

# REVISTA

DE LA

## SOCIEDAD DE PROFESORES DE CIENCIAS.



AÑO II.

MADRID 25 DE MAYO DE 1875.

NÚM. 3.

### DE LA POSICION DEL EJE DE ROTACION DE LA TIERRA

RESPECTO DEL EJE DE FIGURA \*.

(Por el profesor MANUEL FERGOLA, de Nápoles.) \*\*

Consideremos la tierra como un elipsóide de revolucion, cuyo semieje mayor es  $a$  y  $\epsilon$  la excentricidad, y supongamos que la recta al rededor de la cual se efectúa la rotacion diurna, no coincide con el eje menor del elipsóide, sino que sea otro semidiámetro que forme con el eje de figura un pequeño ángulo  $\omega$ ; lo que equivale á suponer que el eje principal mínimo de inercia no coincide con el eje de figura. Llamaremos *meridiano geométrico*, cualquiera seccion producida en el esferóide por un plano que pase por el eje de figura; y *ecuador geométrico*, la seccion obtenida por el plano trazado por el centro de la tierra perpendicularmente al mismo eje.

En esta hipótesis sobre la posicion del eje de rotacion, el *meridiano astronómico* de un punto cualquiera de la superficie terrestre, es el plano trazado por la normal, paralelamente al eje de rotacion; y el *meridiano geográfico* es el lugar de los puntos en que los meridianos astronómicos son paralelos entre sí. El *paralelo geográfico* de un punto cualquiera, es el lugar de los puntos en que las normales forman un ángulo constante con el eje de rotacion; y en particular el *ecuador geográfico* es el lugar de los puntos en que las normales tienen una direccion perpendicular al mismo eje.

De estos principios dedúcense las siguientes proposiciones:

1. Solamente los puntos del ecuador geométrico, y los del meridiano geométrico, en que está situado el eje de rotacion, tienen el meridiano astronómico que pasa tambien por el eje de rotacion.

\* De una Memoria presentada á la Academia de Ciencias físicas y matemáticas, de la Real Sociedad de Nápoles, el día 7 de Mayo de 1874.

\*\* Traducido por D. Vicente Ventosa.

2. Los meridianos geográficos son curvas planas, y pasan todos por los dos extremos de un diámetro situado en un mismo plano con el eje de figura y el de rotacion. En la elipse trazada por este plano sobre la superficie terrestre, la recta donde se cortan todos los meridianos geográficos, es el diámetro conjugado con la direccion perpendicular al eje de rotacion; y los extremos de esta recta son los únicos puntos de la superficie terrestre, donde la rotacion diurna parece efectuarse alrededor de la vertical.

De aquí, llamando  $\omega'$  el ángulo que la interseccion comun de todos los planos de los meridianos geográficos forma con el eje de rotacion, será

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{\operatorname{tg} \omega}{1 - \varepsilon^2}$$

de donde resulta

$$\omega' - \omega = 11'30'',65 \operatorname{sen} 2 \omega + 1'',16 \operatorname{sen} 4 \omega + \dots \text{ etc.}$$

3. Tomando por primer meridiano el plano trazado por el eje de figura y el eje de rotacion, llámese  $v$  la longitud de un punto cualquiera, contada hácia el Oeste, denótese con  $I$  el ángulo que la interseccion de los dos meridianos, astronómico y geográfico de aquel punto, forma con el eje de rotacion, y con  $\sigma$  el ángulo diedro comprendido entre los mismos planos. Es claro que, conociendo  $I$  y  $\sigma$ , queda completamente determinada la posicion del meridiano geográfico. Pero estas dos cantidades pueden obtenerse de las dos ecuaciones

$$\operatorname{tg} I = \cot \omega \sec v, \quad \sigma = \frac{\operatorname{sen} v}{\operatorname{sen} E \cos \omega} (1 - \operatorname{sen}^2 \omega \operatorname{sen}^2 v) (\omega' - \omega),$$

donde

$$\cos E = \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} v$$

De aquí se deduce fácilmente la posicion de la traza horizontal del meridiano geográfico, pues llamando  $\tau$  el ángulo que aquella forma con la traza horizontal del meridiano astronómico, y  $\varphi$  la colatitud, se tiene

$$\operatorname{tg} \tau = \cos (I - \varphi) \operatorname{tg} \sigma$$

4. Los ejes mayores de todos los meridianos geográficos están situados en el ecuador geométrico, y son iguales al eje mayor del elipsóide. Los ejes menores, á su vez, coinciden con una superficie cónica, la cual tiene su vértice en el centro de la tierra, y pasa por el eje de figura y el eje de rotacion. La seccion hecha en este cono por el plano tangente en el extremo del eje de figura, es un círculo, que tiene su centro en el plano del primer meridiano. El meridiano geográfico de excentricidad máxima, es aquel cuyos puntos tienen la longitud astronómica igual á cero; y el meridiano geográfico, de mínima excentricidad, es aquel cuya longitud astronómica de un punto cualquiera, es  $90^\circ$ .

5. Generalmente hablando, los paralelos no son curvas planas, pero proyectados desde el centro de la tierra sobre el plano tangente en el extremo del

eje de rotacion, dan allí elipses semejantes y semejantemente situadas, que tienen por centro comun el punto en que á dicho plano encuentra el diámetro por donde pasan todos los meridianos geográficos.

El eje menor de cada una de estas elipses está situado en el plano del primer meridiano.

El único paralelo situado en un plano es aquel que tiene por colatitud  $90^\circ$ , esto es, el ecuador geográfico, y está determinado por el plano diametral conjugado con el eje de rotacion. Su eje menor hállase en el primer meridiano.

Puede hallarse el ángulo comprendido entre el meridiano geográfico y el paralelo, trazados por un mismo punto, mediante la ecuacion

$$\iota = 90^\circ - \omega. \varepsilon^2 (2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} v + \operatorname{sen} \omega \cos \varphi \operatorname{sen} 2v).$$

6. Un arco del meridiano astronómico de un punto, comprendido entre dos paralelos cualesquiera, y el arco del meridiano geográfico del mismo punto comprendido entre los mismos paralelos, son iguales entre sí, despreciando los términos de 6.º orden respecto á la excentricidad  $\varepsilon$  y al seno del ángulo  $\omega$ .

7. Conservando la significacion precedente de  $a$ ,  $\varepsilon$  y  $\omega$ , sean además,  $s$ ,  $-s$  la amplitud de un arco de meridiano geográfico.

$\varphi$ , y  $\varphi$  las colatitudes de sus extremos,

$l$  su longitud respecto de un meridiano tomado á voluntad, por ejemplo, el de Greenwich;

$v$  la longitud de Greenwich respecto del primer meridiano, esto es, aquel en que se halla el eje de figura:

se tendrá entre todas estas cantidades la siguiente ecuacion, despreciando los términos de orden superior al 6.º, relativamente á  $\varepsilon$  y  $\operatorname{sen} \omega$ ,

$$(A+B)\operatorname{sen}^2(v+l) - 2B \cos 2\omega + 2C \cos(\varphi+l)\operatorname{sen} 2\omega = (A+B)\operatorname{sen}^2(v+l) - 2(A-D)$$

donde  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , se deducen de las siguientes fórmulas:

$$A = f(\varphi_1 - \varphi) + g \Phi_1 + i \Phi_2$$

$$B = m \Phi_1 + n \Phi_2$$

$$C = m \Psi_1 + i \Psi_2$$

$$D = p(\varphi_1 - \varphi) + q \Phi_1 + r \Phi_2 + t \Phi_3 - \frac{s_1 - s_2}{a}$$

$$f = \frac{1}{4} \varepsilon^2 \left( 1 + \frac{11}{8} \varepsilon^2 \right)$$

$$g = -\frac{7}{16} \varepsilon^4$$

$$i = \frac{15}{64} \varepsilon^4$$

$$m = \frac{3}{4} \varepsilon^2 \left( 1 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 + \frac{173}{184} \varepsilon^4 \right)$$

$$n = \frac{15}{32} \varepsilon^4$$

$$p = 1 + \frac{19}{64} \varepsilon^4 - \frac{5}{256} \varepsilon^6$$

$$q = -\frac{7}{16} \varepsilon^4 \left\{ 1 + \frac{4}{7} \varepsilon^2 \right\}$$

$$r = -\frac{15}{128} \varepsilon^4 \left\{ 1 - \frac{3}{4} \varepsilon^2 \right\}$$

$$t = \frac{35}{4536} \varepsilon^6$$

$$\Phi_1 = \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi) \cos(\varphi_1 + \varphi)$$

$$\Psi_1 = \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi) \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi)$$

$$\Phi_2 = \operatorname{sen} 2(\varphi_1 - \varphi) \cos 2(\varphi_1 + \varphi)$$

$$\Psi_2 = \operatorname{sen} 2(\varphi_1 - \varphi) \operatorname{sen} 2(\varphi_1 + \varphi)$$

$$\Phi_3 = \operatorname{sen} 3(\varphi_1 - \varphi) \cos 3(\varphi_1 + \varphi)$$

Admitiendo que en la precedente relacion puede introducirse por  $s_1 - s_2$  los valores obtenidos con mediciones geodésicas de varios arcos de meridia-

no, será posible formar diversas ecuaciones que contengan las dos incógnitas  $v$  y  $\omega$ , y de aquí se deducirán los valores de estas incógnitas. Así, por ejemplo, conservando para  $\alpha$  y  $\epsilon$  los valores encontrados por BESSEL (1), y haciendo uso de los siguientes datos numéricos (2) encontrados con las mayores operaciones geodésicas hasta ahora llevadas á cabo, se obtienen las nueve ecuaciones de condicion siguientes, para hallar las incógnitas  $v$  y  $\omega$ .

I.—Arco Anglo-francés.—Saxavord-Formentera.

$$\varphi=29^{\circ} 40'22'',79 \quad \varphi_1=51^{\circ}20'6'',83 \quad l=-0^{\circ} 30' \quad s_1-s=1264645 \text{ T},92$$

II.—Arco Ruso.—Fuglenæs-Staro Nekrassowka

$$\varphi=49^{\circ} 49'48'',77 \quad \varphi_1=44^{\circ}39'57'',06 \quad l=-26^{\circ} 40' \quad s_1-s=4447786 \text{ T},783$$

III.—Arco Indiano (2.º)—Kaliana-Punnæ.

$$\varphi=60^{\circ} 29'41'',678 \quad \varphi_1=84^{\circ} 50'28'',868 \quad l=-77^{\circ} 40' \quad s_1-s=1212885 \text{ T}, 39$$

IV.—Arco del cabo de Buena-Esperanza.—N. End-Cape Point.

$$\varphi=149^{\circ} 44'17'',66 \quad \varphi_1=124^{\circ} 24'6'',26 \quad l=-18^{\circ} 30' \quad s_1-s=262470 \text{ T},39$$

V.—Arco Peruano.—Cotchesqui-Tarquí.

$$\varphi=89^{\circ} 57'28'',613 \quad \varphi_1=93^{\circ} 4'32'',068 \quad l=+79^{\circ} 0' \quad s_1-s=176875 \text{ T},5$$

VI.—Arco Hanoveriano.—Altona-Gottinga.

$$\varphi=36^{\circ} 27'14'',73 \quad \varphi_1=38^{\circ} 28'12'',15 \quad l=-9^{\circ} 57' \quad s_1-s=145163 \text{ T},725$$

VII.—Arco Danés.—Lysabbel-Lauemburgo.

$$\varphi=35^{\circ} 5'49'',648 \quad \varphi_1=36^{\circ} 37'42'',954 \quad l=-10^{\circ} 30' \quad s_1-s=87436 \text{ T},538$$

VIII.—Arco Prusiano.—Memel-Trunz.

$$\varphi=34^{\circ} 16'49'',554 \quad \varphi_1=35^{\circ} 46'48'',534 \quad l=-20^{\circ} 30' \quad s_1-s=86176 \text{ T},975$$

IX.—Arco Indiano (1.º)—Paudree-Trivandeporum.

$$\varphi=76^{\circ} 40'40'',982 \quad \varphi_1=78^{\circ} 45'7'',410 \quad l=-79^{\circ} 0' \quad s_1-s=89845 \text{ T},45$$

$$\text{I. } 0=(+0,94135 \text{ sen}^2 (v-0^{\circ} 30')-0,59624) \cos 2 \omega +$$

$$+3,73600 \cos (v-0^{\circ} 30') \text{ sen } 2 \omega -0,94135 \text{ sen}^2 (v-0^{\circ} 30')+0,65686$$

$$\text{II. } 0=(+1,66678 \text{ sen}^2 (v-26^{\circ} 40')-1,86160) \cos 2 \omega +$$

$$+3,86966 \cos (v-26^{\circ} 40') \text{ sen } 2 \omega -1,66678 \text{ sen}^2 (v-26^{\circ} 40')+2,01662$$

$$\text{III. } 0=(-0,80663 \text{ sen}^2 (v-77^{\circ} 40')+2,88330) \cos 2 \omega +$$

$$+2,21806 \cos (v-77^{\circ} 40') \text{ sen } 2 \omega +0,80663 \text{ sen}^2 (v-77^{\circ} 40')-2,84652$$

$$\text{IV. } 0=(-0,04306 \text{ sen}^2 (v-48^{\circ} 30')+0,35660) \cos 2 \omega -$$

$$-0,72290 \cos (v-48^{\circ} 30') \text{ sen } 2 \omega +0,04306 \text{ sen}^2 (v-18^{\circ} 30')-0,34512$$

$$\text{V. } 0=(-0,47624 \text{ sen}^2 (v+79^{\circ} 0')+0,54042) \cos 2 \omega -$$

$$-0,02862 \cos (v+79^{\circ} 0') \text{ sen } 2 \omega +0,47624 \text{ sen}^2 (v+79^{\circ} 0')-0,52840$$

(1) *Astronomische Nachrichten*, núm. 458.

(2) *Ordnance Trigonometrical Survey of Great Britain and Ireland.—Account of the Observations and Calculations of the principal triangulation.* London, 1858, pág. 759.

*Comparisons of the standards of Length, made at the Ordnance Survey Office, Southampton, by Cap. A. R. Clarke, under the direction of Col. Sir H. James.* London, 1866, págs. 282-285.

- VI.  $0 = (+0,10305 \operatorname{sen}^2 (v-9^\circ 57') - 0,11688) \cos 2 \omega +$   
 $+0,34138 \cos (v-9^\circ 57') \operatorname{sen} 2 \omega - 0,10305 \operatorname{sen}^2 (v-9^\circ 57') + 0,13756$
- VII.  $0 = (+0,08552 \operatorname{sen}^2 (v-10^\circ 30') - 0,08224) \cos 2 \omega +$   
 $+0,25546 \cos (v-10^\circ 30') \operatorname{sen} 2 \omega - 0,08552 \operatorname{sen}^2 (v-10^\circ 30') + 0,07350$
- VIII.  $0 = (+0,08794 \operatorname{sen}^2 (v-20^\circ 30') - 0,08836) \cos 2 \omega +$   
 $+0,24878 \cos (v-20^\circ 30') \operatorname{sen} 2 \omega - 0,08794 \operatorname{sen}^2 (v-20^\circ 30') + 0,32002$
- IX.  $0 = (-0,07731 \operatorname{sen}^2 (v-79^\circ 0') + 0,24934) \cos 2 \omega +$   
 $+0,11650 \cos (v-79^\circ 0') \operatorname{sen} 2 \omega + 0,07731 \operatorname{sen}^2 (v-79^\circ 0') - 0,24262$

Los valores de  $v$  y  $\omega$ , que hacen mínima la suma de los cuadrados de los segundos miembros de estas ecuaciones, son

$$v = 239^\circ 34' \qquad \omega = 1^\circ 8';$$

por tanto, según estos cálculos, uno de los extremos del eje de figura de la tierra, tendrá la longitud  $120^\circ 29'$  Oeste de Greenwich, y la latitud  $88^\circ 52'$  Norte.

Nápoles, 12 de Mayo de 1874.

## TEORÍA DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS.

### VARIACION ABSOLUTA DEL CAPITAL EN EL TIEMPO.

#### I. Ganancias disponibles; interés simple.

1. Representemos por  $X$  la función *capital* y por  $t$  la variable tiempo.

Antes de entrar en el estudio que nos proponemos, conviene advertir que dos capitales distintos, pero colocados en idénticas condiciones deben producir ganancias proporcionales á la *cuantía* de cada uno de ellos; por cuya razón,  $c$ , valor primitivo del capital, será un factor constante de  $X$ , y si dividimos  $X$  por  $c$ , y llamamos  $x$  al cociente que resulta, este expresará los distintos valores de la unidad de capital correspondientes á los diversos valores de  $t$ .

2. Sea (1)  $\frac{dx}{dt} = i$ , y supongamos que  $i$  es constante; integrando resultará:

$$x = i t + C$$

para determinar la constante observaremos que para  $t=0$   $x=1$ , por lo tanto  $C=1$ , y finalmente

$$(2) \quad x = 1 + i t,$$

ó bien

$$(a) \quad X = c(1 + it) = c + cit.$$

Esta fórmula es la que se consigna en todos los tratados elementales de Aritmética, y corresponde á los problemas llamados de interés simple.

Antes de pasar adelante séanos lícito observar la identidad de esta fórmula con la que representa en mecánica el movimiento uniforme; en cuya identificación,  $c$  representa la distancia inicial al origen y  $ci$  la velocidad.

3. Si discutimos la fórmula (a), veremos, que para  $t=1$ ,  $X=c+ci$ ; de manera que  $ci$  es el incremento del capital  $c$  en la unidad de tiempo, y por consiguiente el incremento de la unidad de capital en la unidad de tiempo. En la práctica no suele fijarse como dato el incremento de la unidad de capital, sino el de 100 unidades de capital que representaremos por  $r$ ; entonces  $i = \frac{r}{100}$ , y si sustituimos su valor en la fórmula (a), resultará:

$$X=c+\frac{crt}{100}.$$

4. Considerando la fórmula (a) bajo el punto de vista geométrico y tomando ejes rectangulares, sabemos que representa una recta cuya ordenada en el origen es  $c$ , y que forma con el eje de la  $t$  un ángulo cuya tangente trigonométrica es  $ci$ .

La ecuación (2) representa la paralela tirada por el origen de coordenadas.

5. ¿El ser los réditos exigibles se opone a que la ganancia elemental sea variable en función del tiempo? De ninguna manera. Podría suceder que por mútuo convenio entre el que utiliza el capital y su propietario se estimase que esta ganancia, ó sea la *utilidad* misma del capital, había de variar con arreglo á una ley determinada que se puede representar por cualquier fracción arbitraria de  $t$ —Por ejemplo, supongamos que se establezca como ley arbitraria de los valores de  $i$  la siguiente:

$$\frac{di}{dt} = \alpha;$$

integrando resultará:

$$i = \alpha t + \text{constante};$$

y suponiendo que el valor inicial y arbitrario de  $i$  sea  $i_1$ , tendremos:

$$i = i_1 + \alpha t;$$

Sustituyendo este valor de  $i$  en la fórmula (1) tendremos:

$$\frac{dx}{dt} = i_1 + \alpha t;$$

ó integrando

$$x = i_1 t + \frac{\alpha t^2}{2} + \text{constante};$$

esta se determinará como antes, y resultará finalmente:

$$(3) \quad x = 1 + i_1 t + \frac{\alpha t^2}{2}.$$

6. Esta fórmula es idéntica á la que representaría un movimiento uniformemente acelerado en el cual la distancia inicial al origen fuera 1 la velocidad inicial  $i_1$  y la aceleración  $\alpha = \text{constante}$ .

La representación geométrica de la ecuación (3) es como sabemos una parábola que corta al eje de la  $x$  en el punto cuya ordenada es 1, y cuyo eje es paralelo al eje de la  $x$ .

7. Consideremos la ecuacion

$$x=f(t)..... (1)$$

Diferenciando tendremos

$$\frac{dx}{dt}=f'(t)..... (2)$$

y  $f'(t)$  representará el rédito de la unidad de capital ó la velocidad, segun que la ecuacion (1) represente los valores de la unidad de capital en funcion del tiempo ó la ley del movimiento de un punto en su trayectoria.

Si diferenciamos la ecuacion (2), tendremos:

$$\frac{dx^2}{dt^2}=f''(t)..... (3)$$

Cuando supongamos que la ecuacion (1) expresa una ley de movimiento,  $f'(t)$  es la aceleracion, que puede considerarse como la velocidad en el movimiento definido por la ecuacion  $x=f'(t)$ ; y análogamente, cuando la ecuacion (1) represente la ley de variacion de la unidad de capital,  $f'(t)$  se podrá considerar como el rédito correspondiente á la ley definida por la ecuacion  $x=f'(t)$ .

Venios por consiguiente que en el caso de ser los intereses *disponibles*, todas las fórmulas de la cinemática, que representen distintos movimientos simples expresan el *capital*  $x$  en funcion del *tiempo*  $t$ ; representando la distancia al origen el valor primero del capital (que será siempre la unidad en virtud de la hipótesis del núm. 6), la velocidad el rédito de la unidad de *capital*, y la aceleracion el incremento positivo ó negativo y constante ó variable del rédito de la unidad.

8. Casi todas las operaciones financieras que se calculan por las fórmulas del *interés simple*, no presentan las condiciones teóricas que sirven de base al establecimiento de las ecuaciones, puesto que los intereses no son exigibles en cualquier época sino en determinadas fechas que constituyen los *vencimientos*. Las fórmulas para calcular la ganancia correspondiente á cada intervalo, comprendido entre dos vencimientos consecutivos, deben ser las del segundo caso que examinaremos despues.

Sin embargo, como unas y otras dan para  $x$  valores poco diferentes, cuando el de  $t$  es menor que un año, y como el intervalo entre dos vencimientos consecutivos es generalmente tres ó seis meses, pueden sustituirse las fórmulas exactas, por las correspondientes al caso de los *intereses exigibles*, que dan lugar á cálculos mucho más sencillos.

9. Para terminar este primer artículo haremos algunas observaciones importantes.

*Observacion 1.<sup>a</sup>* El valor de  $x$  correspondiente á cada valor de  $t$ , consta de dos partes, á saber: la unidad, ó sea el capital propiamente dicho, y la ganancia ó réditos, que es una riqueza *disponible* que pertenece al capitalista, y que por lo mismo no puede tener remuneracion, siendo en realidad un *depósito*, que queda en poder del que utiliza el capital hasta que el dueño se le exige.

*Observacion 2.<sup>a</sup>* El capital ha de quedar necesariamente *empleado* durante un cierto tiempo fijo de antemano, porque el *producto*, resultado de la accion simultánea del capital y del trabajo (del cual nace el rédito) no se obtiene de una manera

*continua* sino *periódica*. De aquí nace la diversidad de períodos que pueden considerarse como unidades de tiempo y como suficientes á la creacion industrial del *producto*, durante los cuales, lógicamente, no deben ser exigibles ni el capital ni los réditos por no haber terminado el acto de la produccion. Sin embargo, el rédito correspondiente al capital empleado es uno de los gastos de la produccion, y nada se opone á que en vez de satisfacerle de una vez, despues de obtenido el producto, se pague anticipadamente y de una manera regular, como se efectúa respecto á la remuneracion del trabajo representada por el *salario*.

Esto permitirá uniformar las unidades que debamos adoptar para medir los tiempos, y los valores de *i*.

*Observacion 3.*<sup>a</sup> La cantidad *i*, que mide la utilidad absoluta del capital, debe ser una cantidad constante para todos los capitales en una misma época, y variar muy poco para épocas distintas; sin embargo, en la práctica de los negocios se observa que existen para *i* valores muy distintos, lo cual exige una ligera explicacion. Generalmente se confunde el tipo de interés con la cuota de *Seguro* correspondiente á los riesgos á que se exponen los capitales, y de aquí las enormes diferencias en el tanto por ciento, cuyas diferencias no corresponden á los valores de *i*, sino á las cuotas del Seguro; de manera que tomando el tipo del interés en diferentes negocios y restando de él la cuota correspondiente á los riesgos que proporcionan (la cual puede evaluarse por medio del cálculo de probabilidades, con tanta más exactitud, cuanto mayor número de datos estadísticos ciertos puedan reunirse), veriamos que el resto, valor verdadero de *i*, aparecerá igual en todos ellos ó muy poco diferente, y aun estas diferencias desaparecerian si tomásemos en cuenta el *salario* correspondiente al trabajo que desarrolla el dueño del capital.

Vemos, por consecuencia, que un defecto de propiedad en el lenguaje motiva, como sucede generalmente, una discordancia entre la teoría y la práctica. (a)

## II. Capitalizacion de intereses.— Interés compuesto.

10. Supongamos ahora que los intereses se destinan á ser capitalizados y no quedan en poder del que utiliza el capital como riqueza disponible á favor del capitalista. El capital productor será entonces variable, y como las ganancias se suponen siempre proporcionales á la cuantía de los capitales, siendo idénticas las demás condiciones, tendremos

$$(1) \frac{dx}{dt} = xi;$$

Supongamos primero que *i*=constante; integrando tendremos:

$$lx = it + C;$$

para determinar la constante observaremos que si *t*=0; *x*=1, y por tanto, *C*=11=0; tendremos, por consiguiente,

$$lx = it;$$

ó bien

$$x = e^{it} \dots (2)$$

siendo *e* la base del sistema neperiano de logaritmos.

(a) Atendida la indole de esta publicacion, omitimos los estudios y las consideraciones de carácter práctico, habiéndonos limitado á exponer sucintamente las observaciones anteriores por la importancia que ofrecen.

11. Discutamos esta ecuación:

Para  $t=1$ ;  $x=e^i$  por consiguiente, la ganancia ó incremento de la unidad de capital en la unidad de tiempo es  $e^i - 1$ , en vez de ser como en el caso anterior  $i$ .

La curva representada por la ecuación (2), referida á coordenadas polares y conocida con el nombre de espiral logarítmica, tiene la propiedad característica de cortar á todos los rádios vectores bajo un ángulo constante, que en este caso estará dado por la fórmula

$$\text{tang. } V = \frac{1}{i}$$

La fórmula  $x=e^{it}$  muestra que la tabla de logaritmos neperianos dá los valores adquiridos por la unidad de capital, cuando los réditos se capitalizan de una manera *continua*. En efecto: suponiendo conocido el valor de  $i$ , que es un dato, y multiplicándole por  $t$ , obtendremos un producto que será el logaritmo neperiano de  $x$ , y por lo tanto el número correspondiente será el valor de la unidad de capital para los valores de  $i$  y  $t$  que se nos fijaron.

Observemos tambien que cuando la ecuación  $x=e^{it}$ , se refiere á coordenadas rectangulares el valor de la tangente trigonométrica del ángulo que la tangente geométrica á la curva forma con el eje de las  $t$ , será:

$$\text{tang. } \alpha = \frac{dx}{dt} = ie^{it}$$

que para  $t=0$ , dá:

$$\text{tg. } \alpha_0 = i;$$

de manera que la constante  $i$  representa la tangente trigonométrica del ángulo que forma con el eje de las  $t$ , la tangente en el primer punto de la curva.

Notemos todavía la semejanza entre las fórmulas de la Cinemática y las que deducimos del estudio que nos ocupa. En efecto: la ecuación  $x=e^{it}$  expresa la ley del movimiento en que la distancia inicial al origen es 1, la velocidad inicial  $i$  y la ley de las velocidades  $\frac{v}{x} = i$ .

12. Supongamos ahora, como en el caso anterior, que la ganancia ó rédito absoluto de la unidad de capital es variable, segun cualquier ley arbitraria.

Sea, por ejemplo:  $\frac{di}{dt} = a$  siendo  $a$  una cantidad constante; integrando resultará  $i = i_1 + at$ ; representando por  $i_1$  el valor de  $i$  correspondiente á  $t=0$ ; sustituyendo en la fórmula (1) resulta:

$$\frac{dx}{dt} = x_i i + a t x;$$

y separando variables

$$\frac{dx}{x} = i_1 dt + a. t. d. t.;$$

integrando entre los límites 0 y  $t$ , resultará finalmente:

$$\ln x = t i_1 + \frac{a t^2}{2}$$

ó bien

$$\left( ti + \frac{at^3}{2} \right)$$

$$x=e \dots\dots (3).$$

De la misma manera podríamos deducir todas las fórmulas correspondientes á otras leyes arbitrarias para los valores de *i*.

Si comparamos las ecuaciones correspondientes á las dos hipótesis de ser los réditos disponibles ó capitalizables, pero considerando en ambas el mismo valor inicial de *i* y la misma ley de variacion, observaremos que los valores de la *x* en la segunda son potencias de *e*, de un grado igual á la suma de los términos dependientes de *t* en el valor de *x* de la primera.

(Se continuará.)

V. DE G. PASTOR.

---

## CONCEPTO DEL NUMERO Y AXIOMAS DE LA ARITMOLOGIA.

(Conclusion.) (1)

En primer lugar, la comparacion que se establece entre dos magnitudes, compendia cualquiera otra que se descubra entre los individuos, cuya coleccion se busque, con tal que una de ellas sea la de la coleccion misma y la otra la de su unidad; porque al decir que son todos de la misma especie y hasta, si el caso lo requiere, de la misma magnitud, no se hace más que dar cumplida la condicion indispensable para que el número se realice: así como, al conocer cuántos individuos constituyen la multitud, se compendian en un solo juicio las varias comparaciones establecidas entre ellos, partiendo de cualquiera como unidad, aun cuando fuera del caso tener en cuenta la magnitud total y las parciales. Es dado, por consiguiente, cifrar la realizacion del número, en una comparacion tan sólo, cuando proviene de la repeticion de unidades: los términos son, la magnitud de la coleccion y la magnitud de la unidad, si es que hay motivo para que esta se mire como magnitud.

No se podía considerar la unidad como multitud, cuando otra idea no se tenia del número; á ménos de entrar en un círculo vicioso, huyendo de caer en una contradiccion evidente. Ahora, sin más que apoyarse en que toda cosa es idéntica á sí misma, se puede mirar la unidad como un número: el que resulta de comparar una magnitud con ella misma; pues no se sabria considerar tal resultado sino como igual á la unidad. Esto se encuentra confirmado por la opinion de LACROIX, cuando dice (1): «... contamos, sin embargo, al *uno* entre los números, y damos esta denominacion general, no sólo por analogía, y por ser la base y fundamento de todos los números, sino tambien porque ningun otro puede indicarnos la relacion que con la unidad tiene cualquiera otra cantidad igual á ella »

La cantidad no debe, por otra parte, considerarse en el número entero más que bajo el accidente de la magnitud; pues si se distingue en la expresion gramatical

---

(1) Vease la página 166.

(2) Curso completo elemental de Matemáticas puras, por S. F. Lacroix, tomo I.

el ordinal del cardinal, cuando se quiere denotar el orden en que existen los seres ó en que se suceden los hechos, es para satisfacer en el lenguaje la necesidad de expresar el último objeto de cada colección determinada que se tome parcialmente en una colección dada mayor ó igual, á partir siempre del primero; y no es de ninguna manera que se reconozca en tal caso doble modo de ser en la cantidad numérica, como lo lleva en sí la cantidad en general por su concepto supremo de variabilidad.

Es esencial en el número la posibilidad de aumentar ó de disminuir, y su naturaleza de magnitud se extiende á la unidad, desde el momento en que esta se mira como número, y ya no hay inconveniente en decir que: unidad es la magnitud que se adopta para que sirva de término de comparación respecto de todas las de su misma especie.

En segundo lugar, cuando la magnitud que se ha adoptado para unidad se descompone en varias magnitudes iguales entre sí, es evidente, en virtud de un axioma, que el conjunto de todas sus partes, comparado con el todo, dá por resultado un número; que no es sino la unidad misma. Y es una verdad, en virtud de consideraciones anteriores, que el conjunto de magnitudes iguales á las que componen la unidad da por resultado de la comparación, un número que puede provenir de la repetición de unidades; siempre que con las magnitudes puedan formarse grupos completos tales, que cada uno componga una unidad. En cualquiera otro caso no resultará un número entero de comparar con la unidad adoptada el conjunto de partes iguales; pero se tendrá un verdadero número: cuando se tiende á corroborar la extensión de la idea de magnitud numérica, no basta presentar por demostración que tal conjunto de partes es una magnitud, porque sea susceptible de aumento ó de disminución, y que la unidad lo es por definición; es menester examinar en sí misma la relación de las dos magnitudes.

Puesto que la unidad no cabe en la magnitud que se compara ó no está contenida exactamente en ella, según sea esta menor ó mayor que aquella; hay que desproveer, al efecto, á la unidad de su carácter peculiar, para no ver en ella más que una magnitud de la misma especie que la magnitud dada y una magnitud que se había descompuesto en otras iguales entre sí: y teniendo en cuenta que con partes iguales á una de estas, aunque en menor ó mayor número, se ha compuesto el conjunto que se considera; no hay más que adoptar una de esas magnitudes parciales para término común de comparación del conjunto y de la unidad, y los resultados serán: dos números enteros, uno que dará á conocer cuántas partes de la primitiva unidad se habían juntado, otro que expresará en cuántas partes se había descompuesto la misma unidad.

La cuestión queda reducida á mirar el número que proviene de la repetición de partes de la unidad, como el resultado de la comparación de dos números enteros, ó lo que es lo mismo, como el resultado de la comparación de dos magnitudes de la misma especie; pero este es cabalmente el nuevo concepto de la idea de número; luego en la definición establecida se comprende el número fraccionario.

Además, puesto que nada impide, cuando se conocen dos números enteros, tener á uno de ellos por el de las partes iguales de una unidad anterior que se hayan juntado, y al otro por el número de partes en que la misma se hubiera descompuesto; bueno será hacer notar que el resultado de la comparación de dos números enteros es un número fraccionario, con tal que reconozcan una unidad común.

En tercer lugar, al comparar una magnitud con la unidad de su especie, no solo ocurre que sea menor que ella ó que siendo mayor no la contenga exactamente; sino tambien que, dividiendo y subdividiendo sucesivamente la unidad en partes iguales con arreglo á una ley determinada, no llegue á encontrarse jamás una parte conveniente para que quepa con exactitud en la magnitud dada. Pero sucede á veces más: que, cualquiera que sea la ley de sucesion que se adopte y por pequeñas que se imaginen á arbitrio las partes iguales de la unidad, no existe ninguna parte que satisfaga á tal condicion. Sin embargo, teniendo en cuenta que siempre se puede reemplazar la magnitud dada por otra que se considere como una coleccion de unidades ó de partes de la unidad, y que difiera de aquella *tan poco como convenga*; se juzga adecuado al caso: reconocer que existe *realmente* un número que corresponde en abstracto á la magnitud de que se trata, y designarle con el nombre de incomensurable.

Ahora bien: aunque, en abstracto, despreciar la diferencia entre la magnitud dada y la magnitud que la reemplaza sería contradecir la hipótesis; en concreto, cuando se practica la medida, se encuentra siempre tarde ó temprano una parte de la unidad tal, que sea inapreciable esa diferencia para los más delicados instrumentos: pero como no cabe en rigor matemático conceder al número incomensurable un origen de colectividad; aquí se pone de manifiesto y en relieve la superioridad del concepto de *comparacion* ó de *relacion* sobre el de *multitud*, superioridad que consiste en permitir que la definicion abrace todos los casos de realidad numérica, y que nace de la mayor extension de la idea.

Resumiendo, una comparacion es la que se establece entre la magnitud dada y la magnitud adoptada para unidad de su especie, ora se pueda equiparar aquella á una coleccion, ora no permita su naturaleza que ninguna parte alicuota de la unidad sea repetida en ella sin diferencia. Un número es el resultado de la comparacion, ya sea que exista, ya que no exista una tercera magnitud que esté contenida exactamente en las dos comparadas, ó, segun se dice, una *medida comun* de las dos magnitudes: de aquí la division del número en comensurable é incomensurable: el uno es siempre conocido y asignable; el otro es inasignable y no puede ser conocido sino aproximadamente, reemplazando la magnitud dada por otra tan poco diferente como se quiera y que tenga una medida comun con la unidad; pero es una cantidad real y recibe el concepto matemático de *límite*, atendiendo á que á él se aproximan sin cesar y tanto como se quiera otros números comensurables.

Corroborada la extension de la idea de número, cuando se define bajo un concepto que llena directamente el objeto positivo de las matemáticas, bajo el concepto de comparacion que realiza siempre en abstracto y hasta lo infinito la medida directa de la magnitud: toca, en fin, presentar los principios fundamentales que determinan la naturaleza de la magnitud definida, ó los axiomas de la aritmología.

Todo número supone una cierta unidad: la magnitud del número no depende de las magnitudes que se comparan, sino de la relacion entre ellas: cuando la magnitud que se compara aumenta ó disminuye, ó cuando aquella con la cual se compara disminuye ó aumenta, el número aumenta ó disminuye: para comparar dos magnitudes de la misma especie, basta comparar cada una de ellas con la unidad, y despues los resultados entre sí: dos magnitudes son iguales, cuando el resultado de su comparacion es la unidad: una magnitud es mayor ó menor que otra

segun que el resultado de su comparacion sea mayor ó menor que la unidad: si á numeros iguales ó desiguales se les hace aumentar ó disminuir de la misma manera, se convertirán en otros iguales ó desiguales: tales son las verdades axiomáticas de la ciencia del número, cuando este objeto del conocer se toma en su más general concepto. Algunas de ellas son las mismas presentadas anteriormente; y todas son universales en la aritmología, en el sentido de que no admiten excepcion ninguna y son aplicables sin condicion especial de haber ó no de repetirse la unidad.

Además, se puede observar que no determinan la clase de las magnitudes comparadas, y que, por consiguiente, lo mismo serán ciertas cuando se comparen dos extensiones ó dos duraciones: la comparacion de dos números presupone la existencia de dos comparaciones anteriores; ya sea de cada cual con la unidad, si se presentan á arbitrio, ya de dos pares de magnitudes; por donde tambien se puede venir á parar á la comparacion de dos magnitudes de extension ó de duracion como punto de partida.

Se vé que la relacion abstracta, que es la esencia del número, somete á su resultado toda clase de magnitud, con tal que se la compare con su unidad, es decir, con otra de la misma especie elegida para término de comparacion de todas las demás. Así, pues, el número es el objeto más sencillo y más abstracto de las matemáticas, y en él se funden todas las demás magnitudes por la accion comparadora de la medida; y de ahí que los principios axiomáticos que determinan su naturaleza sean generales para toda ciencia matemática. En prueba de que son aplicables fuera de su propia esfera, no hay más que recorrer atentamente los que LEGENDRE presenta en su *Geometría* y los que se encuentran en los *Elementos de EUCLIDES*; pues se observará que no son de indole exclusivamente geométrica; ante bien hay entre ellos algunos que especifican la magnitud, otros que versan sobre la magnitud en general, y hasta aparecen otros axiomas como el de «el todo es mayor que la parte,» que son universales ó anteriores á cualquiera ciencia individual.

Sin embargo de la indudable importancia que á un axioma da su evidencia característica; matemáticos de gran saber han hablado en contra, pretendiendo THOMPSON entre ellos que «*nada hay evidente por sí mismo*, excepto quizá una proposicion idéntica:» de manera que el auto: de la *Geometría sin axiomas* no concede evidencia más que á las definiciones ó proposiciones que, segun los lógicos, tienen el carácter de identidad cuando obedecen á las reglas del método. Pero THOMPSON cree interpretar felizmente el principio de LAVOISSIER, sustituyendo á las definiciones la *nomenclatura*; ¿á qué aplica entonces la excepcion que hace al formular su opinion? Nada deja de evidencia en la ciencia de la cantidad; sujeta al testimonio de los sentidos á una ciencia que (1), «siendo razonada, debe descansar sobre verdades primarias, sobre principios.»

PELEGRIN CASSINELLO,

Catedrático de matemáticas del Instituto de Tapia.

---

(1) Coyteux—*Des vrais principes des Mathématiques*.

## DE LA NATURALEZA DE LA ELECTRICIDAD

POR EL SR. D. E. EDLUND.

(Continuacion.) (1)

Sean dos moléculas de éter  $m$  y  $m'$  puestas una de otra á la distancia  $r$ . Si ambas están en reposo, su repulsion reciproca es  $\frac{mm'}{r^2}$ . Cuando, por el contrario,  $m$  se

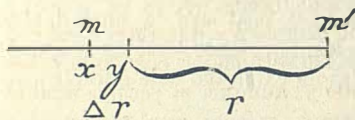


Figura 1.ª

acerca ó aleja con una velocidad constante, ocurren otras relaciones. Si  $m$  se encuentra primero en el punto  $x$  (fig. 1.ª) á la distancia  $r + \Delta r$  de  $m'$ , y luego durante el tiempo  $\Delta t$  se aproxima á  $m'$  la cantidad  $\Delta r$ , la repulsion

reciproca aumenta de  $\frac{mm'}{(r + \Delta r)^2}$  á  $\frac{mm'}{r^2}$ ; pero si se efectúa la aproximacion con una velocidad suficiente, fáltale tiempo á la repulsion de sufrir tal aumento. La repulsion en el punto  $y$  es por lo tanto inferior á la que corresponde á la distancia  $r$ . Esta disminucion es, á igualdad de las demás circunstancias, una funcion de la velocidad constante  $h$ . Se puede, pues, expresar la repulsion en el punto  $y$  por  $\frac{mm'}{r^2} f(h)$ , teniendo  $f(h)$  un valor inferior á 1. Si por el contrario  $m$  se aleja de  $m'$

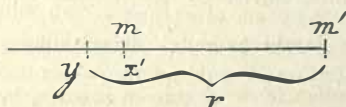


Figura 2.ª

con la misma velocidad constante  $h$ , recorriendo en el tiempo  $\Delta t$  la distancia  $y - x' = \Delta r$  (fig. 2.ª), la repulsion en el momento en que  $m$  llega á  $y$ , debe ser superior á la que corresponde á la distancia  $r$ , puesto

que la repulsion no puede disminuir con la velocidad correspondiente al aumento de la distancia. Se puede, por tanto, expresar en este caso la repulsion

por  $\frac{mm'}{r^2} F(h)$ , siendo  $F(h)$  mayor que 1. Si en el primer caso, cuando ha disminuido la distancia entre las moléculas, se considera la velocidad como negativa, debe en el segundo ser positiva. Por lo que toca á la naturaleza de las funciones  $f(h)$  y  $F(h)$ , nada se sabe de antemano, sino que la primera debe ser menor, y la segunda mayor que 1, y que ambas se acercan á 1 cuando  $h$  disminuye. Pero como las causas que retardan ó aceleran el desarrollo de la repulsion en el caso de aproximacion, deben poseer el mismo efecto en su desaparicion en el caso de alejamiento, es probable que las formas de las dos funciones sean iguales, ó que el desarrollo de la repulsion siga la misma ley que su desaparicion, y que ambas puedan expresarse por la misma funcion de la velocidad, cuidando de que esta última sea negativa en un caso y positiva en el otro. Tenemos así, para la repulsion entre

dos moléculas de éter, la expresion  $\frac{mm'}{r^2} F(-h)$ , si estas moléculas se aproximan

(1) Véase la página 173

una á otra con una velocidad constante  $h$ , y la expresion  $\frac{mm'}{r^2} F(+h)$ , si la distancia aumenta entre ellas, siendo la funcion  $F$  de tal naturaleza que se vuelve igual á la unidad para  $h=0$ , es menor que la unidad para un valor negativo, y mayor para un valor positivo de  $h$ . Estas expresiones pueden escribirse convenientemente bajo la forma  $\frac{mm'}{r^2} (1+\varphi(-h))$  y  $\frac{mm'}{r^2} (1+\varphi(+h))$ , siendo tal la funcion  $\varphi(h)$  que se vuelve  $= 0$  cuando  $h = 0$ , tiene un valor negativo cuando  $h$  es negativa, y positivo cuando  $h$  es positiva.

Lo que acabamos de decir aplícase exclusivamente al caso de ser constante la velocidad de aproximacion ó alejamiento. Ahora supondremos que  $m$  se acerca á  $m'$ , y que en el mismo tiempo  $\Delta t$  recorre el mismo camino  $\Delta r$  que antes, pero con una velocidad *decreciente*, de manera que esta velocidad será mayor cuando  $m$  se halle más cerca de  $x$  (fig. 4.<sup>a</sup>) que cuando haya llegado  $y$ . Aunque  $m$  recorra aquí el mismo camino durante el mismo intervalo de tiempo, y tenga por consiguiente  $\frac{\Delta r}{\Delta t}$  el mismo valor que en el primer caso, la repulsion en el punto  $y$ , no puede, sin embargo, ser la misma.

La molécula  $m$  se habrá movido más rápidamente, hallándose inmediata á  $x$  que al estar más cerca de  $y$ : habrá permanecido, pues, más tiempo en los puntos en que la fuerza de repulsion es más fuerte que en aquellos en que es más débil. De donde debe resultar que la repulsion en el punto  $y$  sea más fuerte que si la velocidad hubiera sido constante. Depende, por lo tanto, la repulsion, no solo de  $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ , sino tambien de  $\frac{\Delta^2 r}{\Delta t^2}$ . Si ahora pasamos al límite, hállese de esta manera que la repulsion depende, no solo de la velocidad, sino tambien de la variacion de la velocidad, es decir, de  $\frac{dh}{dt}$ , *aumentando* tal dependencia *en el caso en cuestion* la magnitud de la fuerza repulsiva.

Si la molécula  $m$  se aleja de  $m'$  en tanto que su velocidad *aumenta*, pero de tal manera, que el camino fijado  $\Delta r$  se recorra en el tiempo fijado  $\Delta t$ , la repulsion en este caso como en el precedente, será mayor que si la velocidad fuera constante. Aquí tambien la molécula permanecerá mayor intervalo de tiempo en los puntos en que la fuerza de repulsion es mayor que en aquellos en que es más pequeña. Es, pues, necesario, añadir á la expresion que representa la magnitud de la repulsion bajo una velocidad constante, un término dependiente de la variacion de la velocidad.

La molécula eléctrica muévase en su trayecto con una velocidad constante: como arriba queda dicho, variaciones en la intensidad de la corriente no ejercen influjo alguno bajo este concepto. Si pues una molécula se apróxima ó aleja respecto á otra situada en la línea recta en que el movimiento de la primera ocurre, no cabe ocuparse de una variacion en la velocidad relativa. Las circunstancias cambian, por el contrario, si una de las moléculas se halla al lado de la direccion de la otra. Supongamos dos moléculas,  $m$  y  $m'$ , de las cuales la primera esté en movimiento sobre la línea  $ab$ , y la otra  $m'$  en reposo. La distancia  $r$  entre las moléculas es entonces igual á  $\sqrt{x^2+p^2}$  (véase la fig. 3), y su velocidad relativa, (es

decir la velocidad sobre la línea de union)  $\frac{dr}{dt} = \frac{x}{r} \frac{dx}{dt}$ . Disminuye, pues, la velocidad

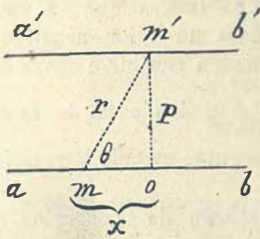


Figura 3.<sup>a</sup>

relativa á medida que  $m$  se aproxima al punto  $o$  en donde es igual á cero. Cuando, por el contrario, la distancia entre las moléculas aumenta, su velocidad relativa aumenta al propio tiempo. Las variaciones de la velocidad relativa se obtienen diferenciando la última expresion, lo cual dá  $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dx^2}{r dt^2} - \frac{x^2}{r^3} \frac{dx^2}{dt^2}$ , de donde, introduciendo el coseno

del ángulo en lugar de  $\frac{x}{r}$ , y  $h$  en lugar de  $\frac{dx}{dt}$ , se

obtiene  $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{h^2}{r} (1 - \cos^2\theta)$ . La variacion de la velocidad relativa es, pues, propor-

cional al cuadrado de la velocidad de la molécula en el circuito; presenta su máximum en el punto  $o$  (fig. 3) y disminuye á medida que la molécula se aleja. Por sustituciones correspondientes hállase como expresion de la velocidad relativa:

$$\frac{dr}{dt} = \cos \theta h.$$

Si la molécula  $m$  se mueve con una velocidad constante sobre la línea  $ab$  (fig. 3), en cuyo caso su velocidad relativa varía con relacion á la molécula fija  $m'$ , la repulsion entre las dos moléculas á una distancia determinada  $r$  es, segun lo que precede, mayor que si la velocidad relativa fuera constante. Tal ocurre, ya se aleje  $m$  del punto  $o$  ó ya se le acerque. A la expresion que indique la repulsion entre las dos moléculas en el caso de ser constante su velocidad relativa, debe por lo tanto añadirse un término que constituya una funcion de la variacion de la

velocidad. Designaremos esta funcion por  $\Psi\left(\frac{h^2}{r}(1 - \cos^2\theta)\right)$ . Lo que de antemano sabemos, respecto á esta funcion  $\psi$ , es que debe ser igual á cero, cuando  $\cos \theta = 1$ , puesto que en tal caso la molécula  $m$  se mueve sobre la línea de union entre  $m$  y  $m'$ , y es en su consecuencia constante la velocidad relativa de las dos moléculas. Sabemos además que el valor de la funcion  $\psi$  es siempre positivo, ora se acerque la molécula  $m$  á  $m'$  ó se aleje de ella. Nótese por último, que el valor de la funcion puede depender, no solo de la magnitud de la variacion,  $\frac{h^2}{r}(1 - \cos^2\theta)$ , sino tambien de la distancia  $r$  entre las moléculas; y que por consi-

guiente  $r$  puede entrar bajo el signo de la funcion al propio tiempo que esta misma variable entra en la expresion de la magnitud de la variacion.

La expresion completa de la repulsion entre dos moléculas de eter  $m$  y  $m'$ , de las cuales la última está fija y la primera  $m$  se mueve con una velocidad constante  $h$  sobre una línea que forma un ángulo agudo  $\theta$  con su línea de union, será por lo tanto:

En el caso de acercarse  $m$  á  $m'$ :

$$-\frac{m m'}{r^2} \left( 1 + \varphi(-h \cos \theta) + \psi\left(\frac{h^2}{r}(1 - \cos^2\theta)\right) \right) \dots\dots (1);$$

y en el caso de alejarse  $m$  de  $m'$ :

$$-\frac{m m'}{r^2} \left( 1 + \varphi (+h \cos \psi \theta) + \left( \frac{h^2}{r} (1 - \cos^2 \theta) \right) \right) \dots (2);$$

Vamos desde luego á aplicar lo que acaba de decirse al caso de dos moléculas  $m$  y  $m'$  que se mueven con una velocidad constante é igual, en el mismo sentido sobre líneas paralelas (véase fig. 3).

Segun los principios sentados por W. WEBER (1), admitiremos que el efecto de la accion reciproca entre dos moléculas de éter se comunica en totalidad á los circuitos en que se mueven. Solo los movimientos de los circuitos pueden observarse en la accion reciproca de dos corrientes, y á estos movimientos se refieren las fórmulas empíricas establecidas sobre la base de las observaciones. Si ahora se quiere hallar la variacion producida en la distancia de dos elementos del circuito por la accion reciproca de las moléculas de éter, puede considerarse uno de los elementos como fijo y el otro sólo, como libre. Suponemos en tal caso que el elemento del circuito en que  $m'$  se mueve, está libre, y que el que corresponde á  $m'$  está inmóvil. Si en toda la masa de éter no hubiera en movimiento más molécula que la  $m'$ , no se podría, como si estuviera en reposo, admitir que las repulsiones ejercidas sobre ella por toda la masa de éter ambiente se anulan recíprocamente: pueden por el contrario estas repulsiones tener una resultante  $S$  que no sea cero. La repulsion ejercida sobre la molécula  $m$  en movimiento, por toda la masa de éter ambiente á excepcion de  $m$ , debe por tanto obtenerse restando de  $S$  la repulsion que tiene lugar entre  $m$  y  $m'$  ó lo que viene á ser lo mismo, añadiendo á  $S$  la última repulsion tomada con signo contrario. Trátase ahora de hallar el movimiento impreso á la molécula  $m'$  ó mas bien al elemento del circuito en que se mueve  $m'$ , por causa de ponerse en movimiento la molécula  $m$ .

Como cuando se trataba de los fenómenos electrostáticos, hemos de tomar en cuenta las circunstancias siguientes: 1.º la accion reciproca directa de las dos moléculas de éter; 2.º la diferencia entre la accion ejercida sobre  $m'$  por la masa total del éter ambiente, cuando se supone  $m$  en reposo, y la accion ejercida sobre la misma molécula  $m'$  por todo el éter ambiente, á excepcion de  $m$ ; 3.º la accion de  $m$  sobre el espacio ocupado por  $m'$ ; y 4.º la accion sobre el mismo espacio de toda la cantidad de éter ambiente á excepcion de  $m$ . La diferencia enunciada en el número 2 es evidentemente igual á la repulsion, tomada con signo contrario, entre la molécula  $m$  supuesta inmóvil y la molécula  $m'$ : y la accion indicada en el número 4 es idéntica á la repulsion, tomada con signo contrario, entre la molécula  $m$  supuesta inmóvil y el espacio en cuestion. Si se suman las acciones sobre  $m'$  señaladas en los dos primeros casos, y de ello se resta la suma correspondiente de las dos últimas, obtiéndose, conforme con el principio de Arquimedes, la accion buscada sobre  $m'$  ó sobre el elemento del circuito en que  $m'$  se mueve.

Para mejor penetrarse de la exactitud del procedimiento anterior, propóngase la cuestion de la siguiente manera: quiérese hallar el movimiento ocasionado á la molécula  $m'$ , ó más bien al elemento del circuito en que  $m'$  se halla, por causa de ponerse en movimiento la molécula  $m$ . Ahora bien; el movimiento buscado en el elemento de circuito  $m'$ , depende claramente de la modificacion ocurrida en la repulsion entre  $m$  y  $m'$ , con motivo de haberse puesto esta última en movimiento.

(1) *Abhandlungen über Elektrodynamisches, Maasbestimmungen*, p. 309.

Obtiénese, pues, la expresion del movimiento buscado, restando de la repulsion entre las moléculas  $m'$  y  $m$ , cuando esta última se supone en movimiento, la repulsion entre las mismas moléculas cuando se considera como en reposo la molécula  $m$ . El resto hallado de esta manera, no es otra cosa en realidad que la suma de los dos primeros casos enunciados antes. De una manera análoga se obtienen los efectos de repulsion á los cuales se refieren los dos últimos casos. Fácil es ahora hallar la expresion algebraica de la accion recíproca de dos elementos de corriente. Si suponemos que las dos moléculas  $m$  y  $m'$  se mueven sobre líneas paralelas en el mismo sentido, como por ejemplo, hácia  $b$  y  $b'$ , su distancia recíproca no sufrirá ninguna modificacion, puesto que se mueven con la misma velocidad. De esta manera su accion recíproca directa será la misma que si ambas estuvieran en reposo. Por tanto, la accion á que se refiere el caso núm. 1 vale

$$-\frac{m m'}{r^2}$$

Como  $m'$  se aleja de  $m$ , si esta última se supone en reposo, se tiene para el caso núm. 2:

$$+\frac{m m'}{r^2} \left( 1 + \varphi (+ h \cos \theta) + \psi \left( \frac{h^2}{r} (1 - \cos^2 \theta) \right) \right)$$

Obtiénese para el núm. 3, en que  $m$  se acerca al espacio ocupado por  $m'$ :

$$-\frac{m m'}{r^2} \left( 1 + \varphi (- h \cos \theta) + \psi \left( \frac{h^2}{r} (1 - \cos^2 \theta) \right) \right)$$

Por último, para el núm. 4 se tiene:

$$+\frac{m m'}{r^2}$$

Si ahora se resta la suma de las dos últimas expresiones de la suma de las dos primeras, hállase como resultado definitivo:

$$+\frac{m m'}{r^2} \left( \varphi (+ h \cos \theta) + \varphi (- h \cos \theta) + 2\psi \left( \frac{h^2}{r} (1 - \cos^2 \theta) \right) \right) \quad (3)$$

Este resultado es la expresion teórica del influjo recíproco de dos elementos de corriente que se mueven en un mismo sentido sobre líneas paralelas.

Haciendo en la fórmula (3)  $\cos \theta$  igual á cero, es decir, suponiendo que la línea de union entre los dos elementos de corriente, forma ángulo recto con las líneas de direccion de las corrientes, funcion  $\varphi$  será, como ya se ha visto, igual á cero. Se tendrá, pues, para este caso:

$$+\frac{m m'}{r^2} \cdot 2 \psi \left( \frac{h^2}{r} \right) \dots (4)$$

Pero, segun lo que precede, el valor de la funcion  $\psi$  es siempre positivo. De donde se sigue, que en tal posicion, los elementos de la corriente se atraen mutuamente, hecho ya acreditado por la experiencia.

Vamos ahora á comparar con la experiencia el resultado teórico, con el fin de determinar las funciones  $\varphi$  y  $\psi$ .

(Se continuará.)

## AZUL DEL CIELO.

Porque ese cielo azul que todos vemos  
Ni es cielo ni es azul.....  
Argensola.

¿Quién permanecerá insensible al contemplar las bellezas del universo; ni qué puede fingir la imaginación más sublime y majestuoso que el límpido azul del firmamento, bien se nos presente iluminado por un sol vivificador, ó ya aparezca la inmensa bóveda tachonada de puntos centellantes? Es tan fácil en España la observación de un cielo *puro*, que lo extraño es verle encapotado y brumoso; y en fuerza de la costumbre ni siquiera paramos mientes en nuestro hermoso cielo: conservando sólo un vago recuerdo del indefinible placer que se experimenta después de algunos días lluviosos cuando aspiramos el ambiente, inundados de tibia luz que entónces abrillanta el azul intenso de la atmósfera descargada de vapores.

Sea porque la pérdida pasajera del bien que gozamos nos advierta de su excelencia; sea por la misma actividad, y aun pudiéramos decir movilidad de nuestro espíritu, es lo cierto que todos los hombres han tenido alguna vez necesidad de recogerse en sí mismos conmovidos por un sentimiento indescriptible de religiosa admiración al extender su mirada por el espacio, vastísimo é insondable abismo donde se agitan ó giran describiendo sus órbitas, *vibrando*, por decirlo así, las enormes moles planetarias en gigantescos y rítmicos vaivenes.

Verdad es que no siempre el hombre alcanza el grado de instrucción necesario para ver tanto, ó mejor para dejar de ver lo más cercano, pues si la fantasía quiere remontar su vuelo más allá de los límites de la atmósfera, léjos de ver nada, *vemos* ya por el vértigo que lo infinito produce en nuestra pequeñez: cierto es sin duda que no estamos tampoco dispuestos siempre á la contemplación; pues múltiples afanes nos agobian, y las necesidades materiales con gran fuerza nos ligan á la tierra; pero, ¿á quién no impresiona dulcemente el silencio de una noche serena? Irresistiblemente el aspecto del cielo nos atrae aun en los momentos de mayor agitación del espíritu, si la soledad ó alguna otra circunstancia propia favorece; que por algo lleva el hombre la cabeza erguida y tiene aspiraciones divinas: por eso han cantado los poetas de todos los tiempos la postura del sol «bañándose entre las ondas,» y los pintorescos matices que se presentan hácia el horizonte, y divinizaron á la rosada *Aurora*; admirándose innumerables lienzos donde se representa el cielo borrascoso ó sereno y con tintes tan vários como los estados del ánimo del artista.

Natural es, pues, la pregunta. ¿Qué es ese admirable cielo que nos encanta, y de donde procede su hermoso azul? Mas si es fácil que á todos asalte la pregunta, no lo será igualmente encontrar una respuesta cumplida y satisfactoria. Por nuestra parte nos contentaremos con apuntar los principales resultados de la Física relativos al asunto y con llamar la atención de nuestros lectores hácia los experimentos é hipótesis del eminente profesor Tyndall, cuyos interesantes trabajos para resolver esta y otras cuestiones, son dignos del universal aplauso que gozan.

Desde luego la idea de una ó muchas esferas diáfanas donde imaginaban los antiguos astrónomos enclavados los astros, y las cuales giraran alrededor de la tierra, centro común de su movimiento, solo existe ya en la risueña mente infantil ó en los espíritus totalmente desprovistos de cultura. Toda persona medianamente

instruida sabe que la apariencia de bóveda azulada se debe á la atmósfera que circunda nuestro globo, y suprimida aquella, solo la consideracion de la silenciosa y tétrica oscuridad que nos rodearía llena de espanto el ánimo más despreocupado: lo cual se confirma por las contestes observaciones de los areonáutas y de infatigables viajeros que han trepado valerosamente las más empinadas cumbres: el cielo se va oscureciendo á medida que ascendemos, desde cierta altura. Tambien faltando la atmósfera, apareceria y se ocultaría súbitamente el sol sin el benéfico resplandor del crepúsculo, debido á la reflexion de su luz sobre las capas elevadas del aire despues de habérsenos ocultado el astro del día.

Ahora bien, ¿el color azul de la atmósfera corresponde propiamente al aire, al vapor acuoso ó es debido á alguna otra sustancia de naturaleza desconocida y que se halle como diluida en aquellos gases? Extraña parecerá á primera vista esta última opinion sostenida por Tyudall; mas para juzgar con probabilidad de acierto acerca de las hipótesis que tratan de explicar el color del cielo—«cuestion de a's más espinosas que se ha propuesto la Meteorología,»—preciso será recordar algunas nociones que á la coloracion de los cuerpos en general se refieren.

Interponiendo un cuerpo trasparente, de caras planas é inclinadas, por una de sus esquinas al paso de un rayo solar, se verá el pincel de la luz blanca despues de atravesar el prisma separarse en varios rayos coloreados y pintar sobre una pantalla la imágen, espectro solar, irisada con infinidad de magnificas tintas que por grados insensibles se desvanecen unas en otras, si bien las más perceptibles son el rojo, anaranjado, amarillo, verde, azul, añil y violeta. Este hecho observado de tiempo inmemorial, atrajo la atencion del inmortal Newton, y fué gran fortuna para el progreso de la Optica y en nuestros días para la Química estelar, fundada en las diferentes rayas producidas por los vapores incandescentes en el espectro. Dignos de alabanza son los titánicos esfuerzos de los sábios para contifuar, en la via trazada por el portento de los genios, descifrando los arcanos del iris espectral; pero es larga la tarea de su exposicion y nos importa principalmente ahora conocer la teoría newtoniana de los colores, que por su sencillez no deja de ser menos sorprendente y admirable. La luz dá el color á todos los cuerpos: no hay color blanco ni negro, pues el primero resulta de la reunion de todos los rayos simples, y el segundo, de la carencia de color. Entre estos dos casos extremos de absorcion completa y de reflexion de la luz, precisamente en la proporcion que constituye el blanco, se halla el de todos los cuerpos colorados, sin exceptuar los vistosos matices de las flores y los brillantes reflejos metálicos de las aves é insectos, si bien el fenómeno se complica en algunos casos: cada cuerpo se nos presentará segun esto adornado con el color correspondiente á la suma de todos los rayos que no se destruyen en la superficie. Si el cuerpo es trasparente, pueden suceder dos cosas: ó los rayos reflejados y los que atraviesan el cuerpo, guardan á la vez la relacion conveniente á un solo color que será el propio del cuerpo visto de cualquier modo, ejemplo un vidrio azul teñido por el cobalto, y los demás rayos absorbidos, se trasforman en calor; ó bien el cuerpo deja pasar casi todos los rayos que no refleja y entonces, visto por reflexion tendrá un color determinado y por refraccion, mirado al trasluz, presentará un color parecido al que los fisicos llaman complementario, esto es; que reunido con el primero, formen el blanco; v. gr., el rojo y el verde son complementarios; así mirando la luz á través de una hoja de pan de oro, verásela tomar un tinte verdoso: vista el agua por refraccion en un largo tubo puede tomar un color amarillento ó rojizo, y la luz refleja aparece azul y verde

respectivamente: hay tambien vidrios azules que solo dejan pasar los rayos rojos. En algunos cuerpos es tan considerable la pérdida por absorcion de rayos luminosos, que no hay relacion entre los colores examinados de ambos modos.

Esto supuesto, ni el aire ni ningun otro cuerpo son transparentes en términos de ser atravesados íntegramente por la luz, y la observacion diaria respecto al aire nos lo confirma: de aqui esa luz difusa que nos impide ver las estrellas durante el dia, bastando solamente para que muchas desaparezcan el brillo adquirido por la atmósfera en las noches del plenilunio: los mismos resplandores crepusculares de que antes hablamos son prueba de luz reflejada, y sobre todo que la pérdida de luz es variable, lo demuestra el hecho de no verse siempre con igual claridad á la misma hora y desde el mismo lugar los objetos distantes que algunas veces por completo se ocultan á nuestras miradas sin que la atmósfera haya perdido aparentemente nada de su transparencia: existen *diafanómetros* para hacer observaciones más exactas. Que hay absorcion de luz por parte de la atmósfera, no cabe duda; ¿mas no pudiera ser esta pérdida en la proporcion requerida para que los colores restantes constituyeran el blanco? Indudablemente que no, pues entonces aparecería el cielo con el color blanco de la más ligera nubecilla. Entonces, ¿el azul será el color propio del aire? Tampoco satisface esta explicacion, porque si el aire perteneciera á la primera categoria de cuerpos transparentes que arriba establecimos, observaríamos un azul más oscuro al aproximarse el sol al horizonte, porque sus rayos atraviesan una capa atmosférica más densa y de mayor espesor que viniendo del zenit; y lejos de parecer más azul el cielo en la postura ó salida del sol, le vemos teñido con los colores opuestos, desde el amarillo al rojo escarlata; por cuya razon examinado el espectro solar, en este caso se acorta cerca de la mitad desapareciendo los rayos azules y violados. Luego el azul del cielo llega á nosotros por la reflexion de la luz en las partículas del aire ó de alguna otra sustancia que le enturbia, pues la luz transmitida por refraccion es rojiza; ni se concibe de otro modo que el color azul se nos ofrezca en direcciones encontradas con la de propagacion de la luz solar si no hubiera difusion ó reflexion en todos sentidos.

Admitido cuanto precede, el elocuente físico antes citado se expresa en estos ó parecidos términos: «Si las nubes aparecen blancas flotando en la azulada atmósfera, ¿no será debido este contraste al tamaño relativamente enorme de las menudas partículas de vapor condensado en comparacion de la materia *célica*? Las primeras presentan una superficie bastante extensa para que en ella sean reflejadas sin distincion toda clase de ondas luminosas, y solo las de menor amplitud, correspondientes al color azul y violeta podrán reflejarse en la materia del cielo por doquiera extendida, puesto que, *no debajo, sino dentro* del mismo cielo respiramos.»

Las personas algo versadas en el estudio de la Naturaleza saben que los físicos suponen probable, con muchos visos de certeza, la existencia de un Océano etéreo que llena el universo: en él están sumergidos todos los astros y el mismo baña tambien los átomos de los cuerpos; pues tan sutil como inmenso penetra por sus poros con mayor facilidad que el agua atraviesa los agujeros de una criba ó el aire las mallas de finísimo cendal. La luz procedería en esta hipótesis del oleaje etéreo que salvando los profundos senos del espacio nos advierte de la vibracion de los soles, —lo que pudiéramos llamar su vida, porque á torrentes brota la nuestro por la misteriosa accion de su luz,—asi como las olas espumosas que azotan la playa nos avisan la tempestad lejana y el furor de los vientos desencadenados; y no de otra manera el aire trasmite en ondas sonoras los acordes y melódicos trinos de las

aves y el estentor horrisono del trueno: á pesar de las variadas sensaciones producidas en cada caso, el físico lo reduce todo á meras vibraciones, más ó ménos intensas, diferentes en rapidez y amplitud segun las circunstancias, pero que trasmittidas por un *medio* interpuesto conmueven el nervio capaz de despertar la impresion en el cerebro, es decir, que los nervios de cada sentido responden como las cuerdas de un arpa sólo á determinadas notas musicales: por eso la retina y el nervio óptico que vibran á compás de las ondas más cortas y velocísimas de la luz, son insensibles al intenso calor concentrado en el foco de una lente. Todavía se lleva más adelante la comparacion entre la luz y el sonido, así como los tonos y notas de una escala dependen del número de vibraciones producidas en el mismo tiempo, de igual modo los diferentes colores, la gama del iris resulta de la relacion entre los choques de las ondas etéreas contra la retina, los cuales durante un segundo se cuentan por centenares de trillones, y siendo por lo tanto la longitud de las ondas del rojo el doble próximamente que las del color violado cuyas vibraciones se repiten con frecuencia vez y media mayor.

Teniendo en cuenta los anteriores principios de Optica, es evidente que en la luz azulada del firmamento podrán existir y de hecho existen los demás colores del espectro, si bien predominando el violado y el azul; lo contrario hemos dicho acontece con la luz directa del sol; su espectro abunda en los colores del extremo opuesto, porque deben sus rayos atravesar las capas atmosféricas, en donde se refleja el azul de diferente tono que decora el firmamento, y cuyos diversos matices desde el negro del espacio al blanco de las nubes, segun la distancia del punto observado al zenit y la hora del dia, se ha procurado determinar por medio de instrumentos apropiados ó *cyanómetros*. De aqui proceden así mismo las caprichosas tintas crepusculares que ordinariamente varian desde el amarillo al rojo. Respecto al color verdoso que algunas tardes hácia el horizonte aparece si observamos con cuidado, lo explican respetables autores (1) como un color sugetivo dependiente de la fatiga que el ojo experimenta á consecuencia del color *rojizo* que ofrecen las *nubes de otoño*, y citan en comprobacion de su aserto lo que sucede al mirar de pronto una superficie blanca, un papel, despues de tener la vista fija por largo rato en un círculo rojo pintado sobre fondo tambien blanco, pues entonces aparece en el primer papel un círculo verde; en general los círculos ofrecen colores complementarios. Creemos sin embargo, que en la teoria de Tyndall, ó bien por la mezcla del azul y el amarillo, se explica sin recurrir á nuevas hipótesis, este color verde del cielo que no solo en las *tardes de otoño*, ni siempre entre *nubes rojas* observamos.

(Se continuará.)

EDUARDO LOZANO.

## INDICACION DE ALGUNAS RELACIONES ARMONICAS

ENTRE LAS DIVERSAS PARTES DE LAS FLORES Y EL CUMPLIMIENTO  
DE LA REPRODUCCION SEXUAL.

(Continuacion.) (2)

### *Dehiscencia de las anteras.*

Encerrada la materia fecundante (el pólen) dentro de las anteras y careciendo estas de comunicacion directa con los órganos femeninos, es indispensable que

(1) Véase la Meteorologia de Kaemtz.

(2) Véase pág. 180.

aquella salga al exterior, y por los distintos y variados medios de que se vale la Naturaleza, se ponga en relacion inmediata con el estigma.

Es, pues, necesaria la dehiscencia de tales partes y es verdaderamente admirable el mecanismo con que se verifica; pues contrayéndose la membrana fibrosa que ocupa la parte interna de las mismas, comprime el poivillo fecundante, el cual, transmitiendo la presión que recibe, rompe el tejido de aquel órgano, para diseminar el pólen, lanzándolo á veces con una fuerza sorprendente.

Pero la membrana fibrosa por la que, en la mayoría de las plantas, se explica este fenómeno, no existe en todas ellas; tales son las que pertenecen á las familias de las *Ericineas*, *Monotropeas*, algun género de las *Solandáceas* y otras. En este caso es hasta hoy imposible explicar satisfactoriamente como se verifica dicho acto.

De todos modos es indudable que la manera particular de efectuarse la dehiscencia de las anteras, contribuye siempre de un modo muy directo á asegurar el contacto del pólen con el estigma. Generalmente se abren del lado que miran al pistilo y las más de las veces de una manera súbita, porque si sucediera de otro modo no caería sobre el órgano femenino, bien porque su direccion sería contraria á la conveniente ó porque no pudiera salvar la distancia que generalmente media entre los estambres y los pistilos.

En ocasiones sale el pólen por orificios que se abren en el vértice de las anteras, ó por válvulas, unas veces longitudinal y otras transversalmente; pero siempre en perfecta concordancia con la sencillez y seguridad del acto que desempeñan.

Mucho más variados é ingeniosos son los fenómenos que presentan las flores para facilitar su fecundacion, que reconocen por causa los

#### *Movimientos de los estambres.*

Estos son muy diversos y guardan siempre una relacion armónica y constante con el objeto final de la vida de las plantas, y se presentan unas veces en el estambre entero, otras en el filamento y las anteras independientemente, y algunas sólo en estas.

Así, cuando están retorcidos formando hacecillos, como se observa en algunas especies del género *Linum* y en las *Geraniaceas*, arrollados en espiral como en el *Clerodendron* y flexuosos como en el género *Croton*, se enderezan cuando es oportuno para acercarse suficientemente á sus consortes, desarticulando á veces la corola, como sucede en la vid y en las *Mirtáceas*.

El género *Poranthera*, por el contrario, presenta un estambre recto con la antera derecha y dehiscente por su vértice, el cual, cuando se aproxima la época de la fecundacion, se va encorvando poco á poco hácia el centro de la flor, hasta el punto de colocar hácia abajo el orificio de diseminacion, y de esta suerte, próximo ya al órgano femenino, deja caer naturalmente el pólen sobre él.

Desde que empiezan á abrirse las anteras de algunas especies del género *Lilium* van girando sobre los filamentos, se acercan sensiblemente al estigma y luego se alejan tan pronto como han concluido de esparcir el pólen sobre éste órgano. Tambien en el tulipan (*Tulipa gesneriana*) las anteras fijas lateralmente á los filamentos se ponen horizontales y giran entonces sobre sus soportes, en la época en que desprenden el pólen. Una observacion idéntica ha hecho M. DESFONTAINES en la *Amarillis formosissima* y en varias especies del género *Pancreatium*.

En el *Origanum Dictamnus* y en el género *Tropæolum* presentan los filamentos la particularidad de aproximarse á los estigmas encorvándose un poco antes de co-

menzar la dehiscencia de sus anteras, y en la *Atropa belladonna*, por el contrario, los estambres, encorvados en un principio se enderezan en los momentos convenientes para esparcir el pólen, una vez que han alcanzado la misma altura que los pistilos.

En otras plantas, como sucede en las del género *Kalmia*, que se hallan alojadas en unas pequeñas depresiones ó cavidades de la corola, se separan en virtud de la curvatura que los filamentos adquieren, antes que aquellas se abran; y en cambio en la mayor parte de las *Ranunculáceas*, los estambres, aplicados ó adheridos al pistiló se separan de él despues de la fecundacion, como si desde tal momento se hubieran inutilizado.

En la *Urtica dioica*, en la *Morus alba* y otras varias especies los filamentos son arqueados y se hallan mantenidos en esta posicion por las paredes del cáliz, antes de la separacion de los sépalos. Cuando el sol aparece, el cáliz se abre y se observa entonces que los estambres todos se enderezan de pronto, rómpense sus anteras y el pólen se esparce con bastante fuerza.

Estos movimientos pueden determinarse voluntariamente, y mas especialmente los que primero he indicado, irritando los estambres con un objeto extraño, como puede hacerse de un modo sumamente notable en muchas especies del género *Cistus* y en algunas del género *Berberis*.

Mucho varian tambien los movimientos de los estambres en cuanto á la celeridad con que se producen; pues en unos casos son sumamente lentos y en otros, pasando por todos los grados intermedios, son súbitos, como ocasionados por una enérgica irritabilidad.

Como comprobacion de ello podré citar los movimientos estaminales de los géneros *Fracinela* y *Zigophillum*, de las Capuchinas y los Geránios, del género *Dianthus*, de la *Stellaria holostea*, del género *Poinciana*, del castaño de Indias, del *Sedum Telephium* y *Sedum reflexum*, del *Geum urbanum*, de la *Agrimonia eupatoria*, *Saxifraga dactylodes*, *Fritillaria pérsica*, *Tamarix gállica*, *Poligonum orientale* y los del *Hioscyamus aureus*; plantas todas en las cuales los estambres se aproximan de un modo más ó ménos lento, en momentos dados, al órgano femenino para cubrirle de polvillo fecundante.

El mismo fenómeno, pero rápido y susceptible de reproducirse en muchos casos por una escitacion externa, se observa en el género *Cereus*, en el que basta rozar suavemente sus estambres con las barbas de una pluma, por ejemplo, para que se dirijan al punto hácia el pistilo.

Análogamente acontece en los géneros *Loasa*, *Cajophora*, *Parnassia*, *Butomus*, *Ruta* y *Opuntia*, sin olvidar los muy súbitos que tambien se observan en la *Berberis cretica*, *B. cristata*, *B. emarginata*, *B. nepalensis*, *B. ilicifolia*, *B. sibirica*, y la *B. lycium*, pudiendo incluir la *Berberis darwinii* y la *Mahonia aquifolium* y *M. fascicularis*.

Los movimientos de los estambres en la *Amaryllis aurea* y la *Sparmania africana*, son rápidos, instantáneos y se producen como por sacudidas en diversos tiempos; en la primera planta se agitan convulsivamente y en la segunda se van separando del centro de la flor en el momento en que se tocan con un objeto cualquiera.

(Se continuará.)

JOSÉ DE ARCE,  
Ingeniero agrónomo y Ayudante de la  
Escuela Central de Agricultura.