2\pi n) = e^{nz + n^2 a}$$

luego

$$\Theta(z + 2\pi i) = \Theta(z);$$

de suerte que el período resulta ser $2\pi i$.

La función Θ permite escribir

$$\Theta(z + 2ma) = e^{-m}(z + ma)\,\Theta(z).$$

Para probar esta igualdad empezaremos expresando la función Θ por:

$$\Theta(z) = e^{-\frac{z^2}{4a}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{1}{4a}(z + 2na)^2}.$$

Cambiando z en $z + 2ma$ se tiene:

$$\Theta(z + 2ma) = e^{-\frac{1}{4a}(z + 2ma)^2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{1}{4a}[z + 2(n+m)a]^2} =$$

$$= e^{-m(z+ma)} e^{-\frac{z^2}{4a^2}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{1}{4a}(z + 2n'a)^2} = e^{-m(z+ma)}\,\Theta(z).$$

Si $m = 1$, se deduce:

$$\Theta(z + 2a) = e^{-(z+a)}\,\Theta(z).$$

—La función Θ se anula para todos los valores de z comprendidos en la fórmula

$$z = (2m + 1)\pi i + (2m' + 1)a$$

en la cual m y m', expresan números enteros cualesquiera:

Sea

$$\Theta(z) = e^{-\frac{z^2}{4a}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{1}{4a}[z + 2(n - m_1)a]^2} = e^{-\frac{z^2}{4a}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{1}{4a}(z - 2na)^2};$$

y como consecuencia

$$\Theta(z) = \frac{1}{2} e^{-\frac{z^2}{4a}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left\{ e^{\frac{1}{4a}[z+2(n-m_1)a]^2} + e^{\frac{1}{4a}(z-2na)^2} \right\}. \quad (1)$$

Ahora bien, podemos escribir

$$e^z + e^{z+(2n+1)\pi i} = e^z(1 + e^{(2n+1)\pi i}) =$$

$$= e^z(1 + \cos(2n+1)\pi + i \operatorname{sen}(2n+1)\pi) = e^z(1-1) = 0.$$

Tomando, pues, la diferencia de los exponentes de (1), é igualándola á $(2n+1)\pi$, tendremos los valores que reducen á cero la función $\Theta(z)$.

Así pues:

$$\frac{1}{4a}[z+2(n-m_1)a]^2 - \frac{1}{4a}(z-2na)^2 =$$

$$= \frac{1}{4a}[z^2+4z(n-m_1)a+4(n-m_1)^2a^2] - \frac{1}{4a}[z^2-4nza+4n^2a^2] =$$

$$= (2n_1+1)\pi i.$$

Después de algunas simples modificaciones, se obtiene

$$2n(z-m_1a) - m_1(z-m_1a) = (2n_1+1)\pi i,$$

ó sea

$$(2n-m_1)(z-m_1a) = (2n_1+1)\pi i.$$

Para que se satisfaga esta igualdad bastará suponer

$$m_1 = 2m'+1, \qquad z - m_1 a = (2m+1)\pi i,$$

de donde

$$z = (2m'+1)a + (2m+1)\pi i,$$

cuya fórmula es la que nos habíamos propuesto demostrar.

Nueva expresión de $\Theta(z)$.

Reemplazando z, por $\frac{2\pi z i}{\omega}$ en $\Theta(z)$, suponiendo además $a = \frac{\pi\omega' i}{\omega}$, resulta:

$$\Theta\left(\frac{2\pi z i}{\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(2nz+n^2\omega')} = e^{-\frac{\pi z^2 i}{\omega\omega'}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega\omega'}(z+n\omega')^2}.$$

Para mayor sencillez podemos suponer, como M. Briot, que cuando la función Θ haga referencia á $\frac{2\pi z i}{\omega}$, se escriba sencillamente $\Theta(z)$, y bajo este supuesto pueden admitirse las igualdades siguientes.

$$\Theta(z+\omega)=\Theta(z)$$

$$\Theta(z+m\omega')=e^{-\frac{m\pi i}{\omega}(2z+m\omega')}\Theta(z)$$

$$\Theta(z+\omega')=e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\Theta(z)$$

$$z=(2m+1)\frac{\omega}{2}+(2m'+1)\frac{\omega'}{2}.$$

FUNCIONES θ.

Las cuatro funciones θ, θ_1, θ_2, θ_3, que se consideran fundamentales y que se enlazan con Θ, son las siguientes:

$$\theta_3(z)=\Theta(z)$$

$$\theta(z)=\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\theta_2(z)=e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{4}\right)}\Theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)$$

$$\theta_1(z)=\frac{1}{i}e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{4}\right)}\Theta\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right).$$

Según la expresión de Θ, podremos escribir:

$$\theta_3(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}e^{\frac{\pi i}{\omega}(2nz+n^2\omega')}$$

$$\theta(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}(-1)^n e^{\frac{\pi i}{\omega}(2nz+n^2\omega')}$$

$$(A)\qquad \theta_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}e^{\frac{\pi i}{\omega}\left[(2n+1)z+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\omega'\right]}$$

$$\theta_1(z) = \frac{1}{i} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n e^{\frac{\pi i}{\omega}\left[(2n+1)z + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \omega'\right]},$$

Por último, si admitimos que $q = e^{\frac{\pi \omega' i}{\omega}}$, aún cabe dar las fórmulas θ, bajo la forma trigonométrica que á continuación se expresa:

$$\theta_3(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2} \cos \frac{2 \omega \pi z}{\omega}$$

$$\theta(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos \frac{2 n \pi z}{\omega}$$

$$\theta_2(z) = 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi z}{\omega}$$

$$\theta_1(z) = 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi z}{\omega}$$

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES θ.

Los resultados obtenidos anteriormente demuestran que las funciones θ_3 θ, y θ_2 son pares, así como resulta θ_1 impar, anulándose para cuando $z = 0$.

Además la ecuación general

$$z = (2m+1)\frac{\omega}{2} + (2m'+1)\frac{\omega'}{2},$$

que corresponde á los ceros de la función Θ, podrá utilizarnos para deducir los ceros de las funciones θ, puesto que se hallan enlazadas las funciones θ y Θ por las fórmulas que preceden. Para θ_3, bastará tomar la misma fórmula anterior, ya que θ_3 y Θ, se relacionan directamente.

En cuanto á θ θ_2 y θ_1, bastará suponer que la z, se incremente respectivamente de $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega'}{2}$ y $\frac{\omega+\omega'}{2}$; así, pues, resulta:

Ceros de $\theta_3(z)$. . . . . $z = \frac{\omega+\omega'}{2} + (m\omega + m'\omega')$

» » $\theta(z)$. . . . . $z = \frac{\omega'}{2} \pm (m\omega + m'\omega')$

» » $\theta_2(z)$. . . . . $z = \frac{\omega}{2} \pm (m\omega + m'\omega')$

» » $\theta_1(z)$. . . . . $z = m\omega \pm m'\omega'$.

Las fórmulas (A) en el concepto de que $q = e^{\frac{\pi \omega' i}{\omega}}$ aún podrían tomar la forma siguiente:

$$\theta_3(z) = \Theta(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i z}{\omega}}$$

$$\theta(z) = \Theta\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i z}{\omega}}$$

$$(B) \qquad \theta_2(z) = q^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i z}{\omega}} \Theta\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{\frac{(2n+1)\pi i z}{\omega}}$$

$$\theta_1(z) = \frac{1}{i} q^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i z}{\omega}} \Theta\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{i} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{\frac{(2n+1)\pi i z}{\omega}}$$

de cuyas nuevas fórmulas pueden deducirse las 20, que á continuación se expresan, reemplazando sucesivamente en (B), z, por las expresiones

$$z + \frac{\omega}{2}, \quad z + \frac{\omega'}{2}, \quad z + \omega, \quad z + \omega', \quad z + \frac{\omega + \omega'}{2},$$

suponiendo además para abreviar

$$q^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi i z}{\omega}} = \lambda, \quad q^{-1} e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}} = \mu:$$

1.ª $\theta_3\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = \theta(z)$, 2.ª $\theta\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = \theta_3(z)$

3.ª $\theta_2\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = -\theta_1(z)$, 4.ª $\theta_1\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = \theta_2(z)$

5.ª $\theta_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = \lambda\, \theta_2(z)$, 6.ª $\theta\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = i\lambda\, \theta_1(z)$

7.ª $\theta_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = \lambda\, \theta_3(z)$, 8.ª $\theta_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = i\lambda\, \theta(z)$

9.ª $\theta_3(z + \omega) = \theta_3(z)$, 10.ª $\theta(z + \omega) = \theta(z)$

11.ª $\theta_2(z + \omega) = -\theta_2(z)$, 12.ª $\theta_1(z + \omega) = -\theta_1(z)$

13.ª $\theta_3(z + \omega') = \mu\, \theta_3(z)$, 14.ª $\theta(z + \omega') = -\mu\, \theta(z)$

15.ª $\theta_2(z + \omega') = \mu\, \theta_2(z)$, 16.ª $\theta_1(z + \omega') = -\mu\, \theta_1(z)$

$$17.^a \quad \theta_3\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=i\lambda\theta_1(z), \qquad 18.^a \quad \theta\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\lambda\theta_2(z)$$

$$19.^a \quad \theta_2\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=-i\lambda\theta(z), \qquad 20.^a \quad \theta_1\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\lambda\theta_3(z).$$

Vamos á demostrar todos estos resultados:

1.ª Partiendo de la primera igualdad de (B), se tiene:

$$\theta_3\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}}=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i z}{\omega}}=\theta(z)$$

2.ª Tomando la segunda igualdad de (B), resulta:

$$\theta\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}}=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n(-1)^n q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i z}{\omega}}=$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{\frac{2n\pi i z}{\omega}}=\theta_3(z).$$

3.ª De un modo análogo á los anteriores, tomando la tercera, se obtiene

$$\theta_2\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=q^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=$$

$$=q^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i z}{\omega}} i\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=q^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i z}{\omega}} i\times\frac{i\theta_1(z)}{q^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i z}{\omega}}}=-\theta_1(z).$$

4.ª Tomando la cuarta, se halla

$$\theta_1\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{i} q^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}}\Theta\left(z+\omega+\frac{\omega'}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{i} q^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i z}{\omega}} i\Theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{i} q^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i z}{\omega}} i\frac{\theta_2(z)}{q^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i z}{\omega}}}=\theta_2(z).$$

5.ª Volviendo á la primera de (B), se obtiene

$$\theta_3\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\Theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right).$$

De la tercera igualdad de (B), se deduce

$$\Theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi i z}{\omega}}\theta_2(z),$$

pero como $q^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi i z}{\omega}}=\lambda$, resulta

$$\theta_3\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\lambda\,\theta_2(z).$$

6.ª Teniendo á la vista las fórmulas (B), fácilmente se obtienen los resultados siguientes:

$$\theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),$$

ó sea

$$\theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{i\,\theta_1(z)}{q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i z}{\omega}}}=\lambda\, i\,\theta_1(z).$$

7.ª $$\theta_2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}\Theta(z+\omega'),$$

pero hemos hallado $\Theta(z+\omega')=e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\Theta(z)\,.\,.\,.\,.\,.\,(\Delta)$

$$=q^{-1}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\Theta(z);$$

luego

$$\theta_2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}q^{-1}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\Theta(z)=$$

$$=q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i z}{\omega}}q^{\frac{1}{2}}q^{-1}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\Theta(z)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi i z}{\omega}}\theta_3(z)=\lambda\,\theta_3(z)$$

8.ª $$\theta_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{i}q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}+\omega'\right).$$

Para el desarrollo de $\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}+\omega'\right)$, tendremos presente la expresión (Δ) del caso anterior; luego

$$\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}+\omega'\right)=e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left[2\left(z+\frac{\omega}{2}\right)+\omega'\right]}\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=$$

$$=q^{-1}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\times-1\times\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=q^{-1}e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\times-1\,\theta(z).$$

Sustituyendo este valor en la fórmula primera, se tiene:

$$\theta_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{i}\,q^{\frac{1}{4}}\,e^{\frac{\pi i z}{\omega}}\,q^{\frac{1}{2}}\,q^{-1}\,e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\times-\theta(z),$$

ó sea

$$\theta_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=i\,q^{-\frac{1}{4}}\,e^{-\frac{\pi i z}{\omega}}\,\theta(z)=i\,\lambda\,\theta(z)\,.$$

9.ª $$\theta_3(z+\omega)=\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2}\,e^{\frac{2ni\pi(z+\omega)}{\omega}}=\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2}\,e^{\frac{2ni\pi z}{\omega}}=\theta_3(z).$$

10.ª La expresión $\theta(z+\omega)=\theta(z)$, se determinará inmediatamente tomando la fórmula segunda de $\underline{B}$, y procediendo como en el caso anterior.

11.ª $$\theta_2(z+\omega)=q^{\frac{1}{4}}\,e^{\frac{\pi i(z+\omega)}{\omega}}\,\Theta\left(z+\omega+\frac{\omega'}{2}\right)=$$

$$=-q^{\frac{1}{4}}\,e^{\frac{\pi i z}{\omega}}\,\Theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=-\theta_2(z).$$

12.ª Vamos á demostrar

$$\theta_1(z+\omega)=-\theta_1(z)\,.$$

La 4.ª relación que hemos hallado, ó sea

$\theta_1\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\theta_2(z)$, permite la transformada siguiente:

$\theta_1(z+\omega)=\theta_2\left(z+\frac{\omega}{2}\right)$, pero hemos hallado, $\theta_2\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=-\theta_1(z)$,

luego: $\theta_1(z+\omega)=-\theta_1(z)\,.$

13.ª La igualdad $\theta_3(z+\omega')=\mu\,\theta_3(z)$, se determina fácilmente sabiendo que al aumentar la función $\theta_3(z)$, ó sea $\Theta(z)$ del incremento $\underline{\omega'}$, queda multiplicada por el factor exponencial $q^{-1}\,e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}=\mu$, luego

$$\theta_3(z+\omega')=\mu\,\theta_3(z)$$

14.ª Para la expresión $\theta(z+\omega')=-\mu\,\theta(z)$, tomaremos la fórmula 6.ª ya hallada, esto es,

$\theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=i\,\lambda\,\theta_1(z)$, siendo

$$\lambda = q^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi i z}{\omega}}; \text{ luego } \theta\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{i\,\theta_1(z)}{q^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i z}{\omega}}};$$

añadiendo á ambos miembros $\frac{\omega'}{2}$, resulta:

$$\theta(z+\omega') = \frac{i\,\theta_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{q^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{\omega}}} = \frac{i\,\theta_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{q^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i z}{\omega}} q^{\frac{1}{2}}},$$

pero $\theta_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right) = i\lambda\,\theta(z)$, así pues, cabe escribir:

$$\theta(z+\omega') = \frac{i\,i\,\lambda\,\theta(z)}{q^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i z}{\omega}} q^{\frac{1}{2}}} = -\,q^{-1} e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\,\theta(z) = -\mu\,\theta(z).$$

15.ª Deduciremos la expresión

$\theta_2(z+\omega') = \mu.\theta_2(z)$, tomando la 7.ª, ó sea $\theta_3\left(z+\frac{\omega'}{2}\right) = \lambda\,\theta_2(z)$

en el supuesto de añadir á z, la cantidad $\frac{\omega'}{2}$, luego

$$\theta_2(z+\omega') = \lambda q^{-\frac{1}{2}}\,\theta_3\left(z+\frac{\omega'}{2}\right);$$

empero sabemos que: $\theta_3\left(z+\frac{\omega'}{2}\right) = \lambda\,\theta_2(z)$, de donde

$$\theta_2(z+\omega') = \lambda^2 q^{-\frac{1}{2}}\,\theta_2(z) =$$

$$= q^{-\frac{2}{4}} e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}} q^{-\frac{1}{2}}\,\theta_2(z) = q^{-1} e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}}\,\theta_2(z) = \mu\,\theta_2(z).$$

16.ª Sea $\theta_1(z+\omega') = -\mu\,\theta_1(z)$. Al considerar la fórmula 8.ª ó sea

$\theta_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right) = i\lambda\,\theta(z)$, bastará añadir á z, la cantidad $\frac{\omega'}{2}$; así pues

$$\theta_1(z+\omega') = i\lambda q^{-\frac{1}{2}}\,\theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right);$$

pero, $\theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right) = i\lambda\,\theta_1(z)$, luego:

$$\theta_1(z+\omega') = i\lambda q^{-\frac{1}{2}}\,i\lambda\,\theta_1(z) = -\,q^{-\frac{2}{4}} e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}} q^{-\frac{1}{2}}\,\theta_1(z)$$

$$= -q^{-1} e^{-\frac{2\pi i z}{\omega}} \theta_1(z) = -\mu\,\theta_1(z).$$

17.ª Los cuatro grupos siguientes resultan ,al añadir $\frac{\omega + \omega'}{2}$, á las funciones típicas de θ, así pues para probar que $\theta_3\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = i\lambda\,\theta_1(z)$, bastará tomar la 1.ª fórmula $\theta_3\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = \theta(z)$, y luego añadir $\frac{\omega'}{2}$, de donde

$$\theta_3\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right) = \theta\left(z + \frac{\omega'}{2}\right), \text{ pero } \theta\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = i\lambda\,\theta_1(z), \text{ luego}$$

$$\theta_3\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right) = i\ \ \theta_1(z).$$

18.ª La igualdad $\theta\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = \lambda\,\theta_2(z)$, se demostrará tomando la 2.ª fórmula $\theta\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = \theta_3(z)$, añadiendo $\frac{\omega'}{2}$, á z, luego:

$$\theta\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right) = \theta_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right), \text{ pero } \theta_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = \lambda\,\theta_2(z), \text{ así pues}$$

$$\theta\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right) = \lambda\,\theta_2(z).$$

19.ª Sea $\theta_2\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = -i\lambda\,\theta(z)$.

Tomando la 3.ª fórmula

$$\theta_2\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = -\theta_1(z)$$

procediendo como en los casos anteriores, resulta:

$$\theta_2\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right) = -\theta_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right),$$

pero

$$\theta_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = i\lambda\,\theta(z),$$

luego

$$\theta_2\left(z + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right) = -i\lambda\,\theta(z).$$

20.ª y última. Para probar $\theta_1\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\lambda\,\theta_3(z)$, bastará tomar la 4.ª ó sea $\theta_1\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\theta_2(z)$, y proceder como antes, así pues,

$$\theta_1\left(z+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=\theta_2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right),$$

pero

$$\theta_2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\lambda\,\theta_3(z),$$

luego

$$\theta_1\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\lambda\,\theta_3(z).$$

Después de estas generalidades acerca de las funciones θ, veamos cuál es la importancia de las funciones inversas correspondientes á las integrales elípticas, para venir á deducir las funciones elípticas, comparando por vía de cociente las funciones θ.

La integral elíptica de 1.ª especie

$\int_0^z \frac{dz}{\Delta(z)}$, en el supuesto de que $\Delta(z)=\sqrt{(1-z^2)(1-K^2z^2)}$, y que tenga por valor inicial $+1$, siendo K^2 una cantidad cualquiera diferente de *cero* y *uno*, es una generalización de la función

$$\text{arc. sen. } z=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

correspondiendo con ésta, cuando $K=0$. Si suponemos $z=\text{sen. } u$, esta última expresión se transforma en

$$u=\int_0^{\text{sen. } u}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

de la cual se deduce $\cos. u=\sqrt{1-\text{sen.}^2 u}$, debiéndose escojer de los dos valores dél radical, aquel que dé $+1$, para cuando $u=0$.

Las dos funciones sen. u y cos u, definidas por las ecuaciones que preceden, son más interesantes que arc. sen., pues además de ser monodromas en toda la extensión del plano de la variable, es decir, de no presentar para cada valor de la variable sino un solo valor para la función, ofrece ésta además la gran ventaja de su periodicidad.

Esta observación, promovió la idea de estudiar en lugar de la integral elíptica $u=\int_0^z \frac{dz}{\Delta(z)}$, la función inversa $sn.u$, definida por la ecuación $u=\int_0^{sn\,u}\frac{dz}{\Delta(z)}$, junto con otras dos funciones asociadas $cn\,u$, $dn\,u$, definidas por las ecuaciones

$$cn\, u = \sqrt{1 - sn^2 u}$$

$$dn\, u = \sqrt{1 - K^2 sn^2 u}\ ;$$

debe advertirse que los radicales que figuran en estas tres relaciones están tomados de tal manera, que reducen dichas espresiones á $+1$, para cuando $u = 0$.

Estas tres funciones toman el nombre de funciones elípticas, y se designan en general por λ, μ y ν.

Jacobi, las expresa por sen. am. u, cos. am. u y Δ am. u. La notación que indicamos más arriba, es debida á Gudermann.

Las funciones elípticas pueden tener dos orígenes:

1.° como funciones inversas de las integrales elípticas; 2.° como resultado de funciones doblemente periódicas.

Ahora bien, está probado que dos funciones doblemente periódicas compuestas de los mismos ceros y de los mismos infinitos, su relación por cociente debe ser una constante; según este mismo principio, las tres relaciones diferentes $\frac{\theta_1}{\theta}$, $\frac{\theta_2}{\theta}$, $\frac{\theta_3}{\theta}$ (1) ; que resultan de todas las que pueden formarse de las cuatro θ, θ_1, θ_2, θ_3 son funciones doblemente periódicas, con los mismos ceros é infinitos que ofrecen las funciones elípticas; así es que en virtud de lo dicho anteriormente podremos expresar las funciones elípticas por las tres relaciones (1) afectas de constantes, cuyos valores podrán determinarse por condiciones especiales, conforme á las funciones elípticas.

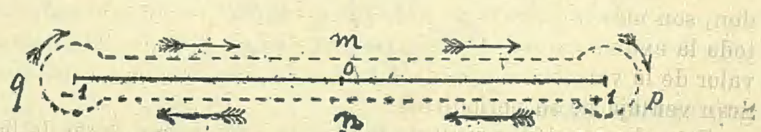
En virtud de todo lo que precede podremos escribir

$$\lambda(z) = A\,\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)}, \qquad \mu(z) = B\,\frac{\theta_2(z)}{\theta(z)},$$

$$(\pi) \qquad \nu(z) = C\,\frac{\theta_3(z)}{\theta(z)}.$$

Para determinar las constantes A, B, C necesitamos recordar algún principio referente á las integrales elípticas.

Al considerar la integral de 1.ª especie $u = \int_0^{sn\, u} \frac{dz}{\Delta(z)}$, si nos fijamos con los valores reales ± 1 que anulan al denominador, en el supuesto de recorrer



la variable el camino $m\,p\,n$, dará el doble de lo que corresponda á la integral de m á p, ó sea $\int_0^1 \frac{dz}{\Delta(z)}$; si luego continúa el movimiento de la variable siguiendo el camino $n\,q\,m$, dará por razones análogas, el doble de la misma integral, llegando al punto m de partida, con el mismo valor primitivo, obteniendo así el valor del período 2ω real; luego podremos escribir:

$$2\omega = 4\int_0^1 \frac{dz}{\Delta z},$$

ó sea

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dz}{\Delta z};$$

de donde se deduce $sn.\frac{\omega}{2} = 1$, cuyo resultado podemos expresar por $\lambda\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1$. Además por ser

$$cn.u = \sqrt{1 - sn.^2 u}\ , \quad dn.u = \sqrt{1 - K^2 m^2 u}$$

para $u = 0$, y según lo que precede, cabe también escribir:

$$\mu(0) = 1 \qquad \nu(0) = 1\,.$$

Con estos datos podremos modificar las fórmulas (π) en el supuesto de ser $z = \frac{\omega}{2}$ en la 1.ª, y $z = 0$, en las dos últimas, luego:

$$A = \frac{\theta\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_1\left(\frac{\omega}{2}\right)} \qquad B = \frac{\theta(0)}{\theta_2(0)} \qquad C = \frac{\theta(0)}{\theta_3(0)}\,.$$

El valor A, aún puede modificarse, tomando las fórmulas 2.ª y 4.ª correspondiente á las θ, para cuando $z = 0$, esto es,

$$\theta\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = \theta_3(z), \quad \theta_1\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = \theta_2(z),$$

de donde

$$\theta\left(\frac{\omega}{2}\right) = \theta_3(0)\ , \quad \theta_1\left(\frac{\omega}{2}\right) = \theta_2(0)\,.$$

Así pues

$$A = \frac{\theta\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_1\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\,.$$

Supongamos ahora

$$\sqrt{K} = \frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)}, \quad \sqrt{K'} = \frac{\theta(0)}{\theta_3(0)},$$

luego

$$\lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{K}}\,\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)}, \quad \mu(z) = \sqrt{\frac{K'}{K}}\,\frac{\theta_2(z)}{\theta(z)}, \quad \nu(z) = \sqrt{K'}\,\frac{\theta_3(z)}{\theta(z)}\,.$$

Con estos preliminares pueden darse ya las principales propiedades de las funciones elípticas.

FUNCIÓN λ.

Vamos á estudiar los períodos.

Consideremos $\lambda(z+\omega)=\frac{1}{\sqrt{K}}\frac{\theta_1(z+\omega)}{\theta(z+\omega)}$.

Hemos hallado

$$\theta_1(z+\omega)=-\theta_1(z) \qquad \theta(z+\omega)=\theta(z)$$

luego,

$$\lambda(z+\omega)=\frac{1}{\sqrt{K}}\times-\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)}=-\lambda(z).$$

Si añadimos ω, otra vez á z, resulta

$$\lambda(z+2\omega)=-\lambda(z+\omega)=\lambda(z);$$

de donde se infiere que 2ω, es uno de los períodos de λ.

Sea ahora $\lambda(z+\omega')=\frac{1}{\sqrt{K}}\frac{\theta_1(z+\omega')}{\theta(z+\omega')}$.

Sabemos que

$$\theta_1(z+\omega')=-\mu\theta_1(z),$$

$$\theta(z+\omega')=-\mu\theta(z),$$

luego

$$\lambda(z+\omega')=\frac{1}{\sqrt{K}}\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)}=\lambda(z),$$

de donde resulta que ω', es el segundo período de λ; así pues podremos escribir en general

$$\lambda(z+2m\omega+m'\omega')=\lambda(z),$$

siendo m y m', números enteros.

Para conocer los ceros de λ, basta tomar la fórmula de los ceros correspondientes á θ, ó sea $z=m\omega+m'\omega'$, la cual nos da 0 y ω, en el primer paralelógramo elemental, constituído por los dos períodos 2ω y ω'. Los infinitos se determinarán buscando los ceros de la función θ, ó sea

$$z=\frac{\omega'}{2}+(m\omega+m'\omega'),$$

lo que da en el primer paralelógramo los valores $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega'}{2}+\omega$.

Hay que advertir que los ceros é infinitos se reproducen en cada uno de los paralelógramos elementales, según los valores que vayan tomando m y m'.

La función λ, guarda alguna analogía con sen. $\frac{\pi z}{\omega}$, respecto al período real 2ω.

FUNCION μ.

Determinemos los períodos de dicha función.

Sea $\mu(z+\omega)=\sqrt{\frac{K'}{K}}\,\frac{\theta_1(z+\omega)}{\theta(z+\omega)}$.

Recordemos que

$$\theta_1(z+\omega)=-\theta_1(z),$$

$$\theta(z+\omega)=\theta(z),$$

luego

$$\mu(z+\omega)=-\sqrt{\frac{K'}{K}}\,\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)}=-\mu(z),$$

añadiendo ω, á z otra vez, se tiene:

$$\mu(z+2\omega)=-\mu(z+\omega)=\mu(z),$$

de donde se infiere que 2ω, es un período de la función μ.

Supongamos ahora

$$\mu(z+\omega')=\sqrt{\frac{K'}{K}}\,\frac{\theta_1(z+\omega')}{\theta(z+\omega')},$$

pero sabemos que

$$\theta_1(z+\omega')=\mu\,\theta_1(z),$$

$$\theta(z+\omega')=-\mu\,\theta(z),$$

luego

$$\mu(z+\omega')=-\sqrt{\frac{K'}{K}}\,\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)}=-\mu(z).$$

Si añadimos ω, á z, resulta

$$\mu(z+\omega+\omega')=-\mu(z+\omega)=\mu(z);$$

luego $\omega+\omega'$, es el otro período de la función μ, ó sea el lado contiguo al real del paralelógramo formado por los dos períodos.

Para determinar los ceros de esta función, basta tomar los que corresponden á θ_1, ó sea $z=\frac{\omega}{2}+(m\omega+m'\omega')$, que realizados en el primer paralelógramo elemental dan

$$\frac{\omega}{2} \text{ y } \frac{3\omega}{2}.$$

En cuanto á los infinitos de μ, basta tomar como en el caso anterior los ceros de la función θ, pero como quiera que el paralelógramo elemental resulta en este segundo caso alterado, se comprende que no serán los mismos de la función λ, sino

$$\frac{\omega'}{2}+\omega\,,\quad \frac{\omega'}{2}+2\,\omega.$$

La función μ guarda analogía con $\cos\frac{\pi z}{\omega}$, respecto al período real $2\,\omega$.

FUNCIÓN ν.

Empecemos por determinar los períodos.

Sea $\nu\,(z+\omega)=\sqrt{K'}\;\dfrac{\theta_3\,(z+\omega)}{\theta\,(z+\omega)}$.

Sabemos que

$$\theta_3\,(z+\omega)=\theta_3\,(z)\,,$$

$$\theta\,(z+\omega)=\theta\,(z)\,,$$

luego

$$\nu\,(z+\omega)=\sqrt{K'}\;\frac{\theta_3\,(z)}{\theta\,(z)}=\nu\,(z),$$

de donde se infiere que ω, es un período de la función ν.

Tomemos ahora

$$\nu\,(z+\omega')=\sqrt{K'}\;\frac{\theta_3\,(z+\omega')}{\theta\,(z+\omega')},$$

no olvidando que

$$\theta_3\,(z+\omega')=\mu\,\theta_3\,(z)\,,\qquad \theta\,(z+\omega')=-\,\mu\,\theta\,(z)\,;$$

luego

$$\nu\,(z+\omega')=\sqrt{K'}\times\frac{-\,\theta_3\,(z)}{\theta\,(z)}=-\,\nu\,(z)\,,$$

añadiendo á z, la cantidad ω', resulta

$$\nu\,(z+2\,\omega')=-\,\nu\,(z+\omega')=\nu\,(z)\,,$$

de donde se infiere que $2\,\omega'$, es el otro período de ν.

Para los ceros basta tomar los ceros que corresponden á θ_3, ó sea

$$z=\frac{\omega+\omega'}{2}+(m\,\omega+m'\,\omega')$$

lo que nos da en el primer paralelógramo elemental, los valores respectivos

$$\frac{\omega+\omega'}{2}\,,\ \frac{\omega+\omega'}{2}+\omega'.$$

En cuanto á los infinitos resultan de la misma función que en los dos casos anteriores, pero cuyos resultados diferirán por la nueva situación del paralelógramo elemental, siendo en este caso

$$\frac{\omega'}{2}, \frac{3\omega'}{2}.$$

Aunque sean muy reducidos los conocimientos que acabamos de exponer respecto á las funciones elípticas; tenemos, no obstante, la esperanza de que ellos han de ser suficientes para adquirir el fundamento de esa bella rama de la matemática, que elevándose entre las funciones hiperelípticas, abelianas, etcétera, nos señala cuales sean las últimas conquistas alcanzadas dentro del cálculo integral.

LAS ECONOMÍAS EN LA ENSEÑANZA

A continuación publicamos, por su interés, las disposiciones que acaba de dictar el Sr. Ministro de Fomento, siguiendo el plan de economías propuesto por el gobierno. Pocos comentarios necesitan tales disposiciones y á buen seguro las harán cumplidamente nuestros lectores, pero no podemos prescindir de consignar aquí nuestra protesta, al ver que bajo el pretexto de economías se suprimen tantas cátedras de Institutos y de Universidades, mientras en las propias disposiciones y con sarcástica formalidad se crean clases de gimnasia en los Institutos.

En nuestro país queda demostrado una vez más que todo es cuestión de equilibrio, no de ciencia, ni de saber, que eso estorba para escalar las grandes posiciones; gimnasia, gimnasia, nada de estudios serios y provechosos, es necesario agilidad para sostenerse, para manejar el florete, y quizá mañana el revolver y la navaja; nuestra juventud ha de educarse en los moldes novísimos de las flamantes teorías modernas.

Y nada digamos del alcance legal ó moral de semejantes disposiciones: una persona que ha seguido una carrera, que posee sus títulos, unos y otros á costa de no escasos sacrificios, que ha hecho oposiciones, que ha ganado una cátedra, desempeñada dignamente sin motivo alguno de queja, ¿puede un Ministro, bajo el pretexto de economías que no resultan, desposeer al catedrático de aquella propiedad á tanta costa alcanzada? ¿puede sumirle en la miseria arrebatándole el modesto pedazo de pan con el cual alimentaba á su familia?

Sí, puede hacerlo; tal es la situación de nuestro profesorado!

Y no es estraño: en España se desconoce la misión del profesorado superior y se considera el catedrático como á un empleado cualquiera; pesa más la opinión del jefe ó del oficial de negociado que el parecer del cuerpo docente que nuestro Profesorado debiera de representar. Y si el empleado del ministerio informa al Director ó al Ministro que se pueden suprimir un centenar de catedráticos de nuestros establecimientos de enseñanza, se suprimen sin más consulta, sean cuales fueren las consecuencias para la instrucción y para el país.

No se atrevería, ciertamente, ni el empleado ni el Ministro á proceder tan ligeramente ante cuestiones de tamaña importancia, si el profesorado superior estuviera unido, si los profesores de las Universidades, de carreras especiales, de los Institutos, formaran una poderosa Asociación para defender sus intereses á cada paso amenazados y postergados casi siempre al interés mezquino ó á la desidia.

Una Asociación poderosa no debiera acudir, para defender los derechos de sus individuos, á los procedimientos seguidos poco tiempo ha por los telegrafistas españoles para defender los suyos, pues, sin llegar á tal extremo no le faltarían recursos de toda clase para dejar sentir su opinión en las esferas donde todo se resuelve.

¿Existe esta asociación del profesorado superior en nuestro país?..... No es extraño, pues, que ocurra lo que todos lamentamos.

Para realizar este pensamiento bastaría que cada centro oficial de enseñanza nombrara un representante, que éstos se reunieran donde fuera posible y más ventajoso para el desarrollo de la futura Asociación, que se redactaran unos sencillos reglamentos y que comenzara la campaña inmediatamente para que se devolvieran las cátedras á los profesores que acaban de quedar desposeidos de ellas. No se trata ahora de defender los intereses de un centenar de profesores hoy perjudicados, sino de los intereses de todo el profesorado español amenazados de continuo por cualquier reforma.

¿Consideran nuestros lectores necesaria la agrupación del profesorado superior, en interés de la ciencia y de la enseñanza?

Roig y Torres.

EXPOSICIÓN.

Señora: La ley de 30 de junio último impone la obligación de realizar economías en los distintos servicios del Estado, habiéndose fijado al efecto por Real decreto de 15 del mes actual la parte que de estas economías corresponde á los que se hallan á cargo de este Ministerio, y dentro de él las especiales de la Dirección general de Instrucción pública.

Para lograrlas en la elevada cifra asignada á la misma, ha sido precisa la reorganización de los servicios en varios ramos de la enseñanza, respondiendo al precepto y autorización que la expresada ley de Presupuestos comprende en su articulado.

No es dable al Ministro que suscribe sino satisfacer la dolorosa necesidad en que la ley le coloca de esa reorganización para realizar economías que la opinión demanda, reorganización que no es propiamente la de la enseñanza, para la que sería indispensable tiempo no tasado, meditado estudio, y circunstancias diferentes á las que por el momento nos rodean.

Las modificaciones establecidas en los servicios de Inspección y primera enseñanza no alteran la forma en que se prestan, puesto que, aparte de pequeñas rebajas en los gastos, se circunscriben á la reducción en gran parte de la subvención concedida por el Estado á la Junta de derechos pasivos del Magisterio, reducción que permite la actual situación económica de dicho Centro, sin riesgo de desatender los fines para que fué creada.

Respecto á la segunda enseñanza, se dispone la refundición á los efectos de su servicio de las dos cátedras de Latín y Castellano y de Matemáticas, que existen en los Institutos, declarando excedente á uno de los Profesores que hoy las desempeñan y poniéndolas á cargo del otro Profesor de la asignatura, cuya medida produce como consecuencia un número considerable de Profesores excedentes, á los que se procurará dar pronta colocación en cátedras vacantes de igual ó análoga asignatura, para extinguir cuanto antes dicha clase, y atenuar los perjuicios que por el momento se les irrogan.

Se suprimen asimismo distintos cargos y algunas enseñanzas aisladas, hoy vacantes en varios establecimientos, no por considerar superfluos dichos servicios, sino porque dada su índole, dicha supresión no ofrecece por ahora graves inconvenientes, pero con el propósito de restablecerlos más adelante, si las circunstancias económicas lo permitieran.

La duplicidad de enseñanzas sirve igualmente de base á otras economías acordadas. Cursándose la asignatura de Lengua francesa en lo los los Institutos y también en las Escuelas elementales de Comercio establecidas en capitales de provincia, no hay razón que justifique como indispensable la existencia en una misma localidad de dos cátedras de un mismo idioma; y respondiendo á este criterio, se dispone que los Profesores de francés de los Institutos pasen á prestar sus servicios con su propio carácter de numerarios y sueldo que hoy tienen á las Escuelas de Comercio establecidas en la misma capital, á cuyos establecimientos se da con tal motivo más elementos de vida. Facilita este conveniente arreglo la circunstancia de hallarse vacantes en ellos los cátedras de Lengua francesa.

Las Escuelas de Artes y Oficios y cuanto á Bellas Artes y Academias se refiere apenas si sufre alteración, que no consiente la naturaleza de su organización, en el personal á las mismas afecto.

En las Facultades de Derecho se obedece al mismo criterio adoptado en los Institutos, pudiendo las cátedras de Economía política y Hacienda pública ser desempeñadas por un Profesor, llevando la aplicación de esta economía á las cátedras de Derecho procesal y á la reducción á cuatro obligatorias de las ocho que constituyen el período del Doctorado.

Una reducción análoga se hace en los dos cursos de lección alterna de las clases de Metafísica de la Universidad Central, completada con la rebaja obtenida en las Secciones de Ciencias de las Universidades de Granada, Sevilla, Valencia y Zaragoza, rebaja que autoriza la situación en que se encuentran las enseñanzas en dichos Centros.

En el Cuerpo facultativo de Archiveros, Bibliotecarios y Anticuarios se han obtenido también importantes economías sin detrimento de los servicios que le están encomendados, y sin que quede excedente ningún individuo del mismo, por la circunstancia de no haberse provisto desde hace algún tiempo las vacantes naturales.

Asimismo en el material se han producido economías no despreciables, con especial cuidado de no desatender las necesidades y condiciones de los servicios, llegando con todas á las cifras asignadas á la Dirección, como el detalle del presupuesto demuestra, sin que para conseguirlo haya habido que renunciar á la conveniente creación de 10 clases de Gimnástica (una por distrito universitario), y en el Instituto que radique en población donde exista Universidad, con lo que, por el pronto, pueden obtener colocación Profesores de la suprimida Escuela Central de Gimnástica y los que en la misma hayan obtenido título profesional.

En esta forma, el Ministro que suscribe realiza las economías que el país reclama por modo elocuente, obedeciendo las prescripciones de la ley y en la cuantía que á la Dirección de Instrucción pública corresponde (dado el numeroso personal á ella agregado), habiendo procurado al verificarlo lograr el menor perjuicio posible, herir el menor número de intereses, que se propone atender preferentemente en las excedencias producidas, haciendo menos sensibles las inevitables consecuencias de crecidas economías y en servicios tan importantes como lo son todos cuantos afectan al ramo de la Instrucción pública.

Fundado en las consideraciones que preceden, el Ministro que suscribe tiene la honra de someter á la aprobación de V. M. el adjunto proyecto de decreto.

Madrid 24 de julio de 1892,—Señora: A. L. R. P. de V. M.—Aureliano Linares Rivas.

REAL DECRETO

A propuesta del Ministro de Fomento; de acuerdo con el Consejo de Ministros;

En nombre de Mi Augusto Hijo el Rey don Alfonso XIII, y como Reina Regente del Reino,

Vengo en decretar lo siguiente:

Artículo 1.° Haciendo uso de los preceptos y autorizaciones concedidas por la ley de Presupuestos vigente, y con arreglo á lo preceptuado en el Real decreto de 15 del corriente mes, las plantillas del personal de los establecimientos dependientes de la Dirección general de instrucción pública serán en lo sucesivo las que á continuación se expresa en el adjunto estado de este decreto, quedando reducidos también los créditos de material en los conceptos y cantidades que se determinan, produciéndose, por tanto, una baja en total de 790,250 pesetas.

Art, 2.° Se suprimen en los Institutos de segunda enseñanza á cargo del Estado un Catedrático de Latín y otro de Matemáticas, quedando éstos en la situación de excedentes, hasta tanto que obtengan colocación, con arreglo á las disposiciones vigentes, en cátedras vacantes de igual ó análoga asignatura.

Los Catedráticos de dichas asignaturas darán clase diaria de cada curso.

Art. 3.° Se suprimen las Cátedras de francés de los Institutos establecidos en capitales donde haya Escuela elemental de Comercio.

Los Profesores de dicha asignatura pasarán con el carácter de numerarios y con el sueldo que actualmente disfruten á las referidas Escuelas, en las cuales deberán matricularse y cursarán dichos estudios los alumnos de los Institutos objeto de la supresión.

Art. 4.° Se crean 10 clases de Gimnástica, que se establecerán en los Institutos donde haya Universidad.

En Madrid se instalará en el Instituto de San Isidro.

Art. 5.° Quedan anuladas todas las convocatorias para proveer por oposición ó concurso las cátedras de Latín y Castellano y de Matemáticas, excepto aquellas para las que se estén verificando ejercicios de oposición ó haya formulado propuesta el Consejo de Instrucción pública.

Igualmente y con las excepciones contenidas en el párrafo anterior, el Ministro de Fomento podrá anular ó modificar cualquiera otra convocatoria anunciada hasta la fecha, siempre que la cátedra vacante á que aquella se refiera haya de ser ocupada por un Profesor excedente.

Art. 6.° En las Facultades de Derecho, las cátedras de Economía política y Hacienda pública serán desempeñadas por un solo Catedrático, así como las de Derecho procesal, que á este objeto se unen ó agregan en las alternas de Procedimientos judiciales y Práctica forense y redacción de instrumentos públicos.

Art. 7.° El período del Doctorado en dicha Facultad queda reducido á las cuatro cátedras obligatorias de Literatura y Bibliografía jurídicas, Historia de la Iglesia y Colecciones canónicas, Legislación comparada é Historia de los Tratados.

Art. 8.° En las Facultades de Filosofía y Letras de la Universidad Central los dos cursos de lección alterna de Metafísica quedarán á cargo de un solo Profesor, como en las demás Universidades.

Art. 9.° Se suprimen los Decanatos y Secretarías, así como las cátedras de Análisis matemático y Geometría de la Sección de Ciencias de las Universidades de Granada, Sevilla, Valencia y Zaragoza, quedando únicamente en las mismas las tres asignaturas del preparatorio de Medicina y Farmacia; el Profesorado de dicha asignatura dependerá en lo sucesivo del Decanato de Medicina.

Art. 10. Las plantillas y reducciones consignadas empezarán á regir desde el día 1.° de agosto próximo.

Dado en San Sebastián á veintiséis de julio de mil ochocientos noventa y dos.—María Cristina.—El Ministro de Fomento, Aureliano Linares Rivas.

CURACIÓN DE LA RABIA

El eterno tema de la curación de la rabia vuelve á hacer una de sus frecuentes y hasta ahora poco eficaces apariciones.

Los Sres. Tizzoni y Cantanni han encontrado el medio de curar la rabia, una vez ésta declarada en el individuo.

Se dice en la comunicación que el secretario de la Real Academia de los Linces, Ernesto Mancini, acaba de publicar en la *Revista general de ciencias*, que el sistema de vacunación antirrábica de M. Pasteur es *preventivo* y no *curativo*.

Una persona mordida por un perro rabioso debe apresurarse á que la vacunen en el Instituto Pasteur, porque la vacuna se desarrolla generalmente en el organismo con más rapidez que el virus introducido por la herida, y se produce el estado refractario antes de que aparezcan las manifestaciones rábicas. Cada hora que se pierda en acudir á vacunarse después de mordido es un fomento de las probabilidades de un fatal desenlace. Pero una vez declarada la rabia, hasta ahora no se había descubierto al paciente, que sin remisión estaba condenado á muerte.

Con el nuevo método, en un todo independiente del antiguo, puede ser salvado un rabioso, aunque se halle invadido por los primeros síntomas del mal. De hoy más se cuenta, dicen los periódicos italianos, con una gran probabilidad, si los experimentos hechos son exactos, de salvar á las personas mordidas por animales rabiosos.

He aquí la génisis del descubrimiento:

Hace algún tiempo que en el Laboratorio de Patología de la Universidad de Boloña, el profesor Tizzoni y la doctora Cantanni vacunaban con eficacia contra el tétanos. El líquido producido por el bacilo del tétanos inyectado á los animales les hace refractarios á inoculaciones más virulentas del virus de la enfermedad.

Los experimentadores extrajeron del suero de la sangre de los animales refractarios la sustancia que confiere la inmunidad, y esta sustancia, añadida á sangre tetánica, ha desempeñado siempre el papel de antitóxico. El Sr. Tizzoni y la señora Cantanni han creído conveniente pasar del animal al hombre, y se cita hoy un número muy significativo de casos en que personas atacadas de tétanos han sido curadas radicalmente por medio de las inyecciones antitóxicas.

Tal éxito ha sugerido la idea de generalizar el método, y los Sres. Tizzoni y Cantanni han ensayado su aplicación en el tratamiento de la rabia confirmada. Con anterioridad el Sr. Tizzoni y Mr. Schwarz habian comprobado que el suero de la sangre de los animales indemnes se colocó en un vaso con virus rábico inoculado á los conejos. Estos experimentos fueron continuados. El suero de la sangre de un animal refractario á la rabia por vacunación ejerce una acción destructiva sobre el virus rábico inoculado á los conejos. Estos experimentos fueron continuados. El suero de la sangre de animales indemnes se colocó en un vaso con virus rábico, y este virus perdió su virulencia. Entonces se probó en animales rabiosos, y el suero antitóxico no solamente previno el desarrollo de los fenómenos rábicos, sino que también curó la rabia preparada, aun cuando ésta había ya invadido el sistema nervioso y ocasionado todos los síntomas morbosos conocidos.

Los Sres. Tizzoni y Cantanni han declarado ante la Real Academia de los Linces que habían conseguido también extraer de la médula de un animal rabioso la sustancia vacunante, exenta de la virulencia que forma el agente activo del tratamiento de M. Pasteur. Este último agente concede la inmunidad, pero no destruye el virus. La sustancia vacunadora de los Sres. Tizzoni y Cantanni, por el contrario, destruye el virus rábico aun después de transcurrir cu renta y ocho horas, á contar desde el momento de la infección.

Los dos fisiólogos de Boloña no han experimentado su sistema más que en animales; pero aseguran que no tardando mucho se hallarán en condiciones de aplicar el método curativo al hombre, y nosotros celebraremos que no nos proporcionen una decepción más en las ilusiones que el tratamiento del horrible mal hace concebir de vez en cuando.

CRÓNICA

Temblor de tierra.—Según telegrama de Londres en la noche del día 17 de agosto se observaron dos sacudidas del suelo, á manera de terremoto, en Mildforhaven, en el pais de Gales, acompañadas de una fuerte detonación. Las casas han vacilado sobre sus cimientos y los habitantes han salido á las calles.

Catedráticos de la Universidad Central.—Los Sres. D. José Muñoz del Castillo y D. Francisco de P. Rojas, catedráticos excedentes con motivo de la supresión de la Escuela general preparatoria de Ingenieros y Arquitectos, han sido nombrados respectivamente para las cátedras de Química inorgánica y de Física Matemática de la Universidad Central.

Erupción del Etna.—Después de las últimas noticias que publicamos, se había dado por terminada la erupción del Etna conforme se indica en el siguiente párrafo de una correspondencia de Roma.

«Con vivísima satisfacción anuncio que desde anoche la erupción del Etna ha entrado rápidamente en un periodo de decrecencia, que al director del observatorio de Sicilia y á las personas científicas hace augurar el término de esta verdadera catástrofe para una parte de la región siciliana, que ha durado 25 días. Belpasso, Nicolosi y aun la misma importante ciudad de Catania pueden considerarse felicísimas—á pesar de los viñedos destruídos y de las mieses y arbolados abrasados por las corrientes de lava, alguna de las cuales revestía en estos últimos días la anchura de 400 metros, mientras las bombas que salían de los seis cráteres se elevaban á 300—de que, en 1892 no se haya repetido el espectáculo de 1669 en que la erupción del Etna, que después ha contado otras 44, sepultó por completo la ciudad de Catania.»

Posteriormente se han recibido los siguientes telegramas:

«*Catania 6 de agosto.*—La erupción ha tomado tal incremento que no parece sino que ha vuelto á empezar.

La lava corre hacia Serrapizzula, supera á la de 1866 y devasta toda una región fertil.

Se oyen continuos y fuertes rumores subterráneos.»

Catania 13 de agosto.—Hoy ha recrudecido de nuevo la erupción del Etna, á la cual han acompañado dos temblores de tierra que se han sentido en las minas de Nicolosi. El volcan vomita peñascos esplosibles, guijarros y escorias con frecuentes ruidos subterráneos.

El verano de 1892.—Telegrafían de Nueva-York á un periódico de París con fecha del 30 julio.

«El intenso calor que se ha sentido esta semana no disminuye. Ayer fué escesivo. El termómetro marcaba en la 5.ª avenida, en el Reforen Club, 48 grados centígrados á la sombra.

Ha habido noventa y ocho muertes repentinas por efecto tan solo del calor.

Nunca han ocurrido tantas muertes súbitas, ni aún en las epidemias de 1847 y de 1867.

Ayer hubo en Nueva York doscientas veintitres defunciones, de ellas ciento once de niños de poca edad. En los barrios más poblados fué donde murieron máe niños.

Es casi imposible dormir y de ello resulta que han caído enfermas gran númsro de personas.

Los casos de insolación y de postración de fuerzas fueron muchos ayer y han aumentado hoy.

Caen muertos en las calles muchos caballos y como no bastan los encargados de recogerlos, las compañías de tranvías se ven precisadas á retirarlos.

Los hospitales y las ambulancias rebosan de enfermos.

En Chicago, está lleno de cádaveres el sitio destinado á tenerlos en depósito.

Se ha usado tanta agua que los depósitos de ella están secos.

Este terrible calor domina de siete días á esta parte en todo el país situado al Este del Mississipi.»

Telegrama del día 16 agosto.—Reinan grandes calores en España. Ayer el termómetro llegó en Madrid á la sombra á 41 grados, en San Sebastián á 40 y en Sevilla á 46.

Telegrama del día 17.—Los calores son muy intensos en toda la Península. Ayer se elevó la temperatura en Sevilla á 48 grados á la sombra y á 58 al sol. En Madrid á 40 grados y seis décimas á la sombra y á 44 grados y 5 décimas al sol.