

REVISTA

DE LA

SOCIEDAD DE PROFESORES DE CIENCIAS.



AÑO II.

MADRID 28 DE DICIEMBRE DE 1875.

NÚM. 6.

TEORIA DE LAS TRASVERSALES.

CAPÍTULO I.

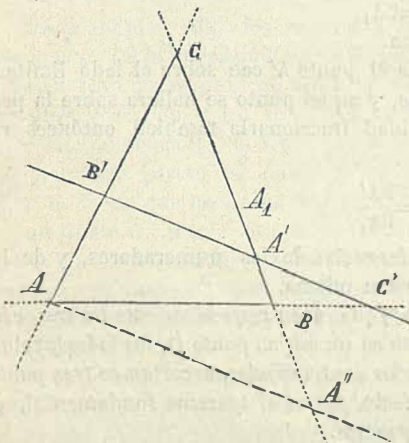
LAS TRASVERSALES EN EL TRIÁNGULO.

I. — Tres puntos en línea recta.

Teorema fundamental.—Si en un triángulo $A B C$, fig. 1.^a, cuyos lados se suponen prolongados indefinidamente, se traza una transversal, $B'A'C'$, que en su posición más general no pase por ningún vértice, ni sea paralela á ninguno de los lados del triángulo, pueden ocurrir dos solos casos: ó que de los tres puntos de intersección de la transversal con los lados del triángulo se encuentren dos sobre estos lados limitados, y el tercero sobre la prolongación del otro lado; ó que dichos puntos de intersección se hallen los tres sobre las prolongaciones de aquellos lados. En ambos casos, los vértices del triángulo y los puntos de intersección de la transversal limitan dos trozos sobre cada lado (prolongado ó no) del triángulo, y de estos seis trozos, el producto de tres no contiguos (sin ningún extremo común, ni pertenecientes á un mismo lado) es igual, métricamente hablando se entiende), al producto de los otros tres, es decir:

$$BC' \cdot CA' \cdot AB' = B'C \cdot C'A \cdot A'B.$$

En efecto, trazando por el vértice A una paralela AA'' á la transversal, los trián-



gulos $BA'C'$ y BAA'' , así como los $CB'A'$ y CAA'' serán semejantes; y de ellos resultan respectivamente las proporciones:

$$BC': C'A = BA': A'A'', \quad CB': AB' = CA': A'A''.$$

Despejado de cada una de estas el trozo $A'A''$, é igualando sus valores despues, se obtiene la relacion ó conclusion del teorema que pretendíamos demostrar.

Recíproco.—*Si los tres puntos A' , B' , C' , determinan sobre los lados BC , CA , AB del triángulo ABC , del modo que antes dijimos, las seis distancias $A'B$, $A'C$, $B'A$, $B'C$, $C'A$, $C'B$, sujetas á la relacion métrica*

$$BC' \cdot CA' \cdot AB' = B'C \cdot C'A \cdot A'B,$$

dichos tres puntos se hallan en línea recta. Supongamos que así no suceda, y que sea el punto A_1 en lugar del punto A' , el de interseccion de la transversal con el lado BC ; segun el teorema directo, se verificará entónces esta otra relacion:

$$BC' \cdot CA_1 \cdot AB' = B'C \cdot C'A \cdot A_1B.$$

Dividiendo ahora por esta misma la senta la antes hipotéticamente como cierta, se obtiene la igualdad fraccionaria

$$\frac{CA'}{CA_1} = \frac{BA'}{BA_1}$$

de la cual se deduce la proporcion:

$$(BA' + CA'): CA' = (BA_1 + CA_1): CA_1$$

ó bien:

$$BC: CA' = BC: CA_1$$

y, por consecuencia, la igualdad:

$$CA' = CA_1$$

que exige que los puntos A' y A_1 coincidan.

Aqui hemos admitido tácitamente que el punto A' cae sobre el lado limitado BC del triángulo ABC ; pero, si así no fuese, y aquel punto se hallara sobre la prolongacion de uno de los lados, en la igualdad fraccionaria tambien entónces resultante,

$$\frac{CA'}{CA_1} = \frac{BA'}{BA_1}$$

tomaríamos, en vez de las sumas, las diferencias de los numeradores, y de los denominadores, y obtendríamos la conclusion misma.

a. *Si las tres rectas AA' , BB' , CC' (fig. 2^a) que unen respectivamente las tres vértices de los triángulos ABC y $A'B'C'$ se cortan en un mismo punto O , los lados (prolongados) BC y $B'C'$, CA y $C'A'$, AB y $A'B'$, de los dos triángulos, se cortan en tres puntos A'' , B'' , C'' que están en línea recta. En efecto, segun el teorema fundamental, en el triángulo $OA'B'$ con la transversal AB , tenemos:*

$$OB \cdot AA' \cdot B'C'' = OA \cdot BB' \cdot C'A'';$$

en el triángulo $OB'C'$ con la transversal BC :

$$OC \cdot BB' \cdot C'A'' = OB \cdot CC' \cdot A''B';$$

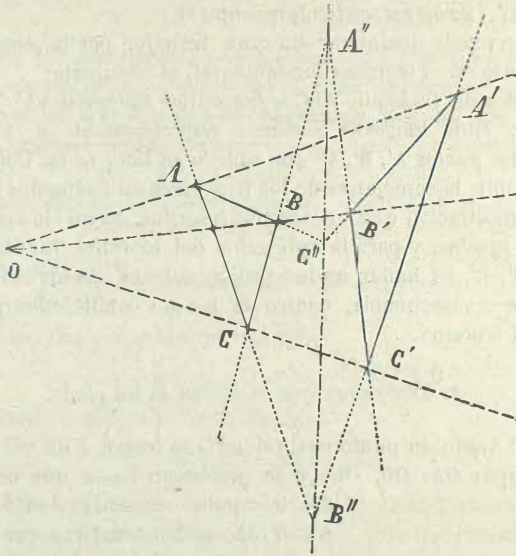
y en el $OC'A'$ con la transversal CA :

$$OA \cdot CC' \cdot A'B'' = OC \cdot AA' \cdot B''C'$$

Multiplicando ordenadamente estas tres igualdades resulta:

$$B'C'' \cdot C'A'' \cdot A'B'' = B''C' \cdot C''A' \cdot A'B':$$

y, como los tres puntos A'' , B'' , C'' se encuentran sobre las prolongaciones de los lados del triángulo $A'B'C'$, y satisfacen á las condiciones exigidas en el teorema fundamental, se concluye que el enunciado ahora, es cierto.



Dos triángulos, como los antedichos ABC y $A'B'C'$, se dice que están *colocados en perspectiva*. De la propiedad esencial que poseen y hemos demostrado, podemos valernos para determinar un punto C'' en la recta ó alineación $A''B''$, cuando no sea aquel accesible, ó nos impida un obstáculo cualquiera trazar la línea completa, mediante visuales ó la regla, según los casos. Para esto, sobre dos rectas cualesquiera que partan del punto A'' se marcan respectivamente los puntos B, C y B', C' ; de modo que las líneas determinadas por los puntos C, C' y B, B' se encuentren en un punto O , desde el cual se traza otra recta que cortará por ejemplo en A á la CB'' (prolongada) y en A' á la $C'B''$. Entonces las líneas $AB, A'B'$ se encontrarán en el punto C'' sobre la alineación ó recta $A''B''$.

b. Con auxilio del recíproco del teorema fundamental, se demuestra también el siguiente:

Si desde un punto cualquiera O de una circunferencia circunscrita á un triángulo ABC , se trazan perpendiculares OA', OB', OC' á los lados BC, CA, AB de este triángulo, los pies A', B', C' , de dichas perpendiculares, se hallan sobre una misma recta.

Considerando tres pares de triángulos semejantes se obtienen tres proporciones, y de ellas después por multiplicación, la relación entre las seis distancias que los puntos A', B', C' , determinan juntamente con los vértices del triángulo, la cual lleva consigo la exigencia de que estos tres puntos estén en línea recta. Lo que con-

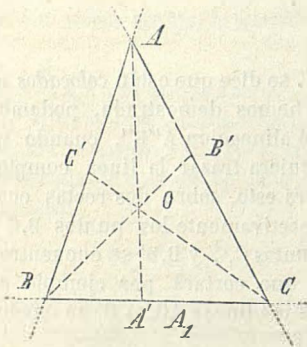
viene notar aquí es que, si el punto O varia de posición, también varia la longitud de la transversal $A'B'C'$: cuando el punto O se halla sobre un vértice, la transversal se convierte en la perpendicular desde este vértice al lado opuesto; y cuando el punto O se halla en uno de los extremos de un diámetro, cuyo otro extremo es un vértice, la transversal es el lado del triángulo opuesto á dicho vértice. Estas dos últimas consideraciones pueden reunirse y constituir así un caso particular de esta otra proposición más general: *si designamos por O y O_1 los dos extremos de un diámetro en el círculo circunscrito á ABC , las dos rectas correspondientes á cada uno de ellos que pasan respectivamente por los puntos, ya definidos, A', B', C' , y A_1, B_1, C_1 , serán perpendiculares entre sí.*

c. También se puede demostrar sin gran trabajo, por la semejanza de triángulos, y fundándose en el teorema fundamental, el siguiente:

Si en los vértices del triángulo ABC se trazan las tangentes AA', BB', CC' , al círculo circunscrito, estas tangentes cortarán respectivamente á los lados opuestos BC, CA, AB , en tres puntos A', B', C' que estarán en línea recta. Conviene tener presente para percibir la semejanza de los tres pares de triángulos de que hay que valerse en la demostración que los ángulos inscritos, cuyos lados comprenden el mismo arco, son iguales, y para la aplicación del teorema fundamental, que los tres puntos A', B', C' , se hallan en las prolongaciones de los lados del triángulo propuesto, y, por consecuencia, dentro de las dos condiciones que para ser cierto requería aquel teorema.

2. Tres rectas que se cortan en un punto.

Teorema.—Si desde un punto cualquiera O se trazan á los vértices de un triángulo, ABC , los rayos OA, OB, OC , y se prolongan hasta que corten á los lados del triángulo respectivamente en los puntos A', B', C' , podrá ocurrir: ó que estos tres puntos se encuentren sobre los lados limitados del triángulo, ó que solo uno de ellos caiga sobre un lado limitado y los otros dos en las prolongaciones de los otros lados. *En unas y otras circunstancias los trozos (no contiguos) que determinan los tres puntos A', B', C' , sobre los lados (prolongados dos, ó no) BC, AC, AB , están sujetos á la ley métrica siguiente:*



$$BC' \cdot CA' \cdot AB' = B'C \cdot C'A \cdot A'B,$$

que coincide en un todo con la fundamental del artículo anterior. La única diferencia, que entre las dos existe, estriba en la distribución de los puntos A', B', C' , sobre los lados del triángulo y sus prolongaciones. Para demostrar ahora la ley expresada, consideremos (fig. 3.^a) primeramente el triángulo ABA' , con su transversal CC' , y tendremos:

$$BC' \cdot CA' \cdot OA = C'A \cdot BC \cdot OA'.$$

Y después el triángulo ACA' , con su transversal BB' , que nos dará la ecuación:

$$AB' \cdot BC \cdot OA' = B'C \cdot A'B \cdot OA.$$

Multiplicando las dos ecuaciones anteriores, hallamos la que pretendimos demostrar:

$$BC' \cdot CA' \cdot AB' = B'C \cdot C'A \cdot A'B.$$

Recíproco. Si, cumplidas las condiciones de situacion en el directo explicadas, existen tres puntos A' , B' , C' sobre los lados de un triángulo ABC , de tal modo que se verifique la relacion

$$BC' \cdot CA' \cdot AB' = B'C \cdot C'A \cdot A'B,$$

las rectas AA' , BB' , CC' se cortarán en un mismo punto. Admitiendo que así no suceda, y que sea A_1 en vez de A' , el punto de interseccion con el lado BC de la recta que pasa por el vértice A y el punto de encuentro O de las dos rectas BB' y CC' ; entónces, segun lo demostrado, seria:

$$BC' \cdot CA_1 \cdot AB' = B'C \cdot C'A \cdot A_1B.$$

Dividiendo por ésta la igualdad anterior, supuesta real, se obtiene la fraccionaria

$$\frac{BA'}{BA_1} = \frac{A'C}{A_1C}, \text{ ó proporcion } BA': A'C = BA_1: A_1C$$

de la cual se deduce inmediatamente esta otra:

$$(BA' + A'C) : A'C = (BA_1 + A_1C) : A_1C$$

y de aqui, acudiendo á la figura, la siguiente:

$$BC : A'C = BC : A_1C$$

que prueba ser $A'C = A_1C$, y, por tanto, que se confunden los puntos A' y A_1 . Si el punto A' cayese sobre la prolongacion del lado BC , solo habria que introducir en la anterior demostracion una modificacion insignificante.

En las siguientes aplicaciones de esta ley están satisfechas evidentemente las condiciones de situacion de los puntos divisores de los lados del triángulo, y sólo expresaremos, en consecuencia, las relaciones métricas.

a. *Uniendo los vértices de un triángulo ABC con los puntos medios A' , B' , C' de los lados respectivamente opuestos, las rectas AA' , BB' , CC' se cortan en un mismo punto, el PUNTO DE GRAVEDAD del triángulo.* En efecto, segun el enunciado de este corolario, tenemos: $BC' = C'A$; $CA' = A'B$; $AB' = B'C$; de las cuales se deduce la relacion

$$BC' \cdot CA' \cdot AB' = B'C \cdot C'A \cdot A'B.$$

b. *Uniendo los vértices de un triángulo ABC con los puntos de contacto A' , B' , C' de los lados respectivamente opuestos con el círculo inscrito, las rectas AA' , BB' , CC' , se cortan en un mismo punto.*

Cada dos tangentes contadas desde un vértice mismo del triángulo hasta los puntos de contacto son iguales; y de las igualdades consiguientes resulta, como antes, la relacion que demuestra la conclusion del corolario.

c. *Las tres perpendiculares AA' , BB' , CC' , trazadas desde los vértices de un triángulo ABC á los lados respectivamente opuestos, se cortan en un mismo punto, EL PUNTO DE ALTURAS del triángulo.* Comparando los lados de tres pares de triángulos semejantes se obtiene la relacion fundamental que demuestra la tésis sentada.

Con auxilio de este teorema se puede resolver el problema de trazar sobre una

recta dada BC una perpendicular desde el punto de interseccion de dos rectas que no se encuentran dentro del papel ó campo en que podemos operar. Sea A el punto lejano de interseccion de las dos rectas que cortan á la BC respectivamente en los puntos B y C. Desde el punto B trácese una perpendicular á la CA, y desde el punto C otra perpendicular á la BA; la perpendicular á la recta dada BC desde el punto de interseccion O de las dos antes trazadas, pasará por el punto A.

d. Las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo se cortan en un mismo punto,
 EL CENTRO DEL CÍRCULO INSCRITO. Para demostrar este teorema hay que recordar previamente que la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en partes proporcionales á los lados del ángulo. Aplicando este teorema á las tres bisectrices, por una permutacion sencilla de los términos de las proporciones consiguientes, y multiplicando estas despues, se obtiene la ley fundamental que demuestra el teorema enunciado. Tambien puede servirnos este teorema para *trazar la bisectriz de un ángulo cuyo vértice se halle fuera de nuestro alcance.* Para esto se trazan dos rectas cualesquiera (un poco separadas mejor) que corten á los lados del ángulo. Se trazan las bisectrices de los dos ángulos que cada una de estas secantes forma hácia la misma parte, con dichos lados; y la recta que pasa por los dos puntos de interseccion de estos dos pares de bisectrices, será tambien la bisectriz del ángulo dado que buscamos.

Considerando como siempre, indefinidamente prolongados en sus dos sentidos los lados de un triángulo ABC, debemos notar que no solo la bisectriz del ángulo del triángulo en el vértice A, sino tambien la de su adyacente, corta al lado opuesto BC en un punto cuyas distancias á los B y C, son proporcionales á los lados AB y AC de dicho ángulo A. De aqui resulta que un trozo de recta BC puede ser dividido, bajo una misma razon determinada, por dos puntos diferentes, uno que cae dentro del trozo BC, y el otro sobre su prolongacion.

Ningun punto, fuera de los dos expresados, puede concebirse sobre la distancia BC, ó su prolongacion, que cumpla la condicion que aquellos dos únicamente realizan, como es fácil demostrar directamente, ó mediante el recíproco del teorema auxiliar que antes recordamos. Así, pues, si la base BC de un triángulo ABC permanece fija, y va moviéndose el vértice A de modo que la razon de los lados que forman el ángulo en A sea constante, las bisectrices del ángulo A y de su adyacente pasarán, en las diferentes posiciones del vértice A, por los mismos puntos de la base prolongada BC. Siendo siempre estas dos bisectrices perpendiculares entre sí, el punto A en su movimiento se encuentra perfectamente determinado, ó en otros términos: el punto A trazará con tal movimiento una circunferencia cuyo diámetro es precisamente la distancia entre los dos puntos, por los cuales pasan siempre las bisectrices mencionadas, y que dividen la base fija BC en la razon constante establecida. Si queremos, segun esto, dividir una distancia BC bajo una razon dada, construiremos sobre el trozo BC un triángulo ABC, cuyos lados AB y AC estén sometidos á la razon propuesta. La bisectriz del ángulo en A y la de su adyacente determinarán sobre la línea BC los puntos que resuelven el p problema.

3.—*Sumas de cuadrados de distancias.*

Teorema. *Si desde un punto O se trazan los perpendiculares OA'. OB'. OC'. á los tres lados BC, CA, AB de un triángulo ABC, tenemos la ecuacion:*

$$BC'^2 + CA'^2 + AB'^2 = B'C^2 + C'A^2 + A'B^2,$$

Uniendo el punto O con los vértices del triángulo, las líneas resultantes OA, OB,

OC serán hipotenusas cada una de dos triángulos de los seis en que ABC queda dividido: y aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene la relacion establecida.

Recíproco. Si existen tres puntos A', B', C', respectivamente sobre los lados de un triángulo ABC, para los cuales se verifique la relacion

$$BC'^2 + CA'^2 + AB'^2 = B'C^2 + C'A^2 + A'B^2,$$

las perpendiculares en estos puntos á los lados correspondientes del triángulo se cortarán en un punto. Para demostrarlo se supone, como en los anteriores hicimos, que no sea A' sino A₁ el pié de la perpendicular al lado BC trazada desde el punto de interseccion de las otras dos perpendiculares en B' y en C', y se deduce, restan de la ecuacion admitida como cierta, por hipótesis, la referente al punto A₁, que este punto y el A' coinciden.

Sea cualquiera la distribucion de los puntos A', B', C' sobre los lados del triángulo (prolongados como sabemos) la demostracion se hace de igual manera.

Consecuencias del teorema anterior son las siguientes:

a. Las tres perpendiculares á los lados de un triángulo en sus puntos medios se cortan en un mismo punto, EL CENTRO DEL CÍRCULO CIRCUNSCRITO. La demostracion es muy sencilla: solo hay que tener en cuenta que ahora son iguales los dos trozos de cada lado del triángulo.

b. Las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto. Se demuestra aplicando el teorema de Pitágoras á los seis trozos en que los piés de las alturas dividen á los lados del triángulo, obteniéndose así para estos seis trozos la ley fundamental en esta parte:

$$BC'^2 + CA'^2 + AB'^2 = B'C^2 + C'A^2 + A'B^2$$

c. Designando, como siempre por A', B', C' los piés de las alturas en el triángulo ABC, y uniendo dichos piés con las rectas B'C', C'A', A'B', las perpendiculares á cada una de estas desde los vértices A, B, C, se cortan en un mismo punto. En efecto, marcando con las letras A'', B'', C'' los puntos de interseccion con las líneas antes construidas B'C', C'A', A'B' de las perpendiculares á cada una de ellas respectivamente trazadas por los vértices A, B, C, del triángulo, hallamos las igualdades:

$$\left. \begin{array}{l} B'C''^2 = B'C^2 - CC''^2 \\ B''C'^2 = BC'^2 - BB''^2 \\ C'A''^2 = C'A^2 - AA''^2 \\ C''A'^2 = CA'^2 - CC''^2 \\ A'B''^2 = A'B^2 - BB''^2 \\ A''B'^2 = AB'^2 - AA''^2 \end{array} \right\} \text{de las cuales resultan: } \left\{ \begin{array}{l} B'C^2 - B'C''^2 = CA'^2 - C''A'^2 \\ A'B^2 - A'B''^2 = C'^2 - B''C'^2 \\ C'A^2 - C'A''^2 = AB'^2 - A''B'^2 \end{array} \right.$$

Y de estas, teniendo presente la relacion que demuestra el teorema anterior, la siguiente:

$$B'C''^2 + C'A''^2 + A'B''^2 = B''C'^2 + C''A'^2 + A''B'^2$$

que demuestra el actual.

Sabemos que entre los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC y la línea de gravedad CC' que une el vértice C con el punto medio C' de la base AB, existe la relacion:

$$BC^2 + CA^2 = 2\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + 2CC'^2$$

ó tambien esta otra:

$$BC^2 + CA^2 = 2AC'^2 + 2CC'^2.$$

Variando, un triángulo de modo que su base permanezca fija, y constante la suma de los cuadrados de los otros dos lados, el vértice C debe recorrer un círculo cuyo centro es el punto medio C' de la base, pues, como en la última fórmula $BC^2 + CA^2$ y CA^2 son cantidades determinadas é invariables, según la hipótesis que hemos establecido, la otra cantidad CC'^2 deberá ser asimismo invariable, lo cual quiere decir que el punto movable C habrá de conservarse en su movimiento siempre á igual distancia de C'.

Multiplicando por 2 la penúltima de las fórmulas, y aplicándola á las tres líneas de gravedad del triángulo ABC, se obtienen estas únicas en función de los lados como se vé á continuación:

$$\begin{aligned} 4AA'^2 &= -BC^2 + 2CA^2 + 2AB^2 \\ 4BB'^2 &= 2BC^2 - CA^2 + 2AB^2 \\ 4CC'^2 &= 2BC^2 + 2CA^2 - AB^2 \end{aligned}$$

Y resolviendo estas ecuaciones considerando los lados como incógnitas se obtienen estos en función de las líneas de gravedad de este modo:

$$\begin{aligned} 4BC^2 &= -\left(\frac{4}{3}AA'\right)^2 + 2\left(\frac{4}{3}BB'\right)^2 + 2\left(\frac{4}{3}CC'\right)^2 \\ 4CA^2 &= 2\left(\frac{4}{3}AA'\right)^2 - \left(\frac{4}{3}BB'\right)^2 + 2\left(\frac{4}{3}CC'\right)^2 \\ 4AB^2 &= 2\left(\frac{4}{3}AA'\right)^2 + 2\left(\frac{4}{3}BB'\right)^2 - \left(\frac{4}{3}CC'\right)^2 \end{aligned}$$

De ser idéntica la forma de las ecuaciones en estos dos últimos sistemas se desprende la consecuencia siguiente: *Los lados de un triángulo ABC son al mismo tiempo las líneas de gravedad de otro triángulo A'' B'' C'', cuyos lados son los cuatro tercios de las líneas de gravedad del primero.* Esta ley nos puede servir para construir un triángulo, dadas sus tres líneas de gravedad.

X.

SOLUCION DE LAS CUESTIONES PROPUESTAS.

CUESTION 6.

Si tres fuerzas iguales están representadas en magnitud y dirección por los tres radios tirados á los vértices de un triángulo desde el centro del círculo circunscrito, su resultante estará representada en magnitud y dirección por la recta que une dicho centro con el punto de intersección de las perpendiculares tiradas desde los vértices á los lados opuestos.

3.^a solución (1).

La suma algébrica de las proyecciones de las tres fuerzas dadas sobre un lado, será igual á la proyección de la resultante sobre el mismo lado; y como dos de estas proyecciones son iguales y de signo contrario, la proyección de la resultante será igual á la proyección de la fuerza cuya dirección no pasa por ninguno de los extremos del lado que se considera. Pero esta fuerza y la resultante tienen un extremo común; luego las proyecciones tendrán los dos extremos comunes, y por consiguiente, el extremo de la resultante está en un punto de la altura correspondiente al lado sobre que se han proyectado las fuerzas. Tomando las proyecciones sobre los otros dos lados, probaríamos que el extremo de la resultante está en las otras dos alturas, de donde resulta que, *las tres alturas concurren en un punto, que es el extremo de la resultante.*

JOSÉ BARTRINA Y ROYO,

Catedrático de Matemáticas en el Instituto de Albacete.

(1) Véase la pág. 169.

INVESTIGACIONES TEÓRICAS Y EXPERIMENTALES

SOBRE LA DIFRACCIÓN DEL SONIDO.

La difracción es una consecuencia de la modificación de las ondas en ciertas condiciones, y puede presumirse que el sonido debe presentar también fenómenos análogos. Pero en cuestión de hechos, sólo á la experiencia debe recurrirse, sin opinión formada, para llegar á poseer la verdad.

Sobre tal asunto he efectuado numerosos experimentos, empleando como productores de sonido, ya timbres, ya diapasones movidos por la electricidad, ó ya otros instrumentos, variando también de diversos modos la disposición de los aparatos; pero en estos primeros ensayos no he obtenido más que curvas muy irregulares en las membranas cubiertas de arenilla que yo empleaba. La leve agitación ocasionada en el aire por el movimiento de los observadores, y las vibraciones extrañas producidas cerca del aparato llevan consigo numerosas causas de perturbación.

Finalmente, preparé un cuarto que pudiera cerrarse perfectamente: coloqué allí una cajita cúbica con un silbato poderoso acondicionado de la misma manera que el que el Sr. DESAINS había empleado para estudiar la interferencia del sonido. Pero en la pared superior, en lugar de dos orificios, no había más que uno. Podía esta pared quitarse y reemplazarse por otras cuyo orificio tenía un diámetro mayor ó menor. Paralela á una de las aristas laterales se hallaba una regla dividida en milímetros, y á lo largo de ella subía y bajaba una abrazadera corrediza que sostenía un cuadro horizontal en el que había sujeta y tensa una piel delgada cubierta de polvo de licopodio.

En cuanto el silbato entraba en juego, el licopodio saltaba y al cabo de breves instantes tomaba las figuras de curvas muy regulares y muy semejantes á circunferencias. La tabla siguiente da los diámetros de estas curvas para dimensiones diferentes del orificio y posiciones diversas del cuadro y del origen del sonido.

Número de vibraciones del silbato.	Distancia del origen al orificio.	Diámetro del orificio.	Distancia del orificio al cuadro.	Diámetro del primer círculo de difracción.
5660	18cm	13cm	7cm	17cm
5660	18cm	20cm	7cm	28cm
5660	18cm	14cm	12cm	24cm
8504	14cm	9cm	5cm	12cm
8504	14cm	11cm	11cm	23cm

He efectuado diversos ensayos con el mismo aparato y otros silbatos, pero sin éxito.

ENRIQUE SERRANO Y FATIGATI,
Catedrático de Física y Química en el Instituto
de la Coruña.

DE LA NATURALEZA DE LA ELECTRICIDAD

POR EL SR. D. E. EDLUND.

(Continuacion) (1).

En cuanto á la constante k que es la misma que entra como factor en la fórmula de Ampère, para los fenómenos electrodinámicos, su valor ha sido determinado experimentalmente por W. WEBER y KOHLRAUSCH (2). Si se conserva la unidad dada más arriba para la medida del éter, se tiene según la experiencia de estos dos sábios, y en número redondo, $\frac{1}{\sqrt{k}} = 440$ millones de metros por segundo.

(1) Véase la pág. 244.

(2) Poggend. Annalen, tomo XC, p. 40.

Admitiendo ahora para la velocidad h un valor comprendido en los límites de los resultados de las experiencias precitadas, se obtiene un valor muy pequeño para el producto $k h$. Luego la constante a del primer término de la fórmula (14), debe tener también un valor numérico mínimo. Resulta evidentemente de las consideraciones teóricas expuestas en estas páginas que el producto ah debe ser inferior á 1. Si ahora admitimos, por ejemplo, que el valor de h hallado por WALKER sea 30 millones de metros por segundo, el valor de a será menor que $\frac{1}{30 \text{ millones}}$, el producto $\frac{k h}{2}$ será igual en esta suposición á $\frac{1}{42.900 \text{ millones}}$, y por consiguiente a podrá ser 400 veces mayor que $\frac{k h}{2}$. Se vé por tanto que léjos de contradecirle la experiencia, confirma más bien el resultado á que se había llegado por la vía teórica, á saber, que los términos de la fórmula (14) multiplicados por $\frac{k h}{2}$ pueden ser despreciados en comparacion del primero. Solo con nuevas experiencias podrá decirse si en realidad es esto permitido.

La acción sobre el éter del elemento de circuito ds' , expresado por la fórmula (14), se ejerce á lo largo de la línea de union entre ds y ds' . Mas no pudiendo el éter del elemento ds' moverse sino á lo largo de este elemento, habrá que multiplicar, para tener la medida del movimiento producido en el éter de ds' , esta expresion por el coseno del ángulo que forma con el elemento de circuito la dirección de la fuerza que actúa. De modo, que si este ángulo se llama θ' , habráse de multiplicar por $\cos \theta'$. Entiéndese por fuerza electromotriz de la induccion, la fuerza *aceleratriz* ejercida por el hilo inductor sobre el éter contenido en la unidad de longitud del hilo inducido. Se obtiene esta fuerza aceleratriz dividiendo la expresion (14) por μ' . Así resulta, como expresion de la induccion de un elemento de corriente sobre un elemento de circuito inducido, durante el primer instante:

$$+ \frac{i}{r^2} \left[a \cos \theta - \frac{k h}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \theta \right) \right] \cos \theta' ds ds' \dots (15).$$

Siempre, para que una corriente de induccion sea posible, el circuito inducido debe estar cerrado. Por consecuencia, en la integracion de la fórmula (15) con relacion á ds' , el término independiente de $\cos \theta$, á saber $\frac{k h i}{2 r^2} \cos \theta' ds ds'$, desaparece siempre, cualquiera que sea la forma del circuito inducido, con tal que este circuito esté cerrado. Lo cual fácilmente se deduce en virtud del razonamiento siguiente: Figurémonos, con el elemento ds por centro, dos superficies esféricas, una de radio r y otra de radio $r+dr$. Si ahora una parte de este circuito inducido se encuentra sobre una ú otra de estas superficies concéntricas, evidentemente el término antedicho deberá desaparecer para esta parte del circuito. Por doquiera en tal caso $\cos \theta'$ es igual á cero, puesto que el radio de una esfera es perpendicular á todas las líneas trazadas desde el extremo del radio sobre la superficie de la esfera. Los elementos del circuito inducido que caen entre las dos superficies concéntricas, deben ser siempre en número par, puesto que el circuito es cerrado. De manera que suponiendo una corriente en el circuito inducido, esta corriente pasará toda tantas veces de la superficie exterior á la interior, como de esta última á la primera. El coseno del ángulo θ' que forma con el radio correspondiente, uno

cualquiera de los elementos incluidos entre las superficies, es igual á $\frac{dr}{ds}$, y de estos cosenos los de signo positivo son tantos como los de signo negativo. De donde se infiere, que, para todos los elementos que caen entre las dos superficies la suma de $\frac{kih}{2r^2} ds \frac{dr}{ds} ds'$ debe ser igual á cero. Ahora bien, como esto es verdad para un valor cualquiera de r , debe tambien serlo para todo el circuito. Se puede pues, en lugar de la fórmula (15), usar en la integracion de la fórmula:

$$+ \frac{i}{r^2} \left(a \cos \theta + \frac{3}{h} kh \cos^2 \theta \right) \cos \theta' ds ds' \dots (10).$$

Ahora bien, esta fórmula solo expresa la induccion en el instante primero, ántes que las moléculas tanto del hilo como del medio ambiente hayan podido dejar sus posiciones primitivas de equilibrio. Pero la induccion continúa hasta que se alcance las nuevas posiciones de equilibrio, en cuyo término la fuerza de induccion se anula. Sufre esta fuerza una disminucion continua desde el principio hasta el fin del tiempo de induccion, y la fórmula (15) no da mas que el valor máximo durante el primer momento. De ello debe resultar que al principio de su existencia las corrientes de induccion se muestran muy poderosas y disminuyen en seguida de intensidad, hecho que la experiencia acredita (1). Si ahora quisiéramos la magnitud de una corriente de induccion en circunstancias dadas, deberíamos tomar en cuenta no solo el valor máximo de la induccion en el primer momento Δt , sino tambien la suma de todas las inducciones durante todo el tiempo de la induccion.

Designando, para mayor brevedad, el valor máximo de la induccion ejercida por un elemento de corriente sobre un elemento de circuito inducido por $\Delta t Ar$, cuando la distancia entre los elementos es r , podríamos expresar la induccion que ocurre durante el momento que sigue inmediatamente, por $\Delta t p Ar$, siendo p más pequeño que la unidad. De modo, que la suma de todas las inducciones sería

$$\Delta t (1 + p' + p + p'' + \dots + 0) Ar.$$

en cuya expresion cada término de la série sería más pequeño que el consecutivo que le precede. Esto puede escribirse más brevemente $\Delta t F Ar$, designando F la suma de la série. Para otro elemento de corriente inducida cuya distancia al elemento inductor sea r , se obtendrá de la misma manera $\Delta t F_1 Ar_1$. Ahora si F fuera siempre inferior á F_1 , es decir, si la suma de la série fuera constante, aunque fuesen cualesquiera las variaciones que hubiesen de sufrir la fuerza de la corriente i y la distancia r , entre los elementos, la suma de las inducciones se haría proporcional al valor máximo, y podriase entónces calcular, conservando la fórmula (16), la magnitud relativa de la corriente de induccion. Sobre que F es independiente de i no puede haber duda, pero no puede decirse lo mismo respecto á r . La fuerza de induccion en un momento dado sobre la masa de éter $\mu ds'$ del circuito inducido, es proporcional á la diferencia entre la repulsion ejercida sobre $\mu ds'$ por el elemento de corriente inductora (en la cual la masa de éter μds se mueve con la velocidad h) y la repulsion sobre la misma masa de toda la masa de éter restante. La primera de estas repulsiones, como claramente resulta de lo que precede, disminuye en razon inversa del cuadrado de la distancia entre los elementos ds y ds' .

(1) Véase SEMSTROM K. Vet.—Akademien Handl. ny följ (Memorias de la Academia de Ciencias nueva série, t. V; p. 8, 1869) BLASERNA, Giornale di Scienze Naturali ed Economiche, tomo VI. Palermo, 1870.

Pero si esto ocurriera en la última, es decir, en la repulsion ejercida sobre μds por todo el resto de la masa de éter, es claro que F no dependería de r : porque podría en este caso expresarse, para un momento dado por $\frac{a}{r^2}$ la repulsion que proviene del elemento ds de la corriente inductora, y la de toda la masa de éter restante por $\frac{b}{r^2}$; en cuyas expresiones a y b serían constantes. La fuerza de induccion en aquel momento sería entonces $\frac{1}{r^2}(a-b)$, ó bajo otra expresion pAr , siendo p una constante. Mientras las moléculas de éter permanecen en sus positivas posiciones normales de equilibrio, la repulsion ejercida sobre $\mu ds'$ por toda la masa de éter ambiente, á excepcion de μds , es igual á $+\frac{\mu\mu' ds ds'}{r^2}$, y por lo tanto disminuye efectivamente en razon inversa del cuadrado de la distancia. Pero esto no puede ocurrir cuando las moléculas han cambiado de sitio y la masa de éter alrededor de $\mu ds'$ ha sufrido de esta suerte una distribucion distinta de la del estado normal; porque la repulsion ejercida sobre $\mu ds'$ por el éter ambiente es claro que depende de la distribucion del éter. Luego F debe necesariamente depender de r , por lo cual escribiremos $F(r)$ en lugar de F .

Obtenemos, segun esto, la siguiente fórmula como expresion de la magnitud de la corriente de induccion:

$$+\frac{iF(r)}{r^2}\left(a \cos \theta + \frac{3}{k} kh \cos^2 \theta\right) \cos \theta' ds ds' \dots (17),$$

ó bien, despreciando el último término:

$$+\frac{aiF(r)}{r^2} \cos \theta \cos \theta' ds ds' \dots (18).$$

Admitimos ahora que la corriente inductora está cerrada, y es de tal forma, que puede dividirse por un plano en dos mitades simétricas. A cada elemento a por un lado del plano corresponde entónces un elemento a' simétrico por el otro lado. Admitiendo además que el circuito inducido esté cerrado y sea simétrico respecto al mismo plano, á cada elemento b en el lado primero del plano corresponde tambien un elemento simétrico b' al otro lado. De donde se sigue que la distancia entre a y b' debe ser igual á la que media de a' á b ; y que el coseno del ángulo entre el elemento a y la línea de union ab' y el coseno entre a' y $a'b$ deben ser de igual valor, pero de signo distinto, puesto que la direccion de los elementos, á uno y otro lado del plano, está determinada por la direccion de una corriente que imaginamos recorre el circuito. De la misma manera, los cosenos de los ángulos formados por las líneas de union antedichas y los elementos b y b' del circuito inducido, serán de igual magnitud, pero de signo contrario. Así en la induccion del elemento a sobre b' y de a' sobre b , los dos cosenos θ poseerán igual magnitud pero signo contrario, ocurriendo lo mismo en los dos cosenos θ' . De donde resulta que la parte de induccion correspondiente al término de la fórmula (17) en el cual entra $\cos^2 \theta$, será igual á cero para la suma de dos elementos simétricos. Lo mismo tendrá lugar en otros dos elementos simétricos cualesquiera. Si los dos circuitos, tanto inductor como inducido, se cortan simétricamente ambos por un mismo plano, la integral del término en que entra $\cos^2 \theta$, será por consecuencia igual á cero. En tal caso, pues, son completamente iguales las integrales de las fórmulas (17) y (18).

(Se continuará.)

MANIFESTACIONES DE LA COHESION EN LOS MINERALES.

Llámase cohesión en general, á la unidad interior de los cuerpos, que se manifiesta por la resistencia que oponen á su division mecánica, y se mide por el grado de esta resistencia.

Dos expresiones diferentes de la cohesión, viene de antiguo apreciando la Mineralogía en los cuerpos cristalinos: el crucero y la fractura, correspondiente el primero á un mínimum de adherencia molecular, que en determinadas direcciones suele existir, y viniendo la segunda, (la rotura casual y en cualquier sentido), á dar idea de ella en su máximum y grados intermedios, pero sin que permita distinguir ni precisar estos por sus valores relativos. La fractura ofrece siempre cierta regularidad, puesto que posee una forma constante para un mismo cuerpo; y esto indica ya desde luego, que la agregación molecular, y la afinidad y adherencia que existen entre las últimas partes constitutivas, obedecen á leyes fijas, no siendo en modo alguno casuales y arbitrarias.

No es nuestro propósito tratar en estos ligeros apuntes, de las dos propiedades que acaban de enunciarse; esto sería fatigar sin objeto la atención de los ilustrados lectores de la REVISTA. Nos proponemos transcribir las recientes observaciones y trabajos de algunos sábios mineralogistas, acerca de otras distintas expresiones de la cohesión, cuyo conocimiento si bien antiguo, pues data del principio del actual siglo (1), no se ha completado, ni su importancia y trascendencia se han llegado á hacer palpables hasta que los estudios microscópicos han tomado cuerpo en el dominio del reino inorgánico: tales son las *caras de resbalamiento* y las *figuras de percusión y de corrosión*, fenómenos que demuestran más y más la existencia de leyes matemáticas fijas á que se halla sujeta la adherencia molecular.

Además de las caras de crucero, pueden producirse en los cristales otras caras de separación, también por medio de una cierta presión, en direcciones determinadas. E. REUSCH ha hecho curiosas observaciones en este sentido (2), principalmente sobre la sal de piedra y el espato de calizo.

Si se liman con regularidad dos aristas opuestas de un sólido de crucero hexáedrico de sal gema, y se comprime después dicho cuerpo entre las superficies producidas por las limaduras, se originará una cara de separación paralela á las de dodecaedro rómbico y dispuesta en el mismo sentido que la compresión. Limando así mismo en un sólido de crucero de espato calizo, dos aristas agudas opuestas, de modo tal, que las caras de limadura correspondan á las del prisma exagonal de segunda especie $\infty P 2$, y comprimiendo en seguida el sólido entre dichas dos caras, se originan otras de separación paralelas á las del romboedro $-\frac{1}{2}R$ y dispuestas en su consecuencia, de la misma manera que las láminas generales que muy frecuentemente atraviesan estos cuerpos; y es probable que de un modo análogo se han debido constituir estas láminas en la Naturaleza.

REUSCH denomina á todas estas superficies de separación, *caras de resbalamiento*.

(1) Para las llamadas figuras de corrosión.

(2) Poggendorf's Annalen tomos 132 y 136, y Monatsberichten der Akad der Wissenschaften in Berlin, 1872, Abril, pág. 242.

Si se coloca verticalmente sobre una cara de cristal ó de crucero un estilete de acero terminado en punta redondeada, y se dá en el otro un golpe seco con un pequeño martillo, se obtienen en el momento muchas caras de separacion, reconocibles bajo la forma de pequeñas resquebrajaduras divergentes, que parten del punto mismo que ha recibido el efecto del choque, y constituyen en conjunto formas especiales á las que REUSCH denomina *figuras de percusion*.

Operando de la manera dicha, sobre una cara de crucero de sal de piedra, ha obtenido dos clases de hendiduras cruzadas en ángulo recto; unas son paralelas á las caras del dodecaedro rómbico, $\infty 0$ perpendiculares á la percütida, y las restantes siguen direcciones várias. Sobre un sólido de crucero de espato calizo, se produjo un triángulo equilátero cuyos lados eran paralelos á las aristas medias de la forma romboédrica, al paso que la base, que se dirigia hácia los polos, lo era á la diagonal mayor de la cara sobre que se hizo la experiencia. Además, toda la figura apareció estriada en este mismo sentido.

Son muy notables las figuras de percusion que REUSCH obtuvo sobre las láminas de micas monoáxicas. Operando bien, estas figuras afectan la forma de estrellas de seis ródios, que á veces se reducen á tres, por no prolongarse desde el centro sino en una direccion; uno de estos ródios llamado por REUSCH *característico*, es siempre paralelo á la braquidiagonal del prisma ∞P de 120° , y los otros dos lo son á las caras de la misma forma. Siendo el plano de los ejes ópticos en la mayor parte de las micas, paralelo á la macrodiagonal, y en las demás á la braquidiagonal, las figuras de percusion pueden servir para reconocer estas diferencias; pues en una mica de la primera clase, el plano dicho ha de ser perpendicular al ródio característico, y en las de la segunda será paralelo al mismo ródio. En aquellas, pues, el plano en cuestion estará colocado entre dos ródios consecutivos de la figura de percusion, al paso que en las segundas vendrá á coincidir con el ródio característico. Estas diferencias son apreciables cualquiera que sea la forma de las láminas, y del método puede hacerse aplicacion aún cuando sean muy irregulares. En esto se funda su importancia.

Atacando con los ácidos las caras de los cristales, se han descubierto en determinadas direcciones, ciertas diferencias latentes de la cohesion, las cuales se hacen visibles por la produccion de formas microscópicas regulares, variables con las especies, pero constantes y características para un mineral dado.

Ya en el año de 1816 hizo DANIELL observaciones sobre este punto, pero no han llegado á obtenerse resultados positivos y trascendentales hasta que muy posterior y recientemente, LEYDOLT, LAVIZZARI y BAUMHAUER, han podido determinar, valiéndose del microscopio, las relaciones que existen entre la forma de las figuras en cuestion y el sistema cristalino propio de la especie; relaciones tan patentes que permiten la determinacion segura de las formas en los minerales en que no son completas ó bien reconocibles, y tambien en aquellos que nunca las han ofrecido apreciables y perfectas; pues las repetidas figuras siempre se pueden producir sobre una porcion de cara cristalina por pequeña que sea. En este concepto, tiene mucha importancia el estudio de las figuras de corrosion.

Algunos han tratado de referirlas sólo al crucero; mas aún cuando en ciertos casos existe, en efecto, una dependencia directa entre la forma y posicion y el sentido del crucero dominante, como sucede, por ejemplo, en el espato calizo, en el que BAUMHAUER ha descubierto cierta relacion entre su crucero y las figuras trian-

gulares producidas por el ácido clorhídrico diluido, en muchos otros minerales se vé una completa discordancia entre ambas propiedades. La combustion del diamante origina sobre sus caras ciertas impresiones triangulares que pueden asimilarse á un icositetraedro 303, mientras que su crucero es octaédrico: en la pirita ha producido G. ROSE corrosiones piritoédricas, siendo los cruceros de este mineral, exaédrico y octaédrico: la sal de piedra, por último, se cubre segun LEYDOLT, sobre sus caras cristalinas, cuando por algun tiempo ha estado expuesta á la accion del aire húmedo, de pequeñas concavidades cuya forma es la del cubo piramidal: á pesar de que el crucero propio de la sal es exaédrico.

Dada la gran relacion en que se hallan las formas de corrosion y las cristalinas, parecerá natural que los cuerpos isomorfos concuerden en lo que á aquellas hace, y aun cuando para algunos de ellos es esto un hecho, no sucede para todos, pudiendo, pues, hacerse de los minerales isomorfos en general, dos grupos distintos: en el primero, los cristales poseen figuras de corrosion iguales en forma y posicion sobre las caras homólogas, y en los del segundo se diferencian dichas figuras, sobre todo por su posicion. Al primero corresponden los alumbres potásico, potásico crómico y férrico-potásico, y en el segundo se cuentan el espato calizo, la dolomia y el hierro espático; sucediendo que estas dos últimas especies, tratadas con ácido clorhídrico, se cubren sobre las caras del romboedro fundamental, de impresiones triangulares cuya posicion es inversa á la de las mismas figuras en el calcito.

Con esta concordancia ó discordancia de caractéres se halla relacionada la produccion de un asterismo igual ó desigual sobre las caras corroídas semejantes, segun han observado KOBELL y K. HAUSHOFER.

Ciertos distinguidos observadores han querido llevar al limite la importancia que tiene la forma regular de las figuras de corrosion, proponiendo la siguiente cuestion: si dichas figuras dan seguro indicio de la forma molecular de los cristales.

LEYDOLT, admitiendo desde luego que las formas de las impresiones son las mismas que las de las partes moleculares de los cristales, dice que corresponden, cual lógicamente se desprende de todas sus particularidades, á una infinidad de pequeños cuerpos elementales y regulares, por cuyo conjunto se puede considerar constituidos los cuerpos cristalinos.

K. HAUSHOFER, cuya opinion es algo distinta, dice que hay dos circunstancias que hacen dudar de la certeza y generalidad de la proposicion de LEYDOLT: la una es la existencia casi constante en las formas, de estriaciones y desigualdades regulares y ordenadas sobre sus caras; y la otra, que empleando un disolvente débil, resultan á menudo caras convexas y no planas. Todo ello indica, pues, que no se trata de la forma de las primeras individualidades cristalinas, sino más bien de sus primeros agregados, los cuales acaso reproduzcan por su mision la forma molecular, dando á conocer esta, en su consecuencia, indirectamente.

Aún este juicio de HAUSHOFER parece demasiado aventurado, porque ciertas caras no son á veces fijas y constantes en las figuras de corrosion, y hasta pueden faltar en absoluto, como se observa en el aragonito, sobre cuyas caras se producen, segun las circunstancias, formas muy diferentes.

No es posible, pues, hacer ninguna deduccion fundamental acerca de las verdaderas formas moleculares, y lo lógico será admitir sólomente el hecho innegable

de que las figuras de corrosion están en relacion íntima con dichas formas, pero que en manera alguna coinciden con ellas.

Los trabajos más detenidos y recientes practicados acerca del punto que discutimos, se deben al eminente BAUMHAUER, el cual ha hecho estudios especiales sobre varias especies, y sigue en la actualidad asiduamente este sendero de la ciencia; en su camino nos proponemos seguir sus huellas, extractando sus observaciones.

(Se continuará.)

JUAN JOSÉ MUÑOZ.
Catedrático de la Escuela de Ingenieros
de Montes.

OJEADÁ SOBRE LOS PROGRESOS DE LA FISILOGIA VEJETAL EN 1874.

POR D. MÁRCOS MICHELI.

(Conclusion) (4).

El Sr. BORSOW (2) ha estudiado algunas sustancias en ciertos vegetales particulares, tanto bajo el punto de vista de sus relaciones micro-químicas, como bajo el de su distribucion en los tejidos. Es un género de investigaciones muy interesante y uno de los mejores medios de hallar la clave del papel de estas sustancias en la economía vegetal. Las observaciones del Sr. BORSOW se han dirigido sobre las sustancias siguientes: *la asarona*, principio análogo al alcanfor que se encuentra en el parenquima de las raíces del *Asarum Europæum*; el ácido *crisofánico* repartido en los tejidos de un líquen (*Phyrcia parietina*) y que se ha hallado tambien en la raíz de ruibarbo y de ciertos rumex; *la frangulina* que se asemeja mucho al ácido *crisofánico* y se encuentra en la corteza del espino cerval (*Rhamnus frangula*); *la siringina*, principio cristalizabile, amargo, extraído de las raíces de lilas y que bien podría ser un producto de transformacion de la celulosa; *la veratrina* alcaloide estendido en la raíz del *Veratrum album*.

El Sr. PFEFFER (3) ha descubierto en pequeñas naranjas «que habian permanecido cierto tiempo en alcohol» esfero-cristales de una sustancia que ha llamado *Hesperidina* (4). Es un cuerpo no nitrogenado, cuya composicion química no está bien conocida y que se halla disuelto en los tejidos; se precipita bajo forma cristalina á la manera de la inulina de los tubérculos de dalia. La hesperidina es sobre todo abundante en los frutos; pero se encuentra tambien en las ramas hasta la altura del punto de vegetacion y en las hojas. Se puede reconocer ya su presencia en el pistilo; aumenta hasta el momento en que la naranjilla tiene unos veinte milímetros de diámetro y parece quedar desde entonces estacionaria. Los limones no la contienen. El papel fisiológico de esta sustancia es desconocido todavia. El autor cree que debe aproximarse al tanino.

(1) Véase la página 252.

(2) Beiträge zur Histochemie der Pflanzen in Botan. Zeitung, 1874, p. 17,

(3) Botanische Zeitung, 1873, núm. 34.

(4) El autor ha reproducido el nombre dado por Lebreton en otro tiempo á una sustancia análoga (Journal de Pharmacie, 1828, vol. XIV, p. 377).