REVISTA

DE LA

SOCIEDAD DE PROFESORES DE CIENCIAS.

AÑO I. MADRID 29 DE OCTUBRE DE 1874. NÚM. 6.

EL NUEVO DECRETO SOBRE ENSEÑANZA.

Tiempo há eran esperados, con temor por unos, por otros con impaciencia, las nuevas disposiciones que habian de variar fundamentalmente la organizacion de la enseñanza tal como estaba constituida en estos últimos seis años. Temian los unos, recelosos de la tendencia y antecedentes de los autores de la reforma, que esta no se concretara á corregir los abusos acreditados por la experiencia, ántes bien se enderezara á destruir de raíz la libertad de enseñanza; esperaban otros, vistos los resultados poco lisonjeros, en su sentir, del ensayo verificado, que se abandonara el camino emprendido sujetando la enseñanza de nuevo á las trabas necesarias para que cumpliera su objeto. Tras una laboriosa concepcion salió al fin el deseado y temido decreto, justificando desde luego su contenido la alarma y el anhelo que habian precedido á su aparicion.

Dos puntos capitales abrazan las disposiciones de que nos ocupamos; refiérese el primero á las relaciones que con el Estado han de guardar los establecimientos privados; el segundo se dirige á determinar el órden de verificar los estudios, en la materia de los cuales ninguna innovacion se ha estimado oportuno introducir, cosa natural en atencion á no haber variado en nada las asignaturas de las respectivas carreras, y ser inspiradores del plan en esta parte vigente los mismos promovedores del decreto del 29 de Setiembre último.

Y es verdaderamente singular, que pudiendo la segunda enseñanza estudiarse fuera de los Institutos oficiales, ya sea en colegios privados ó domésticamente, no se haya concedido el mismo beneficio á la enseñanza de facultad, perjudicando de ese modo notablemente, no solo á los escolares á quienes es imposible llenar las prescripciones ahora señaladas, y que tienen su carrera ya emprendida, sino á los establecimientos particulares que á la sombra de las leyes se habian creado, dándose así el caso de que en este país donde los derechos adquiridos, aunque no sean muy legítimos, siempre son respetados, se desconozcan por los mismos que en ocasiones semejantes clamarían en su defensa estimando quizás tal omision como un atentado contra la propiedad.

Puede ser que la precipitacion con que el decreto se ha elaborado para que surtiera efectos en el curso corriente, no haya contribuido poco á que se noten muchas imprevisiones que deberán irse subsanando, pero es verdaderamente de lamentar que cuando á tantos intereses afecta cualquier cambio en la Instruccion, no se examinen los asuntos con más detenimiento para evitar graves inconvenientes que pueden sobrevenir.

En cuanto á la segunda enseñanza, los derechos de los profesores provistos de suficiente título no están marcados, y no sabemos si podrán y en qué caso formar parte de los tribunales que examinen á sus respectivos alumnos, circunstancia muy importante que puede no ser indiferente, y conviene esclarecer, á fin de que los alumnos y profesores sepan á qué atenerse sobre el particular.

Mas donde resaltan la imprevision y dificultades que ha de encontrar en su ejecucion la reforma, es en lo relativo á la situacion de los que ya tienen matrículas hechas. ¿Deberán rehacerlas sometiéndose á las órdenes vigentes ó se considerarán como cursadas las asignaturas cuyas matrículas se hubieren verificado? Grave es el asunto, pues en el segundo caso la circunstancia de haber abonado antes los derechos hace de mejor condicion á los que han tenido tan feliz idea, y no es muy racional suponer mayor capacidad por haber pagado á tiempo de obtener tales ventajas. Y si por el contrario, se niega á los matriculados el poder probar las asignaturas cuyos derechos abonaron, ¿no podrán alegar con fundado motivo que deben considerárseles cursadas con arreglo á todas las leyes habidas, y son por tanto admisibles á exámen? La resolucion no es fácil. Por eso el decreto nada de esto aclara y los estudiantes no saben á qué atenerse. Más valiera haberlo pensado antes de dar á luz un decreto que tanta confusion é incertidumbre ha ocasionado.

Las aclaraciones y enmiendas serán á cada paso indispensables, sirviendo para comprobar el singular desconcierto á que nos han llevado las nuevas medidas. Apenas promulgadas, un nuevo decreto á guisa de ultimatum ha ampliado hasta el 20 del corriente los exámenes de los alumnos cuyas matrículas estuviesen hasta fin de Setiembre formalizadas, y además autoriza á verificarlo en cualquier época del curso cuando faltase para la licenciatura una ó dos asignaturas del año preparatorio. Estéril concesion que no puede satisfacer al mayor número de los que resultan lastimados y solo servirá á animarles á nuevas demandas, y habiendo ya entrado en el camino de las concesiones no sabemos la suerte deparada en su ejecucion al nuevo decreto. Los alumnos suspensos reclamarán exámenes en Febrero; aquellos á quienes falten para terminar carrera una ó dos asignaturas los exigirán en todo el curso, y es tan evidente la justicia que les asiste, que tales pretensiones no podrán desestimarse por ninguna persona de mediana rectitud, viniéndose así á anular el famoso decreto tan laboriosamente preparado como poco afortunadamente concebido.

El espíritu que á su formacion ha presidido se reduce á limitar el tiempo en que deban realizarse los estudios con el propósito, como dice el preámbulo, de poner coto al escándalo de ver probados en dos ó tres años materias que antes costaban seis ú ocho. Grave es el error que, á nuestro entender, se comete al pretender que los estudios se harán con más solidez si se emplea en ellos mayor suma de tiempo. Todo lo que no sea aumentar el rigor en los exámenes son remedios vanos, y les cortapisas introducidas sólo serán parte á perjudicar la ensañanza, por reducirse considerablemente el número de los que estudien y obligarles á emplear cierto tiempo en la carrera, sin que por ello se fomente la instruccion en intension y extension.

Si el objeto á que el decreto se encamina es levantar la enseñanza del estado de postracion en que se halla por efecto de la excesiva benignidad de los exámenes, á estos debia haber desde luego atendido, absteniéndose de imponer condiciones puramente formales cuya observancia no es prueba de suficiencia y á muchos no les será dable llenar, por muy buenos que sean sus deseos si á ellos no acompañan los medios. Con tales restricciones, el que vive lejos de los centros de Instruccion ó no puede asistir á ellos por las ocupaciones que su subsistencia le impone, se encuentra expuesto á no poder hacer que valgan ímprobos esfuerzos, porque una disposicion del decreto la prescribe la asistencia y queda á merced del profesor oficial excluirle de los exámenes ordinarios, y al verificarlo en los extraordinarios de Setiembre, es de temer que á más de la molestia de la dilacion se pretenda tambien exigirle condiciones extraordinarias.

La mision del Estado, mientras esté encargado de prestar la enseñanza, consiste en hacer de sus establecimientos modelos donde aprendan los institutos particulares y puedan recibir la instruccion las personas á quienes convengan así verificarlo.

Y en tanto que no haya libertad de profesion, la atribucion del Estado es garantir la suficiencia de los que á las diversas carreras se consagran, sin preguntar á nadie donde ha adquirido sus conocimientos, precaucion tan ociosa como si un vendedor preguntase al que le da una moneda la procedencia para asegurarse de la bondad de su ley, cuando por el sonido, color y peso tiene medios de averiguar seguramente su legitimidad.

Ese sistema de limitaciones era propio de aquellas felices épocas de los gremios cuyos Reglamentos, que hoy nadie defenderá por absurdos, marcaban el mínimun de tiempo que necesitan los de cada oficio permanecer de aprendices y oficiales para ascender á los empleos superiores. Las leyes de la libertad del trabajo que hoy rige en los oficios mecánicos, no sabemos por qué no se extienden al trabajo intelectual que por la naturaleza de su objeto requiere ménos trabas, si la ciencia se ha de desarrollar, no como una planta artificial al calor de una estufa, sino en toda lozanía al soplo vivificante de la libertad que es la ley del pensamiento.

En resúmen, respetando profundamente las intenciones de sus autores, cuyos móviles han sido indudablemente el progreso de la enseñanza, con el decreto del 29 de Setiembre se aprenderá lo mismo que antes, mientras los exámenes no varien de sistema, pero en cambio costará más tiempo el aprender y utilizar lo que se aprende, y además los beneficios de la instruccion alcanzarán á un número mucho más reducido de personas.

J. M. V.

DE LAS HIPÓTESIS

QUE SE HALLAN EN LAS BASES DE LA GEOMETRIA

POR BERNHARD RIEMANN (1).

Plan de la Investigacion.

Sabido es que la geometría toma, como cosas dadas, tanto la nocion del espacio como los primeros principios de las construcciones en el espacio. Da de ellos definiciones que son meramente nominales, mientras que las verdaderas determinaciones aparecen bajo la forma de axiomas. La relacion de estas apropiaciones queda por consiguiente en la oscuridad; ni percibimos si es, y hasta donde, necesaria su conexion, ni tampoco, *á priori*, si es posible.

Desde EUCLIDES hasta LEGENDRE (para citar al más famoso de los geómetras reformadores modernos) tal oscuridad no ha sido disipada ni por los matemáticos ni por los filósofos que en ello se han interesado. La razon de esto sin duda es que la nocion general de las magnitudes múltiplemente extendidas (en las cuales se incluyen las magnitudes del espacio) todavía están sin tratar en lo mas mínimo. En su consecuencia, héme en primer lugar impuesto la tarea de construir la nocion de una magnitud múltiplemente extendida, con las nociones generales de magnitud. De donde se seguirá que una extension múltiplemente extendida es susceptible de diferentes relaciones métricas, y por consiguiente que el espacio es solo un caso particular de una magnitud triplemente extendida. Pero de aquí se desprende como consecuencia necesaria que las proposiciones de la geometría no pueden derivarse de las nociones generales de magnitud; sino que las propiedades que distinguen el espacio de otras concebibles magnitudes triplemente extendidas, son solo para deducidas de la experiencia. Así surge el problema de descubrir los hechos más simples por los cuales puedan determinarse las relaciones métricas del espacio; problema que, por la naturaleza del caso, no está completamente determinado, puesto que puede haber varios sistemas de hechos que basten para determinar las relaciones métricas del espacio,— siendo para nuestro actual propósito el más importante sistema el que Euclides ha sentado como fundamento. Estos hechos son—como todos los hechos—no necesarios, sino solo empíricamente ciertos: son hipótesis. Podemos por lo tanto investigar su probabilidad, la cual dentro de los límites de la observacion es por de contado muy grande, é inquirir la justicia con que se extienden mas allá de los límites de la ob-

(1) *Gottingen Abhandlungen*, tomo XIII.

servacion, ya por el lado del infinitamente grande ó por el lado del infinitamente pequeño.

I.—*Nocion de una magnitud* n—*plemente extendida.*

Antes de pasar á intentar la solucion del primero de estos problemas, ó sea el desarrollo de la nocion de una magnitud múltiplemente extendida, creo que puedo pedir indulgente crítica por razon de no estar práctico en estas especulaciones de índole filosófica, donde la dificultad se halla más en las nociones mismas que en la construccion; y porque exceptuando algunas brevísimas ideas sobre la materia dadas por el Consejero Privado Gauss en su segunda memoria sobre los Residuos Bicuadráticos en la *Göttingen Gelehrte Anzeige,* y en algun otro de sus libros, y algunas investigaciones filosóficas de Herbart, no podia aprovechar otros trabajos anteriores.

§ I. Las nociones de magnitud solo son posibles donde hay una nocion general antecedente que admite diferentes especificaciones. Segun que entre estas especificaciones exista ó nó, de una á otra, una senda continua, asi forman una multiplicidad *contínua* ó *discreta:* las especificaciones individuales llámanse en el primer caso puntos, y en el segundo elementos, de la multiplicidad. Las nociones cuyas especificaciones forman una multiplicidad *discreta*, son tan comunes, que dándose, al ménos en las lenguas cultas, algunas cosas, siempre es posible hallar una nocion en que estén incluidas. (De aquí que los matemáticos puedan fundar sin vacilar la teoría de las magnitudes discretas sobre el postulado de que ciertas cosas dadas pueden mirarse como equivalentes.) Por otra parte, tan pocas y nada frecuentes son las ocasiones de formar nociones cuyas especificaciones constituyan una multiplicidad continua, que las únicas nociones simples cuyas especificaciones forman una multiplicidad múltiplemente extendida son las posiciones de los objetos percibidos y los colores. A los matemáticos superiores es á quienes primero ocurren ocasiones más frecuentes para la creacion y desarrollo de estas nociones.

Porciones definidas de una multiplicidad, distinguidas por un linde ó señal, se llaman Quanta. Su comparacion, en lo tocante á la cantidad, se efectúa en el caso de las magnitudes discretas, contando; en el caso de las magnitudes continuas, midiendo. Consiste la medida en la superposicion de las magnitudes que han de compararse; requiere por lo tanto medios de emplear una magnitud como el tipo de otra. A falta de ella dos magnitudes pueden solo compararse cuando una es una parte de la otra; si bien entonces solo podemos determinar el más ó el ménos, pero no el cuanto más. Las cuestiones que en tal caso pueden acerca de ellas suscitarse, constituyen una seccion general de la ciencia de la magnitud, en que las magnitudes se miran, no como existiendo con independencia de la posicion, y no como apreciables por medio de una unidad, sino como regiones en una multiplicidad. Tales investigaciones han llegado á ser una necesidad para muchas partes de las matemáticas, por ejemplo, para el tratado de funciones analíticas de muchos valores, y la falta de ellas es, á no dudarlo, la causa principal de que el célebre teorema de Abel y los adelantos de Lagrange, Pfaff, Jacobi, en la teoría general de las ecuaciones diferenciales, hayan sido por tanto tiempo infructuosos. De esta parte general de la ciencia de la magnitud extendida en que nada se asume sino lo que en la nocion de ella se contiene, bastará para el actual propósito hacer resaltar dos puntos; el primero de los cuales se refiere á la construccion de la nocion de una multiplicidad múltiplemente extendida, y el segundo á la reduccion de determinaciones de lugar en una multiplicidad dada á determinaciones de cantidad, y este pondrá en claro el verdadero carácter de una n—ple extension.

§ II. Si en el caso de una nocion cuyas especificaciones forman una multiplicidad continua, se pasa de una cierta especificacion, por definida manera, á otra, las especificaciones saltadas forman una multiplicidad simplemente extendida, cuyo verdadero carácter es el de que en ella el progreso continuo desde un punto es solo posible en dos sentidos, hácia adelante y hácia atrás. Si se supone ahora que esta multiplicidad á su vez salta á otra enteramente distinta, y además de definida manera, especialmente, de manera que cada punto salte á un punto definido de la otra, entonces todas las especificaciones así obtenidas forman una multiplicidad doblemente extendida. Análogamente se obtiene una multiplicidad triplemente extendida si uno imagina una doblemente extendida que salte de definida manera á otra enteramente distinta; y fácil es ver cómo esta construccion puede continuarse. Si uno atiende al objeto variable en vez de mirar la nocion determinable de ella, esta construccion puede describirse como una composicion de una variabilidad de $n+1$ dimensiones, con una variabilidad de n dimensiones y una variabilidad de una dimension.

§ III. Mostraré ahora cómo inversamente se puede resolver una variabilidad cuya region es dada, en una variabilidad de una dimension y una variabilidad de ménos dimensiones. A este fin supongamos una porcion variable de una multiplicidad de una dimension—contada desde un orígen fijo, para que los valores de ella sean con otra comparables,—que tenga para cada punto de la multiplicidad dada un valor definido, que varíe continuamente con el punto; ó, en otros términos, tomemos una funcion, continua en posicion, dentro de la multiplicidad dada, que además no sea constante en ninguna parte de esta multiplicidad. Cada sistema de puntos en donde la funcion tiene un valor constante, forma entonces una multiplicidad continua de menos dimensiones que la dada. Estas multiplicidades saltan continuamente á otra mientras la funcion cambia: podemos por consiguiente aceptar que de una de ellas proceden las otras, y hablando en general, esto puede ocurrir de tal manera que cada punto salte á un punto definido de la otra; los casos de excepcion (cuyo estudio es importante) pueden aquí dejar de considerarse En su consecuencia la determinacion de posicion en las multiplicidades dadas se reduce á una determinacion de cantidad y á una determinacion de posicion en una multiplicidad de ménos dimensiones. Fácil es ahora mostrar que esta multiplicidad tiene $n-1$ dimensiones cuando la multiplicidad dada está n—plemente extendida. Repitiendo, pues, esta operacion n veces, la determinacion de posicion en una multiplicidad n—plemente extendida se reduce á n determinaciones de cantidad, y por consiguiente, la determinacion de posicion en una multiplicidad dada se reduce á un número finito de determinaciones de cantidad *cuando esto es posible.* Hay magnitudes en que la determinacion de posicion no requiere un número finito, sino una série ilimitada ó bien una continua multiplicidad de determinaciones de cantidad. Multiplicidades de esta clase son, por ejemplo, las determinaciones posibles de una funcion para una region dada, las figuras posibles de una figura sólida, etc.

(*Se continuará.*)

SOLUCION DE LAS CUESTIONES PROPUESTAS.

CUESTION 4.ª

Hallar la relacion que exista entre las raices de las ecuaciones

$$x^3-bx=c, \quad (1) \qquad x^3+bx^2=c^2. \quad (2)$$

1.ª solucion.

Entre las raices y los coeficientes, existen estas relaciones:

$$\begin{array}{ll} x_1+x_2+x_3=0 & y_1+y_2+y_3=-b \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-b & y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=0. \\ x_1x_2x_3=c & y_1y_2y_3=c^2, \end{array}$$

en las cuales la letra y representa las raices de la segunda ecuacion. Pongamos

$$y_1=x_2x_3+t_1, \quad y_2=x_1x_3+t_2, \quad y_3=x_1x_2+t_3, \quad t_1+t_2+t_3=0;$$

siendo cada t una funcion arbitraria de las tres raices de la primera ecuacion. Multiplicando ordenadamente las ecuaciones en t, excepto la última, resulta

$$y_1y_2y_3=x_1^2x_2^2x_3^3t\ x_1^2x_2x_3t_1+x_1x_2^2x_3t_2+x_1x_2x_3^2t_3+x_1x_2t_1t_2+x_1x_3t_1t_3+x_2x_3t_2t_3+t_1t_2t_3,$$

Esta ecuacion se trasforma en la siguiente:

$$c(x_1t_1+x_2t_2+x_3t_3)+t_1t_2t_3=-\left(\frac{c}{x_3}t_1t_2+\frac{c}{x_2}t_1t_3+\frac{c}{x_1}t_2t_3\right).$$

El primer miembro cambia de signo cuando se reemplazan t_1, t_2, t_3 por $-t_1, -t_2, -t_3$, y el segundo nó; luego ambos son iguales á cero. Tendremos pues,

$$c(x_1t_1+x_2t_2+x_3t_3)=-t_1t_2t_3$$

El primer miembro se duplica, duplicando t_1 t_2 y t_3, y el segundo nó; luego $t_1t_2t_3=0$, y por consiguiente será un factor $t_1=0$, y los otros dos iguales y de signo contrario, y por tanto nulos. Luego

$$y_1=x_2x_3, \quad y_2=x_1x_3, \quad y_3=x_1x_2.$$

J. BARTRINA Y ROYO,

Catedrático de Matemáticas en el Instituto de Albacete.

2.ª *solucion.*

Bien entendido está que las dos ecuaciones se habrán propuesto sabiendo precisamente que satisfacen á una condicion preconcebida; pues si se hubieran escrito á arbitrio, la cuestion sería en general irresoluble.

I.

Puesto que las dos son de tercer grado, se sabe resolverlas algebráicamente; y una vez escritas las expresiones de sus raíces, se podrán comparar las de (1) con las de (2), para descubrir la relacion pedida, con tal que se preparen bajo la forma más conveniente al objeto.

Sean x_1, x_2. x_3 las raíces de (1) y X_1, X_2, X_3 las de (2) : estas se pueden expresar bajo la forma $X=-\frac{b}{3}+y$, siendo y la incógnita de la trasformada que resulta, de hacer desaparecer el segundo término en (2), ó sea de $y^3-\frac{b^2}{3}y+\frac{2b^3}{27}-c^2=0$..(3) y entónces las expresiones de las seis raíces serán:

$$x_1=t+t' \qquad x_2=t\alpha+t'\alpha^2 \qquad x_3=t\alpha^2+t'\alpha\ ..... \ (4)$$

$$X_1=-\frac{b}{3}+T+T' \qquad X_2=-\frac{b}{3}+T\alpha+T'\alpha^2 \qquad X_3=-\frac{b}{3}+T\alpha^2+T'\alpha\ ..... \ (5)$$

siendo α, α^2, las dos raices cúbicas imaginarias de 1

t, t' las raíces cúbicas respectivas de los valores de la ecuacion $u^2-cu+\frac{b^3}{27}=0$

T, T' las raíces cúbicas de los de $U^2+\left(\frac{2b^3}{27}-c^2\right)U+\frac{b^6}{3^6}=0$ es decir,

$$t=\sqrt[3]{\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}-\frac{b^3}{27}}} \qquad t'=\sqrt[3]{\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}-\frac{b^3}{27}}}\ ...... \ (6)$$

$$T=\sqrt[3]{\frac{c^2}{2}-\frac{b^3}{27}+c\sqrt{\frac{c^2}{4}-\frac{b^3}{27}}} \qquad T'=\sqrt[3]{\frac{c^2}{2}-\frac{b^3}{27}-c\sqrt{\frac{c^2}{4}-\frac{b^3}{27}}}\ .... \ (7)$$

Y si se trata de trasformar convenientemente estas fórmulas (6) y (7), para que las raíces, que son funciones de las cantidades á que corresponden, sean fácilmente comparables, se nota en primer lugar que á nada conduce poner

$$T=\sqrt[3]{-\frac{b^3}{27}+ct^3} \qquad T'=\sqrt[3]{-\frac{b^2}{27}+ct'^3},$$

como no sea á deducir que

$$T^3-T'^3=c(t^3-t'^3) \qquad T^3+T'^3=c(t^3+t'^3)-2t^3t'^3.$$

y que

$$\left(X_1+\frac{b}{3}\right)^3-3TT'^3\left(X_1+\frac{b}{3}\right)=cx_1^3-3ctt'x_1-2t^3t'^3\ ;$$

pero la igualdad

$$X_1^3+bX_1^2=c\,(x_1^3-bx_1)\ ,$$

á que esta última conduce, no es más que una confirmacion para X_1, x_1 de la relacion más general

$$x^3+bx^2=c\,(x^3-bx)\ ,$$

que es evidente por la sola inspeccion de (1) y (2): en segundo lugar, que tampoco resulta conveniente esta trasformacion de (7), aun cuando, para simplificar en cierto modo la comparacion de las raíces, se tratase de expresar t', T' en funcion de t, única cantidad auxiliar que apareciese así en las fórmulas, pues el cuadro de las cuatro cantidades sería de estos dos modos

$$\begin{array}{cc|cc}
t & \sqrt[3]{t^3-2\sqrt{\frac{c^2}{4}-\frac{b^3}{27}}} & t & \sqrt[3]{c-t^3} \\
\sqrt[3]{ct^3-\frac{b^3}{27}} & \sqrt[3]{ct^3-\frac{b^3}{27}-2c\sqrt{\frac{c^2}{4}-\frac{b^3}{27}}} & \sqrt[3]{ct^3-\frac{b^3}{27}} & \sqrt[3]{c(c-t^3)-\frac{b^3}{27}}
\end{array}$$

y sería fácil escribir los cuadros correspondientes trasformados de (4) y (5) ; en fin dejando subsistir la cantidad t', la forma conveniente consiste en expresar T en funcion de t, T' en funcion de t' de la manera siguiente. En las expresiones (7), descompuesta $\frac{c^2}{2}$ en $\frac{c^2}{4}+\frac{c^2}{4}$, aparece la cantidad subradical de T como el desarrollo de $\left(\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}-\frac{b^3}{27}}\right)^2$ y la de T' es $=\left(\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}-\frac{b^3}{27}}\right)^2$, y entónces es evidente que $T=t^2$, $T'=t'^2$. En virtud de esto las fórmulas (5) se convierten en

$$X_1=-\frac{b}{3}+t^2+t'^2 \qquad X_2=-\frac{b}{3}+t^2\alpha+t'^2\alpha^2 \qquad X_3=-\frac{b}{3}+tt'^2\alpha^2\alpha^2+\ldots.. \quad (8)$$

Ahora bien, observando atentamente la construccion de estas tres expresiones, en comparacion con las expresiones (4), y teniendo en cuenta que $-\frac{b}{3}=-tt'$ y que $-1=\alpha+\alpha^2=\alpha^4+\alpha^2$, se llega à comprender fácilmente que $X_1=x_2x_3$, $X_2=x_1x_2$, $X_3=x_1x_3$ y, en resúmen que *las raíces de $x^3+bx^2=c^2$ son los tres productos binarios distintos que se pueden formar con las raíces de la ecuacion $x^3-bx=c$.*

Es evidente que, si las tres raíces de esta fuesen reales, lo serían tambien las tres de aquella; y en efecto, si se busca la condicion de realidad para cada ecuacion, se encuentra para las dos la misma $\frac{b^3}{c^2} > \frac{27}{4}$.

II.

Está resuelta la cuestion; pero si se considera que atendiendo á su enunciado, debe consistir en un problema *inverso* de alguno de los que resuelve la teoría de la trasformacion de ecuaciones en uno ú otro de sus dos principales casos, se comprende la dificultad de su resolucion, como sucede en mayor ó menor grado con todos los problemas inversos, por ej. la division, la extraccion de raíces, la sumacion de las séries, la integracion de las fuuciones, etc.

¿Qué es lo que aquí se propone? Dada una ecuacion que se toma como primitiva y otra que se asegura es trasformada suya, averiguar *por qué especie de relacion* están ligadas las raíces de esta con las de aquella, ó bajo qué ley comun las de la una pueden ser construidas con las de la otra. La dificultad está en que siendo la trasformada la ecuacion final (verdadera ó modificada) de cierto sistema de ecuaciones, que la teoría en cada caso especial determina *con arreglo* á la relacion dada; y siendo esta relacion aquí desconocida, no se conoce más que la ecuacion final por una parte, y una sola ecuacion del sistema por otra. ¿Es esto un problema resoluble por procedimientos tan regulares como el directo? Conociendo muchas especies de trasformacion, ó sea casos especiales del directo, y teniendo muy presentes los caractéres exteriores con que en cada uno resulta la trasformada en su forma y en su grado con respecto á la dada, se puede por un procedimiento de exclusion ir reduciendo más y más el número de especies de relacion entre las cuales haya de estar precisamente la que se busca, hasta llegar á su determinacion; lo cual en ejemplos particulares será acaso rápido de practicar, sin necesidad de tanteos y como operacion mental, *acertando*, con auxilio de la memoria, el caso de trasformacíon á que pertenece.

En el ejemplo actual, prescindiendo de la resolucion I, se comprende, á poco que se recuerden los casos tratados en las obras clásicas, que la ecuacion (2) es precisamente la ecuacion *de los productos dos á dos* de las raíces de (1); porque se sabe que, si se tiene $\varphi(x)=x^3-Ax^2+Bx-C=0$.... (9), la ecuacion de los productos distintos es $y^3-By^2+ACy-C^2=0$..... (10) siendo y el producto de dos raíces de (8), lo cual se puede demostrar directamente en vez de considerar á (10) como nacida del sistema

$$\varphi(x)=0 \; ; \qquad \frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)-\varphi(x)}{y-x^2}=0 \; ;$$

y haciendo en (9) y (10) $A=0$, $B=-b$, $C=c$, se convierten en

$$\varphi(x)=x^3-bx-c=0 \; ; \qquad y^3+by^2-c^2=0.$$

que son cabalmente las (1) y (2); luego la relacion pedida será $y=x_1x_2$, siendo x_1,x_2 dos cualesquiera de las raíces de $\varphi(x)=0$. *A posteriori*, se vé que así es, en efecto; pues si y es una raiz de (2), debe quedar la (1) satisfecha por , es decir,

$$\varphi\left(\frac{c}{y}\right)=\left(\frac{c}{y}\right)^3-b\left(\frac{c}{y}\right)-c=0=y^3+by^2-c^2;$$

y como c es el producto de las tres raíces de (1), y es necesariamente el producto de las otras dos.

III.

La cuestion número 4 de la Revista da todavía pié para más exámen, si se tiene en cuenta que apenas se han comparado entre sí (1) y (2) en cuanto á los coeficientes de sus respectivos términos; ni ménos se ha aducido que los coeficientes de una ecuacion son funciones simétricas de sus raíces, lo cual podría servir para comparar (1) y (2) en cuanto á las raíces respectivas; ni siquiera se ha tratado la resolucion II, por la teoría de las funciones simétricas. Esto en conjunto lleva á preguntar: ¿estribará la resolucion de cuestiones como la propuesta en la comparacion de los coeficientes de ambas ecuaciones, con auxilio de la teoría de las funciones simétricas?

Por no prolongar este escrito, conste solamente que las funciones simétricas son un modo de generacion de las cantidades, en el cual tanto entra el concepto de magnitud en cuanto al valor de la funcion y de sus variables, como el concepto matemático del órden en cuanto al modo de generacion en sí mismo: la teoría mencionada se aplica inmediatamente á la formacion de una ecuacion cuyas raíces deban ser funciones racionales de las de una ecuacion dada: en el ejemplo propuesto los datos son: 1.°, el grado de la ecuacion (2), que indica *cuántos* valores admite la relacion ó funcion incógnita para los distintos valores de sus variables, que son raíces de (1); 2.°, las raíces de (2) que manifiestan *cuáles* son esos valores de la relacion incógnita; 3.°, los coeficientes de (1) que expresan los valores de las funciones simétricas S_1, $S(x_1x_2)$, $S(x_1x_2x_3)$ de las raíces de (1), y 4.°, los coeficientes de (2) que expresan los valores de las funciones simétricas S_1', $S(X_1X_2)$, $S(X_1X_2X_3)$ de las raíces de (2). En fin, del cuadro de unos y otros valores

$S_1=x_1+x_2+x_3=0,$	$S(x_1x_2)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-b,$	$S(x_1x_2x_3)=x_1x_2x_3=c$
$S'_1=X_1+X_2+X_3=-b,$	$S(X_1X_2)=X_1X_2+X_1X_3+X_2X_3=0,$	$S(X_1X_2X_3)=X_1X_2X_3=c^2$

se deducen varias consecuencias, y las más principales son:

La suma de las raices de una de las dos ecuaciones es igual á la suma de los productos binarios de las raices de la otra.

El producto de las raices de (1) es igual á la raiz cuadrada del producto de las raices de (2).

La suma de las seis raices es igual al conjunto de las dos sumas de productos binarios respectivos.

El producto de las seis raices es igual al cubo del producto de las tres primeras.

Todo lo cual puede comprobarse por medio de las fórmulas (4) y (8).

P. Cassinello.

Almería.

NOTA SOBRE LA SUPERFICIE DE LAS ONDAS.

POR EL SR. D. CÁRLOS CELLÉRIER.

(*Comunicada á la Sociedad de Física é Historia Natural de Ginebra.*)

(Continuacion) (1).

Por lo demás, VERDET observa con razon que esta nulidad sería una objecion contra la teoría, puesto que la existencia de una presion es en todos los medios un hecho general; por nuestra parte añadiremos que, segun todas las probabilidades, trátase seguramente de una presion, y no de una tension ó traccion.

Porque esta última supondría entre las moléculas una preponderancia de la fuerza atractiva incompatible con el estado de equilibrio. Verdad es que las hipótesis relativas á las acciones moleculares encierran muchos puntos oscuros, y acaso no deban aceptarse al pié de la letra; pero todo ocurre como si fueran exactas, y apenas puede admitirse un hecho que las volvería completamente ilusorias. Llamaremos λ la constante única que depende de la presion: si realmente es una presion, será negativa, así como sería positiva en el caso de una tension. Sin dejar de mirar, en general, como más probable y principal el otro caso, examinaremos en detalle las modificaciones que este último lleva consigo. Quedan aún en las fórmulas seis constantes, que designaremos por a, b, c, a_1, b_1, c_1. En los cuerpos isótropos se tiene $a=b=c$, $a_1=b_1=c_1=3a$; en los semi-isótropos ó cristales de un eje, es $a=b$, $a_1=b_1=3c$; en los cristales de dos ejes no se conoce *á priori* relacion alguna entre las constantes; solamente se sabe que, apartándose poco los medios birefringentes de la isotropía, son a, b y c casi iguales, y a_1, b_1, c_1 casi el triplo; además descúbrese evidentemente que A^2, B^2, C^2, cuadrados de las constantes de FRESNEL, son los mismos que $\lambda+a$, $\lambda+b$, $\lambda+c$, de las fórmulas teóricas. Las diferencias mútuas de los números A^2, B^2, C^2 no exceden, en ningun medio birefringente, á la cuarta parte de su valor medio; así pues, llamando, como haremos siempre, d el medio entre el mayor y el menor de los números a, b, c, las diferencias $a-b$, $a-c$, $b-c$, no excederán nunca á la cuarta parte de $\lambda+\delta$, y serán por consiguiente inferiores á $\frac{d}{4}$ si λ es negativa.

No obstante, lo que de vago presentan las nociones precedentes, puede ya uno formarse una idea de la separacion de trasversabilidad en las dos hojas correspondientes á las de FRESNEL, y que llamaremos hojas teóricas. Esta separacion ó ángulo de la direccion de las vibraciones con el plano tangente, no parece que pueda pasar de 8 ó 9 grados en las circunstancias ménos favorables; así resulta de valuaciones particulares en diferentes puntos, aunque un cálculo más general, pero que debe dar un máximun sobradamente alto, llega como límite á una separacion de 20°. Mas ahora debe notarse que, si la forma física de la superficie de las ondas se determina experimentalmente con gran precision por medio de la construccion de HUYGHENS, no sucede lo mismo en la direccion de las vibraciones. Solamente se sabe que ó están en el plano de polarizacion, ó son perpendiculares á este plano, segun creia FRESNEL, y además casi trasversales: la separacion precedente no sería obstáculo para los conocidos fenómenos de extincion y refuerzo de luz.

En los cristales de un eje una de las ondas teóricas coincide rigurosamente con

---

(1). Véase la pág. 99.

el elipsoide de revolucion que corresponde al rayo extraordinario: la otra se aparta poco de la esfera de FRESNEL, y coincide con ella segun las direcciones principales; pero la direccion teórica de las vibraciones está invertida: sobre el elipsoide es constantemente la tangente al paralelo de la superficie, y sobre la esfera es casi tangente al meridiano, de manera que es en ambas paralela al plano de polarizacion.

En los cristales de dos ejes, hállase, segun queda dicho, por seccion principal de las hojas físicas, una elipse y un círculo; en una de las hojas teóricas, la seccion es rigurosamente la misma elipse, mientras que la otra difiere poco del círculo. La direccion de las vibraciones sobre estas secciones es aún la inversa de las que FRESNEL suponia.

Hay, como se vé, conformidad en ciertos puntos, aparente desacuerdo en otros; pero esto dimana de que hemos dejado indeterminadas las constantes a_1, b_1, c_1, salva una vaga nocion sobre su órden de magnitud; no obstante tienen un valor propio en cada cuerpo. Pero preséntase la circunstancia singular de que en la naturaleza las propiedades ópticas de uu cuerpo resultan solamente de los valores de $\lambda+a$, $\lambda+b$, $\lambda+c$, mientras que bajo el punto de vista teórico, desde donde las fórmulas han sido halladas, otros elementos han de contarse; pudiérase, por ejemplo, imaginar dos sistemas moleculares para los cuales a, b, c, fueran los mismos, y a_1, etc. diferentes. Los medios birefringentes ofrecen pues este carácter: que a_1, b_1, c_1, son funciones determinadas de a, b, c; y solo estudiando, en cuanto cabe hacerlo, la forma de esas funciones podremos juzgar del mayor ó menor acuerdo entre las superficies de las ondas.

Para las comparaciones numéricas convendremos en llamar δ la razon de la diferencia entre el mayor y el menor de los números A^2, B^2, C^2, á su semi-suma; esta es tambien $\lambda+d$, siendo d la semi-suma del mayor y menor de los números a, b, c. Si se hace variar en la misma relacion λ, a, b, a_1, etc., y por consiguiente tambien A^2, B^2, C^2, todas las hojas quedan geométricamente semejantes; así mismo para apreciar sus diferencias de forma, supondremos en todos los valores numéricos que se dan despues, que se toma $\lambda+d$ por unidad: entonces el rádio vector medio de las diversas hojas vale tambien casi la unidad.

Daremos el nombre de separacion á la diferencia de los rádios vectores de una hoja de FRESNEL y de la hoja teórica correspondiente, calculados para una misma direccion; de manera que será variable sobre la superficie. La mayor distancia entre dos hojas de FRESNEL, tambien para una misma direccion, es próximamente $\frac{1}{2}\delta$, y habremos de verificar que la separacion es muy pequeña con relacion á esta cantidad. En los cristales de un eje la separacion es nula sobre una de las hojas: en la otra representa todavía el pequeño ángulo de las direcciones de dos haces refringidos calculados ya segun FRESNEL, ya segun la teoría, siendo el mismo el haz incidente; antes bien es tal ángulo un poco menor. Esta nueva significacion de la separacion resulta casi exacta en el caso general.

La razon de la mayor de las diferencias $a-b$, $a-c$, á $\lambda+d$ es la misma que δ: por consiguiente su razon a, d, será inferior si λ es negativa, superior si es positiva; pero ahora, de la pequeñez de esta segunda razon depende la de la separacion y tambien la pequeñez de separacion de las direcciones de las vibraciones que despues veremos. No pudiendo conocer numéricamente a, b, c, sin asignar á λ un valor, empezaremos siempre por suponer $\lambda=0$, y luego indicaremos cómo deben modificarse los resultados suponiendo λ ora negativa ora positiva.

Busquemos ahora cuáles puedan ser los valores de a_1, b_1, c_1, en funcion de a, b, c; lo primero que ha de averiguarse es si existen esas funciones empíricas ó no, propias para asegurar la coincidencia de las hojas; porque si esto no ocurriera, sería inutil cualquiera otra investigacion. Comenzaremos, pues, por elegirlas de manera que en las tres secciones principales la curva que era casi circular, se vuelva exactamente círculo; con lo cual a_1, b_1, c_1, se hallan plenamente determinadas. Desde entonces la coincidencia es completa y la separacion rigurosamente nula en los cristales de un eje En los otros, como que las ecuaciones de las dos hojas que han de compararse poseen una forma enteramente distinta, es difícil concebir que la coincidencia que tiene lugar en las secciones alcanza toda la extension de la superfìcie; sin embargo, es lo que acontece casi rigurosamente.

Los principales cristales de dos ejes, de los cuales se tienen datos numéricos son la aragonita y el topacio. En la aragonita δ asciende á cosa de $\frac{1}{5}$(pero los valores de B y C son casi iguales, lo cual la aproxima á los cristales de un eje, y contribuye á disminuir la separacion; en el topacio esta circunstancia no se verifica, pero δ no viene á ser más que $\frac{1}{80}$). Para tener una valuacion de sobra excesiva y abrazar todos los casos posibles, imaginemos un medio ficticio en que δ posea el mayor valor, es decir, el del espato $\frac{1}{4}$ suponiendo que B^2 sea el medio de los otros dos, para apartarnos cuanto se pueda del caso de la semi-irotropia. Hallaráse entonces como máximum de la separacion en todas direcciones, suponiendo $\lambda=0$, en el medio ficticio, cerca de 0,0000006; en la aragonita será 3 ó 4 unidades del 9.° órden decimal: en el topacio no llega ni aún al 13° órden. Todavía son demasiado altos estos valores, porque en la imposibilidad de calcular rigurosamente el máximum de separacion, se vé uno obligado á apreciar de una manera exagerada las diversas partes de su expresion; tambien la separacion calculada para diversos puntos del medio ficticio, á gran distancia de las secciones principales, nunca ha dado más de la mitad del máximum antedicho La extrema exactitud que resulta de estas cifras proviene, sin duda, en gran parte de la pequeñez de δ; sin embargo, aún suponiendo $\delta=1$, ó A^2, B^2, C^2 proporcionales á 3, 2, 1, caso absolutamente imposible, el máximum teórico de la separacion, valuado aún muy sobradamente alto, no es más que 0,004.

En el caso de noser nula λ, los valores precedentes de la separacion deben multiplicarse por una potencia de $1+\frac{\lambda}{d}$, lo cual, si λ fuera positiva, los aumentaría; pero á ménos que á este factor no se atribuya un valor enorme completamente improbable, se vé que la no coincidencia de las hojas queda muy por debajo de los errores de observacion. Existen, pues, para cada medio valores de a_1, b_1, c_1, que hacen insensible la separacion.

No obstante, estos valores sin duda no son rigurosamente exactos: poseen una forma muy complicada en funcion de a_1, b_1, c_1, y no tienen *á priori* razon alguna de ser: por lo cual los llamaremos los valores empíricos de a_1, b_1, c_1, y buscaremos si es posible demostrar algunas relaciones que den para estos elementos otros valores aproximados solamente, pero para los cuales la separacion sea bastante pequeña.

Notemos que $a_1-\frac{3\,b\,c}{a}$ se anula así cuando $a=b$ y por consiguiente $a_1=3c$, como cuando $a=b$: cabe pues conjeturar que la razon de esta cantidad á $(a-b)\ (a-c)$ permanece siempre finita; y del mismo modo razonando para b_1, c_1, se podrán escribir los valores hasta aquí hipotéticos.

$$a_1=\frac{3bc}{a}+\mu\frac{(a-b)\ (a-c)}{a};\ b_1=\frac{3ac}{b}+\mu'\frac{(b-a)\ (b-c)}{b}$$

$$c_1=\frac{3ab}{c}+\mu''\frac{(c-a)\ (c-b)}{c}$$

en los cuales μ, μ', μ'', son coeficientes incógnitos.

Despues segun lo dicho anteriormente, no es posible que se tenga en un medio $a=b=c$ sin que sea isótropo: ahora bien, si se deforma un medio birefringente suponiendo que todas las dimensiones paralelas á uno de los ejes principales varien en una misma relacion, se sabe por el ejemplo del vidrio comprimido que a, b, c, cambiarán; si por ejemplo, este eje es vertical, esto supone que todas las moléculas se han corrido segun las verticales, de manera que sus distancias á un plano horizontal se hayan multiplicado por $1+\alpha$, siendo α muy pequeña. Ocasionando análogas deformaciones paralelas á los otros dos ejes, llamando $1+\beta$, $1+\gamma$ las razones correspondientes, podremos disponer de estos números de manera que a, b, c se vuelvan iguales, y si se admite que este nuevo cuerpo sea isótropo, pudiendo el medio primitivo formarse de él por los cambios inversos de dimensiones, se hallará que a, b, c, a_1, etc., pueden expresarse por séries convergentes segun las potencias de α, β, γ. No es necesario suponer que estos cambios pueden operarse mecánicamente, ni aún que α, β, γ tengan precisamente la significacion precedente, lo que daría lugar á algunas dificultades con respecto á las presiones; basta que pueda expresarse en série convergente segun pequeñas cantidades α, β, γ, despues, que permutando en ella estas letras, se deduzca de allí el valor de b, y de c, en fin que una sola série exprese asímismo a_1, b_1, c_1; y esto sin duda será lo que ocurra si el medio puede deducirse de otro isótropo, efectuando en las moléculas tres mudanzas de lugar, de índole desconocida, correspondientes á tres ejes, y cuya intensidad esté medida por α, β, γ.

Admitamos que así pase, como es muy probable: entonces como se tiene $a=b$ cuando $\alpha=\beta$, la série que expresa $a-b$ será enteramente divisible por $\alpha-\beta$; sucederá lo propio para $a-c$ y $\alpha-\gamma$; despues anulándose $a_1+3a-3b-3c$, ya para $\alpha=\beta$, ya para $\alpha=\gamma$, será tambien enteramente divisible por $(\alpha-\beta)\ (\alpha-\gamma)$, y por consiguiente será el producto de $(a-b)\ (a-c)$ por una série convergente, en fin sustituyendo

$$3a-3b-3c=\frac{3(a-b)\ (a-c)}{a}-\frac{3bc}{a}$$

se hallarán para a_1 y aún para b_1 y c_1 los valores ya puestos como hipótesis, y entonces se sabrá que μ, μ', μ'', son séries de la misma forma cuyo primer término independiente de α, β, γ, es comun á todas tres. Desarrollando los valores empíricos de a_1, b_1, c_1, segun las potencias de las pequeñas cantidades $a-b$, $a-c$, $b-c$ vuélvense á hallar exactamente los precedentes valores, y en este caso las séries repre-