REVISTA

DE LA

SOCIEDAD DE PROFESORES DE CIENCIAS.

AÑO I. MADRID 18 DE JUNIO DE 1874. NÚM. 4.

UN TEOREMA SOBRE LA PARABOLA

Y ALGUNOS COROLARIOS DEL MISMO (a)

1. Referida la parábola á su eje de simetría, como eje de abscisas, y á su tangente en el vértice, como eje de ordenadas, la ecuacion de dicha curva, es, segun se sabe,

$$y^2=2px \quad , \qquad (1)$$

en la cual $2p$ designa el parámetro.

El área comprendida entre la curva, el eje de ordenadas y una paralela al eje de abscisas, la cual corte á la curva en el punto x , y , tiene por expresion

$$S=\frac{1}{3}xy \; ,$$

ó bien, midiéndola solo, en virtud de la ecuacion (1) , por el valor de y,

$$S=\frac{1}{6p}y^3 \; .$$

En su consecuencia, el área s de un segmento parabólico, comprendido entre la curva y una de sus cuerdas, tendrá por expresion,—designando por

(a) Nos ha sugerido este artículo, otro publicado hace años, en 1844, en Lóndres con las iniciales S. F., las cuales indudablemente señalan al distinguido matemático STEPHEN FENWICK, autor, por aquel entonces, de otros varios importantes artículos. El que motiva el presente tiene, á nuestro modo de ver, al par que las ventajas, los inconvenientes de un boceto magistral. En él, las ideas casi no están más que rápidamente apuntadas, y hemos creido que, al reproducirle, convenia huir de tan gran laconismo, y al mismo tiempo, adoptar otro órden en la exposicion, y una notacion mas sencilla y adecuada. Conservariamos la firma del autor, si no temiéramos hacerle responsable de nuestras propias faltas.

x', y' ; x'', y'', las coordenadas de los puntos comunes á esta cuerda y su arco, y supuesta la ordenada y'' mayor que la y', —

$$\begin{aligned} s &= (y''-y')\frac{x''+x'}{2} - \frac{1}{6p}(y''^3-y'^3) \\ &= \frac{1}{4p}(y''-y')(y''^2+y'^2) - \frac{1}{6p}(y''^3-y'^3) \\ &= \frac{1}{12p}(y''^3-3y''^2y'+3y''y'^2-y'^3) \\ &= \frac{1}{12p}(y''-y')^3 \end{aligned}$$

De donde resulta

$$y''-y' = \sqrt[3]{12p}\,\sqrt[3]{s},$$

ó, poniendo, para simplificar, $\sqrt[3]{12p} = k$,

$$y''-y' = k\sqrt[3]{s} = ks^{\frac{1}{3}}$$

2. Esto sentado, *si habiendo tomado sobre la curva una série de puntos* m_1, m_2, m_3, ... m_n, *en órden ascendente,* (del de menor al de mayor ordenada), *formamos el polígono* $m_1 m_2 m_3$ ..... $m_n m_1$, y *llamamos por su órden* s_1, s_2, s_3, ... s_n, *los segmentos parabólicos correspondientes á los lados* $m_1 m_2$, $m_2 m_3$, $m_3 m_4$, $m_n\ m_1$, *se tendrá*

$$s_n^{\frac{1}{3}} = s_1^{\frac{1}{3}} + s_2^{\frac{1}{3}} + s_3^{\frac{1}{3}} + \ldots\ldots + s_{n-1}^{\frac{1}{3}}.$$

En efecto, designando por x_1, y_1 ; x_2, y_2 ; x_3, y_3 ; .... x_n, y_n, las coordenadas de m_1, m_2, m_3, ... m_n, será

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= ks_1^{\frac{1}{3}}, \\ y_3 - y_2 &= ks_2^{\frac{1}{3}}, \\ y_4 - y_3 &= ks_3^{\frac{1}{3}}, \\ &\vdots \\ y_n - y_{n-1} &= ks_{n-1}^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

cuyas igualdades sumadas, dan

$$y_n - y_1 = k\left(s_1^{\frac{1}{3}} + s_2^{\frac{1}{3}} + s_3^{\frac{1}{3}} + \ldots\ldots + s_{n-1}^{\frac{1}{3}} \right).$$

Pero

$$y_n - y_1 = k s_n^{\frac{1}{3}},$$

En su consecuencia:

$$s_n^{\frac{1}{3}} = s_1^{\frac{1}{3}} + s_2^{\frac{1}{3}} + s_3^{\frac{1}{3}} + \ldots\ldots + s_{n-1}^{\frac{1}{3}}. \quad (2)$$

3 Es notable este teorema, tanto por su elegancia, como por el número de corolarios que encierra y el valor ó interés de algunos de ellos.

Suponiendo:

$$y_2 - y_1 = y_3 - y_2 = y_4 - y_3 = \ldots = y_n - y_{n-1}.$$

serán á su vez:

$$s_1 = s_2 = s_3 = \ldots\ldots = s_{n-1}.$$

Lo cual nos dice que *si se divide una cuerda de una parábola en un* número *cualquiera de partes iguales, y por los puntos de division*, del primero al último, *se trazan paralelas al eje de la curva*; *uniendo los puntos consecutivos de interseccion de estas paralelas con la curva, resultará otro* igual número *de segmentos parabólicos equivalentes.*

4. Bajo la misma hipótesis la igualdad (2) se convierte en esta otra.

$$s_n^{\frac{1}{3}} = (n-1)\, s_1^{\frac{1}{3}},$$

la cual, elevando ambos miembros al cubo dá

$$s_n = (n-1)^3 s_1 . \quad (3)$$

5. Si el área del polígono $m_1 m_2 m_3 \ldots m_n m_1$, inscrito en la parábola, se representa por p_n (n indica aquí el número de lados ó vértices del polígono), será evidentemente en el caso que seguimos suponiendo,

$$s_n = p_n + (n-1)\, s_1 ; \quad (4)$$

y sustituyendo en esta expresion en vez de s_1 su valor en funcion de s_n (3), resultará

$$s_n = p_n + \frac{s_n}{(n-1)^2},$$

de donde

$$s_n = \frac{(n-1)^2}{(n-1)^2-1} p_n . \qquad (5)$$

6. Tambien si en aquella relacion (4) reemplazamos s_n por su valor en funcion de s_1 (3), se obtiene:

$$(n-1)^3 s_1 = p_n + (n-1) s_1 ,$$

de donde

$$p_n = (n-1) \left[(n-1)^2 - 1 \right] s_1 ,$$

ó bien

$$p_n = (n-2)(n-1)\, n s_1 . \qquad (6)$$

7. Si trazando cuerdas consecutivas de la parábola m_1m_2, m_2m_3, m_3m_4,... $m_n m_{n+1}$, $m_{n+1} m_{n+2}$, tales (**3**) que proyectadas sobre el eje de las y paralelamente al de las x, sean iguales; y uniendo con el punto m_1 cada uno de los m_3, m_4,.....m_{n+2}, formamos la série de polígonos inscritos $m_1m_2m_3$, $m_1m_2m_3m_4$, etc.; designándolos,—acorde como antes el subíndice con el número de lados ó vértices del polígono,—por p_3, p_4,..... p_{n+2}, tendremos en general para cada uno de ellos, en virtud de la relacion (6).

$$p_{n+2} = n(n+1)(n+2) s_1 .$$

Mas, siendo el coeficiente de s_1 el producto de tres números enteros consecutivos, es en cualquier caso divisible por 6.

Por otra parte, para el polígono primero de la série se tiene

$$p_3 = 6 s_1 . \qquad (7)$$

Luego cada uno de los siguientes equivale á un número entero de veces este primero. La série de todos ellos

$$p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6 \ldots\ldots\ldots p_{n+2} ,$$

será como la série de los números

$$1 \quad 4 \quad 10 \quad 20 \ldots\ldots \tfrac{1}{6}n\,(n+1)\,(n+2)\ .$$

Y merece aquí notarse que $\frac{1}{6}n\,(n+1)\,(n+2)$ es la misma fórmula que dá *el número de balas contenidas en las n primeras capas superiores de una pila triangular.*

8. A su vez, designando por $t_1, t_2, t_3 \ldots t_n$, la série de triángulos $m_1m_2m_3$, $m_1m_3m_4$, $m_1m_4m_5$,...$m_1\,m_{n+1}\,m_{n+2}$, cada triángulo será la diferencia entre el polígono que en la série del párrafo anterior lleva el mismo subíndice aumentado en dos unidades, y el polígono precedente en la misma. Se tendrá, pues, en general

$$t_n = p_{n+2} - p_{n+1} = n\,(n+1)(n+2)\,s_1 - (n-1)\,n\,(n+1)\,s_1\ ,$$

ó bien

$$t_n = 3\,n\,(n+1)\,s_1\ .$$

Pero $n\,(n+1)$, producto de dos números enteros consecutivos, es siempre divisible por 2. Luego cada uno de los triángulos t_2, t_3, t_4, ...t_n contendrá un número exacto de veces á $6s_1$, ó sea (7) á $t_1 = p_3$. La série, pues, de los triángulos

$$t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \ldots\ldots\ldots\ldots t_n$$

será como la de los números

$$1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \ldots\ldots \tfrac{1}{2}\ n\,(n+1)\ .$$

Y aquí tambien merece notarse que $\frac{1}{2}\ n\,(n+1)$ es la misma fórmula que dá *el número de balas de que consta la n ésima capa*, á contar desde arriba, *de una pila triangular.*

9. La relacion (2) no se verifica solo en los segmentos parabólicos s_1, s_2, s_3,...s_{n-1}, s_n.

En virtud de la igualdad (3), es claro que si cada una de las cuerdas m_1m_2, m_2m_3,... $m_n\,m_1$, que determinan dichos segmentos, se divide en el mismo número r de partes iguales, y por los puntos de division se trazan paralelas al eje de la parábola, cada uno de esos segmentos s_1, s_2, s_3,...., equivaldrá á su correspondiente segmento parcial s'_1, s''_1, s'''_1,.... multiplicado por un mismo factor $(r-1)^3$. Sustituida, pues, la série de estos valores en la relacion (2), y suprimido el factor comun $(r-1)$, quedará otra relacion análoga entre los segmentos parciales s'_1, s''_1, s'''_1,....

De la misma manera, segun la ecuacion (5), cada uno de los segmentos primitivos s_1, s_2, s_3,...., equivale á su correspondiente polígono inscrito p'_r, p''_r, p'''_r,.....,—cuyos vértices son los puntos de interseccion de aquellas paralelas con la curva,—multiplicado cada polígono por un mismo factor $\frac{(r-1)^2}{(r-1)^2-1}$ Sustituyendo, pues, esta segunda série de valores en la relacion (2), y suprimiendo el factor comun $\left(\frac{(r-1)^2}{(r-1)^2-1}\right)^{\frac{1}{3}}$, quedará otra relacion análoga entre los polígonos inscritos p'_r, p''_r, p'''_r,....

10. Pero se extiende aún á más tal relacion.

Por una parte, si en la fórmula (5) se hace $n=3$, resulta

$$s_3=\frac{4}{3}p_3 \quad . \qquad (8)$$

Lo cual nos dice que *un segmento parabólico*, determinado por una cuerda, *equivale á los cuatro tercios del triángulo cuya base es esta cuerda, y cuyo vértice es el punto del arco, situado sobre el diámetro que biseca á la misma.*

Por otra parte, tomando en este mismo caso por eje de abscisas tal diámetro, y por eje de ordenadas la tangente á la parábola en el extremo del mismo, la ecuacion de la curva conserva, como es sabido, idéntica forma. Pero la cuerda m_1m_3 será paralela al nuevo eje de las y: los puntos m_1 y m_3 tendrán, pues, la misma y comun abscisa. Por consiguiente, con relacion al nuevo eje de abscisas, las dos tangentes á la parábola en los puntos m_1, m_3, tendrán comun la subtangente, la cual será doble de la abscisa comun. Luego, si llamamos τ el triángulo formado por dichas dos tangentes y por la cuerda m_1m_3, será

$$p_3=\frac{1}{2}\tau\,,$$

cuyo valor, sustituido en (8), dá

$$s=\frac{2}{3}\tau\,, \qquad (9)$$

quitando el subíndice á s, porque ya no hay que dividir su arco para formar el triángulo τ, al revés de lo que sucedia para formar el p_3.

Esta última igualdad nos dice que *un segmento parabólico*, determinado por una cuerda, *es los dos tercios del triángulo que forman esta cuerda y las tangentes al arco en sus extremos.*

En su consecuencia, si por cada uno de los puntos m_1,m_2,.... m_{n-1}, m_n, trazamos la tangente á la parábola, y designamos por τ_1, τ_2,... τ_{n-1}, τ_n, la série de triángulos formados por estas tangentes y las cuerdas m_1m_2, m_2m_3,... $m_{n-1}m_n$, $m_n\,m_1$, se verificará tambien la relacion.

$$\tau_n^{\frac{1}{3}} = \tau_1^{\frac{1}{3}} + \tau_2^{\frac{1}{3}} + \tau_3^{\frac{1}{3}} + \dots + \tau_{n-1}^{\frac{1}{3}} \qquad (10)$$

11. El caso en que el segundo miembro de la igualdad anterior consta solo de dos términos, dá lugar á interesantes consecuencias.

Sean m_1, m_2, m_3 tres puntos de la parábola (del de menor al de mayor ordenada), y los puntos de interseccion de las tangentes á la curva en m_1, m_2, m_3, sean respectivamente, para la 1.ª y 2.ª, 2.ª y 3.ª, 3.ª y 1.ª, α, β y γ. En virtud de la relacion (10) se tendrá

$$\tau_3^{\frac{1}{3}} = \tau_1^{\frac{1}{3}} + \tau_2^{\frac{1}{3}} \qquad (11)$$

Por otra parte, llamando aún s_1, s_2, s_3, los segmentos parabólicos determinados por las cuerdas m_1m_2, m_2m_3, m_3m_1, y p_3 el triángulo inscrito $m_1m_2m_3$, será evidentemente

$$p_3 = s_3 - s_1 - s_2 ,$$

y, en virtud de la propiedad (9),

$$p_3 = \frac{2}{3}(\tau_3 - \tau_1 - \tau_2) , \qquad (12)$$

ó bien, representando por T el área del triángulo $\alpha\beta\gamma$,

$$p_3 = \frac{2}{3}(T + p_3) ,$$

de donde

$$p_3 = 2T . \qquad (13)$$

Sustituyendo este valor de p_3 en (12), y multiplicando ambos miembros por $\frac{3}{2}$, resulta

$$3T = \tau_3 - \tau_1 - \tau_2 . \qquad (14)$$

12. Combinadas las relaciones (11) y (12) conducen á otra muy importante. Pues, elevando al cubo los dos miembros de la primera, se obtiene

$$\tau_3 = \tau_1 + \tau_2 + 3\tau_1^{\frac{1}{3}} \tau_2^{\frac{1}{3}} \left(\tau_1^{\frac{1}{3}} + \tau_2^{\frac{1}{3}} \right)$$

$$= \tau_1 + \tau_2 + 3\, \tau_1^{\frac{1}{3}} \tau_2^{\frac{1}{3}} \tau_3^{\frac{1}{3}} ,$$

de donde

$$\tau_3-\tau_1-\tau_2=3\,\tau_1^{\frac{1}{3}}\,\tau_2^{\frac{1}{3}}\,\tau_3^{\frac{1}{3}}\;.$$

Reemplazando el primer miembro por su valor (14), y suprimiendo el factor comun 3, queda

$$T=\tau_1^{\frac{1}{3}}\,\tau_2^{\frac{1}{3}}\,\tau_3^{\frac{1}{3}}\;,$$

la cual, elevando ambos miembros al cubo, dá

$$T^3=\tau_1\,\tau_2\,\tau_3\,. \qquad (15)$$

13. Las ecuaciones (14) y (15) pueden presentarse bajo otra forma.

Representando respectivamente por a, b, c, los lados $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ del triángulo $\alpha\beta\gamma$; por a_1, a_2 los lados $m_1\alpha$, αm_2 del triángulo $m_1\alpha m_2$; por b_1, b_2 los lados $m_2\beta$, βm_3 del triángulo $m_2\beta m_3$; y finalmente por c_1, c_2 los lados $m_3\gamma$, γm_1 del triángulo $m_3\gamma m_1$; se tiene

$$T=\frac{1}{2}ab\text{ sen }\beta=\frac{1}{2}bc\text{ sen }\gamma=\frac{1}{2}ca\text{ sen }\alpha;$$

$$\tau_1=\frac{1}{2}a_1a_2\text{ sen }\alpha\,;\ \tau_2=\frac{1}{2}b_1b_2\text{ sen }\beta\ ;\ \tau_3=\frac{1}{2}c_1c_2\text{ sen }\gamma.$$

En su consecuencia, la relacion (14), puede escribirse así, suprimiendo el factor comun $\frac{1}{2}$,

$$3\,ab\text{ sen }\beta=c_1c_2\text{ sen }\gamma-a_1a_2\text{ sen }\alpha-b_1b_2\text{ sen }\beta\,.$$

Mas, como los senos de los ángulos de un triángulo son proporcionales á los lados opuestos, se verificará tambien

$$3\,abc=c_1c_2a-a_1a_2\,b-b_1b_2\,c \qquad (16)$$

A su vez, sustituyendo en la relacion (15) en lugar de τ_1, τ_2, τ_3, esos mismos valores, y en lugar de T^3 el producto de aquellas tres distintas expresiones del área T; y suprimiendo el factor comun $\frac{1}{8}$ sen α sen β sen γ, se obtiene

$$a^2b^2c^2=a_1a_2\,b_1b_2\,c_1c_2 \qquad (17)$$

14. Las dos últimas ecuaciones

$$3\,abc=c_1c_2a-a_1a_2b-b_1b_2c\ (16)\,;\quad a^2b^2c^2=a_1a_2\,b_1b_2\,c_1c_2\quad (17);$$

unidas á las siguientes

$$a=a_2+b_1\ ,\quad b=-b_2+c_1\ ,\quad c=c_2-a_1\quad (18)$$

conducen á otras relaciones no ménos importantes.

Eliminando a_2 entre la ecuacion (16) y la primera de las (18), se obtiene por valor de b_1

$$b_1=\frac{3bc-c_1c_2+a_1b}{a_1b-b_2c}\,a\ ,$$

y por consiguiente $a_2=a-b_1$ será

$$a_2=\frac{c_1c_2-b_2c-3bc}{a_1b-b_2c}\,a\ .$$

Sustituidos estos valores de a_2 y b_1 en (17), suprimido el factor a^2 comun á los dos miembros, y quitado el denominador del segundo, resulta

$$b^2c^2\,(a_1b-b_2c)^2=a_1b_2c_1c_2\,(c_1c_2-b_2c-3bc)\,(3bc-c_1c_2+a_1b)\ .$$

Reemplazadas aquí c_1 y c_2 por sus valores deducidos de las ecuaciones (18), se obtiene

$$b^2c^2\,(a_1b-b_2c)^2=a_1b_2\,(bc+b_2c+a_1b+a_1b_2)\,(a_1b+a_1b_2-2bc)\,(2bc-b_2c-a_1b_2)$$

Efectuadas las operaciones indicadas y ciertas reducciones á que ha lugar, la igualdad anterior se convierte en esta otra

$$(b^2c^2-2bc\,a_1b_2+a_1^2b_2^2)\,(b^2a_1^2+c^2b_2^2+a_1^2b_2^2+2b\,a_1^2b_2+2ca_1b_2^2+2bca_1b_2)=0\ .$$

Como el segundo factor está compuesto de términos todos positivos (pues b, c, a_1, b_2, solo expresan valores absolutos) no puede anularse; y por lo tanto se debe tener

$$b^2c^2-2bc\,a_1\,b_2+a_1^2b_2^2=(bc-a_1b_2)^2=0\ .$$

Luego

$$bc=a_1b_2\ .$$

Empezando por eliminar b_2 y c_1, ó c_2 y a_1 entre las ecuaciones (16), (17) y (18), y procediendo de análoga manera, se obtendría

$$ca=b_1c_2\quad \text{y}\quad ab=c_1a_2\ .$$

Bajo otra forma las tres últimas relaciones son

$$\frac{b}{b_2}=\frac{a_1}{c} \qquad \frac{c}{c_2}=\frac{b_1}{a} \qquad \frac{a}{a_2}=\frac{c_1}{b}.$$

Y hé aquí una interesante y conocida propiedad de la parábola: la de que *toda tangente á esta curva corta á otras dos cualesquiera tangentes de la misma*, — con relacion al punto de interseccion de estas dos, y á la curva, — *en segmentos inversamente proporcionales* (1).

EDUARDO LEON,
Auxiliar del Observatorio astronómico de Madrid.

DEL ESPACIO DE CUATRO DIMENSIONES.

(Traducido del inglés.)

Podemos definir el *espacio* como aquello que indica y mide la extension del Universo. Podemos determinar la forma y posicion de un objeto material, tomando tres planos infinitos, perpendiculares entre sí y fijos en el espacio infinito. El espacio es entonces el lugar que la materia ocupa, ó que media entre masas distantes de materia; y como tal, no le conocemos sino como dotado de tres dimensiones: longitud, latitud y profundidad.

DESCARTES (*Principia* parte 2.ª, «*Quid sit spatium, sive locus internus*») observa, «que, á la verdad, la misma extension en longitud, latitud y espesor, que constituye el espacio, constituye el cuerpo; no habiendo entre ambos más diferencia que esta: que en el cuerpo consideramos la extension como particular, y la concebimos cambiando á la par que el cuerpo; mientras que en el espacio atribuimos á la extension una unidad genérica (*genericam unitatem*), y así, despues de quitar de un cierto espacio el cuerpo que le ocupaba, no suponemos haber al mismo tiempo removido la extension del espacio, porque nos parece que la misma extension permanece allí, en tanto que sea de la misma magnitud y figura, y conserva la misma situacion con respecto á ciertos cuerpos de su rededor, por cuyo medio determinamos el espacio.»

GAUSS solia decir, que una de las dichas de su vida futura sería el ampliar sus conceptos del espacio; el realizar lo que yá conocia como espacio de tres dimensiones, como espacio de cuatro dimensiones. Porque exactamente, á la manera que concebimos séres «tales como polilla infinitamente ténue en una hoja infinitamente delgada de papel», que puedan realizar un espacio de solo *dos* dimensiones, podemos tambien concebir séres capaces de realizar el espacio de *cuatro* dimensiones. El Profesor SYLVESTER, el Dr. SALMON, el Profesor CLIFFORD, y otros, han indicado en algunas de sus profundísimas demostraciones matemáticas, que tienen «una interior certidumbre de la realidad del espacio trascendental.» Quisiéramos ahora emitir, y perdónennos los matemáticos tal temeridad, algunas ideas, que juzgamos á propósito para que con nosotros los ménos matemáticos vean, —tímidamente, es

(1) Demostrada por distinto camino esta propiedad (LEBEFURE DE FOURCY, *Lecons de Géométrie Analytique*, 7.ª edicion, pág. 356), puede á su vez derivarse de ella la de que

$$T^3=\tau_1\tau_2\tau_3$$

cierto, y no sin gran oscuridad,—cómo es posible la existencia de un espacio, distinto del que ahora ocupamos. Esto nos proponemos conseguir,

(*a*) procurando realizar la condicion de la vida en el espacio de dos dimensiones, y

(*b*) añadiendo el elemento de diferentes movimientos al espacio ya conocido.

Nuestro conocimiento del Universo envuelve el concepto de *espacio, tiempo* y *número*. Estas son nociones intuitivas: rigurosamente no podemos definirlas; en lo abstracto nuestra nocion acerca de ellas es puramente relativa: fuera de la existencia material no podemos realizarlas. La extension es una propiedad esenciál de la materia, y nuestro concepto del espacio está ligado con nuestro concepto de la extension. Robert Hooke, en una série de lecciones *De Potentia Restitutiva*, escritas hará cerca de dos siglos, y apenas conocidas, define un cuerpo sensible como «un determinado espacio, ó extension, en el cual un poder interior impide que sea penetrado por otro.» Tal poder, bien pudiera sencillísimamente concebirse como un movimiento vibratorio de las partículas, de un lado á otro de la posicion de equilibrio. Imaginemos que un plano infinitamente delgado vibra entre dos puntos fijos con tal velocidad, que ninguna otra materia pueda penetrar en el espacio que limita la vibracion; el resultado será estonces un sólido terminado en una direccion por los dos puntos fijos. Por ejemplo, que una lámina de hierro, infinitamente delgada y de un metro cuadrado, vibre con extraordinaria velocidad en el espacio de un metro: resultará un metro cúbico de hierro. La rápida vibracion de la lámina impediría que se penetrara en el campo de la vibracion, resultando así una sustancia material impenetrable. Una línea infinitamente delgada que vibrara entre dos puntos fijos, daría un plano. Un plano infinitamente delgado que vibrara entre dos puntos fijos, engendraría un sólido. Así, por la adicion del movimiento, podemos convertir un espacio determinado, próximamente de una dimension, en espacio de dos dimensiones, y tambien por la adicion del movimiento podemos convertir el espacio de dos dimensiones en espacio de tres dimensiones. ¿Podemos concebir algun movimiento tal que, impreso al espacio de tres dimensiones, engendre el espacio de *cuatro* dimensiones? Nada sabemos de semejante movimiento, pero podemos seguramente concebir la posibilidad de su existencia. El espacio de cuatro dimensiones es espacio trascendental: está más allá de nuestra experiencia, pero no más allá de nuestra imaginacion.

Tratemos ahora de realizar la condicion de un ser que viva en un espacio de dos dimensiones. Si el hombre poseyera, unidos á sus ordinarias cualidades intelectuales, los ojos y el poderoso vuelo del águila, tendría, á no dudarlo, estensísima perspectiva del espacio. Tal cual es, el hombre se distingue de los brutos por su actitud recta, y por el campo de espacio que su vista le permite medir. Nuestros ojos se remueven fácilmente en varias direcciones; lo mismo nuestra cabeza: un suave movimiento de esta y aquellos nos permite abarcar ya el espacio limitado por el horizonte ó ya una superficie de un pié cuadrado. Si echamos atrás la cabeza, extendemos la perspectiva del espacio: si inclinamos aquella hácia adelante, reducimos esta. Imaginemos, pues, que un hombre así dotado, y con nuestras mismas nociones del espacio de tres dimensiones, empieza á inclinarse hácia adelante, y que de este modo continúa: sus ojos abarcarán ménos espacio; y cada vez ménos, á medida que su cuerpo vaya formando ángulos de 80°, 70°, 60°, 50°, así sucesivamente, con un plano horizontal. Que al fin ande á gatas, que sus miembros se acorten y se absorban gradualmente en la masa de su cuerpo;

que se arrastre por el suelo; que, desapareciendo por completo sus miembros, se deslice como una serpiente, moviéndose en un plano horizontal; y que durante estas sucesivas contracciones su cabeza vaya quedando fija, sus ojos inmóviles, en el plano en que se mueve; y su vision irá siendo cada vez más y más limitada. Comience ahora su cuerpo á disminuir en espesor, y sea cada vez más delgado, hasta serlo tanto que su espesor pueda expresarse por el numerador de una fraccion, en que el denominador sea un número infinitamente grande—cual, si se quiere, el que formarían todos los guarismos que pudieran escribirse en un papel hasta llenar diez billones de millas, á diez cifras por pulgada.—Ya es un mero plano, una superficie infinitamente delgada; ocupa un espacio próximamente de dos dimensiones; sus ojos están en una línea. Trátese de imaginar cuáles serían las ideas de espacio en semejante ser, comparadas con las nuestras y comparadas con las suyas mismas antes y en el curso del progresivo aplanamiento. Solo contemplaría ahora una superficie plana: vería longitud y latitud, pero sin profundidad. Compárese tambien sus ideas de espacio en cada una de las posiciones entre la vertical y la horizontal, cuando su vista pierde más y más alcance, y cuando al fin el mundo entero se le escapa.

Además,—volviendo de nuevo al mundo de las existencias reales y poniéndonos más cerca de nuestra actual condicion,—comparemos nuestras propias ideas del espacio, despues de haber concentrado la vista por algun tiempo en un libro de un pié cuadrado, con nuestras ideas del espacio adquiridas al subir por una montaña elevada, ó al estar echados boca arriba sobre la cubierta de un buque en pleno océano. Comparemos el alcance de espacio que tendrá un preso incomunicado durante cuarenta años en nn calabozo de ocho piés cuadrados, en el *Trou aux Rats* de La Sachette, ó bien un enfermo, postrado medio siglo en cama; con el que poseerá un montero en las praderas del Oeste, un marinero en el Atlántico, y hasta el morador de un país sumamente llano. La disparidad entre los conceptos que del espacio tengan estas diversas gentes ha de ser enorme. Contraigamos los limites del espacio que sea dado contemplar; quítese la posibilidad de contemplar un espacio de grandes dimensiones; y la *facultad* de tal contemplacion se extinguirá igualmente: así por una gradual diminucion podemos llegar á nuestro sér ideal, que viva en un espacio de dos dimensiones. Por último, imaginemos que el sér de dos dimensiones—longitud y latitud—vaya estrechándose más y más; tanto, en fin, que su anchura primitiva resulte dividida por un número infinitamente grande, y él sea próximamente de una dimension: al cabo solo tendrá longitud: vivirá en una línea: su ojo inmóvil será un punto.

Esto por lo que toca al espacio de ménos dimensiones que el nuestro.

Tratemos ahora de concebir una ampliacion de nuestro espacio ordinario; y ensayémoslo añadiendo el movimiento al espacio conocido. Es claro que una sola y misma cosa puede sin dificultad poseer simultáneamente varios movimientos. Por ejemplo, cuando yo paseo por mi cuarto, hablando al propio tiempo, mis cuerdas vocales tienen *cinco* movimientos distintos:

(*a*) su propio movimiento de vibracion,

(*b*) *mas* el movimiento de traslacion ocasionado en el paseo,

(*c*) *mas* el movimiento de rotacion de la tierra en torno de su eje,

(*d*) *mas* el movimiento de revolucion de la tierra alrededor del sol,

(*e*) *mas* el movimiento de traslacion de todo el sistema solar al través del espacio.

Supongamos, pues, ahora que nuestros cuerpos, en lugar de hallarse en aparente reposo, vibraran describiendo arcos cuya amplitud fuera de 10,000 millas, y estos con una velocidad infinita; y que el plano segun el cual se dirigiera la vibracion, vibrara á su vez aparte, entre límites de 10,000 millas; y que todo el sistema vibratorio se moviera con una velocidad infinita por un círculo de 1.000,000 de millas de diámetro; y que el círculo girara en torno de un diámetro suyo; y que la esfera, por tal revolucion formada, se moviera por una elipse infinitamente grande; y que la elipse girara sobre uno de sus ejes; y—¡pero basta! hemos seguramente alcanzado un punto de vista algo más vasto de nuestras propias relaciones con el espacio. Concepciones de tal índole, suficientemente adelantadas, quizá nos condujeran al verdadero dintel del espacio trascendental, desde donde, podríamos, llenos de asombro, contemplar el más allá.

G. F. Rodwell.

MOLÉCULAS.

(Discurso pronunciado en la Asociacion Británica de Bradford por el Sr. J. Clerk-Maxwell, Profesor de Física experimental en la Universidad de Cambridge.)

(Conclusion.) (1)

Estas tres clases de difusion—la de la materia, la de la cantidad de movimiento y la de la energía—resultan del movimiento de las moléculas. Cuanto mayor sea la velocidad de estas moléculas y más espacio recorran sin desviarse por tropezar con otras moléculas, más rápida será la difusion. Mas ya conocemos la velocidad de las moléculas, y en su consecuencia podemos, en virtud de experimentos sobre la difusion, determinar cuánto, por término medio, recorre una molécula sin chocar con otra.

El Profesor Clausius, de Bonn, quien fué el primero que nos diera ideas precisas en punto al movimiento de agitacion de las moléculas, llama tal distancia el camino medio de una molécula. Yo he calculado, apoyándome en experimentos sobre difusion del Profesor Loschmidt, el camino medio de las moléculas de cuatro gases muy conocidos. La distancia media que cada molécula recorre, de uno á otro choque, está puesta en la tabla. Es pequeñísima tal distancia, como que de ninguna manera la alcanzan nuestros mejores miscroscopios. Para decirlo en número redondo, viene á ser como la décima parte de la longitud de una onda luminosa, que segun sabeis, es sumamente pequeña. Tambien he calculado el número de choques que en un segundo deben tener lugar. Está puesto en la tabla, y se cuenta por millares de millones. Así no es maravilla que moléculas velocísimas no puedan adelantar sino muy poco, teniendo que torcer completamente su curso millares de millones de veces en un solo segundo.

Las tres clases de difusion ocurren tambien en los líquidos, pero no es tan sencilla como en los gases la relacion de las velocidades con que se verifican. La teoría dinámica de los líquidos no se conoce tan bien como la de los gases; pero la principal diferencia entre ellos parece ser que en un gas cada molécula gasta la mayor porte del tiempo en andar su tortuoso camino, y solo momentáneamente se detiene al tropezar con otras moléculas, mientras que en un liquido la molécula se abre em-

(1) Véase la página 53.

barazosa y difícilmente paso cerrada de continuo en su encuentro con las demás moléculas.

De aquí que en un líquido la difusion del movimiento de una á otra molécula se efectúe mucho más rápidamente que la difusion de las mismas moléculas, por la misma razon porque es más expedito pasar en apiñada muchedumbre una carta de mano en mano que dársela á uno que haya de ir abriéndose paso á través del gentío. Aquí tengo un frasco que abajo contiene una disolucion de sulfato de cobre y encima agua pura. Está aquí desde el viérnes y podeis ver cuán escaso progreso ha hecho el líquido azul al difundirse en el agua de encima. La velocidad de difusion de una disolucion de azúcar ha sido observada cuidadosamente por Voit. Comparando sus resultados con los de Loschmidt en los gases, hallamos que tanta difusion como en los gases se efectúa en un segundo, invierte casi un dia en los líquidos.

La velocidad de difusion de la cantidad de movimiento es tambien menor en los líquidos que en los gases, pero no, ni con mucho, en igual proporcion. La misma cantidad de movimiento invierte cosa de diez veces más tiempo en sumergirse en el agua que en el aire, como podeis verlo en lo que acontece al agitar yo estos dos frascos, uno de los cuales contiene agua y el otro aire. Todavía es menor la diferencia entre las velocidades con que el alza de temperatura se propaga por un líquido y por un gas.

En los sólidos las moléculas están tambien en movimiento; pero estos movimientos hállanse encerrados dentro de límites muy reducidos. De aquí que la difusion de la materia no tenga lugar en los sólidos, si bien ocurren muy ostensiblemente la de la cantidad de movimiento y la de la temperatura. Sin embargo, ciertos líquidos pueden difundirse en los sólidos viscosos como la gelatina y la goma, y el hidrógeno puede penetrar en el hierro y en el paladio.

No tenemos tiempo más que de mencionar el maravillosísimo movimiento molecular llamado electrolisis. Hay en él una corriente eléctrica que pasa por agua acidulada, y obliga al oxígeno á aparecer en un electrodo y al hidrógeno en el otro. En el espacio intermedio el agua está en completa calma, aunque tambien deben atravesarla las dos corrientes opuestas de oxígeno é hidrógeno. La teoría física de este fenómeno fué estudiada por Clausius, quien dió sus razones para afirmar que en el agua comun no solo se mueven las moléculas, sino que chocan de continuo entre sí con tal violencia que su oxígeno é hidrógeno se separan, y como que danzan por entre la muchedumbre de moléculas buscando las compañeras, del mismo modo separadas. En el agua comun tales cambios no producen, en el conjunto, efecto visible, mas tan pronto como empieza á obrar la fuerza electromotriz, hace sentir su ordenador influjo en las sueltas moléculas, y encamina á cada una hácia su propio electrodo, hasta que, encontrándose con otra molécula, tambien suelta, de la clase contraria, se une á ella más ó ménos permanentemente para mientas otro choque no venga á separarlas. La electrolisis, pues, es una especie de difusion ayudada por la fuerza electromotriz.

Otra rama de la ciencia molecular es la que se ocupa del cambio de moléculas entre un líquido y un gas. En ella entra la teoría de la evaporacion y condensacion, en que dicho gas es el vapor del líquido, y tambien se comprende la teoría de la absorcion de un gas por un líquido de sustancia diferente. Los estudios del doctor Andrews acerca de las relaciones entre el estado líquido y el gaseoso nos han hecho ver que aun cuando lo que en nuestros libros de texto elementales se expone, pueda decirse tan claramente que casi parezca evidente de suyo, su verdadera interpretacion sin embargo acaso envuelva algun principio tan profundamente escondido que mientras algun hombre superior no le alcanee, todos seguirán creyendo que no se dejan nada por descubrir.

Tales son, en suma, los campos de donde los datos de la ciencia molecular han sido recogidos. Podemos dividir los resultados finales en tres clases, segun el grado de exactitud con que los conocemos.

A la primera clase corresponden las masas relativas de las moléculas de los diversos gases y sus velocidades en metros por segundo. Estos datos se han deducido de experimentos sobre la presion y densidad de los gases, y se conocen con suma drecision.

En la clase segunda debemos colocar los tamaños relativos de las moléculas de los diferentes gases, la longitud de sus caminos medios, y el número de choques en cada segundo. Estas cantidades se deducen de experimentos acerca de los tres géneros de difusion. Sus valores admitidos deben mirarse como primeras aproximaciones, para lo que medios más acabados de experimentar nos revelen más adelante.

Hay otro grupo de cantidades que debemos poner en la tercera clase, porque ni las conocemos con exactitud como las de la primera, ni aproximadamente como las de la segunda; y solo hemos de suponerles el valor de una conjetura probable. Tales son la masa absoluta de la molécula, su diámetro absoluto, y el número de moléculas que un centímetro cúbico contiene. Conocemos con grande esmero las masas relativas de diferentes moléculas, y aproximadamente sus diámetros relativos. De estos podemos deducir las densidades relativas de las mismas moléculas. Hasta ahí estamos en lo firme.

La gran resistencia de los líquidos á la compresion hace probable que sus moléculas estén, cada una respecto á las que la rodean, casi á igual distancia que dos moléculas de la misma sustancia bajo forma gaseosa, cuando en un encuentro, actúan la una sobre la otra. Tal conjetura ha sido sometida á la experiencia por Lorenz Meyer, quien, comparando las densidades de diferentes líquidos con las densidades relativas calculadas, de las moléculas de sus vapores, ha hallado entre ellas notable conformidad.

Pero Loschmidt ha deducido de la teoría dinámica la siguiente curiosa proporcion:—Como el volúmen de un gas es á la suma de los volúmenes de todas las moléculas que contiene, así el camino medio de una molécula es á la décima parte del diámetro de la molécula.

Admitiendo que el volúmen de la sustancia, cuando está reducida á la forma líquida, no es mucho mayor que la suma de volúmenes de las moléculas, sacamos de esa proporcion el diámetro de la molécula. Por este camino Loschmidt en 1865 obtuvo la primera medida del diámetro de una molécula. Aparte de él, y cada uno por su cuenta, el Sr. Stoney en 1868, y Sir W. Thomson en 1870, publicaron resultados de la misma especie, obtenidos los de Thomson no solo por dicho camino, sino tambien por consideraciones basadas en la tenuidad de las burbujas de jabon y en las propiedades eléctricas de los metales.

Segun la tabla que con los datos de Loschmidt he calculado, el tamaño de las moléculas de hidrógeno es tal, que puestas unos dos millones de ellas en hilera, solo ocuparían un milímetro; y un millon de millones de millones de millones de las mismas pesarían solo de cuatro á cinco gramos.

En un centimetro cúbico de cualquier gas á la temperatura y presion tipos hay unos diez y nueve millones de millones de millones de moléculas. No será menester que os advierta que todos estos números solo deben mirarse por ahora como conjeturas. Para asegurarnos, al depositar alguna confianza en los números de esa manera obtenidos, habríamos de tener mayor número que ahora poseemos, de datos que comparar, y estos que se hubieran obtenido independientemente unos de otros y condujeran todos á consecuencias acordes.

Hasta aquí hemos venido considerando la ciencia molecular como un escudriñamiento de los fenómenos naturales. Pero aunque el objeto reconocido de toda empresa científica sea descubrir los secretos de la naturaleza, produce otro efecto, no ménos estimable, en la mente del que investiga. Pónele en posesion de métodos que solo mediante un trabajo científico le es dado inventar, y le suben á puntos de vista, desde donde muchas regiones de la naturaleza, más allá de las ya exploradas, se presentan bajo nuevo aspecto.

El estudio de las moléculas ha desenvuelto un método peculiar suyo, ofreciendo á la par horizontes nuevos de la naturaleza.

Cuando Lucrecio quiere sugerirnos una imágen del movimiento de los átomos, nos dice que miremos el rayo solar que brilla en un cuarto oscuro (del mismo instrumento de investigacion se vale el Dr. Tyndall para hacernos ver el polvo que respiramos), y que observemos las motas que en ese rayo se siguen unas á otras en todas direcciones. Tal movimiento de las motas visibles, añade, no es sino el efecto del movimiento mucho más complicado de los átomos invisibles que chocan con las motas. En su sueño de la naturaleza, segun Tennyson dice,

«*Saw the flaring atom-streams*
And torrents of her myriad universe,
Ruining along the illimitable inane,
Fly on to clash together again, and make
Another and another frame of things
For ever (1).»

Y no sorprende que tratara de romper las cadenas del Hado haciendo á los átomos torcer su camino en tiempo y lugar ambos inciertos, atribuyéndoles así una especie de libre voluntad irreflexiva, que en su teoría materialista era la única explicacion de esa facultad de libre albedrío, de la cual nosotros mismos tenemos conciencia.

Mientras no hayamos de ocuparnos más que de dos moléculas y contemos con todos los datos, podemos calcular el resultado de sus encuentros, pero cuando hay que ocuparse de millones de moléculas, cada una de las cuales sufre por segunda millares de choques, lo enmarañado del problema parece arrebatarnos toda esperanza de legítima solucion.

Los modernos atomistas, en su consecuencia, han adoptado un método, si bien nuevo, á mi entender, en la oficina de los físicos matemáticos, ya antiguo en la Seccion de los Estadistas. Cuando los oficiales de la seccion F se ocupan de una relacion de empadronamiento, ó de cualquier otro documento que contenga datos numéri-

(1) Vió los brillantes rios de átomos, y los torrentes de sus miriadas de universos, que llenan por do quier el vacío sin límites, acometerse con impetu para chocarse á una nuevamente, y poner en otro órden las cosas y en otro y otro, sin nunca acabar.

cos relativos á la ciencia social y económica, comienzan por distribuir toda la poblacion en grupos segun la edad, la contribucion, la educacion, la religion ó la criminalidad. No permitiéndoles tan excesivo número de individuos trazar la historia de cada uno separadamente; para que el trabajo no supere á las fuerzas humanas, concentran su atencion en un pequeño número de grupos artificiales. Lo que varía el número de individos en cada grupo, y no lo que el estado de cada individuo varía, es el dato primero de que se ocupan.

Por de contado no es este el único método que haya de estudiar la naturaleza humana. Podemos observar la conducta de tales ó cuales personas, y compararla con la que el carácter anterior de las mismas y las circunstancias que actualmente las rodean, de acuerdo con las mejores teorías conocidas sobre esta materia, nos inducirían á esperar. Los que este método practican procuran adelantar su conocimiento de los elementos de la naturaleza humana, casi de la misma manera que un astrónomo corrige los elementos de un planeta, comparando su posicion actual con la calculada en virtud de otros valores supuestos á esos mismos elementos. El estudio que de la índole humana hacen los padres y los maestros, los historiadores y los hombres de Estado debe, pues, distinguirse del que, por medio de tablas y registros, efectúan estadistas que ponen toda su confianza en los guarismos: puede llamarse el uno el método histórico y el otro el método estadístico.

Las ecuaciones de la Dinámica expresan acabadamente las leyes del método histórico aplicado á la materia, al paso que la aplicacion de estas ecuaciones implica un conocimiento cabal de todos los datos. Pero la más pequeña porcion de materia con que nos sea dado experimentar, consta de millones de moléculas, ninguna de las cuales por sí sola se nos hace nunca sensible. No pudiendo, pues, determinar el movimiento actual de cada molécula, hemos de abandonar el método puramente histórico, y adoptar el método estadístico para ocuparnos de grandes grupos de moléculas.

Los datos del método estadístico, aplicado á la ciencia molecular, son las sumas de crecidos números de cantidades moleculares. Al estudiar las relaciones entre cantidades de esta especie, nos hallamos con un nuevo género de regularidad, la regularidad de los términos medios, en la cual podemos sí depositar entera confianza para todos los usos prácticos, pero sin exigirle de ninguna manera el carácter de precision que distingue á las leyes de la Dinámica pura.

Pero si la ciencia molecular nos enseña que, no pudiendo pedir á los experimentos más que un informe estadístico, las leyes de ellos deducidas no deben aspirar á la absoluta exactitud, en cambio cuando, dejando de atender á los experimentos, pasamos á estudiar las mismas moléculas, abandonamos el mundo del continuo mudar y penetramos en la region en donde todo es cierto é inmutable.

Las moléculas están ajustadas á un tipo constante con una precision que vanamente se buscaría en las propiedades sensibles de los cuerpos por ellas formados. En primer lugar la masa de cada individuo molecular, y todas sus demás propiedades, son absolutamente inalterables. En segundo, las propiedades de todas las moléculas de la misma especie son absolutamente idénticas.

Consideremos si nó las propiedades de dos especies de moléculas, las del oxígeno y las del hidrógeno.

Podemos sacar muestras de oxígeno de varias partes: del aire, del agua ó de las rocas de cualquier edad geológica. La historia de tales muestras ha sido muy distinta, y si durante miles de años la diversidad de circunstancias produjera diversidad de propiedades, estas muestras de oxígeno lo acreditarian.

Asímismo podemos sacar hidrógeno del agua, del carbon de piedra, ó, como lo hizo Graham, del hierro meteórico. Pero tómense dos litros de cualquier muestra de hidrógeno, y se los podrá combinar exactamente con un litro de cualquier muestra de oxígeno, y formar exactamente dos litros de vapor de agua.

Pues bien, si durante el trascurso de la historia de cada muestra, ya presa en las rocas, ó flotante en el mar, ó arrebatada en algun meteoro al través de regiones desconocidas, hubiera ocurrido alguna modificacion en las moléculas, esas relaciones no subsistirian.

Poseemos tambien otro método, enteramente distinto, para comparar las propiedades de las moléculas. Por más que la molécula sea indestructible, no es un cuerpo duro y rígido; admite movimientos internos, y cuando estos se provocan, de ella emanan rayos, cuya longitud de onda mide el tiempo de la vibracion de la molécula.

Por medio del espectroscopio la longitud de la onda en diferentes clases de luz puede compararse hasta la diezmilésima. De esta manera háse acreditado no solo que las moléculas de cada hidrógeno obtenido en nuestros laboratorios tienen la misma série de períodos de vibracion, sino que además el sol y las estrellas fijas emiten una luz que tiene igual série de períodos de vibracion.

Estamos, pues, seguros de que en aquellas regiones existen moléculas de la misma naturaleza que las de nuestro hidrógeno, ó que al ménos existian cuando se emitió la luz que nos las hace ver.

Comparando las dimensiones de los monumentos egipcios con las de los griegos, se infiere que ambos pueblos usaban de igual medida. De modo, que aun cuando ningun autor antiguo nos hubiera recordado que las dos naciones empleaban el mismo codo como medida de longitud, podríamos probarlo á la vista de esos monumentos. Tambien fundadamente podemos afirmar qne en tal ó en cual tiempo debió llevarse de un país á otro algun patron material de longitud, ó sinó, que en ambos países hubo de tener un mismo orígen el patron de medida.

Pero en los cielos descubrimos mediante la luz, y solo mediante ella, estrellas tan distantes entre sí que es imposible se haya pasado nunca materia alguna de una á otra; y sin embargo, esta misma luz, que es para nosotros la única prueba palmaria de la existencia de esos mundos lejanos, nos dice tambien que cada uno de ellos está construido con moléculas de la misma especie que las que hallamos en la tierra. Por ejemplo, una molécula de hidrógeno, ya se halle en Sirio ó en Arturo, efectúa sus vibraciones exactamente en el mismo tiempo.

Cada molécula, pues, en cualquier punto del universo, lleva en sí estampado el cuño de un sistema métrico tan distintamente como lo lleva el metro de los Archivos de París ó el doble codo real del templo de Karnac.

No cabe imaginar teoría alguna de evolucion que explique la semejanza de las moléculas, porque la evolucion implica por fuerza un cambio incesante, y la molécula no es capaz de aumento ni diminucion, de generacion ni destruccion.

Ningun procedimiento de la naturaleza, desde que esta empezara, ha producido la más leve diferencia en las propiedades de ninguna molécula. No podemos por consiguiente suponer que la existencia de las moléculas, ni la identidad de sus propiedades, resulte de alguna de las causas que designamos con el nombre de naturales.

Por otro lado, la paridad cumplida de cada molécula con las demás de la misma especie nos ofrece, como ha dicho muy bien Sir John Herschel, el carácter esencial de un artículo de manufactura, y aleja la idea de su ser eterno y por sí propio existente.

Vémonos así conducidos, siguiendo un camino puramente científico, hasta muy cerca del punto en que la ciencia debe pararse. No se impide más á la ciencia estudiar el mecanismo interno de una molécula que no puede descomponer, que escudriñar un organismo que no alcanza á formar. Pero cuando remonta la historia de la materia, la ciencia queda parada en el punto y hora en que á sí misma se asegura, por una parte, que la molécula ha sido hecha, y por otra, que no ha sido hecha por virtud de ninguna operacion de las que llamamos naturales.

La ciencia es incompetente para discurrir acerca de como se haya creado la materia saliendo de la nada. Llegamos al límite más apartado de nuestra facultad de pensar, desde el momento en que admitimos que, puesto que la materia no puede ser eterna ni existir por sí propia, debe haber sido creada.

Solo cuando contemplamos, no la materia en sí, sino la forma bajo la cual actualmente existe, halla nuestra mente algun punto de apoyo.

Que la materia, como tal, tenga ciertas propiedades fundamentales—que exista en el espacio y sea capaz de movimiento, que su movimiento subsista, y así á este tenor,—serán verdades, en el punto actual de nuestro saber, del género que los metafísicos llaman necesarias. El conocimiento de ellas nos servirá para encadenar deducciones, más carecemos de datos para entrar en especulacion alguna acerca de su orígen.

Pero que en cada molécula de hidrógeno haya exactamente tanta materia y nada más, es un hecho de un órden muy distinto. Aquí ya no se trata más que de una distribucion particular de la materia—de una *colocacion*, para decirlo como el doctor Chalmers, de cosas que sin dificultad podemos imaginar dispuestas de otra manera.

La forma y dimensiones de las órbitas de los planetas, por ejemplo, no están determinadas por ninguna ley de la naturaleza, sino que dependen de una colocacion particular de la materia. Otro tanto ocurre en punto al tamaño de la tierra, del cual deriva el tipo de lo que llamamos sistema métrico. Pero estas magnitudes astronómicas y terrestres quedan muy por debajo, en importancia científica, comparadas con el más fundamental de todos los tipos, el que constituye la base del sistema molecular. Hallánse actuando, segun sabemos, causas naturales que tienden á modificar, y quizá al cabo á destruir, todas las configuraciones y dimensiones de la tierra y de todo el sistema solar. Mas aunque en el trascurso de los siglos hayan ocurrido y puedan aún ocurrir catástrofes en los cielos, aunque puedan disolverse antiguos sistemas y de entre sus ruinas surgir otros nuevos, las moléculas con que estos sistemas están construidos—las piedras fudamentales del universo material—permanecerán enteras é indestructibles.

Continúan hoy como cuando se crearon, acabadas en número, medida y peso, y los caractéres que indeleblemente llevan impresos, nos dicen que esa aspiracion nuestra en pos de la exactitud en la medida, de la verdad en el relato y de la justicia en la accion, que contamos por uno de los más nobles atributos del hombre, la poseemos, porque es esencial constitutivo de la imágen de Aquel que en el principio creó, no solo los cielos y la tierra, sino tambien los materiales con que los cielos y la tierra están hechos.

TABLA DE DATOS MOLECULARES.

		Hidrógeno.	Oxigeno.	Oxido carbónico.	Acido carbonico.
Clase I.	Masa de la molécula; (hidrógeno = 1)	1	16	14	22
	Cuadrado medio de velocidad; metros por segundo á 0° centígrados	1859	465	497	396
Clase II.	Camino medio; decímetros	965	560	482	379
	Choques por segundo, (millones)	17750	7646	9489	9720
Clase III.	Diámetro; decímetro	5.8	7.6	8.3	9.3
	Masa; cuatro centígramos	46	736	644	1012

TABLA DE DIFUSION.

Medida: centimetro cuadrado por segundo.

	Calculada.	Observada.	
H y O	0.7086	0.7214	Difusion de la materia observada por Loschmidt.
H y C O	0.6519	0.6422	
H y $C\,O^2$	0.5575	0.5558	
O y C O	0.1807	0.1802	
O y $C\,O^2$	0.1427	0.1409	
C O y $C\,O^2$	0.1386	0.1406	
H	1.2990	1.49	Difusion de la cantidad de movimiento. Graham y Meyer.
O	0.1884	0.213	
C O	0.1748	0.212	
$C\,O^2$	0.1087	0.117	
Aire		0.256	Difusion de la temperatura observada por Stefan.
Cobre		1.077	
Hierro		0.183	

Azúcar de caña en agua	0.00000365	Voit.
Difusion al dia	0.3144	
Sal en agua	0.00000116	Fick.

NATURA NON FACIT SALTUS (Linneo).

(Continuacion.) (1)

Amphibiós.—Hemos ya indicado el lazo de union entre esta clase y la precedente, por medio de los *Labiryntodontes*; tócanos ahora marcar el que entre los amphibios y los peces se halla establecido por medio del género *Protopterus*, que tiene caractéres tan dudosos, que si bien muchos le consideran como de los amphibios, otros, entre ellos Dumeril, tienen por verdaderos peces á los animales en él inclui-

(1) Véase la página 60.

dos; y no puede ser ménos al ver que, si bien algunas de sus formas exteriores, sus rudimentos de extremidades, la existencia de lábios y lenguas carnosas, y algun otro carácter les hace ser amphibios; en cambio la boca pequeña con dos dientes intermaxilares; el parecerse por su conjunto á una anguila; el carecer de cuello distinto; el poseer aberturas branquiales, cubiertas por un opérculo; el tener anchas escamas sobre la piel; el estar la línea lateral provista de poros mucosos, como en los peces; el llevar en los intestinos una válvula en espiral, idéntica á la que presentan los *Squalos*; y en fin, la existencia de una vejiga natatoria celulosa, hacen, entre otras particularidades, que se parezcan en mucho á los peces los *Protopterus*.

PECES.—Despues de lo dicho en las cuatro clases anteriores nada tenemos que decir en esta con respecto á ellas, pues sabemos que no está aislada, toda vez que se une, con las que la preceden, por los Cetáceos, *Aptenodytes, Icthyosaurios* y *Protópteros*. Pero no es solo con los demás vertebrados, con quien los peces se tocan; tambien hácia los anélidos tienen tránsitos muy marcados por medio de los géneros *Mixine, Gastrobranchus* y *Ammocetus*. Los primeros, por los caractéres de su boca, los incluyó LINNEO en su última clase de los animales; los *Gastrobranchus*, además de las semejanzas exteriores, tienen de comun con los helmintos, el penetrar á menudo dentro de los otros peces y permanecer en sus intestinos devorándolos; y los *Ammocetes* se parecen aún más á los gusanos que estos últimos.

INSECTOS.—La más notable analogía, que salta á la vista en esta clase, es la que los insectos en general nos presentan con los miriápodos, pues unos y otros tienen respiracion traqueal, la forma de las arterias es la misma, y la boca y patas de los segundos son muy semejantes á las de los primeros, en tal manera que los miriápodos han sido incluidos por muchos naturalistas en la clase que nos ocupa: además entre una y otra existen los *Tisanuros*, los que, por la carencia de metamórfosis y la presencia de apéndices laterales en los costados del abdómen en muchos de ellos, forman un tránsito perfectamente marcado.

MIRIÁPODOS.—Una de las clases en que más se patentiza que la naturaleza no salta, que no hace nada aislado, es la que nos vá á ocupar: en efecto, además de la gran analogía y del tránsito, que hácia la clase anterior hemos marcado, este grupo está unido á los crustáceos y á los anélidos. Con los crustáceos se ligan los *Chilognatos*, por tener los segmentos ó anillos duros, compuestos de cinco piezas, soldados por lo general de dos en dos en un solo anillo ó zoonitis; por poseer unos y otros, órganos bucales muy parecidos; y por otros caractéres que fuera prolijo enumerar. Con los anélidos se tocan los miriápodos por la familia de los *Geophílidos*, última del órden *Chilópodos*.

ARÁCNIDOS.—Los arácnidos presentan en general caractéres tan análogos á los de los insectos, que algunos autores los han confundido en una sola clase; y no sin alguna razon, pues la boca en los arácnidos está dispuesta lo mismo que en los insectos; las patas, si bien en número de ocho, son casi iguales á las de estos; cerca del ano presentan tubos muy análogos á los vasos biliares de los insectos; en los traqueales la circulacion es idéntica á la de estos, como la respiracion; la generacion es ovípara en ambos grupos, y presentan otras analogías, que fuera óbvio citar. Tambien con la clase de los rotatorios se ligan los arácnidos, por medio de los *Tardígrados*, que muchos autores han creido que debian colocar entre aquellos, pero que MILNE-EDWARS y GERVAIS han demostrado ser verdaderos arácnidos, como lo prueba el poseer cuatro pares de patas, formadas por un tubérculo carnoso y provistas de uñas arqueadas, el tener vestigios de antenas, y otras varias particularidades.

Crustáceos.—Anteriormente hemos indicado la grande analogía que los ligaba á los miriápodos; mas no es este el único lazo que podemos señalar, pues tambien los crustáceos del género *Pygnogonum* forman otro y muy íntimo con los arácnidos, toda vez que tienen el cuerpo formado por cuatro anillos ó segmentos con cuatro pares de patas, y su boca está conformada como la de muchos arácnidos. Tal es la analogía, que con estos tienen los animales incluidos en dicho género y otros tres afines con él, que Latreille los colocaba, formando una familia, entre los arácnidos traqueales, pero Milne-Edwars ha comprobado que eran más bien crustáceos y que podian formar un órden de la subclase de los Chupadores ó Pecilópodos.

Cirrhípedos.—Esta clase destinada á suscitar dudas á los clasificadores acerca de su verdadero sitio en el mapa zoológico, presenta muy notables analogías con los crustáceos, con los anélidos y con los moluscos. Con los crustáceos tienen de comun los cirrhos ó piés articulados; las mandíbulas en unos y otros colocadas de la misma manera; sus brazos ó piés tentaculares, parecidos á las antenas de algunos crustáceos; las bránquias, colocadas como en muchos de estos; el estar compuestos á veces de articulaciones ó anillos, que lleva cada uno un par de patas ú otros apéndices; y otros varios caractéres. A los anélidos se aproximan por la organizacion de su estómago y de su canal intestinal; y tienen gran analogía con los moluscos por el manto y la concha caliza de que están cubiertos.

Anélidos.—Hemos hablado ya de los rasgos que los unian á los miriápodos y cirrhípedos, pero todavía hemos de señalar los que los ligan con los moluscos y los zoófitos. Efectivamente, el órden de los *Tubículas* entre los anélidos, está en relacion con el de los *Gasterópodos cirrhobranquios* entre los moluscos, pues ambos grupos se semejan mucho por la manera de vivir los animales que los forman, toda vez que unos y otros habitan dentro de tubos calcáreos, y tambien por algunas semejanzas exteriores; tanto que en otro tiempo se los confundia en un solo grupo. A los zoófitos se unen los anélidos por medio de los géneros, *Sipónculus*, *Molpadia*, *Mynias*, *Priápulus* y *Lithodermus*. Todos estos géneros los incluia Cuvier en su órden *Equinodermos sin piés*, pero confesando que su organizacion interior le era poco conocida; y en efecto, el género *Sipónculus* está hoy dia evidenciado que es un verdadero anélido: no sucede lo mismo con los demás géneros citados, que evidentemente son equinodermos. Sin embargo, el primero tiene de comun con los demás, el poseer una piel coriácea y sin armadura, y todos estos tienen de parecido con los anélidos la forma general de su cuerpo, disposicion y situacion de su boca y ano.

Rotatorios.—Ya hemos dicho al hablar de los arácnidos, que por medio de una familia de estos, los *Tardígrados*, se unian dicha clase y la que nos ocupa. Pero aún hemos de señalar la gran semejanza que entre los rotatorios y los infusorios existe; semejanza por la cual habian sido confundidas hasta hace poco en un solo grupo. Y que son articulados los systólidos ó rotatorios, lo prueban, entre otros caractéres, las señales evidentes que tienen de poseer su cuerpo dividido en anillos, el tener un tubo digestivo bien manifiesto, con boca muy complicada y ano visible, unido á la existencia en ellos de sistema vascular; pero no por esto dejan de tener gran analogía con los infusorios, por la casi ausencia de sistema nervioso, por su forma, por la transparencia de su cuerpo y por otros caractéres. Por último, los rotatorios tienen una gran afinidad con los helmintos, tan evidente que sería ocioso demostrarla.

Helmintos.—No será menester que hablemos de este grupo, último de los articulados, pues solo el haber sido tan discutida su colocacion en el cuadro zoológico, bastará para comprender las grandes analogías, que le unen á los zoófitos y á los anélidos, fuera de la que con la clase anterior queda apuntada. Prescindiendo, pues, de probar su semejanza con los anélidos, diremos solo que á algunos zoófitos se parecen por la casi falta del sistema nervioso, la completa del vascular y respiratorio, y otros varios caractéres.

Cephalópodos.—Con los zoófitos están unidos estos animales, por medio de los *Foraminíferos*; grupo de séres que, hasta hace muy poco tiempo, han sido incluidos en los cephalópodos, por unos, como Lamark, formando un género, y por otros como D'Orbigny constituyendo un órden, hasta que Dujardin en 1835 demostró debian estar entre lo zoófitos y cerca de los equinodermos. Se parecen mucho á algunos cephalópodos por su cubierta testácea, por sus tentáculos, por ser libres dentro de su concha, y por otros varios caractéres. Pero no es solo con los zoófitos con los que tienen relacion los moluscos de la clase que nos ocupa, sino que tambien con los braquiópodos se unen, por medio de la familia de los *Hipuritas*, entre los *Rudistas*, moluscos que, aunque colocados entre estos, tienen sin embargo gran analogía con los cephalópodos fósiles, dichos *Orthoceracitas*, segun lo hizo ver el Sr. Picot de la Perouse, fundándose en que presentan su concha dividida en cavidades, como la de muchos cephalópodos. Para terminar indicaremos el paso tan marcado que entre los cephalópodos y los acéphalos bivalvos establece el género *Aptichus* ó *Trigonellites* de Parkison. Este género, cuyas especies solo se encuentran fósiles, todavía no está definitivamente colocado, pues se duda en cual de las dos clases se le ha de incluir: Deslongchamps los ha puesto en la familia de los *Solenáceos*, con los que en efecto tienen gran analogía: Mayer y Coquaud, por otra parte, han emitido la idea de que los *Aptichus* eran conchas internas de un molusco desnudo, próximo á los *Tendopsis*, fundados en ciertos caractéres: sin decidirnos nosotros por una ni otra idea, señalaremos el paso, que es lo que cumple á nuestro propósito.

Pterópodos.—Que los pterópodos no están aislados, lo prueba lo que de ellos hemos dicho, al hablar de la clase anterior, y el no diferenciarse de los gasterópodos casi por más carácter, que por su modo de locomocion. Además los pterópodos están unidos á los gasterópodos por un pequeño órden de estos, los *Heterópodos*, pues los animales en él incluidos, ó ya están, como muchos pterópodos, desnudos, ó ya, como algunos de estos mismos, poseen una concha fina y ligera, muy semejante en unos y otros, lo que unido á otros caractéres, como el ser blandos y gelatinosos, carecer de brazos membranosos y de órganos de reptacion, les dá una grande analogía con la clase que nos ocupa, por más que otros los aproximen á la clase siguiente.

Gasterópodos.—Ya hemos indicado dos lazos de union de esta clase, uno por el género *Dentalium* con ciertos anélidos, otro por los *Heterópodos* con la clase precedente, pero aún hemos de señalar algun otro, que confirme nuestro aserto. Con los mismos anélidos se relacionan los gasterópodos, por medio del género *Siliquaria*, tan análogo, por la forma general del cuerpo, al género *Serpula*, entre aquellos, que muchos autores han creido formar uno solo, incluido en los anélidos tubícolas. Por último, existe entre los gasterópodos un género, el *Chiton*, el cual por tener sus cubiertas divididas en segmentos, á modo de medios anillos, por poseer boca y ano, colocados en las dos extremidades opuestas del animal, y por algun otro carácter, establece el paso de los gasterópodos á la clase cirrhipedos entre los articulados, tanto que Blainville con los géneros *Chiton*, *Balanus* y otros formó la clase Polyplaxiphoras del subtipo Malentozoarios.

Acéphalos.—Ya dejamos indicada la union que el género *Aptichus* establece entre los cephalópodos y los acéphalos, pero indicarémos además algunas otras relaciones. Es una de las más notables, la que el género *Língula* forma entre los acéphalos y los braquiópodos regulares, pues si bien no se puede dejar de considerarle como un braquiópodo, gracias á los caractéres de su concha y al tendon, que atraviesa el vértice de su valva dorsal, en cambio la forma de sus branquias, entre otros caractéres, le aproxima á los acéphalos. Con los anélidos se unen los acéphalos por los géneros *Teredo* y *Aspergillum*, pues los animales que los forman, seméjanse mucho á ellos, por su constitucion y la forma de su cuerpo, si bien otros detalles de su organismo les hacen ser verdaderos moluscos acéphalos. Finalmente, entre los animales de esta clase, que no llevan concha, se hallan algunos géneros, que constituyen hoy el subtipo de los Moluscoideos, los que presentan una gran analogía con los Fitózoos; pero sobre todo los que forman la clase de los *Briózoos* son los que indudablemente establecen el tránsito á los pólipos, pues aparte de que se construyen políperos, ya carnosos, ya córneos ó membranosos, ya calizos, presentan varios caractéres, que les hacen indudablemente parecerse á los zoófitos; por ejemplo, la forma de su cuerpo, que es la de un saco alargado ú ovoideo: y tanto se parecen, que muchos autores los han colocado entre los Pólipos, pero hoy, gracias á los trabajos de Milne-Edwars, Chremberg, Gervais, Dujardin y otros, se ha comprobado que son malacózoos, si bien muy próximos á los zoófitos.

Braquiópodos.—Despues de lo dicho de esta clase, al hablar de los cephalópodos y acéphalos, no tenemos más que añadir.

(Se continuará.)

Emilio Ribera,
Catedrático de Historia natural
en el Instituto de Almería.

CUESTIONES

QUE SE PROPONEN PARA SU RESOLUCION (1).

6. Si tres fuerzas iguales están representadas en magnitud y direccion por los tres rádios tirados á los vértices de un triángulo desde el centro del círculo circunscrito, su resultante estará representada en magnitud y direccion por la recta que une dicho centro con el punto de interseccion de las perpendiculares tiradas desde los vértices á los lados opuestos.

7. Hallar la ecuacion del plano que forma ángulos iguales con tres rectas dadas en el espacio.

(1) Las soluciones de estas cuestiones se remitirán á la Administracion, para ser insertas en los próximos números de La Revista, con los nombres de los que las hayan comunicado.

MADRID: 1874.—Imp. á cargo de Gregorio Juste, Isabel la Católica, 23, 2.°